

ANÁLISIS DEL MÉTODO LOCAL DISCONTINUO  
GALERKIN PARA LA ECUACIÓN DE  
FOKKER-PLANCK

ANALYSIS OF THE LOCAL DISCONTINUOUS  
GALERKIN METHOD FOR THE FOKKER-PLANCK  
EQUATION

HELEN GUILLÉN-OVIEDO\*      FILÁNDER A. SEQUEIRA†

*Received: 7 Aug 2015; Revised: 14 Apr 2016;*

*Accepted: 6 May 2016*

---

---

\*Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Campus Omar Dengo, Heredia, Costa Rica.  
E-Mail: [hellen.guillen.oviedo@una.cr](mailto:hellen.guillen.oviedo@una.cr)

†Misma dirección que/Same address as: H. Guillén. E-Mail: [filander.sequeira@una.cr](mailto:filander.sequeira@una.cr)

### Resumen

En este artículo se introduce y se analiza el método “Local Discontinuous Galerkin” (LDG) para la ecuación de Fokker-Planck con condiciones de contorno homogéneas. En particular, se emplea una formulación mixta en la cual las principales incógnitas corresponden al flujo de probabilidad y la función de densidad de probabilidad. Se aplican resultados conocidos provenientes del análisis funcional para establecer que el esquema discreto está bien puesto. Además, se proveen estimaciones de error para el método completamente-discreto, usando la iteración de Euler hacia atrás. Finalmente, se presentan ejemplos numéricos que exhiben el buen comportamiento del esquema propuesto.

**Palabras clave:** ecuación de Fokker-Planck; método de elemento finito mixto; método de Galerkin discontinuo; aproximaciones de alto orden.

### Abstract

In this paper we introduce and analyze the Local Discontinuous Galerkin (LDG) method for the Fokker-Planck equation with homogeneous boundary conditions. In particular, we employ a mixed formulation in which the main unknowns are given by the probability current and the probability density function. We apply known results from functional analysis, to establish that the discrete scheme is well-posed. In addition, error estimates are proved for the fully-discrete method using backward Euler time stepping. Finally, we provide numerical examples exhibiting the good performance of the proposed scheme.

**Keywords:** Fokker-Planck equation; mixed finite element method; discontinuous Galerkin method; high-order approximations.

**Mathematics Subject Classification:** 34F05, 65N30, 65N15.

## 1 Introducción

El propósito del presente artículo corresponde a estudiar la aplicación del método de Galerkin discontinuo (DG, por sus siglas en inglés) a la ecuación de Fokker-Planck, también conocida como la ecuación Kolmogorov hacia adelante (“forward Kolmogorov”), en dos y tres dimensiones. Dicha ecuación corresponde a una de convección-difusión proveniente de la teoría de los procesos de Markov, la cual rige la evolución en la función de probabilidad de transición de la respuesta de una amplia clase de sistemas dinámicos impulsados por el ruido Gaussiano, y a su vez, describe completamente el proceso de respuesta [18, 14]. Adicionalmente, la ecuación de Fokker-Planck es una ecuación diferencial para la función de distribución que describe el movimiento Browniano [16].

Con el fin de introducir el sistema de interés, sea  $\Omega$  un dominio poligonal acotado de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \{2, 3\}$ , con frontera  $\Gamma$ . Así, dado un vector de arrastre  $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$  y un tensor difusivo  $\mathbf{K}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , la ecuación de Fokker-Planck corresponde a buscar  $p(t, \mathbf{x})$  tal que

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu_i p) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (K_{ij} p) \quad \text{en } ]0, T[ \times \Omega, \quad (1)$$

$$p = 0 \quad \text{sobre } ]0, T[ \times \Gamma \quad \text{y} \quad p(0, \mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega,$$

donde  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^\dagger$  es un vector genérico de  $\mathbb{R}^n$  y  $T > 0$ . Bajo este contexto,  $p(t, \mathbf{x})$  corresponde a la función de densidad de probabilidad, la cual se conecta con la probabilidad de transición  $P(t + \tau, \mathbf{x} | t, \mathbf{y})$  en el siguiente sentido:

$$p(t + \tau, \mathbf{x}) = \int P(t + \tau, \mathbf{x} | t, \mathbf{y}) p(t, \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \quad \text{para } \tau \geq 0,$$

y se utiliza en la derivación de la primera ecuación de (1) (ver [16, Capítulo 4] por detalles). En particular, (1) es válida para la probabilidad condicional (ver [10]), es decir  $p(t, \mathbf{x}) = P(t, \mathbf{x} | t_0, \mathbf{x}_0)$ , para cualquier dato inicial  $(t_0, \mathbf{x}_0)$ . Además, la condición inicial natural para este problema corresponde a

$$p_0(\mathbf{x}) = P(0, \mathbf{x} | 0, \mathbf{x}_0) = \delta(x_1 - x_{01}) \cdot \delta(x_2 - x_{02}) \cdot \dots \cdot \delta(x_n - x_{0n}),$$

con  $\delta$  la función Delta de Dirac.

Por otro lado, es importante comentar que soluciones analíticas para la ecuación Fokker-Planck han sido desarrolladas sólo para un número limitado de sistemas de baja dimensión (por ejemplo [10, 15, 16, 19], así como sus referencias). Esto debido a la complejidad en el análisis que requieren ecuaciones del tipo de (1). De acuerdo a esto, se han realizado diferentes estudios de métodos numéricos para lograr aproximar la solución de esta ecuación. En particular, nos referimos a [14], donde se presentan métodos de elemento finito multi-escala para la solución de (1) en dimensiones superiores. Dicho trabajo fue parte de la motivación del presente escrito, donde la diferencia principal corresponde a que proponemos un método de elemento finito mixto discontinuo (tal y como se hace recientemente en [13] para las ecuaciones incompresibles de Euler), el cual, dentro de sus principales ventajas, busca obtener una buena aproximación del flujo de probabilidad ("probability current"), además de la función de densidad de probabilidad. Con respecto al flujo de probabilidad, el cual describe en cada tiempo el cambio de la probabilidad en  $\Omega$  (ver [16]), se resalta que el

mismo también puede interpretarse, desde un punto de vista de mecánica cuántica, como la descripción del movimiento de una partícula en  $\Omega$  (ver por ejemplo [12]).

En relación al método DG a considerar. Comentamos que en el presente escrito se tiene particular interés en emplear el método “Local Discontinuous Galerkin” (LDG), el cual fué propuesto en [8] para problemas evolutivos de convección-difusión, y analizado en [4] para un problema modelo estacionario de difusión lineal. Más aún, en [6] y [5] se presentan las técnicas para el análisis del error que se considerarán más adelante. En particular, en [6] se derivan estimaciones para la estabilidad y el error *a priori*, para las ecuaciones de convección-difusión en varias dimensiones, donde además el coeficiente de difusión puede depender del tiempo como del espacio. Por otro lado, en [5] se estudió la versión *hp* del método LDG aplicado a problemas de convección-difusión en una dimensión.

El artículo está organizado como sigue: en la Sección 2 se introduce la formulación semi-discreta resultante de la aplicación del método LDG a un sistema equivalente a (1). El método completamente-discreto asociado es presentado y analizado en la Sección 3. Para esto, se utiliza la iteración de Euler hacia atrás como técnica de discretización temporal. En esta misma sección se lleva a cabo el respectivo análisis de solubilidad y el estudio de estimaciones de error *a priori*. Luego, en la Sección 4 se describen experimentos numéricos con el propósito de validar el buen comportamiento del método LDG. Finalmente, se presentan algunas conclusiones en la Sección 5.

## 2 La formulación LDG semi-discreta

### 2.1 Preliminares

Para iniciar, damos algunas suposiciones naturales sobre los datos, las cuales serán relevantes durante el resto del artículo. Más precisamente, se asume que el campo vectorial  $\boldsymbol{\mu}$  posee componentes en  $L^\infty(\Omega)$ , mientras que la función tensorial  $\mathbf{K}$  tiene componentes en  $W^{1,\infty}(\Omega)$  y es un tensor simétrico definido positivo en  $\Omega$ . Nótese que en tal caso  $\mathbf{K}^{-1}$  existe y también es simétrico definido positivo. En particular, esto implica que existe  $\alpha_K > 0$  tal que

$$\mathbf{w} \cdot \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{w} \geq \alpha_K \|\mathbf{w}\|_{\mathbb{R}^n}^2, \quad (2)$$

para casi todo  $\mathbf{x} \in \Omega$  y para todo  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ .

Por otro lado, observe que la primera ecuación de (1) puede ser re-escrita como:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\operatorname{div}\left(\mu p - \frac{1}{2}\mathbf{div}(\mathbf{K}p)\right), \quad (3)$$

donde  $\mathbf{div}$  denota al operador divergencia usual  $\operatorname{div}$ , actuando a lo largo de cada fila del correspondiente tensor. Luego, se introduce el flujo de probabilidad ("probability current") de la forma:

$$\mathbf{u} := \mu p - \frac{1}{2}\mathbf{div}(\mathbf{K}p),$$

donde, utilizando el hecho de que  $\mathbf{div}(\mathbf{K}p) = p\mathbf{div}(\mathbf{K}) + \mathbf{K}\nabla p$ , se sigue que

$$\mathbf{u} = \left\{ \mu - \frac{1}{2}\mathbf{div}(\mathbf{K}) \right\} p - \frac{1}{2}\mathbf{K}\nabla p,$$

o bien

$$2\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u} = \mathbf{K}^{-1}\{2\mu - \mathbf{div}(\mathbf{K})\}p - \nabla p. \quad (4)$$

Ahora, en virtud de (3) y (4), podemos re-escribir el problema modelo (1) de la forma:

$$\begin{aligned} 2\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u} - p\kappa + \nabla p &= \mathbf{0} \quad \text{en } ]0, T[ \times \Omega, \\ \frac{\partial p}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{u}) &= 0 \quad \text{en } ]0, T[ \times \Omega, \end{aligned} \quad (5)$$

$$p = 0 \quad \text{sobre } ]0, T[ \times \Gamma \quad \text{y} \quad p(0, \mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega,$$

donde

$$\kappa := \mathbf{K}^{-1}\{2\mu - \mathbf{div}(\mathbf{K})\} \quad \text{en } \Omega.$$

Nótese que las componentes de  $\kappa$  pertenecen a  $L^\infty(\Omega)$ .

