

SEMIRETÍCULOS Y OBJETOS K-FINITOS

SEMILATTICES AND K-FINITE OBJECTS

OSVALDO ACUÑA-ORTEGA*

*Received: 10/Sep/2015; Revised: 9/Aug/2016;
Accepted: 7/Oct/2016*

Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones is licensed under a Creative Commons
Reconocimiento-NoComercial-Compartirigual 4.0 International License.
Creado a partir de la obra en <http://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/matematica>



*CIMPA, Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica. E-Mail:
maritzaavendanorivera@hotmail.es

Resumen

Se prueba que si X es un objeto de un topos elemental entonces las propiedades siguientes son equivalentes: (a) X es K -finito, (b) para todo semirretículo con uniones binarias B , la diagonal $B \rightarrow B^X$ tiene un adjunto izquierdo.

Palabras clave: topos; objetos k -finitos; semirretículos; decidibilidad.

Abstract

We prove that for $X \in |E|$, E elementary topos, the following properties are equivalent: (a) X is K -finite, (b) for every upper semilattice B , the diagonal $B \rightarrow B^X$ has a left adjoint.

Keywords: topoi; k -finite objects; semilattice; decidability.

Mathematics Subject Classification: 03G30, 18B25.

1 Introducción

Sea E un topos elemental arbitrario. Sea (B, \leq) un objeto parcialmente ordenado, B es completo si $\downarrow \text{seg}_B : B \rightarrow \Omega^B$ tal que $\models \downarrow \text{seg}_B(b) = \{x/x \leq b\}$ tiene un adjunto izquierdo $\text{sup}_B : \Omega^B \rightarrow B$. Si (B, \leq) es un objeto parcialmente ordenado, $F : X \rightarrow \Omega^B$ se dice ser dirigido si:

- (a) Existe $\beta : Y \rightarrow X$ sobreyectiva y $b : Y \rightarrow B$ tal que $b \in \beta \circ F$.
- (b) Para toda $\alpha : Z \rightarrow X$ y todo par $b_1, b_2 : Z \rightarrow B$ tal que $b_1 \in \alpha \circ F$ y $b_2 \in \alpha \circ F$ existe $\beta_1 : Z_1 \rightarrow Z$ sobreyectiva y $b_3 : Z_1 \rightarrow B$ tal que $b_3 \in \beta_1 \circ \alpha \circ F$ y $\beta_1 \circ b_i \leq b_3$, para $i = 1, 2$.

Si B es completo, defina $S(B)$ como el objeto de los elementos finitos de B tal que

$$\{b \in B / \forall F \in \Omega^B (F \text{ es dirigido} \wedge b \leq \sup_B(F) \Rightarrow \exists x \in B (x \in F \wedge b \leq x))\}$$

Denote por S_B la inclusión de $S(B)$ en Ω^B . Decimos que $b : X \rightarrow B$ es finito si b se factoriza a través de S_B . Para todo $X \in |E|$, Ω^X es un objeto completo, ordenado, con $U_x : \Omega^{\Omega^X} \rightarrow X$ el adjunto izquierdo de $\downarrow \text{seg}_{\Omega^X}$, donde U_X es definido por:

$$\models U_X(F) = \{x \in X / \exists u \in \Omega^X (u \in F \wedge x \in u)\}.$$

Definición 1 *Un semiretículo con uniones binarias, en un topos elemental E es un objeto $B \in |E|$ parcialmente ordenado con un orden parcial $\leq \subseteq B \times B$ tal que B posee dos operaciones $0 : 1 \rightarrow B$ y $v : B \times B \rightarrow B$, con $\omega_B : B \rightarrow 1$, el único morfismo de $B \rightarrow 1$ siendo adjunto derecho de $0 : 1 \rightarrow B$ y $\Delta_B : B \rightarrow B \times B$ la diagonal de B tal que es adjunto derecho de $v : B \times B \rightarrow B$.*

Nota. Si B es un semiretículo completo, entonces $S(B)$ es un semiretículo con uniones binarias de B .

