Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2017 **24**(2) : 315–329
CIMPA – UCR ISSN: 1409-2433 (Print), 2215-3373 (Online)

PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA PARA MEDIR EFICIENCIA EN EL SECTOR EDUCATIVO

MATHEMATICAL PROGRAMMING FOR MEASURING EFFICIENCY IN EDUCATIONAL SECTOR

Ileana Castillo-Arias* Gabriela Marín-Raventós†

Received: 4/Mar/2016; Revised: 17/Apr/2017;
Accepted: 16/May/2017

*Escuela de Ciencias de la Computación e Informática, Universidad de Costa Rica, Costa Rica. E-Mail: ileana.castillo@ecci.ucr.ac.cr
†CITIC, Universidad de Costa Rica. San José, Costa Rica. E-Mail: gabriela.marin@ecci.ucr.ac.cr

Resumen

En este artículo se presenta un análisis de la eficiencia técnica y de escala de las unidades académicas de la Universidad de Costa Rica. La metodología utilizada es el Análisis Envolvente de Datos (DEA, por sus siglas en inglés), pues permite medir eficiencia relativa y proporciona información sobre cómo debe mejorar cada unidad académica que resulta ineficiente. Se reportan los resultados para tres agrupaciones: una basada en el proceso formativo, otra en el tamaño (de acuerdo a tres entradas) y la tercera basada en área de conocimiento. Se usan tres indicadores de entrada y tres de salida. Se realiza un análisis de sensibilidad por medio de la formulación de cuatro modelos.

Se hace énfasis en el modelo matemático utilizado, correspondiente al modelo orientado a salidas y con rendimientos de escala variables, el cual se resuelve con los datos normalizados.

Palabras clave: análisis envolvente de datos; eficiencia; educación superior.

Abstract

In this paper an analysis of technical and scale efficiency of the academic units of the University of Costa Rica is presented. The methodology used is data envelopment analysis (DEA), since it allows to measure relative efficiency and provides information on how to improve each academic unit that is inefficient. The results are reported for three groupings: one based on the training process, another based on size (according to three *inputs*) and the third based on the knowledge area. Three inputs and three outputs are used. A sensitivity analysis through the development of four models is performed.

The emphasis is on the mathematical model used, the output-oriented model, with variable returns of scale, solved each time with normalized data.

Keywords: data envelopment analysis; efficiency; higher education.

Mathematics Subject Classification: 90C05, 90C90.

1 Introducción

El análisis envolvente de datos (DEA, por sus siglas en inglés) es un enfoque de programación matemática para medir eficiencia relativa, es decir, en comparación con los del mismo grupo; no mide eficiencia absoluta. Es una técnica no paramétrica que ha sido usada ampliamente en la medición de la eficiencia en el sector educativo (Avkiran (2001) [3]; Arcelus & Coleman (1997) [2]; Beasley

(1995) [6]; Flégl & Vltavská (2013) [13] y Tzeremes & Halkos (2010) [18], por citar algunos).

Golany & Roll (1989) [14] identifican tres etapas en los estudios de eficiencia realizados usando DEA, a saber:

1. Definir y seleccionar las unidades de decisión.
2. Determinar los indicadores de entrada y salida que sean relevantes y adecuados para medir la eficiencia relativa de las unidades seleccionadas en la etapa 1.
3. Seleccionar y aplicar los modelos DEA y analizar los resultados.

En la sección 2 se describe la selección de las unidades de decisión y las agrupaciones realizadas. En la sección 3 se mencionan los indicadores utilizados y la relación que el número de indicadores tiene con el número de unidades de decisión. En la sección 4 se describen los modelos matemáticos utilizados y en la última sección, la 5, se presentan los resultados.

2 Definición y selección de UAs

Las unidades de decisión se denominarán unidades académicas (UAs). La Universidad de Costa Rica (UCR) tiene 50 UAs (escuelas o facultades) ubicadas en la Sede Rodrigo Facio. Se consideraron las UAs que imparten planes de estudio de grado y se excluyeron cinco: una porque el tipo de instrucción es muy personalizado y cuatro porque el número de cursos de servicio que ofrecen no las hace comparables con las demás. Por lo tanto, el estudio se realizó con 45 UAs.