Es importante comentar aquí, que el buen planteamiento de una formulación continua para (5), también requiere algunas hipótesis adicionales sobre los datos  $\mathbf{K}$  y  $\mu$ . Sin embargo, dicho análisis continuo (el cual aplica técnicas usuales provenientes de la teoría de ecuaciones diferenciales parciales (ver, por ejemplo, [9])) no corresponde al principal objetivo del presente trabajo. A pesar de ello, durante el resto del artículo se supondrá la existencia de un único par  $(\mathbf{u}, p) \in \mathcal{C}(0, T; H(\operatorname{div}; \Omega)) \times \mathcal{C}(0, T; L^2(\Omega))$  solución de (5).

Finalmente, en lo que se sigue se utiliza terminología estándar de espacios de Sobolev y sus normas (ver por ejemplo [9]). Más aún, se emplea  $\mathbf{0}$  para denotar el elemento nulo en general (ya sea para un vector, tensor, funcional u operador), y se usa  $C$  para denotar constantes genéricas independientes de los parámetros de discretización, la cual puede tomar diferentes valores en diferentes lugares.

## 2.2 El esquema LDG

Se consideran primero algunas notaciones preliminares. Sea  $\mathcal{T}_h$  una triangulación regular y cuasi-uniforme de  $\Omega$  sin la presencia de nodos colgantes, compuesta además sólo de triángulos (si  $n = 2$ ) o de tetraedros (si  $n = 3$ ). Más aún, sea  $\mathcal{E}_h$  el conjunto de aristas/caras  $F$  de  $\mathcal{T}_h$  y denote por  $\mathcal{E}_h^i$  y  $\mathcal{E}_h^\partial$  al conjunto de caras interiores y de frontera, respectivamente, de  $\mathcal{E}_h$ . Además, considere  $\partial\mathcal{T}_h := \cup \{\partial T : T \in \mathcal{T}_h\}$ .

Seguidamente, se denota por  $(\cdot, \cdot)_U$  al producto interno usual en  $L^2$  y  $[L^2]^n$  sobre el dominio  $U \subset \mathbb{R}^n$ , y similarmente sea  $\langle \cdot, \cdot \rangle_G$  el producto interno en  $L^2$  y  $[L^2]^n$  sobre la superficie  $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ . Entonces, se introducen los nuevos productos internos:

$$(\cdot, \cdot)_{\mathcal{T}_h} := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} (\cdot, \cdot)_T \quad \text{y} \quad \langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} := \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \langle \cdot, \cdot \rangle_{\partial T}.$$

Por otro lado, sean  $\mathbf{n}^+$  y  $\mathbf{n}^-$  los vectores normales unitarios exteriores sobre las fronteras de dos elementos adyacentes  $T^+$  y  $T^-$ , respectivamente. Se utiliza  $(\mathbf{v}^\pm, q^\pm)$  para denotar las trazas de  $(\mathbf{v}, q)$  sobre  $F := \overline{T^+} \cap \overline{T^-}$  desde el interior de  $T^\pm$ , donde  $\mathbf{v}$  y  $q$  son funciones vectoriales y escalares, respectivamente. Entonces, se definen los promedios  $\{\{\cdot\}\}$  y saltos  $[\![\cdot]\!]$  para  $F \in \mathcal{E}_h^i$ , de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \{\{\mathbf{v}\}\} &:= \frac{1}{2} (\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-), & \{\{q\}\} &:= \frac{1}{2} (q^+ + q^-), \\ [\![\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}]\!] &:= \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n}^+ + \mathbf{v}^- \cdot \mathbf{n}^-, & [\![qn]\!] &:= q^+ \mathbf{n}^+ + q^- \mathbf{n}^-. \end{aligned}$$

Ahora, dado  $k \geq 0$  y  $T \in \mathcal{T}_h$ , considere  $\mathbf{P}_k(T)$  al espacio de polinomios de grado total a lo más  $k$  definido sobre  $T$ . Entonces, los espacios discontinuos de elemento finito vienen dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_h &:= \{ \mathbf{v} \in [L^2(\Omega)]^n : \mathbf{v}|_T \in [\mathbf{P}_{k+1}(T)]^n \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \} \quad \text{y} \\ Q_h &:= \{ q \in L^2(\Omega) : q|_T \in \mathbf{P}_k(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h \}. \end{aligned} \quad (6)$$

La necesidad de considerar  $\mathbf{V}_h$  con un grado mayor al considerado en  $Q_h$  será aclarada más adelante (ver Sección 3.2). Luego, el método LDG es definido como: Hallar  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ , tal que

$$\begin{aligned} 2(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (p_h \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (p_h, \operatorname{div}_h(\mathbf{v}_h))_{\mathcal{T}_h} \\ + \langle \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}, \widehat{p}_h \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} &= 0, \\ (\partial_t p_h, q_h)_{\mathcal{T}_h} - (\mathbf{u}_h, \nabla_h q_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{n}, q_h \rangle_{\partial\mathcal{T}_h} &= 0, \quad (7) \\ p_h(0, \mathbf{x}) &= p_{h,0}(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega, \end{aligned}$$

para todo  $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ , donde  $\text{div}_h(\cdot)$  y  $\nabla_h(\cdot)$  corresponden a la divergencia y gradiente a pedazos, respectivamente. Además,  $\widehat{\mathbf{u}}_h$  y  $\widehat{p}_h$  son los flujos numéricos, es decir, son aproximaciones a las trazas de  $\mathbf{u}_h$  y  $p_h$  sobre  $\mathcal{E}_h$ , respectivamente. En particular, siguiendo [1, 2, 4], se considera

$$\widehat{\mathbf{u}}_h := \begin{cases} \{\{\mathbf{u}_h\}\} & \text{en } \mathcal{E}_h^i, \\ \mathbf{u}_h & \text{en } \mathcal{E}_h^\partial, \end{cases} \quad \text{y} \quad \widehat{p}_h := \begin{cases} \{\{p_h\}\} + \tau h_F^{-1} \llbracket \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket & \text{en } \mathcal{E}_h^i, \\ 0 & \text{en } \mathcal{E}_h^\partial, \end{cases}$$

con  $\tau > 0$  un parámetro de estabilización y  $h_F$  el diámetro de  $F \in \mathcal{E}_h$ . Es importante resaltar que la forma en el término de estabilización, dentro de la definición de  $\widehat{p}_h$ , ha sido previamente considerada y analizada en [1, 2, 4]. Nótese además, que la condición de Dirichlet cero de  $p$  sobre  $\Gamma$ , ha sido impuesta en la definición de  $\widehat{p}_h$ .

Con ayuda de los flujos numéricos previos, en conjunto con las identidades:

$$\langle \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}, \widehat{p}_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} = \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} \langle \llbracket \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket, \widehat{p}_h \rangle_F + \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\partial} \langle \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n}, \widehat{p}_h \rangle_F$$

y

$$\begin{aligned} -(\mathbf{u}_h, \nabla_h q_h)_{\mathcal{T}_h} + \langle \widehat{\mathbf{u}}_h \cdot \mathbf{n}, q_h \rangle_{\partial \mathcal{T}_h} &= (q_h, \text{div}_h(\mathbf{u}_h))_{\mathcal{T}_h} \\ &- \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} \langle \llbracket \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket, \{\{q_h\}\} \rangle_F + \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} \langle \widehat{\mathbf{u}}_h - \{\{\mathbf{u}_h\}\}, \llbracket q_h \mathbf{n} \rrbracket \rangle_F \\ &+ \sum_{F \in \mathcal{E}_h^\partial} \langle (\widehat{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{n}, q_h \rangle_F, \end{aligned}$$

se re-escribe el esquema de Galerkin (7) de la forma: Hallar  $(\mathbf{u}_h, p_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ , tal que

$$\begin{aligned} &2(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + \tau \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} h_F^{-1} \langle \llbracket \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket, \llbracket \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket \rangle_F \\ &- (p_h \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (p_h, \text{div}_h(\mathbf{v}_h))_{\mathcal{T}_h} + \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} \langle \llbracket \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket, \{\{p_h\}\} \rangle_F = 0, \\ &-(q_h, \text{div}_h(\mathbf{u}_h))_{\mathcal{T}_h} + \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} \langle \llbracket \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket, \{\{q_h\}\} \rangle_F - (\partial_t p_h, q_h)_{\mathcal{T}_h} = 0, \quad (8) \end{aligned}$$

$$p_h(0, \mathbf{x}) = p_{h,0}(\mathbf{x}) \quad \text{en } \Omega,$$

para todo  $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ .

Para concluir esta sección, completamos la definición del esquema LDG (8), al definir  $p_{h,0}$  como alguna proyección de  $p_0$  sobre  $Q_h$ . En particular, sea  $\mathcal{P}_h^k : L^2(\Omega) \rightarrow Q_h$  el operador de proyección  $L^2(\Omega)$ -ortogonal, el cual, para cada  $T \in \mathcal{T}_h$ , satisface la propiedad de aproximación:

$$\|\mathcal{P}_h^k(q) - q\|_{L^2(T)} + h_T \|\nabla\{\mathcal{P}_h^k(q) - q\}\|_{L^2(T)} \leq C h_T^\ell |q|_{H^\ell(T)}, \quad (9)$$

para todo  $q \in H^\ell(T)$ , con  $\ell \in [0, k + 1]$ . Así, es natural considerar de ahora en adelante  $p_{h,0} := \mathcal{P}_h^k(p_0)$ .

### 3 La formulación LDG completamente-discreta

En esta sección se define una versión completamente-discreta del esquema (8). Para ello, se discretiza la variable temporal por medio del método de Euler hacia atrás ("backward Euler"), definido como:

$$\frac{\partial p}{\partial t}(t_{m+1}, \cdot) = \frac{p(t_{m+1}, \cdot) - p(t_m, \cdot)}{\Delta t} + E_0(t_{m+1}), \quad (10)$$

donde  $\Delta t > 0$  es el paso en tiempo,  $t_m := m\Delta t$  con  $0 \leq m \leq M$  (en otras palabras  $\Delta t = T/M$ ), y  $E_0(t_{m+1})$  es el error de truncamiento, el cual satisface

$$\|E_0(t_{m+1})\|_{L^2(\Omega)} \leq C \int_{t_m}^{t_{m+1}} \|\partial_{tt}p(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} ds. \quad (11)$$

Por simplicidad en el análisis siguiente se denota como  $p^m := p(t_m, \cdot)$  al valor exacto, mientras que  $p_h^m := p_h(t_m, \cdot)$  denota la aproximación. Una convención similar es usada para la variable  $\mathbf{u}$ .

