

MÉTODO DE ELEMENTOS ESPECTRALES DE
GALERKIN DISCONTINUO PARA CALCULAR
REFLEXIÓN Y TRANSMISIÓN DE ONDAS
ELECTROMAGNÉTICAS

DISCONTINUOUS GALERKIN SPECTRAL
ELEMENT METHOD TO COMPUTE REFLECTION
AND TRANSMISSION OF ELECTROMAGNETIC
WAVES

MÓNICA MESA-MAZO* CÉSAR ACOSTA-MINOLI†
HERNÁN TORO-ZAPATA‡

*Received: 5/Sep/2016; Revised: 5/Jul/2017;
Accepted: 18/Aug/2017*

Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones is licensed under a Creative Commons
Reconocimiento-NoComercial-Compartirigual 4.0 International License.
Creado a partir de la obra en <http://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/matematica>



*Facultad de Educación, Universidad del Quindío, Armenia, Colombia. E-Mail:
mjmesa@uniquindio.edu.co

†Misma dirección que/Same address as: M. Mesa-Mazo.
E-Mail: cminoli@uniquindio.edu.co

‡Misma dirección que/Same address as: M. Mesa-Mazo.
E-Mail: hdtoro@uniquindio.edu.co

Resumen

Este trabajo tiene por objetivo presentar el desarrollo y la validación de un algoritmo de alto orden de precisión, basado en el método de elementos espectrales nodal de Galerkin discontinuo, por su siglas en inglés (DGSEM), para calcular la reflexión y la transmisión de ondas electromagnéticas viajando en dos medios isotrópicos y homogéneos, los cuales se encuentran separados por una interfaz plana vertical con características diferentes de permitividad ε y permeabilidad μ . Para discretizar espacialmente se derivó el método DGSEM sobre las ecuaciones de Maxwell. Posteriormente, se derivó un resolvente de Riemann para calcular el flujo numérico entre los elementos que componen la malla del dominio computacional, para calcular la reflexión y la transmisión de onda en la interfaz, y para introducir las respectivas condiciones de frontera. Finalmente, para discretizar en el tiempo, se utilizó el método de Runge-Kutta explícito de tercer orden de Williamson. Los resultados del algoritmo, en comparación con la solución analítica, demuestran convergencia espectral en el espacio y de tercer orden en el tiempo.

Palabras clave: método espectral de Galerkin discontinuo; ondas electromagnéticas; electromagnetismo computacional; reflexión y transmisión.

Abstract

Modeling wave reflection and transmission is important for a diversity of applications in physics and engineering. Examples can be found in acoustics and electromagnetism. Computational wave propagation requires high order accuracy both in space and time to get accurate phase and dissipation properties. In this paper we derive and evaluate a high order accurate method based on Discontinuous Galerkin Spectral Element Method (DGSEM) to compute reflection and transmission of electromagnetic waves traveling in two homogeneous and isotropic media, separated by a thin plane interfaz, with different physical properties of permittivity ε and permeability μ . To discretize in Space we used DGSEM over a two dimensional Transverse Electric Maxwell Equations. We derived a Riemann solver to compute the numerical flux between the interfaces of two elements of the computational mesh and to add boundary conditions. To discretize in time we use a third order low storage Runge-Kutta of Williamson. Results when compared with the analytical solution, showed spectral convergence in space and third order convergence in time.

Keywords: discontinuous Galerkin spectral element method; electromagnetic waves; computational electromagnetism; reflection and transmission.

Mathematics Subject Classification: 34D23, 93D20; 65L05.

1 Introducción

El modelado de reflexión y transmisión de ondas es de gran importancia en diferentes campos de la física y la ingeniería. Ejemplos de sus aplicaciones se encuentran en el estudio de ondas acústicas y ondas electromagnéticas, entre otros. En la teoría de electromagnetismo existe una metodología estándar para explicar el fenómeno de reflexión y transmisión de ondas. Los trabajos de Fresnel y Snell estudian el comportamiento de la luz al desplazarse entre dos diferentes medios que tienen índices de refracción distintos por medio de la relación entre los ángulos de incidencia, reflexión y de transmisión en la interfaz que separa dichos medios [11],[13]. Sin embargo, dicha teoría se limita al caso en el que la interfaz posee una geometría simple. Para los casos en los cuales la geometría de la interfaz es no trivial, no es posible expresar la solución en forma analítica cerrada. Alrededor de estas discusiones Censor propone y motiva el uso de herramientas computacionales para resolver estos problemas, [5].

Por otra parte, a nivel de electromagnetismo computacional, es importante considerar métodos de alto orden de precisión que permitan preservar la amplitud y la fase de la onda en largos periodos de propagación. Entre estos métodos se destacan los métodos espectrales multidominio introducidos por Patera [14] para problemas elípticos y parabólicos y luego por Kopriva [7] para problemas hiperbólicos con el propósito de mejorar la eficiencia de los métodos espectrales y aplicarlos a geometrías complejas. Las características fundamentales de los métodos espectrales están bien establecidas. Por ejemplo, estos pueden ser aplicados en geometrías generales con convergencia exponencial en el orden polinomial.