Debido a que estas 45 UAs no forman un grupo homogéneo, y DEA requiere que así sea, se realizaron tres agrupaciones distintas que se describen a continuación.

2.1 Agrupaciones

Agrupación 1: Grupos formativos. Para la primera agrupación se propusieron tres categorías para el proceso de enseñanza-aprendizaje:

1. Procesos formativos con un énfasis en clases presenciales con algunos elementos de trabajo de campo o de laboratorio.
2. Procesos formativos con alto componente experimental o interacción con equipo o laboratorio.

3. Procesos formativos que requieren de trabajo de campo o práctico.

Los grupos que se denominarán grupos formativos 1, 2 y 3, quedaron de tamaño $n_1 = 13$, $n_2 = 15$ y $n_3 = 17$, respectivamente. El proceso de asignación de UAs a grupos se realizó con base en el conocimiento de las autoras pero se consultó a los directores de las UAs sobre la correctitud de la asignación, acogiendo posibles reasignaciones.

Agrupación 2: Grupos por tamaño. Utilizando Minitab 17 se generaron tres conglomerados usando la técnica estadística k-medias, con $k = 3$ y usando los tres indicadores de entrada (ver sección 3), de ahí que se hable de una agrupación por tamaño. Los conglomerados generados tienen $n_1 = 15$, $n_2 = 26$ y $n_3 = 4$ UAs. Este último se eliminó del análisis con DEA por el número reducido de UAs en él (ver reglas empíricas en 3.1). Sin embargo, vale la pena mencionar que estas cuatro UAs son atípicas (*outliers* en inglés) cuando se generan los diagramas de caja para el gasto real y para el número de plazas administrativas y de apoyo académico. Y dos lo son en el diagrama de caja para el número de plazas docentes.

En Minitab se probó a formar los grupos con $k = 4$, lo cual resultó en una división del grupo de cuatro UAs (en un grupo con 3 UAs y otro con una); dejando idénticos los dos grupos de tamaño 15 y 26 obtenidos con $k = 3$. Las UAs se consideran muy diversas para ser clasificadas en dos grupos, por esa razón no se consideró $k = 2$.

Agrupación 3: área de Ciencias Sociales. La UCR tiene sus carreras clasificadas en seis áreas de conocimiento: Artes y Letras, Ciencias Sociales, Ciencias Básicas, Ciencias Agroalimentarias, Salud y las Ingenierías. Un análisis de eficiencia relativa por área, que cumpliera con las reglas empíricas de la sección 3.1, fue posible sólo para el área de Ciencias Sociales que incluye $n = 18$ UAs.

3 Indicadores

Para medir la eficiencia relativa de las UAs en las tres actividades fundamentales que realizan: docencia, investigación y acción social se hizo una revisión de la literatura y una identificación de la información disponible para todas ellas. Esto permitió obtener tres indicadores de entrada: número de plazas docentes (NPD), número de plazas administrativas y de apoyo académico (NPA) y el gasto real (GR). Además de tres indicadores de salida: número de estudiantes graduados

(NEG), número de plazas docentes dedicadas a la investigación y la acción social (CDI), así como el número de créditos-estudiante (CRE). (La UCR no cuenta con otros posibles indicadores como número anual de publicaciones por UA y tampoco existe un índice de actividad en Acción Social.) Para cada indicador, el dato utilizado es un promedio de cinco años que comprende del 2009 al 2013.

3.1 Relación entre el número de unidades académicas y el número de indicadores

En la literatura de DEA ha sido ampliamente reportado que el número de unidades de decisión debe ser mayor que la combinación del número de entradas (m) y el número de salidas (r). Diferentes autores han sugerido reglas empíricas para que los modelos de DEA discriminen verdaderamente entre UAs eficientes e ineficientes; tres de ellas han sido propuestas por Golany & Roll (1989) [14], Bowlin (1998) [8] y Dyson et al. (2001) [11]: $n \geq 2(m+r)$, $n \geq 3(m+r)$ y $n \geq 2mr$, respectivamente.