De acuerdo a la notación previa, al aplicar (10) en el esquema semi-discreto (8), se introduce el esquema LDG completamente-discreto: Hallar  $(\mathbf{u}_h^{m+1}, p_h^{m+1}) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ , tal que

$$\begin{aligned} & 2(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_h^{m+1}, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + \tau \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} h_F^{-1} \langle \llbracket \mathbf{u}_h^{m+1} \cdot \mathbf{n} \rrbracket, \llbracket \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket \rangle_F \\ & - (p_h^{m+1}, \operatorname{div}_h(\mathbf{v}_h))_{\mathcal{T}_h} + \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} \langle \llbracket \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket, \{\!\!\{ p_h^{m+1} \}\!\!\} \rangle_F = (p_h^m \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h}, \\ & - (q_h, \operatorname{div}_h(\mathbf{u}_h^{m+1}))_{\mathcal{T}_h} + \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} \langle \llbracket \mathbf{u}_h^{m+1} \cdot \mathbf{n} \rrbracket, \{\!\!\{ q_h \}\!\!\} \rangle_F \\ & - \frac{1}{\Delta t} (p_h^{m+1}, q_h)_{\mathcal{T}_h} = -\frac{1}{\Delta t} (p_h^m, q_h)_{\mathcal{T}_h}, \end{aligned}$$



para todo  $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ . Nótese que hemos usado la aproximación previa  $p_h^m$  sobre el término  $(p_h \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h}$  para así introducir simetría en el esquema LDG (sólo por eficiencia computacional).

Luego, se observa que el esquema anterior puede ser escrito de la forma: Hallar  $(\mathbf{u}_h^{m+1}, p_h^{m+1}) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ , tal que

$$\begin{cases} a(\mathbf{u}_h^{m+1}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h^{m+1}) = f^m(\mathbf{v}_h) & \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h, \\ b(\mathbf{u}_h^{m+1}, q_h) - s(p_h^{m+1}, q_h) = g^m(q_h) & \forall q_h \in Q_h, \end{cases} \quad (12)$$

donde las formas bilineales  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $b(\cdot, \cdot)$  y  $s(\cdot, \cdot)$ , están definidas por:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) &:= 2(\mathbf{K}^{-1} \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + \tau \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} h_F^{-1} \langle \llbracket \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket, \llbracket \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket \rangle_F, \\ b(\mathbf{v}_h, q_h) &:= -(q_h, \operatorname{div}_h(\mathbf{v}_h))_{\mathcal{T}_h} + \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} \langle \llbracket \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket, \llbracket q_h \rrbracket \rangle_F, \\ s(p_h, q_h) &:= \frac{1}{\Delta t} (p_h, q_h)_{\mathcal{T}_h}, \end{aligned}$$

para todo  $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$  y  $p_h, q_h \in Q_h$ ; mientras que los funcionales  $f^m : \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbb{R}$  y  $g^m : Q_h \rightarrow \mathbb{R}$  vienen dados por:

$$f^m(\mathbf{v}_h) := (p_h^m \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} \quad \text{y} \quad g^m(q_h) := -\frac{1}{\Delta t} (p_h^m, q_h)_{\mathcal{T}_h},$$

para todo  $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ .

### 3.1 Solubilidad única y estabilidad

A continuación se establece la solubilidad única del problema lineal (12), además de su estabilidad. Para ello, considere la forma bilineal auxiliar  $\mathcal{A} : \mathcal{H}_h \rightarrow \mathcal{H}_h$  definida por

$$\mathcal{A}((\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h)) := a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, p_h) - b(\mathbf{u}_h, q_h) + s(p_h, q_h),$$

para todo  $(\mathbf{u}_h, p_h), (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathcal{H}_h := \mathbf{V}_h \times Q_h$ ; así como el funcional  $\mathcal{F} : \mathcal{H}_h \rightarrow \mathbb{R}$  dado por:

$$\mathcal{F}(\mathbf{v}_h, q_h) := f^m(\mathbf{v}_h) - g^m(q_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathcal{H}_h.$$

Con ayuda de la notación previa, es claro que el sistema (12) puede ser reescrito de la forma: Hallar  $(\mathbf{u}_h^{m+1}, p_h^{m+1}) \in \mathcal{H}_h$  tal que

$$\mathcal{A}((\mathbf{u}_h^{m+1}, p_h^{m+1}), (\mathbf{v}_h, q_h)) = \mathcal{F}(\mathbf{v}_h, q_h) \quad \forall (\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathcal{H}_h. \quad (13)$$

En virtud de lo anterior, se sigue que probar la existencia de una única solución  $(\mathbf{u}_h^{m+1}, p_h^{m+1}) \in \mathcal{H}_h$  de (12), es equivalente a probar que (13) admite una única solución en  $\mathcal{H}_h$ . Dicha solubilidad única, se establece en el siguiente resultado.

**Teorema 3.1.** *Para cada entero  $0 \leq m \leq M - 1$ , el esquema (12) admite una única solución  $(\mathbf{u}_h^{m+1}, p_h^{m+1}) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ . Además, existe  $C > 0$ , independiente de  $h$  y  $\Delta t$ , tal que:*

$$\|p_h^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \left(1 + \frac{C \|\boldsymbol{\kappa}\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{2\alpha_K}\right)^{1/2} \|p_h^m\|_{L^2(\Omega)}, \quad (14)$$

con  $\alpha_K > 0$  introducida en (2).

**Demostración.** Dado que  $\mathcal{A} : \mathcal{H}_h \rightarrow \mathcal{H}_h$  es una forma bilineal y  $\mathcal{H}_h$  es de dimensión finita, entonces la existencia de  $(\mathbf{u}_h^{m+1}, p_h^{m+1}) \in \mathcal{H}_h$  solución de (13), se sigue de su unicidad. Así, es suficiente probar que cuando el lado derecho de (13) es cero, es decir cuando  $\mathcal{F} = 0$ , entonces se tiene que  $\mathbf{u}_h^{m+1} = \mathbf{0}$  y  $p_h^{m+1} = 0$ . En efecto, tomando  $\mathbf{v}_h := \mathbf{u}_h^{m+1}$  y  $q_h := p_h^{m+1}$  en (13), se cumple

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{A}((\mathbf{u}_h^{m+1}, p_h^{m+1}), (\mathbf{u}_h^{m+1}, p_h^{m+1})) \\ &= a(\mathbf{u}_h^{m+1}, \mathbf{u}_h^{m+1}) + s(p_h^{m+1}, p_h^{m+1}) \\ &= 2(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}_h^{m+1}, \mathbf{u}_h^{m+1})_{\mathcal{T}_h} + \tau \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} h_F^{-1} \|[\![\mathbf{u}_h^{m+1} \cdot \mathbf{n}]\!] \|_{L^2(F)}^2 \\ &\quad + \frac{1}{\Delta t} \|p_h^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Luego, utilizando que  $\tau > 0$  y (2), la expresión anterior se reduce a:

$$2\alpha_K \|\mathbf{u}_h^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\Delta t} \|p_h^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0,$$

donde, dado que  $\alpha_K, \frac{1}{\Delta t} > 0$ , necesariamente se tiene que  $\mathbf{u}_h^{m+1} = \mathbf{0}$  y  $p_h^{m+1} = 0$ . Por lo tanto, (12) admite una única solución en  $\mathbf{V}_h \times Q_h$ .

El siguiente objetivo corresponde a establecer la desigualdad (14), para lo cual se procede análogamente a lo anterior. En efecto, al tomar nuevamente  $\mathbf{v}_h := \mathbf{u}_h^{m+1}$  y  $q_h := p_h^{m+1}$  en (13), pero con  $\mathcal{F}$  no nulo, es fácil ver que

$$\begin{aligned} 2\alpha_K \|\mathbf{u}_h^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\Delta t} \|p_h^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \mathcal{F}(\mathbf{u}_h^{m+1}, p_h^{m+1}) \\ &= f^m(\mathbf{u}_h^{m+1}) - g^m(p_h^{m+1}) = (p_h^m \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{u}_h^{m+1})_{\mathcal{T}_h} + \frac{1}{\Delta t} (p_h^m, p_h^{m+1})_{\mathcal{T}_h} \\ &\leq \|\boldsymbol{\kappa}\|_{L^\infty(\Omega)} \|p_h^m\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{u}_h^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{\Delta t} \|p_h^m\|_{L^2(\Omega)} \|p_h^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Ahora, aplicando la desigualdad de Young, se sigue que

$$\begin{aligned} 2\alpha_K \|\mathbf{u}_h^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\Delta t} \|p_h^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \frac{\|\boldsymbol{\kappa}\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{2\delta_1} \|p_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &+ \frac{\delta_1}{2} \|\mathbf{u}_h^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{(2\delta_2)\Delta t} \|p_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{\delta_2}{2\Delta t} \|p_h^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

para todo  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , de donde se deduce que

$$\begin{aligned} \left(2\alpha_K - \frac{\delta_1}{2}\right) \|\mathbf{u}_h^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\Delta t} \left(1 - \frac{\delta_2}{2}\right) \|p_h^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\delta_2\Delta t} + \frac{\|\boldsymbol{\kappa}\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{\delta_1}\right) \|p_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall \delta_1, \delta_2 > 0. \end{aligned}$$

En particular, considerando  $\delta_1 := 2\alpha_K$  y  $\delta_2 := 1$ , se obtiene que

$$2\alpha_K \|\mathbf{u}_h^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{\Delta t} \|p_h^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\Delta t} \left(1 + \frac{\Delta t \|\boldsymbol{\kappa}\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{2\alpha_K}\right) \|p_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

y como  $\Delta t \leq C$ , se concluye que:

$$\frac{1}{\Delta t} \|p_h^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{\Delta t} \left(1 + \frac{C \|\boldsymbol{\kappa}\|_{L^\infty(\Omega)}^2}{2\alpha_K}\right) \|p_h^m\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

lo que completa la demostración.  $\square$

Es importante comentar que la desigualdad (14) en el teorema previo, afirma que el esquema LDG (12) es estable.