Sea A un objeto de E , denote por $K(A)$ el más pequeño subobjeto de Ω^A que contiene a $\{\}_A : A \rightarrow \Omega^A$ y a $\lceil \phi_A \rceil : 1 \rightarrow \Omega^A$ y es cerrado bajo uniones binarias. A es K -finito si $\text{true}_A : 1 \rightarrow \Omega^A$ se factoriza a través de $K(A)$.

Nota. Si A es un objeto de E entonces $S(\Omega^A) = K(A)$.

Definición 2 *Un objeto B de un topos elemental y $\leq \subseteq B \times B$ tal que (B, \leq) es un objeto ordenado. Decimos que (B, \leq) es retículo algebraico si (B, \leq) es un orden completo tal que el siguiente diagrama conmuta:*

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega^B & \xrightarrow{\Omega^{S_B}} & \Omega^{S(B)} & \xrightarrow{\exists S_B} & \Omega^B \\
 \downarrow \text{seg}_B \uparrow & & & & \downarrow \text{seg}_B \uparrow \\
 B & \xrightarrow{id_B} & B & & B
 \end{array}$$

Internamente esto se expresa como

$$\models \forall b \in B, b = \sup_B \{a/a \in S(B) \wedge a \leq b\}.$$

Para todo $X \in |E|$, Ω^X es un retículo algebraico ya que $\{\}_X : X \rightarrow \Omega^X$ está contenido en $S(\Omega^X) = K(X)$, y $\models Z \in \Omega^X, Z = U_X \{\{x\}/x \in Z\}$.

Si V es cualquier semiretículo con uniones binarias en un topos elemental E , denote por $P(V)$ al subobjeto de

$$\{V' \in \Omega^V / V' \text{ es un ideal de } V\} \rightarrow \Omega^V.$$

La fórmula “ V' es un ideal de V ” resulta ser:

$$\forall v' \in V, \forall v \in V ((v' \in V' \wedge v \leq v' \Rightarrow v \in V') \wedge (v \in V' \wedge v' \in V' \Rightarrow v \vee v' \in V')).$$

El siguiente Teorema es un resultado de la teoría de retículos probado por Birkhoff [3] y Nachbin [4] y elevado a la teoría de topos.

Teorema 1 (i) Si V es un semiréticulado con uniones binarias en un topos elemental E , $P(V)$ es un retículo algebraico y $S(P(V)) = V$.

(ii) Cualquier retículo algebraico a en E es isomorfo a $P(V)$ con V un semiréticulado con uniones en E .

Proposición 2 Sea B un objeto completo, ordenado, en un topos E , entonces existe un único morfismo $\mu_{S(B)} : K(S(B)) \rightarrow S(B)$, tal que el siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccccc}
 \Omega^{S(B)} & \xrightarrow{\exists S(B)} & \Omega^B & \xrightarrow{\text{sup}_B} & B \\
 \uparrow K_{S(B)} & & & & \uparrow S_B \\
 K(S(B)) & \xrightarrow{\mu_{S(B)}} & S(B) & &
 \end{array}$$

La prueba de esta proposición aparece en [1] (Corolario 1.8).

Proposición 3 Si X es K -finito, entonces la fila imagen $Im : B^X \rightarrow \Omega^B$ se factoriza a través de $K(B)$.