Recordar que de acuerdo al proceso formativo los grupos son de tamaño $n_1 = 13$, $n_2 = 15$ y $n_3 = 17$. Con estos tamaños y $m = r = 3$ y $m = 3$ y $r = 2$ (para el análisis de sensibilidad) se tiene el cumplimiento de estas reglas empíricas como se muestra en la Tabla 1. Puede notarse en la tabla de la izquierda que con $m = r = 3$ sólo se cumple la regla de Golany & Roll. Y para el caso $m = 3$, $r = 2$ sólo se incumple la regla de Bowlin en el caso del grupo formativo 1 $(n = 13)$.

Tabla 1: Relación entre el número de unidades académicas y el número de indicadores.

n	$2(m+r)$	$3(m+r)$	$2mr$
13	✓	x	x
15	✓	x	x
17	✓	x	x

n	$2(m+r)$	$3(m+r)$	$2mr$
13	✓	x	✓
15	✓	✓	✓
17	✓	✓	✓

Nótese que para los tamaños de los grupos en la agrupación 2 (conglomerados por tamaño) y en la agrupación 3 (área de Ciencias Sociales), se cumplen las tres reglas.

4 Modelos matemáticos para DEA

El modelo propuesto por Charnes & Cooper (1962) [9] se formula, en su versión orientado a salidas, como se describe a continuación. El modelo original asume rendimientos constantes de escala. (En la sección 4.1 se presenta el modelo con rendimientos variables). Sean n las UAs que se van a analizar, m el número de indicadores de entrada (*inputs*) y r el número de indicadores de salida (*outputs*), x_{ji} la cantidad del recurso j que consume la unidad i y sea y_{ki} la cantidad del recurso k que produce la unidad i. El objetivo es minimizar, para cada UA i el cociente (1), donde las v_j y las u_k son las variables o pesos que el modelo le asigna a cada indicador.

$$\frac{\sum_{j=1}^{m} v_j x_{ji}}{\sum_{k=1}^{r} u_k y_{ki}}. \tag{1}$$

Sin embargo, este problema, sin restricciones, tendría la solución trivial cero. Por esta razón y porque DEA mide eficiencia relativa, se agregan las restricciones (2).

$$\frac{\sum_{j=1}^{m} v_j x_{ji}}{\sum_{k=1}^{r} u_k y_{ki}} \geq 1,\ i = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

De tal manera que se resuelven n problemas de la forma descrita en (3).

$$\begin{aligned} & \text{Min } \frac{\sum_{j=1}^{m} v_j x_{jo}}{\sum_{k=1}^{r} u_k y_{ko}} \\ \text{Sujeta a} & \\ & \frac{\sum_{j=1}^{m} v_j x_{ji}}{\sum_{k=1}^{r} u_k y_{ki}} \geq 1,\ i = 1, \ldots, n. \\ & v_j \geq 0\ \forall j, u_k \geq 0\ \forall k. \end{aligned} \tag{3}$$

El subíndice “o" en el modelo refiere a la UA que está siendo evaluada. Este problema de programación no lineal, puede verse como uno de programación fraccional lineal y tiene múltiples soluciones óptimas. Sea $v = (v_1, v_2, \ldots, v_m)^t \in \mathbb{R}_+^m$ y $u = (u_1, u_2, \ldots, u_r)^t \in \mathbb{R}_+^r$. Como claramente lo indican Seiford & Thrall (1990) [17], si una solución $(v*, u*)$ es óptima, también lo es $(\alpha v*, \alpha u*)$, para $\alpha > 0$. Es posible definir una clase de equivalencia que particione el conjunto de soluciones factibles en clases de equivalencia. La transformación desarrollada por Charnes & Cooper (1962) [9] toma la solución (v, u) de cada clase de equivalencia que resuelve que el denominador es 1, es decir, en notación vectorial $u^t y_o = 1$, donde $y_i = (y_{1i}, y_{2i}, \ldots, y_{ri})^t$. Haciendo $x_i = (x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{mi})^t$, el modelo (3) se puede reescribir como en (4) con los datos transformados y en notación vectorial.