### 3.2 Estimaciones de error a-priori

El siguiente objetivo es derivar las estimaciones de error *a priori* para el esquema (12). Para iniciar, recordamos de la Sección 2 que dado que  $\nabla p = -2\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u} + p\boldsymbol{\kappa} \in [L^2(\Omega)]^n$  entonces se tiene que en realidad  $p(t, \cdot) \in H_0^1(\Omega)$  para todo  $0 < t \leq T$ . De esta forma, en lo que sigue se considera  $(\mathbf{u}, p)$  como la solución continua de (5), y se supone que la misma pertenece al espacio  $\mathcal{C}(0, T; H(\text{div}; \Omega)) \times \mathcal{C}(0, T; H_0^1(\Omega))$ . Bajo dichas suposiciones de regularidad, es fácil ver que el método LDG (12) es consistente. Seguidamente, y gracias a la desigualdad triangular, solamente es necesario proveer estimaciones para los errores de aproximación denotados como:  $\mathbf{e}_\mathbf{u}^m := \mathbf{\Pi}_h^{\text{BDM}}(\mathbf{u}^m) - \mathbf{u}_h^m$  y

$\mathbf{e}_p^m := \mathcal{P}_h^k(p^m) - p_h^m$ , donde  $\mathbf{\Pi}_h^{\text{BDM}} : [H^1(\Omega)]^n \rightarrow \mathbf{V}_h \cap H(\text{div}; \Omega)$  es el operador de proyección BDM (ver por ejemplo [3]), el cual satisface la propiedad de aproximación:

$$\|\mathbf{\Pi}_h^{\text{BDM}}(\mathbf{v}) - \mathbf{v}\|_{L^2(T)} \leq C h_T^\ell |\mathbf{v}|_{H^\ell(T)} \quad \forall \mathbf{v} \in [H^\ell(T)]^n, \quad (15)$$

$\forall T \in \mathcal{T}_h$ , con  $\ell \in [1, k+2]$ . Además, recordamos que  $\mathcal{P}_h^k : L^2(\Omega) \rightarrow Q_h$  es la proyección  $L^2(\Omega)$ -ortogonal, introducida al final de la Sección 2.

Por otro lado, utilizando la consistencia del método LDG propuesto y (10), se tiene que la solución exacta  $(\mathbf{u}, p)$  de (5), satisface (12) en el sentido

$$\begin{aligned} & 2(\mathbf{K}^{-1}\mathbf{u}^{m+1}, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + \tau \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} h_F^{-1} \langle \llbracket \mathbf{u}^{m+1} \cdot \mathbf{n} \rrbracket, \llbracket \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket \rangle_F \\ & - (p^{m+1} \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} - (p^{m+1}, \text{div}_h(\mathbf{v}_h))_{\mathcal{T}_h} + \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} \langle \llbracket \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket, \{\!\!\{ p^{m+1} \}\!\!\} \rangle_F = 0, \\ & - (q_h, \text{div}_h(\mathbf{u}^{m+1}))_{\mathcal{T}_h} + \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} \langle \llbracket \mathbf{u}^{m+1} \cdot \mathbf{n} \rrbracket, \{\!\!\{ q_h \}\!\!\} \rangle_F \\ & - \frac{1}{\Delta t} (p^{m+1}, q_h)_{\mathcal{T}_h} = -\frac{1}{\Delta t} (p^m, q_h)_{\mathcal{T}_h} + (E_0(t_{m+1}), q_h)_{\mathcal{T}_h}, \end{aligned}$$

para todo  $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ . De esta forma, restando al sistema anterior las ecuaciones en (12) e introduciendo los operadores  $\mathbf{\Pi}_h^{\text{BDM}}$  y  $\mathcal{P}_h^k$ , se obtienen, luego de algunas manipulaciones algebraicas, las ecuaciones de error:

$$\begin{aligned} & a(\mathbf{e}_u^{m+1}, \mathbf{v}_h) + b(\mathbf{v}_h, \mathbf{e}_p^{m+1}) = 2(\mathbf{K}^{-1}\boldsymbol{\delta}_u^{m+1}, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} \\ & + \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} \langle \llbracket \mathbf{v}_h \cdot \mathbf{n} \rrbracket, \{\!\!\{ \boldsymbol{\delta}_p^{m+1} \}\!\!\} \rangle_F + (\mathbf{e}_p^m \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} \\ & - (\boldsymbol{\delta}_p^m \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h} + ((p^{m+1} - p^m) \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{v}_h)_{\mathcal{T}_h}, \quad (16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & b(\mathbf{e}_u^{m+1}, q_h) - s(\mathbf{e}_p^{m+1}, q_h) = -\frac{1}{\Delta t} (\boldsymbol{\delta}_p^{m+1}, q_h)_{\mathcal{T}_h} \\ & - \frac{1}{\Delta t} (\mathbf{e}_p^m, q_h)_{\mathcal{T}_h} + \frac{1}{\Delta t} (\boldsymbol{\delta}_p^m, q_h)_{\mathcal{T}_h} + (E_0(t_{m+1}), q_h)_{\mathcal{T}_h}, \quad (17) \end{aligned}$$

para todo  $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ , donde  $\boldsymbol{\delta}_u^m := \mathbf{\Pi}_h^{\text{BDM}}(\mathbf{u}^m) - \mathbf{u}^m$  y  $\boldsymbol{\delta}_p^m := \mathcal{P}_h^k(p^m) - p^m$ . Además, en el cálculo previo se utiliza el hecho de que  $\llbracket \boldsymbol{\delta}_u^{m+1} \cdot \mathbf{n} \rrbracket = 0$  en  $\mathcal{E}_h^i$ , en conjunto con las expresiones

$$(\boldsymbol{\delta}_p^{m+1}, \text{div}_h(\mathbf{v}_h))_{\mathcal{T}_h} = 0 \quad \text{y} \quad (q_h, \text{div}_h(\boldsymbol{\delta}_u^{m+1}))_{\mathcal{T}_h} = 0,$$

para todo  $(\mathbf{v}_h, q_h) \in \mathbf{V}_h \times Q_h$ . En particular, es debido a la segunda igualdad previa que se considera  $k+1$  en la definición del espacio  $\mathbf{V}_h$  y solamente  $k$  para el espacio  $Q_h$  (ver (6)).

El siguiente paso consiste en establecer una estimación de error para la función de densidad de probabilidad.

**Teorema 3.2.** *Suponga que  $\tau \geq \frac{1}{\Delta t}$ ,  $\|\kappa\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Delta t$  y que existe  $c_0 > 0$  independiente de  $h$  y  $\Delta t$ , tal que  $h \leq c_0 \Delta t$ . Entonces, existe  $C > 0$ , independiente de  $h$  y  $\Delta t$ , tal que*

$$\|p^m - p_h^m\|_{L^2(\Omega)} \leq C \exp(CT) (h^{k+1} + \Delta t) A(u, p),$$

para todo  $0 \leq m \leq M$ , con

$$\begin{aligned} A(u, p) := & (1 + T) \|p_0\|_{H^{k+1}(\Omega)} + c_0 T \|\mathbf{K}^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^{k+2}(\Omega))} \\ & + T^{3/2} \|\partial_t p\|_{L^2(0,T;H^{k+1}(\Omega))} + T^{1/2} \|\partial_t p\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \\ & + T^{1/2} \|\partial_{tt} p\|_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

**Demostración.** Tomando  $\mathbf{v}_h := \mathbf{e}_u^{m+1}$  y  $q_h := \mathbf{e}_p^{m+1}$  en las ecuaciones de error (16)-(17), restando ambas y multiplicando por  $\Delta t$ , es fácil ver que

$$\begin{aligned} & 2\Delta t (\mathbf{K}^{-1} \mathbf{e}_u^{m+1}, \mathbf{e}_u^{m+1})_{\mathcal{T}_h} + \tau \Delta t \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} h_F^{-1} \|[\![ \mathbf{e}_u^{m+1} \cdot \mathbf{n} ]\!] \|_{L^2(F)}^2 + \|\mathbf{e}_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & = 2\Delta t (\mathbf{K}^{-1} \boldsymbol{\delta}_u^{m+1}, \mathbf{e}_u^{m+1})_{\mathcal{T}_h} + \Delta t (\{\mathbf{e}_p^m - \boldsymbol{\delta}_p^m + (p^{m+1} - p^m)\} \kappa, \mathbf{e}_u^{m+1})_{\mathcal{T}_h} \\ & \quad + \Delta t \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} \langle [\![ \mathbf{e}_u^{m+1} \cdot \mathbf{n} ]\!] , \{\!\{ \boldsymbol{\delta}_p^{m+1} \}\!\} \rangle_F + (\boldsymbol{\delta}_p^{m+1}, \mathbf{e}_p^{m+1})_{\mathcal{T}_h} \\ & \quad + (\mathbf{e}_p^m - \boldsymbol{\delta}_p^m, \mathbf{e}_p^{m+1})_{\mathcal{T}_h} - \Delta t (E_0(t_{m+1}), \mathbf{e}_p^{m+1})_{\mathcal{T}_h}. \end{aligned} \tag{18}$$

En particular, observe que:

$$\begin{aligned} & \Delta t \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} \langle [\![ \mathbf{e}_u^{m+1} \cdot \mathbf{n} ]\!] , \{\!\{ \boldsymbol{\delta}_p^{m+1} \}\!\} \rangle_F \\ & \leq \Delta t \left( \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} h_F \| \{\!\{ \boldsymbol{\delta}_p^{m+1} \}\!\} \|_{L^2(F)}^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} h_F^{-1} \| [\![ \mathbf{e}_u^{m+1} \cdot \mathbf{n} ]\!] \|_{L^2(F)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Además, dado  $q \in H^1(\mathcal{T}_h) := \prod_{T \in \mathcal{T}_h} H^1(T)$ , al aplicar la desigualdad de traza discreta (ver por ejemplo [11]), se sabe que

$$\begin{aligned} \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} h_F \|\llbracket q \rrbracket\|_{L^2(F)}^2 &\leq \frac{1}{2} \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} h_F \left( \|q^+\|_{L^2(F)}^2 + \|q^-\|_{L^2(F)}^2 \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \partial T} h_F \|q\|_{L^2(F)}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} C_{\text{tr}} \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{F \in \partial T} h_F \left\{ h_T^{-1} \|q\|_{L^2(T)}^2 + h_T \|\nabla q\|_{L^2(T)}^2 \right\} \\ &\leq \widehat{C} \left\{ \|q\|_{L^2(\Omega)}^2 + h^2 \|\nabla_h q\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}, \end{aligned}$$

donde al considerar  $q := \delta_p^{m+1}$ , se deduce que

$$\begin{aligned} \Delta t \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} \langle \llbracket \mathbf{e}_u^{m+1} \cdot \mathbf{n} \rrbracket, \llbracket \delta_p^{m+1} \rrbracket \rangle_F &\leq C \Delta t \left\{ \|\delta_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + h \|\nabla_h \delta_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} \right\} \left( \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} h_F^{-1} \|\llbracket \mathbf{e}_u^{m+1} \cdot \mathbf{n} \rrbracket\|_{L^2(F)}^2 \right)^{1/2}. \quad (19) \end{aligned}$$