Prueba. Sea

$$L_X = \{b \in \Omega^X / \forall R \in \Omega^{X \times B} (R \text{ es funcional} \wedge \text{dom}(R) = b \Rightarrow \text{codom}(R) \in K(B))\}$$

(i) $\{\}_X : X \rightarrow \Omega^X$ se factoriza a través de L_X .
 $\models a \in X \wedge R \text{ es un funcional} \wedge \text{dom}(R) = \{a\}$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow \exists! b \in B, (a, b) \in R \\
 &\Rightarrow \exists b \in B, \{(a, b)\} = R \\
 &\Rightarrow \text{codom}(R) = \{b\} \wedge \text{dom}(R) = \{a\} \\
 &\Rightarrow \text{codom}(R) \in K(B).
 \end{aligned}$$

Así tenemos que,

$$\models a \in X \Rightarrow \forall R (R \text{ funcional} \wedge \text{dom}(R) = \{a\} \Rightarrow \text{codom}(R) \in K(B))$$

entonces $\models a \in X \Rightarrow \{a\}_X \in L_X$ y así $\{\}_X$ se factoriza a través de L_X .

(ii) $\ulcorner \phi_X \urcorner$ se factoriza a través de L_X .

Probemos que $\models R \in \Omega^{X \times B}(\text{dom}(R) = \phi \Rightarrow R = \phi)$:

$$\begin{aligned} \models \text{dom}(R) = \phi &\Leftrightarrow \exists PR_1(R) = \phi \\ &\Rightarrow \Omega^{PR_1}(\exists PR_1(R)) = \Omega^{PR_1}(\phi) = \phi. \\ (\exists PR_1 \vdash \Omega^{PR_1}) &\Rightarrow R \leq \Omega^{PR_1}(\exists PR_1(R)) = \phi \\ &\Rightarrow R = \phi. \end{aligned}$$

Así

$$\begin{aligned} \models R \text{ funcional} \wedge \text{dom}(R) = \phi &\Rightarrow R = \phi \\ &\Rightarrow \text{codom}(R) = \phi \\ &\Rightarrow \text{codom}(R) \in K(B) \end{aligned}$$

entonces

$$\forall R(R \text{ funcional} \wedge \text{dom}(R) = \phi \Rightarrow \text{codom}(R) \in K(B) \text{ si y solo si } \ulcorner \phi_X \urcorner \in L_X).$$

(iii) L_X es cerrado bajo uniones binarias.

Defina $R|_{(-)}$ como sigue: $\models R|_a = \{(\bar{a}, b) / \bar{a} \in a \wedge (\bar{a}, b) \in R\}$. Se tiene que:

$$\models a, b \in L_X \wedge R \text{ es funcional} \wedge \text{dom}(R) = a \cup b$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow a, b \in L_X \wedge R|_a \cup R|_b = R \wedge R|_a \text{ es funcional} \wedge \\ R|_b \text{ es funcional} \wedge \text{dom}(R|_a) = a \wedge \text{dom}(R|_b) = b \\ \Rightarrow \text{codom}(R|_a) \in K(B) \wedge \text{codom}(R|_b) \in K(B) \wedge \\ \text{codom}(R|_a \cup R|_b) = \text{codom}(R|_a \cup \text{codom}(R|_b)) \\ \Rightarrow \text{codom}(R|_a \cup R|_b) \in K(B) \\ \Rightarrow \text{codom}(R) \in K(B). \end{aligned}$$

Entonces $\models a, b \in L_X \Rightarrow \forall R(R \text{ funcional} \wedge \text{dom}(R) = a \cup b \Rightarrow \text{codom}(R) \in K(B))$ y así $\models a, b \in L_X \Rightarrow a \cup b \in L_X$, y luego por (i), (ii), (iii) se tiene que $K(X) \subseteq L_X$. Como X es K -finito se tiene que $\ulcorner X \urcorner \in L_X$, pero $\ulcorner X \urcorner \in L_X$ si y solo si Im se factoriza a través de $K(B)$.

2 Resultado principal

Teorema 4 Para $X \in |E|$, las siguientes condiciones son equivalentes:

- (i) X es K -finito.
- (ii) Para todo semirretículo con uniones binarias B , la diagonal $\Delta_B^X : B \rightarrow B^X$ tiene un adjunto izquierdo.