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{Min}_{\nu}\ \nu^t x_o \\
\text{Sujeta a} & \\
 & \mu^t y_o = 1, \\
 & \nu^t x_i - \mu^t y_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n. \\
 & \nu \geq 0, \mu \geq 0.
\end{array}
\tag{4}
$$

El problema (4) tiene un problema dual asociado que se puede escribir como en (5):

$$
\begin{array}{ll}
 & \text{Max}_{\phi,\lambda}\ \phi \\
\text{Sujeta a} & \\
 & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{ji}\lambda_i \leq x_{jo},\ j = 1, \ldots, m. \\
 & \phi y_{ko} - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} y_{ki}\lambda_i \leq 0,\ k = 1, \ldots, r. \\
 & \lambda_i \geq 0\ \forall i,\ \phi \text{ libre.}
\end{array}
\tag{5}
$$

Así, una UA es ineficiente si $\phi^* < 1$ y eficiente si $\phi^* = 1$. Por tanto, todas las UAs eficientes se sitúan en la frontera. Sin embargo, una UA puede situarse en la frontera ($\phi^* = 1$) y no ser eficiente. Las restricciones en el modelo 5 conducen a la eficiencia en el punto (x_0, y_0) para un λ^* óptimo cuando éstas se cumplen con igualdad, es decir, $x_0 = x\lambda^*$ y $y_0 = y\lambda^*$. Una UA ineficiente puede llegar a ser más eficiente cuando se proyecta sobre la frontera.

DEA indica, para las UAs ineficientes, el conjunto de UAs con las que debe compararse. Los precios sombra, o $lambda$s multiplicados por los recursos (o indicadores de entrada) de estas UAs dan el nivel ideal (en el sentido de eficiencia) del recurso.

4.1 Modelo matemático con rendimientos variables de escala

El modelo con rendimientos variables de escala (VRS, por sus siglas en inglés) es el apropiado para estudios de eficiencia relativa en el sector de la educación superior, según Avkiran (2006) [4] y Becerril et al. (2012) [7]. Se usó además, el modelo orientado a salidas, que según Becerril et al. (2012) [7], responde a las preguntas: ¿cuánto se puede aumentar la salida sin alterar la cantidad en las entradas? y ¿es posible incrementar alguna salida sin incrementar ninguna entrada y sin disminuir ninguna otra salida? (en caso afirmativo, la unidad no podría ser caracterizada como eficiente). Dicho de otra manera, ¿es posible aumentar el número de graduados sin incrementar el número de plazas docentes ni el gasto real? o ¿es posible incrementar los créditos-estudiante sin disminuir el número de estudiantes graduados ni aumentar ningún indicador de entrada?

El modelo (5) supone rendimientos constantes a escala, en cuyo caso las medidas de eficiencia orientadas a entradas[1] y orientadas a salidas son equivalentes (Färe & Lovell, 1978) [12]. Sin embargo, no es razonable pensar que las UAs de una universidad operen de esta manera, es decir, que si se aumenta el número de plazas docentes en un 10%, también se aumente el número de graduados en un 10%. Por este motivo, Banker, Charnes y Cooper (1984) [5] plantean un modelo que supone rendimientos variables a escala, lo que permite calcular eficiencias de escala. Para ello, se debe incorporar la restricción $e^t\lambda = 1$ (donde $e = (1, 1, \ldots, 1)^t \in \mathbb{R}^n$) en el modelo (5), obteniendo:

$$
\begin{aligned}
& \text{Max}_{\phi,\lambda}\ \phi \\
\text{Sujeta a} & \\
& \sum_{i=1}^{n} x_{ji}\lambda_i \leq x_{jo},\ j = 1, \ldots, m. \\
& \phi y_{ko} - \sum_{i=1}^{n} y_{ki}\lambda_i \leq 0,\ k = 1, \ldots, r. \\
& e^t\lambda = 1 \\
& \lambda \geq 0, \phi \text{ libre.}
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Analíticamente, la restricción $e^t\lambda = 1$ hace que la frontera eficiente de posibilidades conste de segmentos que unen los puntos extremos. De esta forma, se consigue una medida de eficiencia técnica “puraÂ´Â´ (sin eficiencias de escala). Sin embargo, las medidas de eficiencia de escala obtenidas mediante este procedimiento no indican cuándo una UA opera con rendimientos crecientes o decrecientes. Por lo que se plantea un modelo que no permite rendimientos crecientes; esto se logra con la restricción $e^t\lambda \leq 1$:

[1]Este es el modelo (3) con el cociente en la función objetivo invertido y los cambios respectivos en el resto del modelo.

$$
\begin{aligned}
&\text{Max}_{\phi,\lambda}\ \phi \\
\text{Sujeta a}\quad & \\
&\sum_{i=1}^{n} x_{ji}\lambda_i \leq x_{jo},\ j=1,\ldots,m. \\
&\phi y_{ko} - \sum_{i=1}^{n} y_{ki}\lambda_i \leq 0,\ k=1,\ldots,r. \\
&e^t\lambda \leq 1 \\
&\lambda \geq 0, \phi \text{ libre.}
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Para analizar las eficiencias de escala de una UA particular se deben comparar las medidas de eficiencia técnica obtenidas mediante la implementación de los modelos (6), en el que se suponen rendimientos a escala variables, y (7), en el que únicamente se permiten rendimientos decrecientes a escala. Así, si ϕ^*_{CRS}, ϕ^*_{VRS} y ϕ^*_{DRS} son los valores óptimos de los problemas (5), (6) y (7), respectivamente, se tiene que $\phi^*_{CRS} \leq \phi^*_{VRS}$. Y si $\phi^*_{VRS} = \phi^*_{DRS}$ entonces la UA considerada presenta rendimientos decrecientes a escala, en caso contrario, rendimientos crecientes.

La eficiencia de escala está dada por el cociente $\frac{\phi^*_{CRS}}{\phi^*_{VRS}}$.

4.2 Normalización de los datos

La aplicación del modelo (4) se hizo con los indicadores descritos en la sección 3. Por ejemplo, para una UA el modelo quedó como se muestra en (8). Note que $(x_{1i}, x_{2i}, x_{3i}) = (\mathit{NPD}_i, \mathit{NPA}_i, GR_i)$ y $(y_{1i}, y_{2i}, y_{3i}) = (\mathit{CRE}_i, \mathit{NEG}_i, \mathit{CDI}_i)$.

$$
\begin{aligned}
&\text{Min}_{\nu_1,\nu_2,\nu_3}\ 46.57\nu_1 + 7.8\nu_2 + 840103208\nu_3 \\
\text{Sujeta a}\quad & \\
&35765.7\mu_1 + 391.8\mu_2 + 1.7325\mu_3 = 1, \\
&x_{1i}\nu_1 + x_{2i}\nu_2 + x_{3i}\nu_3 - y_{1i}\mu_1 - y_{2i}\mu_2 - y_{3i}\mu_3 \geq 0,\ i=1,\ldots,13. \\
&\nu_1,\nu_2,\nu_3,\mu_1,\mu_2,\mu_3 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Debido a que los cálculos son realizados en aritmética de punto flotante, están sujetos al error de redondeo. Estos errores tienden a ser menos significativos cuando los coeficientes en (4) y (8) tienen aproximadamente la misma magnitud, lo cual no se cumplía en este caso. Esto implicaba que al resolver el problema, sólo una de las variables relacionada a los indicadores de entrada y una a los indicadores de salida daba distinto de cero. Esta es una de las “trampas" que señalan Dyson et al. (2001) [11], pues para efectos prácticos, los indicadores relacionados a los pesos de cero, no están siendo considerados en la evaluación del desempeño. La inclusión de restricciones en los pesos tiene que estar bien justificada, lo cual no era viable en este contexto, por lo que se aplicó inicialmente la transformación que reporta Chvátal (1983) [10], la cual consiste en encontrar factores de escala r_i, $i = 0, \ldots, n$ (un factor por restricción) y s_j, $j = 1, \ldots, m + r$ (un factor por variable) y transformar el modelo (8) en el modelo (9).

$$
\begin{aligned}
&\text{Min}_{\nu_1,\nu_2,\nu_3}\ 46.57 s_1\nu'_1 + 7.8 s_2\nu'_2 + 840103208 s_3\nu'_3\\
&\text{Sujeta a}\\
&r_0 \cdot 35765.7 s_4\mu'_1 + r_0 \cdot 391.8 s_5\mu'_2 + r_0 \cdot 1.7325 s_6\mu'_3 = r_0,\\
&r_i \cdot x_{1i}s_1\nu'_1 + r_i \cdot x_{2i}s_2\nu'_2 + r_i \cdot x_{3i}s_3\nu'_3\\
&\quad - r_i \cdot y_{1i}s_4\mu'_1 - r_i \cdot y_{2i}s_5\mu'_2 - r_i \cdot y_{3i}s_6\mu'_3 \geq 0,\ i = 1, \ldots, 13.\\
&\nu'_1, \nu'_2, \nu'_3, \mu'_1, \mu'_2, \mu'_3 \geq 0.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