Así, volviendo a (18) y utilizando (2), (19), la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el hecho de que  $1 \leq \tau \Delta t$ , se sigue que

$$\begin{aligned} &2\alpha_K \Delta t \|\mathbf{e}_u^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} h_F^{-1} \|\llbracket \mathbf{e}_u^{m+1} \cdot \mathbf{n} \rrbracket\|_{L^2(F)}^2 + \|\mathbf{e}_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \left\{ (2\alpha_K^{-1} \Delta t)^{1/2} \|\mathbf{K}^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\delta_u^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad + (\alpha_K^{-1} \Delta t / 2)^{1/2} \|\boldsymbol{\kappa}\|_{L^\infty(\Omega)} \left( \|\mathbf{e}_p^m\|_{L^2(\Omega)} + \|\delta_p^m\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\quad + \|p^{m+1} - p^m\|_{L^2(\Omega)} \left. \right\} + C \Delta t \left( \|\delta_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla_h \delta_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\quad + \|\delta_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{e}_p^m\|_{L^2(\Omega)} + \|\delta_p^m\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + \Delta t \|E_0(t_{m+1})\|_{L^2(\Omega)} \left. \right\} \left\{ 2\alpha_K \Delta t \|\mathbf{e}_u^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} h_F^{-1} \|\llbracket \mathbf{e}_u^{m+1} \cdot \mathbf{n} \rrbracket\|_{L^2(F)}^2 + \|\mathbf{e}_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned}$$

de donde es claro que

$$\begin{aligned} & \left\{ 2\alpha_K \Delta t \|\mathbf{e}_u^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{F \in \mathcal{E}_h^i} h_F^{-1} \|[\![\mathbf{e}_u^{m+1} \cdot \mathbf{n}]\!] \|_{L^2(F)}^2 + \|\mathbf{e}_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}^{1/2} \\ & \leq (2\alpha_K^{-1} \Delta t)^{1/2} \|\mathbf{K}^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\boldsymbol{\delta}_u^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} \\ & \quad + (\alpha_K^{-1} \Delta t / 2)^{1/2} \|\boldsymbol{\kappa}\|_{L^\infty(\Omega)} \left( \|\mathbf{e}_p^m\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\delta}_p^m\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ & \quad \left. + \|p^{m+1} - p^m\|_{L^2(\Omega)} \right) + C \Delta t \left( \|\boldsymbol{\delta}_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla_h \boldsymbol{\delta}_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ & \quad + \|\boldsymbol{\delta}_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{e}_p^m\|_{L^2(\Omega)} + \|\boldsymbol{\delta}_p^m\|_{L^2(\Omega)} + \Delta t \|E_0(t_{m+1})\|_{L^2(\Omega)}. \quad (20) \end{aligned}$$

En particular de (20), nótese que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} & \leq (1 + C \|\boldsymbol{\kappa}\|_{L^\infty(\Omega)}) \|\mathbf{e}_p^m\|_{L^2(\Omega)} + C \|\mathbf{K}^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\boldsymbol{\delta}_u^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} \\ & \quad + C \Delta t \left( \|\boldsymbol{\delta}_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla_h \boldsymbol{\delta}_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} \right) + (1 + C \|\boldsymbol{\kappa}\|_{L^\infty(\Omega)}) \|\boldsymbol{\delta}_p^m\|_{L^2(\Omega)} \\ & \quad + C \|\boldsymbol{\kappa}\|_{L^\infty(\Omega)} \|p^{m+1} - p^m\|_{L^2(\Omega)} + \Delta t \|E_0(t_{m+1})\|_{L^2(\Omega)}. \quad (21) \end{aligned}$$

Luego, recordando que

$$p^{m+1}(\mathbf{x}) = p_0(\mathbf{x}) + \int_0^{t_{m+1}} \partial_t p(s, \mathbf{x}) \, ds,$$

se tiene de (9) que

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\delta}_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla_h \boldsymbol{\delta}_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} & \leq C h^{k+1} |p^{m+1}|_{H^{k+1}(\Omega)} \\ & \leq C h^{k+1} \left\{ \|p_0\|_{H^{k+1}(\Omega)} + \int_0^{t_{m+1}} \|\partial_t p(s, \cdot)\|_{H^{k+1}(\Omega)} \, ds \right\}. \end{aligned}$$

De manera análoga

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\delta}_p^m\|_{L^2(\Omega)} & \leq C h^{k+1} \left\{ \|p_0\|_{H^{k+1}(\Omega)} + \int_0^{t_m} \|\partial_t p(s, \cdot)\|_{H^{k+1}(\Omega)} \, ds \right\} \\ & \leq C h^{k+1} \left\{ \|p_0\|_{H^{k+1}(\Omega)} + \int_0^{t_{m+1}} \|\partial_t p(s, \cdot)\|_{H^{k+1}(\Omega)} \, ds \right\}. \end{aligned}$$

Más aún, dado que

$$(p^{m+1} - p^m)(\mathbf{x}) = \int_{t_m}^{t_{m+1}} \partial_t p(s, \mathbf{x}) \, ds, \quad (22)$$

es claro que

$$\|p^{m+1} - p^m\|_{L^2(\Omega)} \leq \int_{t_m}^{t_{m+1}} \|\partial_t p(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \, ds.$$

Finalmente, de (15), nótese que:

$$\|\delta_{\mathbf{u}}^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq C h^{k+2} |\mathbf{u}^{m+1}|_{H^{k+2}(\Omega)} \leq C h^{k+2} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^{k+2}(\Omega))}.$$

Por otro lado, dado que  $\|\kappa\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Delta t$ , es claro que  $(1 + C\|\kappa\|_{L^\infty(\Omega)}) \leq (1 + C\Delta t)$ . De esta forma, volviendo a (21) y aplicando las desigualdades previas junto con (11) y las suposiciones de que  $\|\kappa\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Delta t$  y  $h \leq c_0 \Delta t$ , se concluye que

$$\|\mathbf{e}_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq (1 + C\Delta t) \|\mathbf{e}_p^m\|_{L^2(\Omega)} + C(h^{k+1} + \Delta t)B(u, p, m), \quad (23)$$

donde

$$\begin{aligned} B(u, p, m) &:= \Delta t(c_0 \|\mathbf{K}^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)}) \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^{k+2}(\Omega))} + \Delta t \|p_0\|_{H^{k+1}(\Omega)} \\ &\quad + \Delta t \int_0^{t_{m+1}} \|\partial_t p(s, \cdot)\|_{H^{k+1}(\Omega)} \, ds \\ &\quad + \int_{t_m}^{t_{m+1}} \|\partial_t p(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \, ds + \int_{t_m}^{t_{m+1}} \|\partial_{tt} p(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \, ds. \end{aligned}$$

Ahora, de la relación de recurrencia (23), se obtiene

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_p^m\|_{L^2(\Omega)} &\leq (1 + C\Delta t)^m \|\mathbf{e}_p^0\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + C(h^{k+1} + \Delta t) \sum_{i=0}^{m-1} (1 + C\Delta t)^i B(u, p, m - 1 - i) \\ &\leq C(1 + C\Delta t)^m (h^{k+1} + \Delta t) \left\{ \|p_0\|_{H^{k+1}(\Omega)} + \sum_{i=0}^{m-1} B(u, m - 1 - i) \right\} \\ &\leq C \left(1 + C \frac{T}{m}\right)^m (h^{k+1} + \Delta t) \left\{ \|p_0\|_{H^{k+1}(\Omega)} + \sum_{i=0}^{m-1} B(u, m - 1 - i) \right\}. \end{aligned}$$

Finalmente, nótese que

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{m-1} B(u, m - 1 - i) &\leq t_m(c_0 \|\mathbf{K}^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)}) \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(0,T;H^{k+2}(\Omega))} \\ &\quad + t_m \|p_0\|_{H^{k+1}(\Omega)} + t_m \int_0^{t_m} \|\partial_t p(s, \cdot)\|_{H^{k+1}(\Omega)} \, ds \\ &\quad + \int_0^{t_m} \|\partial_t p(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \, ds + \int_0^{t_m} \|\partial_{tt} p(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \, ds, \end{aligned}$$



con lo cual, se concluye la demostración luego de aplicar la desigualdad de Cauchy-Schwarz y el hecho de que  $\|p^m - p_h^m\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{e}_p^m\|_{L^2(\Omega)} + \|\delta_p^m\|_{L^2(\Omega)}$ .  $\square$

En el siguiente resultado, se establece la estimación de error para el flujo de probabilidad.

**Teorema 3.3.** *Considere las mismas hipótesis del Teorema 3.2, donde el entero  $k \geq 0$  representa el grado polinomial utilizado en la definición de los subespacios de dimensión finita (ver (6)). Entonces, existe  $C > 0$ , independiente de  $h$  y  $\Delta t$ , tal que para todo  $1 \leq m \leq M$  se cumple la siguiente estimación*

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^m - \mathbf{u}_h^m\|_{L^2(\Omega)} &\leq C c_0 \exp(CT) \left( h^k + \frac{\Delta t}{h} \right) A(u, p) \\ &\quad + C (h^{k+1} + \Delta t) D_m(u, p), \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} D_m(u, p) &:= \|p_0\|_{H^{k+1}(\Omega)} + t_m^{1/2} \|\partial_t p\|_{L^2(0, t_m; H^{k+1}(\Omega))} \\ &\quad + (h + c_0 \|\mathbf{K}^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)}) \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(t_{m-1}, t_m; H^{k+2}(\Omega))} \\ &\quad + \|\partial_t p\|_{L^\infty(t_{m-1}, t_m; L^2(\Omega))} + \|\partial_{tt} p\|_{L^\infty(t_{m-1}, t_m; L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

**Demostración.** De (20), nótese que se cumple que

$$\begin{aligned} (2\alpha_K \Delta t)^{1/2} \|\mathbf{e}_u^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} &\leq (1 + C \|\kappa\|_{L^\infty(\Omega)}) \left\{ \|\mathbf{e}_p^m\|_{L^2(\Omega)} + \|\delta_p^m\|_{L^2(\Omega)} \right\} \\ &\quad + C \|\mathbf{K}^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} \|\delta_u^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} + C \Delta t \left\{ \|\delta_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla_h \delta_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + \|E_0(t_{m+1})\|_{L^2(\Omega)} \right\} + C \|\kappa\|_{L^\infty(\Omega)} \|p^{m+1} - p^m\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

o bien, dado que  $\Delta t \leq C$  implica  $\Delta t \leq (C\Delta t)^{1/2}$ , entonces de lo anterior se obtiene