Prueba. (ii) \Rightarrow (i) $K(X)$ es un semirretículo con uniones binarias entonces $\Delta_{K(X)}^X : K(X) \rightarrow K(X)^X$ tiene un adjunto izquierdo V_X , entonces

$$\begin{aligned} \models f \in K(X)^X &\Rightarrow f \leq \Delta_{K(X)}^X \circ V_X(f) \\ &\Rightarrow \forall a (f(a) \leq \Delta_{K(X)}^X(V_X(f)(a))) \\ &\Rightarrow \forall a (f(a) \leq V_X(f)) \end{aligned}$$

entonces

$$\models f \in K(X)^X \Rightarrow \{a \in X / \exists x \in X, a \in f(x)\} \subseteq V_X(f).$$

En particular $\models \{a \in X / \exists x \in X, a \in \{x\}\} \subseteq V_X(\{\}_X)$, pero $\{a \in X / \exists x \in X, a = x\} = X$, entonces $\models \lceil X \rceil \subseteq V_X(\{\}_X)$ y así tenemos que $\models \lceil X \rceil = V_X(\{\}_X)$, por lo que $\lceil X \rceil$ se factoriza a través de $K(X)$ y entonces X es K -finito.

(i) \Rightarrow (ii) Sea B un semirretículo con uniones binarias. Defina V_B^X la composición $Im \circ \mu_B : B^X \rightarrow K(B) \rightarrow B$. Probaremos que V_B^X es un adjunto izquierdo a la función diagonal Δ_B^X . Sabemos que el siguiente diagrama conmuta, por el Teorema 1 y la Proposición 2:

$$\begin{array}{ccccc} \Omega^B & \xrightarrow{\exists S_{P(B)}} & \Omega^{P(B)} & \xrightarrow{\text{sup}_{P(B)}} & P(B) \\ \uparrow K_B & & & & \uparrow S_{P(B)} \\ K(B) & \xrightarrow{\mu_B} & & & B \end{array}$$

Por tanto, $\models F \in \Omega^B, F \in K(B) \Rightarrow \mu_B(F) = \text{sup}_{P(B)}(F)$. Por otro lado, como $\text{sup}_{P(B)}$ es el sup para $P(B)$, tenemos que

$$\models F \in \Omega^B, F \in K(B) \Rightarrow \left(\text{sup}_{P(B)}(F) \leq a \Leftrightarrow \forall b (b \in F \Rightarrow b \leq a) \right)$$

y así

$$\models F \in \Omega^B, F \in K(B) \Rightarrow (\mu_B(F) \leq a \Leftrightarrow \forall b(b \in F \Rightarrow b \leq a)).$$

Como Im se factoriza a través de $K(B)$, tenemos que $\models f \in B^X \Rightarrow Im(f) \in K(B)$ por lo que

$$\models f \in B^X (u_B(Im(f)) \leq a \Leftrightarrow \forall b(b \in Im(f) \Rightarrow b \leq a))$$

y entonces $\models f \in B^X (u_B(Im(f)) \leq a \Leftrightarrow \Delta_B^X(a))$. Por tanto $Im \circ u_B \vdash \Delta_B^X$.

De esta forma se obtiene el resultado anunciado. ■

Referencias

- [1] Acuña–Ortega, O. (1977) *Finiteness in Topoi*. Ph. D. Dissertation, Wesleyan University, Middletown, CT.
- [2] Acuña–Ortega, O. (2011) “Una nota sobre objetos k-finitos en un topos Booleano con el objeto de los números naturales”, *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **19**(2): 239–245.
- [3] Birkhoff, G. (1973) *Lattice Theory*, 3rd Ed. American Mathematical Society Colloquium Publications, Volume XXV, Providence RI.
- [4] Nachbin, L. (1949) “On a characterization of the lattice of all ideals of a Boolean ring”, *Fundamenta Mathematicae*, **36**(1): 137–142.