El sistema de ecuaciones en (9) se dice equilibrado si $0.1 < \max_j |r_i x_{ji} s_j| \leq 1\ \forall i$ y $0.1 < \max_i |r_i x_{ji} s_j| \leq 1\ \forall j$. Estas desigualdades deben ser válidas también para y_{ji}. En la experimentación realizada usando el Solver de Excel, este tipo de transformación no resolvió el problema.

Otra transformación de los datos con la que se probó fue la encontrada en Sarkis (2006) [16]. Primero se obtienen los promedios, como en (10).

$$
\bar{x}_j = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ji}}{n},\ \text{para } j = 1, \ldots, m;\ \bar{y}_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ki}}{n},\ \text{para } k = 1, \ldots, r. \tag{10}
$$

Luego se hace la transformación $\hat{x}_{ji} = \frac{x_{ji}}{\bar{x}_j}$ y $\hat{y}_{ji} = \frac{y_{ji}}{\bar{y}_j}\ \forall i,\ \forall j$.

Esta transformación no resolvió el problema de pesos cero en las pruebas realizadas con el Solver, pero en OSDEA [15], la herramienta computacional usada para resolver los problemas, si se obtuvieron resultados satisfactorios.

5 Resultados

La aplicación de los modelos (5), (6) y (7) se hizo en cuatro corridas, como se muestra en la figura 1. En la primera corrida se usaron los seis indicadores y en las otras tres se deja de considerar uno de los indicadores de salida para medir la sensibilidad de la UA a ese indicador.

	Indicadores de entrada			Indicadores de salida		
	NPD	**NPA**	**GR**	**CRE**	**NEG**	**CDI**
Modelo 1	✓ ***Si***	✓ ***Si***	✓ ***Si***	✓ ***Si***	✓ ***Si***	✓ ***Si***
Modelo 2	***Si***	***Si***	***Si***		***Si***	***Si***
Modelo 3	***Si***	***Si***	***Si***	***Si***		***Si***
Modelo 4	***Si***	***Si***	***Si***	***Si***	***Si***	

Figura 1: Modelos aplicados a cada agrupación.

Es imposible presentar los resultados para todas las UAs y todos los modelos. Por lo tanto, se presentan primero resultados de los cuatro modelos sólo para dos unidades académicas, las cuales presentan ineficiencia solo en uno de ellos. Los resultados de la Tabla 2 pueden interpretarse como que estas UAs basan su eficiencia principalmente en el indicador de salida que no se considera en el modelo, es decir, la UA del grupo formativo 2 basa su eficiencia en el número de créditos y la UA del grupo formativo 3 la basa en el indicador número de plazas docentes dedicadas a la investigación y la acción social.

Tabla 2: Dos UAs representativas.

UA pertenece a	ϕ_{VRS_1}	ϕ_{VRS_2}	ϕ_{VRS_3}	ϕ_{VRS_4}
Grupo formativo 2	1	0.65	1	1
Grupo formativo 3	1	1	1	0.53

A continuación se presentan los resultados de eficiencia técnica y de escala sólo para el modelo 1 (por ser el que considera todos los indicadores de entrada y salida) y para la agrupación por proceso formativo.

En la Tabla 3 se muestran los resultados para el grupo formativo 1. Se observa que las UAs 1, 5, 7, 9 y 13 son ineficientes de acuerdo al modelo VRS. Pero de estas UAs, sólo la 1, junto con la 6 y la 10 tienen ineficiencias de escala y las UAs 1, 8 y 10 tienen rendimientos crecientes. Solo para este grupo se muestran los resultados del grupo de pares (*peer group*) en la Tabla 4. Note que una UA con ineficincia técnica puede tener una buena eficiencia de escala.