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_u^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \left( \frac{1 + \|\kappa\|_{L^\infty(\Omega)}}{\Delta t} \right) \left\{ \|\mathbf{e}_p^m\|_{L^2(\Omega)} + \|\delta_p^m\|_{L^2(\Omega)} \right\} \\ &\quad + C \frac{h}{\Delta t} \|\mathbf{K}^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} h^{-1} \|\delta_u^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} + C \left\{ \|\delta_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad \left. + h \|\nabla_h \delta_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} + \|E_0(t_{m+1})\|_{L^2(\Omega)} \right\} \\ &\quad + C \frac{\|\kappa\|_{L^\infty(\Omega)}}{\Delta t} \|p^{m+1} - p^m\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Así, como  $\|\kappa\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Delta t$  y  $h \leq c_0 \Delta t$ , se deduce que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_u^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \frac{c_0}{h} \left\{ \|\mathbf{e}_p^m\|_{L^2(\Omega)} + \|\delta_p^m\|_{L^2(\Omega)} \right\} + C \left\{ \|\delta_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad + h \|\nabla_h \delta_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} + c_0 \|\mathbf{K}^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)} h^{-1} \|\delta_u^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad \left. + \|p^{m+1} - p^m\|_{L^2(\Omega)} + \|E_0(t_{m+1})\|_{L^2(\Omega)} \right\}, \end{aligned}$$

de donde, dado que  $\|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}_h^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{e}_u^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\delta_u^{m+1}\|_{L^2(\Omega)}$  y (15), se concluye

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^{m+1} - \mathbf{u}_h^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \frac{c_0}{h} \left\{ \|\mathbf{e}_p^m\|_{L^2(\Omega)} + \|\delta_p^m\|_{L^2(\Omega)} \right\} \\ &\quad + C \left\{ \|\delta_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla_h \delta_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} \right. \\ &\quad + (h + c_0 \|\mathbf{K}^{-1}\|_{L^\infty(\Omega)}) h^{-1} \|\delta_u^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} + \|p^{m+1} - p^m\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad \left. + \|E_0(t_{m+1})\|_{L^2(\Omega)} \right\}. \end{aligned} \quad (24)$$

Por otro lado, de la demostración del Teorema 3.2, se sabe que

$$\begin{aligned} &\|\delta_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla_h \delta_p^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} + \|\delta_p^m\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C h^{k+1} \left\{ \|p_0\|_{H^{k+1}(\Omega)} + \int_0^{t_{m+1}} \|\partial_t p(s, \cdot)\|_{H^{k+1}(\Omega)} \, ds \right\} \\ &\leq C h^{k+1} \left\{ \|p_0\|_{H^{k+1}(\Omega)} + t_{m+1}^{1/2} \|\partial_t p\|_{L^2(0, t_{m+1}; H^{k+1}(\Omega))} \right\}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} h^{-1} \|\delta_u^{m+1}\|_{L^2(\Omega)} &\leq C h^{k+1} |\mathbf{u}^{m+1}|_{H^{k+2}(\Omega)} \\ &\leq C h^{k+1} \|\mathbf{u}\|_{L^\infty(t_m, t_{m+1}; H^{k+2}(\Omega))}. \end{aligned}$$

Más aún, usando (22) y (11), se deduce, respectivamente

$$\begin{aligned} \|p^{m+1} - p^m\|_{L^2(\Omega)} &\leq \int_{t_m}^{t_{m+1}} \|\partial_t p(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \, ds \\ &\leq \Delta t \|\partial_t p\|_{L^\infty(t_m, t_{m+1}; L^2(\Omega))}, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \|E_0(t_{m+1})\|_{L^2(\Omega)} &\leq C \int_{t_m}^{t_{m+1}} \|\partial_{tt} p(s, \cdot)\|_{L^2(\Omega)} \, ds \\ &\leq C \Delta t \|\partial_{tt} p\|_{L^\infty(t_m, t_{m+1}; L^2(\Omega))}. \end{aligned}$$

Finalmente, se completa la demostración al utilizar el Teorema 3.2 y las cuatro estimaciones previas en (24).  $\square$

## 4 Resultados numéricos

En esta sección se presentan algunos resultados numéricos para el problema (5) en dos dimensiones (es decir, cuando  $n = 2$ ), los cuales ilustran el comportamiento del esquema completamente-discreto (12) analizado en la Sección 3. En todos los cálculos se consideran mallas uniformes las cuales corresponden a refinamientos cartesianos (en cuadrados con lados paralelos a los ejes coordenados) del dominio y luego dividiendo cada cuadrado en dos triángulos congruentes. Además, se consideran los grados polinomiales  $k \in \{0, 1, 2\}$  y en virtud del Teorema 3.2, tomamos  $\tau := (\Delta t)^{-1} = M/T$  en cada ejemplo. Los resultados numéricos presentados a continuación fueron obtenidos usando un código MATLAB, donde los operadores discretos fueron determinados tal y como se hace en [17].

El **Ejemplo 1** tiene por objetivo estudiar los órdenes de convergencia del esquema (12), para lo cual se considera  $\Omega := [0, 1]^2$ , así como la solución exacta:

$$p(t, \mathbf{x}) = e^{-2t} \sin(2\pi x_1) \sin(2\pi x_2),$$

para todo  $\mathbf{x} := (x_1, x_2)^\top \in \Omega$  y  $t \in (0, 1)$ . Aquí, se aproximan  $p$  y  $\mathbf{u}$  en  $t = 1$ , cuando  $\Delta t = 1/200 = 0.005$  ( $T = 1$  y  $M = 200$ ). Más aún,  $\mathbf{K}(\mathbf{x}) := \mathbf{I}$ , con  $\mathbf{I}$  la matriz identidad de  $2 \times 2$  y  $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) := \frac{1}{100} (x_1, -x_2)^\top$ , lo cual establece que  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) := 2\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) = \frac{1}{50} (x_1, -x_2)^\top$ . Nótese que  $p|_\Gamma = 0$ , pero no satisface la segunda ecuación en (5). Por lo tanto, se introduce la función fuente forzada  $f \in L^2(\Omega)$  en dicha ecuación. En otras palabras, se reemplaza la segunda ecuación de (5) por  $\partial_t p + \operatorname{div}(\mathbf{u}) = f$ , con lo que se re-define el funcional  $g^m : Q_h \rightarrow \mathbb{R}$  en (12) de la forma:

$$g^m(q_h) := -\frac{1}{\Delta t} (p_h^m, q_h)_{\mathcal{T}_h} - (f(t_{m+1}, \cdot), q_h)_{\mathcal{T}_h} \quad \forall q_h \in Q_h,$$

donde todo el análisis efectuado en la Sección 3 puede ser extendido de forma casi inmediata.

En la Tabla 1 se presentan los resultados obtenidos para el esquema (12) (con fuente forzada) para el Ejemplo 1. Se puede apreciar que los órdenes de convergencia para la variable  $p$ ,  $\mathcal{O}(h^{k+1})$ , corresponden a los predichos en el Teorema 3.2. Con respecto a la variable  $\mathbf{u}$ , los órdenes satisfacen el Teorema 3.3, sin embargo, estos son superiores a los predichos aproximadamente por dos órdenes de  $h$ . En relación a esto, comentamos que en [7] se estableció un comportamiento de superconvergencia para el método LDG cuando se emplean mallas estructuras, como es en nuestro caso. Sin embargo, resultados numéricos preliminares utilizando mallas no-estructuradas reflejaron que este fenómeno de superconvergencia se mantiene para el Ejemplo 1. Finalmente, en las

**Tabla 1:** Historial de convergencia para el Ejemplo 1 (con  $t = 1$ ).

$k$	$h$	# Grados de libertad	$\ (\mathbf{u} - \mathbf{u}_h)(t, \cdot)\ _{L^2(\Omega)}$		$\ (p - p_h)(t, \cdot)\ _{L^2(\Omega)}$	
			error	orden	error	orden
0	0.1179	2016	1.21e-2	--	1.19e-2	--
	0.0589	8064	3.03e-3	1.99	5.92e-3	1.01
	0.0393	18144	1.32e-3	2.05	3.94e-3	1.00
	0.0295	32256	7.17e-4	2.12	2.95e-3	1.00
1	0.1179	4320	5.96e-4	--	1.19e-3	--
	0.0589	17280	1.06e-4	2.49	2.99e-4	1.99
	0.0393	38880	3.66e-5	2.63	1.34e-4	1.98
	0.0295	69120	1.68e-5	2.70	7.69e-5	1.93
2	0.1179	7488	8.64e-5	--	8.96e-5	--
	0.0589	29952	7.07e-6	3.61	1.12e-5	3.00
	0.0393	67392	1.46e-6	3.88	3.34e-6	2.99
	0.0295	119808	5.04e-7	3.71	1.43e-6	2.95

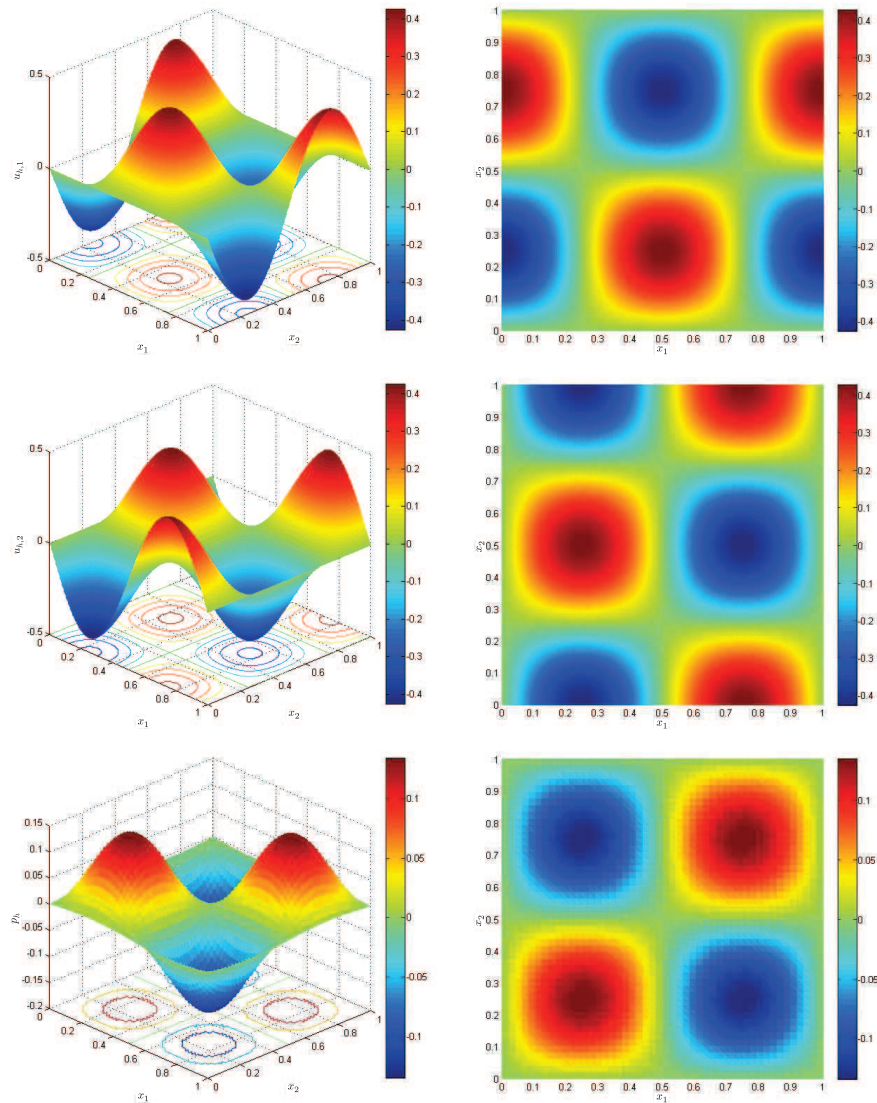
Figuras 1 y 2 se presentan las gráficas de las soluciones aproximadas para la cuarta malla cuando  $t = 1$  y  $k \in \{0, 2\}$ . Esto con el fin de apreciar la resolución obtenida por el esquema (12).

Para el **Ejemplo 2**, se considera el problema prueba de Molenkamp ("Molenkamp test"), el cual consiste en girar una distribución Gaussiana [20]. El objetivo es comprobar el rendimiento en el término de convección del método (12) propuesto. En virtud de esto,  $\Omega := [-1, 1]^2$  y la condición inicial es una distribución Gaussiana definida por:

$$p_0(\mathbf{x}) = 0.01^{4r^2},$$

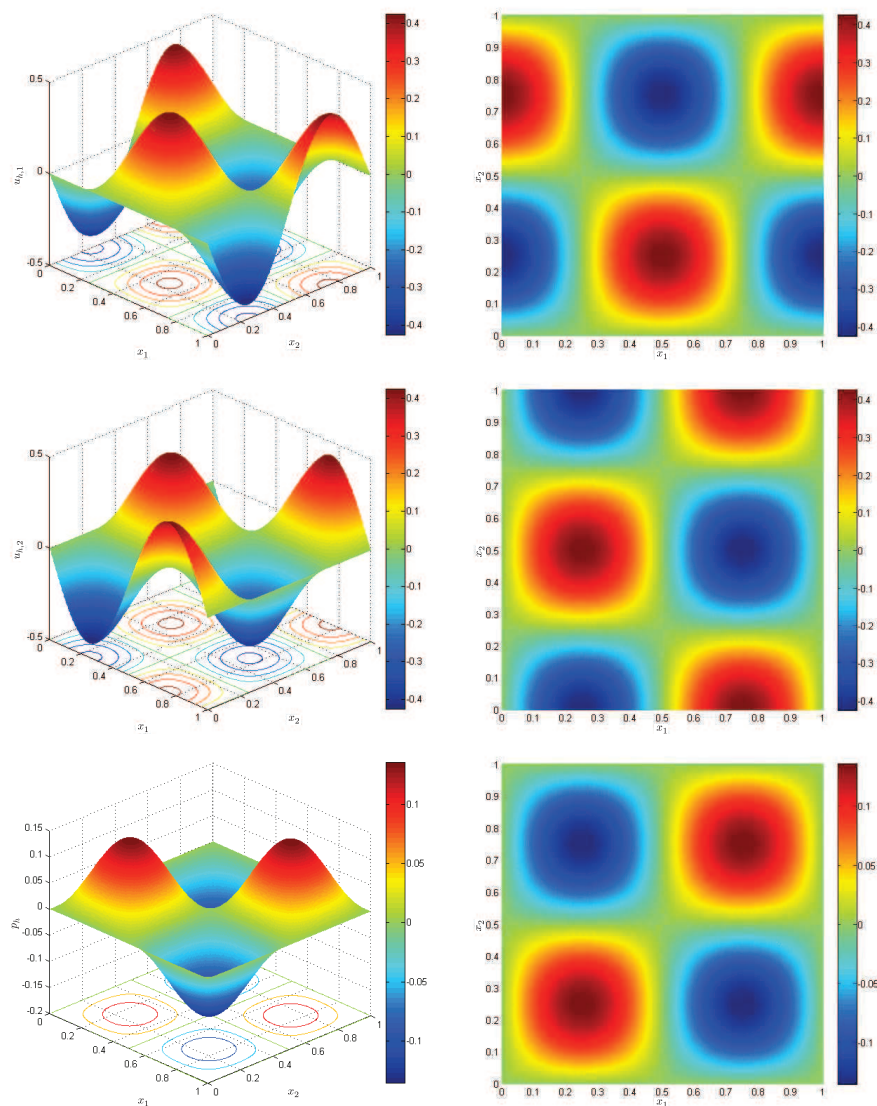
donde  $r$  corresponde a la distancia desde el punto  $(-\frac{1}{2}, 0)$ , es decir,  $r := \sqrt{(x_1 + 0.5)^2 + x_2^2}$ , para todo  $\mathbf{x} := (x_1, x_2)^t \in \Omega$ . Además,  $\mathbf{K}(\mathbf{x}) := \frac{1}{2} \mathbf{I}$  y  $\boldsymbol{\mu}(\mathbf{x}) := 2\pi(-x_2, x_1)^t$ , lo que implica que  $\boldsymbol{\kappa}(\mathbf{x}) := 8\pi(-x_2, x_1)^t$ . Para este ejemplo, no se utiliza una función fuente forzada (es decir  $f = 0$ ). Más aún, dado que para  $t = 1$  se espera una revolución completa de la distribución, se toma  $T = 1$  y  $M = 250$ , de donde se obtiene  $\Delta t = 1/250 = 0.004$ . Aquí se utiliza una única malla, cuyas características más relevantes corresponden a:  $h \approx 0.0544$ , número de elementos: 5408 y grados de libertad 37856 ( $k = 0$ ), 81120 ( $k = 1$ ) y 140608 ( $k = 2$ ).

En las Figuras 3–5 se presentan 100 contornos de las aproximaciones obtenidas para el Ejemplo 2, en los tiempos  $t \in \{0.2, 0.6, 1\}$ , utilizando la malla descrita previamente, así como los grados polinomiales  $k \in \{0, 1, 2\}$ . Se puede



**Figura 1:** Ejemplo 1, aproximación  $k = 0$  con la cuarta malla, para  $u_{h,1}$  (superior),  $u_{h,2}$  (medio) y  $p_h$  (inferior), cuando  $t = 1$ .

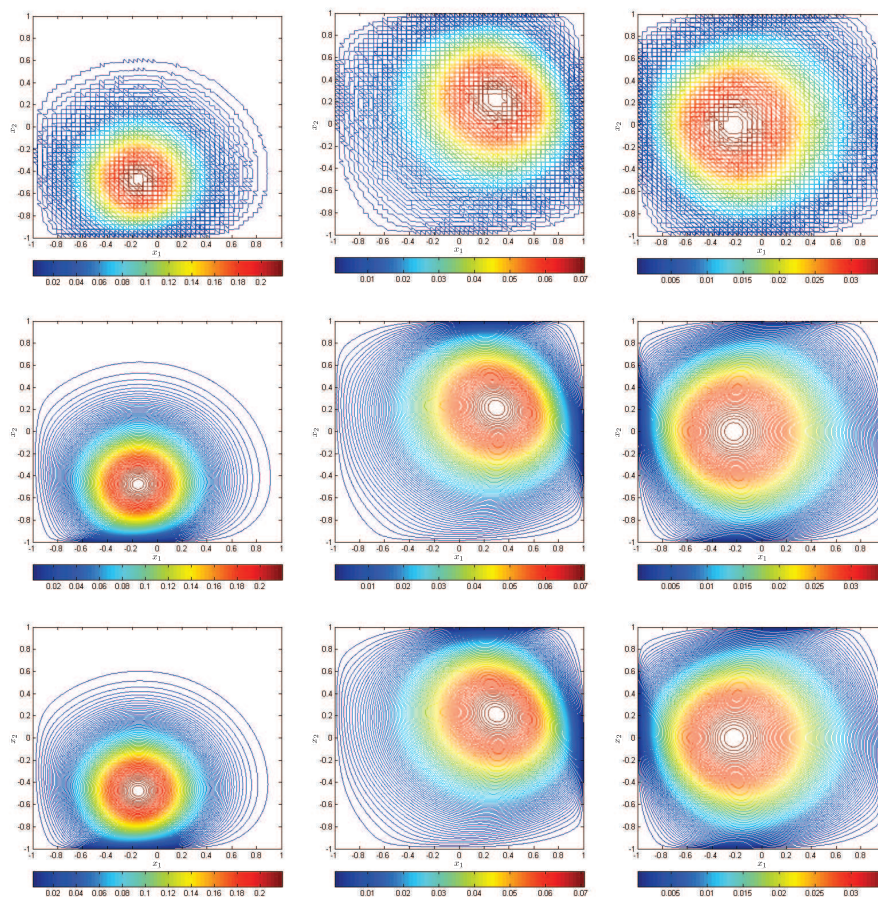
apreciar que el método mejora su resolución al aumentar el grado polinomial (lo mismo ocurre al incrementar el número de elementos), lo que sugiere una correcta aproximación en el término convectivo.



**Figura 2:** Ejemplo 1, aproximación  $k = 2$  con la cuarta malla, para  $u_{h,1}$  (superior),  $u_{h,2}$  (medio) y  $p_h$  (inferior), cuando  $t = 1$ .