Por otro lado, en el grupo formativo 2, Tabla 5, se puede ver que las UAs 1, 3, 6 y 12 son ineficientes de acuerdo al modelo VRS. Las UAs 3, 6, 12 y 13 tienen ineficiencias de escala y la 5, 10 y 13 tienen rendimientos crecientes.

Finalmente, en el grupo formativo 3, Tabla 6, son ineficientes las UAs 2, 3, 4, 5, 7, 10, 13 y 17. Se observa también que las UAs 4 y 12 tienen ineficiencias de escala; mientras que la 2, 4, 10, 11 y 16 tienen rendimientos crecientes. Las UAs 5, 13 y 17 operan con una escala eficiente, pero tienen ineficiencia estrictamente técnica.

Tabla 3: Resultados para el grupo formativo 1. Modelo 1.

UA	ϕ_{CRS}	ϕ_{VRS}	$\frac{\phi_{CRS}}{\phi_{VRS}}$	ϕ_{DRS}	UA	ϕ_{CRS}	ϕ_{VRS}	$\frac{\phi_{CRS}}{\phi_{VRS}}$	ϕ_{DRS}
1	0.35	0.44	0.80	0.35	8	0.93	1	0.93	0.93
2	1	1	1	1	9	0.89	0.93	0.96	0.93
3	1	1	1	1	10	0.76	1	0.76	0.76
4	1	1	1	1	11	1	1	1	1
5	0.87	0.89	0.97	0.89	12	1	1	1	1
6	0.67	1	0.67	1	13	0.65	0.66	0.98	0.65
7	0.71	0.73	0.97	0.73					

Tabla 4: Grupo de pares para las UAs ineficientes del grupo formativo 1.

UA	Pares	λ_2	λ_3	λ_4	λ_6	λ_8	λ_{11}
1	3 y 4		0.06	0.94			
5	2, 3, 4 y 11	0.04	0.08	0.65			0.24
7	2, 4 y 11	0.19		0.69			0.12
9	2, 6 y 11	0. 04			0.01		0.95
13	2, 4, 8 y 11	0.04		0.10		0.24	0.63

Tabla 5: Resultados para el grupo formativo 2. Modelo 1.

UA	ϕ_{CRS}	ϕ_{VRS}	$\frac{\phi_{CRS}}{\phi_{VRS}}$	ϕ_{DRS}	UA	ϕ_{CRS}	ϕ_{VRS}	$\frac{\phi_{CRS}}{\phi_{VRS}}$	ϕ_{DRS}
1	0.83	0.98	0.85	0.98	9	1	1	1	1
2	0.82	1	0.82	1	10	0.84	1	0.84	0.84
3	0.62	0.81	0.77	0.81	11	0.99	1	0.99	1
4	1	1	1	1	12	0.36	0.64	0.55	0.64
5	0.94	1	0.94	0.94	13	0.66	1	0.66	0.66
6	0.67	0.88	0.76	0.88	14	1	1	1	1
7	1	1	1	1	15	1	1	1	1
8	1	1	1	1					

Tabla 6: Resultados para el grupo formativo 3. Modelo 1.

UA	ϕ_{CRS}	ϕ_{VRS}	$\frac{\phi_{CRS}}{\phi_{VRS}}$	ϕ_{DRS}	UA	ϕ_{CRS}	ϕ_{VRS}	$\frac{\phi_{CRS}}{\phi_{VRS}}$	ϕ_{DRS}
1	1	1	1	1	10	0.65	0.70	0.94	0.65
2	0.93	0.96	0.97	0.93	11	0.80	1	0.80	0.80
3	0.73	0.80	0.91	0.80	12	0.58	1	0.58	1
4	0.49	0.66	0.73	0.49	13	0.86	0.86	1	0.86
5	0.76	0.76	1	0.76	14	1	1	1	1
6	1	1	1	1	15	0.84	1	0.84	1
7	0.42	0.42	0.99	0.42	16	0.91	1	0.91	0.91
8	1	1	1	1	17	0.93	0.93	1	0.93
9	1	1	1	1					

6 Conclusiones

El uso de DEA se considera apropiado para el problema presentado. Los resultados fueron socializados con los directores de las UAs quienes mostraron interés y apreciaron la utilidad del estudio para asistirles en la toma de decisiones y en la mejora de la gestión de su UA. En los casos de UAs ineficientes, se les compartieron los resultados sobre el aumento potencial que debe tener la UA en un indicador de salida para así lograr ser eficiente.