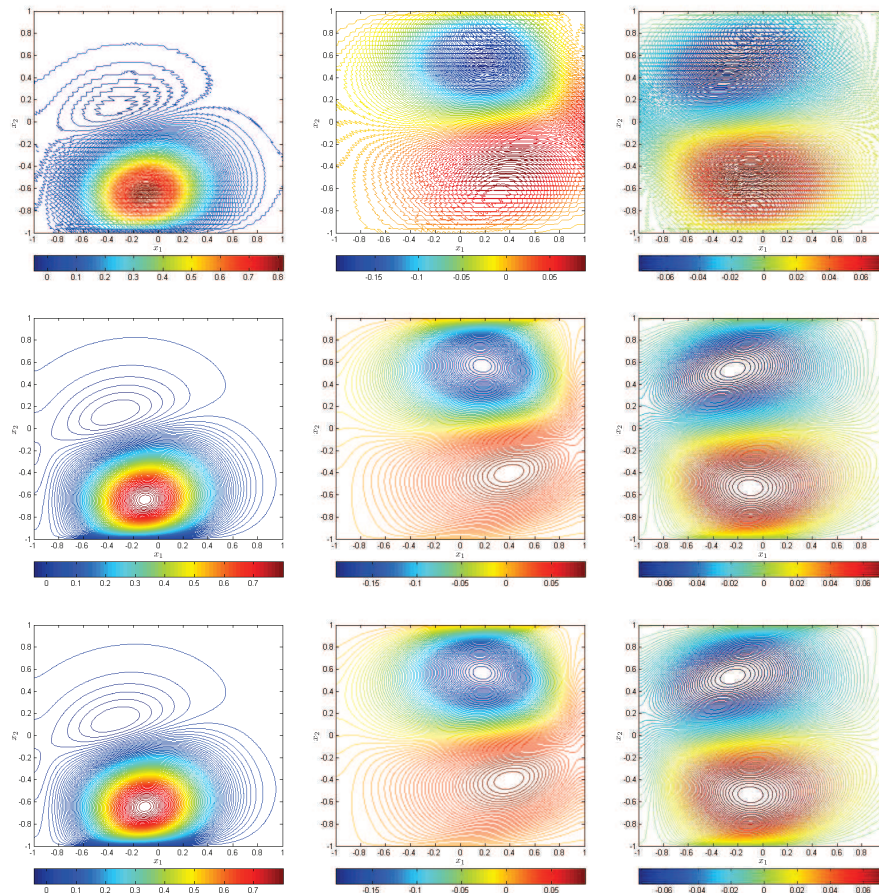
## 5 Conclusiones y direcciones futuras

En este artículo se ha estudiado el método LDG aplicado a la ecuación de Fokker-Planck en dos y tres dimensiones. Se prueba la solubilidad única del esquema



**Figura 3:** Ejemplo 2, contornos de  $p_h$  utilizando  $k \in \{0, 1, 2\}$  (filas), en los tiempos (columnas)  $t = 0.2$ ,  $t = 0.6$  y  $t = 1$ .

completamente-discreto, utilizando el método de Euler hacia atrás. Más aún, se probaron estimados de error *a priori*, sin embargo, experimentos numéricos (Ejemplo 1) sugieren que el análisis propuesto no es preciso en el caso de la variable vectorial  $\mathbf{u}$  correspondiente al flujo de probabilidad, la cual muestra orden superior en dos potencias de  $h$ . Por otro lado, los resultados numéricos también apuntan a que la condición sobre los datos (específicamente:  $\|\kappa\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \Delta t$ ), requerida en el Teorema 3.2, corresponde a una suposición técnica para llevar a cabo el análisis, pero bien debe ser posible prescindir de ella mediante un enfoque distinto.



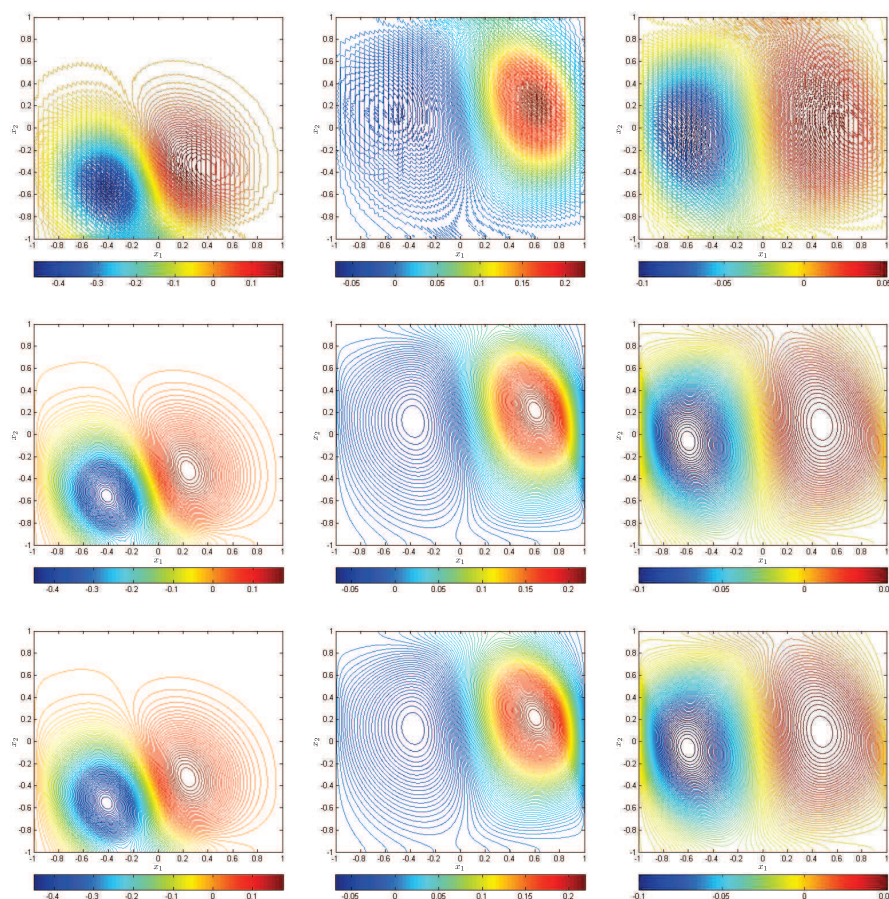
**Figura 4:** Ejemplo 2, contornos de  $u_{h,1}$  utilizando  $k \in \{0, 1, 2\}$  (filas), en los tiempos (columnas)  $t = 0.2$ ,  $t = 0.6$  y  $t = 1$ .

Con respecto a trabajos futuros, en particular es de interés de los autores el estudio de discretizaciones de alto orden en la variable temporal, así como la aplicación de métodos de Galerkin discontinuo hibridizado (HDG, por sus siglas en inglés).

### Agradecimientos

Los autores agradecen a los revisores anónimos por sus valiosas sugerencias y comentarios que mejoraron considerablemente la calidad de este manuscrito.





**Figura 5:** Ejemplo 2, contornos de  $u_{h,2}$  utilizando  $k \in \{0, 1, 2\}$  (filas), en los tiempos (columnas)  $t = 0.2$ ,  $t = 0.6$  y  $t = 1$ .

## Referencias

- [1] Arnold, D.N. (1982) “An interior penalty finite element method with discontinuous elements”, *SIAM J. Numer. Anal.* **19**(4): 742–760.
- [2] Arnold, D.N.; Brezzi, F.; Cockburn, B.; Marini, L.D. (2002) “Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems”, *SIAM J. Numer. Anal.* **39**(5): 1749–1779.
- [3] Boffi, D.; Brezzi, F.; Fortin, M. (2013) *Mixed Finite Element Methods and Applications*. Springer Series in Computational Mathematics, Springer, Heidelberg.

- [4] Castillo, P.; Cockburn, B.; Perugia, I.; Schötzau, D. (2000) “An a priori error analysis of the local discontinuous Galerkin method for elliptic problems”, *SIAM J. Numer. Anal.* **38**(5): 1676–1706.
- [5] Castillo, P.; Cockburn, B.; Schötzau, D.; Schwab, Ch. (2002) “Optimal a priori error estimates for the  $hp$ -version of the local discontinuous Galerkin method for convection-diffusion problems”, *Math. Comp.* **71**(238): 455–478.
- [6] Cockburn, B.; Dawson, C. (2000) “Some extensions of the local discontinuous Galerkin method for convection diffusion equations in multidimensions”, in: J. Whiteman (Ed.) *Conference on the Mathematics of Finite Elements and Applications: MAFELAP X*, Elsevier: 225–238.
- [7] Cockburn, B.; Kanschat, G.; Perugia, I.; Schötzau, D. (2001) “Superconvergence of the local discontinuous Galerkin method for elliptic problems on Cartesian grids”, *SIAM J. Numer. Anal.* **39**(1): 264–285.
- [8] Cockburn, B.; Shu, C.W. (1998) “The Local Discontinuous Galerkin Method for time-dependent convection-diffusion systems”, *SIAM J. Numer. Anal.* **35**(6): 264–285.
- [9] Evans, L.C. (2010) *Partial Differential Equations*, Second Edition. American Mathematical Society, Providence RI, United States.
- [10] Gardiner, C.W. (1985) *Handbook of Stochastic Methods: for Physics, Chemistry and Natural Sciences*, Second Edition. Springer Series in Synergetics, Springer-Verlag, Berlin.
- [11] Gatica, G.N. (2014) *A Simple Introduction to the Mixed Finite Element Method. Theory and Applications*. SpringerBriefs in Mathematics, Springer Cham Heidelberg.
- [12] Griffiths, D.J. (2005) *Introduction to Quantum Mechanics*, Second Edition. Pearson Prentice Hall.
- [13] Guzmán, J.; Sequeira, F.A.; Shu, C.-W. (2015) “H(div) conforming and DG methods for incompressible Euler’s equations”, Preprint 2015-19, Centro de Investigación en Ingeniería Matemática (CI<sup>2</sup>MA), Universidad de Concepción, Chile.
- [14] Masud, A.; Bergman, L.A. (2005) “Application of multi-scale finite element methods to the solution of the Fokker-Planck equation”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **194**(12-16): 1513–1526.

- [15] Ortiz, H.H.; Jiménez, F.N.; Posso, A.E. (2015) "Some exact solutions for a unidimensional Fokker-Planck equation by using Lie symmetries", *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **22**(1): 1–20.
- [16] Risken, H. (1996) *The Fokker-Planck Equation: Methods of Solution and Applications*, Second Edition. Springer Series in Synergetics, Springer-Verlag, Berlin.
- [17] Sequeira, F.A.; Castillo, P.E. (2012) "Implementación del método LDG para mallas no estructuradas en 3D", *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **19**(2): 141–156.
- [18] Soong, T.T. (1973) *Random Differential Equations in Science and Engineering*. Academic Press, New York.
- [19] Ünal, G.; Sun, J.-Q. (2008) "New exact solutions to the Fokker-Planck-Kolmogorov equation", *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **13**(10): 2051–2059.
- [20] Vreugdenhil, C.B.; Koren, B. (1993) *Numerical Methods for Advection-Diffusion Problems*. Notes on Numerical Fluid Mechanics Vol. 45, Braunschweig.