Algunos de los directores hicieron sugerencias respecto del uso de algunas variables adicionales o alternativas para el análisis. El uso de DEA requirió de varias iteraciones no solo para lograr las variables idóneas sino también para determinar los diferentes modelos a usar. No hay forma de saber cuál es el mejor, sino ofrecer a los directores las diferentes visiones para que ellos como tomadores de decisión interpreten la situación reflejada por los distintos modelos.

Referencias

[1] Abbot, M.; Doucouliagos, C. (2003) "The efficiency of Australian universities: a data envelopment analysis", *Economics of Education Review* **22**(1): 89–97.

[2] Arcelus, F.J.; Coleman, D. (1997) "An efficiency review of university departments", *International Journal of Systems Science* **28**(7): 721–729.

[3] Avkiran, N.K. (2001) "Investigating technical and scale efficiencies of Australian universities through data envelopment analysis", *Socio-Economic Planning Sciences* **35**(1): 57–80.

[4] Avkiran, N.K. (2006) "Variable returns to scale-universities", en: N.K. Avkiran (Ed.) *Productivity Analysis in the Service Sector with Data Envelopment Analysis*, Brisbane, Australia: 45–57. De: `http://www.users.on.net/~necmi/financesite/DEA%20Book%203rd%20Edition%202006_AVKIRAN.pdf`.

[5] Banker, R.D.; Charnes, A.; Cooper, W.W. (1984) "Some models for estimating technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis", *Management Science* **30**(9): 1078–1092.

[6] Beasley, J.E. (1995) "Determining teaching and research efficiencies", *Journal of the Operational Research Society* **46**(4): 441–452.

[7] Becerril-Torres, O.U.; Alvarez-Ayuso, I.C.; Nava-Rogel, R.M. (2012) "Frontera tecnológica y eficiencia técnica de la educación superior en México", *Revista Mexicana de Investigación Educativa* **17**(54): 793–816.

[8] Bowlin, W.F. (1998) "Measuring performance: An introduction to data envelopment analysis (DEA)", *Journal of Cost Analysis* **15**(2): 3–27.

[9] Charnes, A.; Cooper, W.W. (1962) "Programming with linear fractional functionals", *Naval Research Logistics Quarterly* **9**(3-4): 181–186.

[10] Chvátal, V. (1983) *Linear Programming*. W.H. Freeman and Company, Nueva York.

[11] Dyson, R.G.; Allen, R.; Camanho, A.S.; Podinovski, V.V.; Sarrico, C.S.; Shale, E.A. (2001) "Pitfalls and protocols in DEA", *European Journal of Operational Research* **132**2): 245–259.

[12] Färe, R.; Lovell, C.A.K. (1978) "Measuring the technical efficiency of production", *Journal of Economic Theory* **19**(1): 150–162.

[13] Flégl, M.; Vltavská, K. (2013) "Efficiency at faculties of economics in the Czech public higher education institutions: Two different approaches", *International Education Studies* **6**(10): 1–12.

[14] Golany, B.; Roll, Y. (1989) "An application procedure for DEA", *Omega Int. J. of Mgmt Sci.* **17**(3): 237–250.

[15] Open Source DEA [OSDEA], en: `http://www.opensourcedea.org/`.

[16] Sarkis, J. (2006) "Preparing your data for DEA – Information technology", en N.K. Avkiran (Ed.) *Productivity Analysis in the Service Sector with Data Envelopment Analysis*, Brisbane, Australia: 115–124. De: `http://www.users.on.net/~necmi/financesite/DEA%20Book%203rd%20Edition%202006_AVKIRAN.pdf`.

[17] Seiford, L.M.; Thrall, R.M. (1990) "Recent developments in DEA. The mathematical programming approach to frontier analysis", *Journal of Econometrics* **46**(1-2): 7–38.

[18] Tzeremes, N.G.; Halkos, G.E. (2010) "A DEA approach for measuring university departments efficiency", en: `http://mpra.ub.uni-muenchen.de/24029/1/`.