La versión de Galerkin Discontinuo presenta gran estabilidad cuando se aplica a problemas de propagación de ondas, y en general a problemas hiperbólicos debido a que presenta errores de dispersión y de disipación que decrecen con orden exponencial. Adicionalmente, el hecho que la transmisión de información entre elementos se impone de forma discontinua lo hace especialmente atractivo para la solución de problemas con parámetros que presentan un salto discontinuo, como es el caso del problema de reflexión y transmisión de ondas, [10].

El documento está dividido en cinco secciones, en la segunda sección se expone el planteamiento del problema utilizando un modelo matemático basado en las ecuaciones de Maxwell como también su respectiva solución analítica para el caso de una interfaz plana. Posteriormente, se expone el método de elementos espectrales de Galerkin Discontinuo y se deriva el flujo numérico para el problema hiperbólico obtenido de la ecuaciones de Maxwell. En la sección cuatro se presentan un estudio de convergencia comparando la aproximación numérica

obtenida mediante DGSEM con la solución analítica del problema. Finalmente en la sección cinco se presentan las conclusiones.

2 Modelo matemático

2.1 Descripción del problema

Considere una onda electromagnética plana viajando entre dos medios homogéneos e isotrópicos, separados por una interfaz plana vertical, con características diferentes de permitividad ε y permeabilidad μ , como se ilustra en la Figura 1.

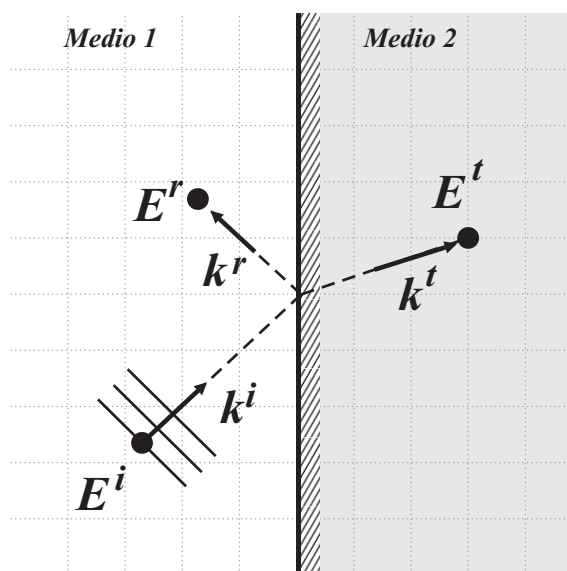


Figura 1: Reflexión y transmisión.

La onda electromagnética incidente viaja desde el **Medio 1** (izquierda a derecha) con una velocidad c_L hasta encontrar la interfaz donde ocurre el fenómeno de reflexión y transmisión, como consecuencia se genera una onda reflejada con velocidad c_L y una onda transmitida con velocidad c_R correspondiente al medio **Medio 2**.

El problema consiste en calcular las ondas transmitida y reflejada en términos de la onda incidente suponiendo que ésta última es conocida.

2.2 Ecuación del modelo

Las ecuaciones de Maxwell en un medio homogéneo isotrópico, sin considerar cargas y densidad de corriente en la superficie de la interfaz, se pueden reescribir en la siguiente forma conservativa, [12] y [8]:

$$\mathbf{q}_t + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \quad (1)$$

donde

$$\mathbf{F}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_i \times \mathbf{E} \\ -\mathbf{e}_i \times \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ \mathbf{D} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

$e_i, i = 1, 2, 3$ representan los vectores canónicos en i -ésima dirección del sistema espacial cartesiano, \mathbf{F}_i representa el i -ésimo componente del flujo \mathbf{F} , \mathbf{E} es el campo eléctrico medido en (*Voltios/m*), \mathbf{B} es el campo magnético, medido en (*Teslas*), \mathbf{H} es la intensidad de campo magnético *Amperios/m*, \mathbf{D} es la densidad de flujo eléctrico (*Coulomb/m²*).

Los campos \mathbf{E}, \mathbf{H} y los campos \mathbf{D}, \mathbf{B} se relacionan a través de las denominadas *relaciones constitutivas* utilizando la permitividad eléctrica ε y la permeabilidad magnética μ [13]. En el caso de un medio isotrópico y homogéneo, se tiene que:

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (3)$$

En este trabajo se considera la aproximación del problema en dos dimensiones, para el caso de la onda electromagnética TE (Transverse electric) polarizada en la dirección z . Por lo tanto, considerando la ortogonalidad entre los campos eléctricos y magnéticos $\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$ y las relaciones constitutivas (3), las ecuaciones de Maxwell (1) se reducen a un sistema hiperbólico de ecuaciones diferenciales parciales de tres variables E_3, H_1 y H_2 , donde los subíndices denotan las componentes de los vectores \mathbf{E} y \mathbf{H} , como se ilustra en la ecuación (4):

$$\mathbf{q}_t + B\mathbf{q}_x + C\mathbf{q}_y = 0, \quad (4)$$

donde \mathbf{q} es:

$$\mathbf{q} = [E_3, H_1, H_2]^T,$$

y B, C son las siguientes matrices de flujo:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1/\varepsilon \\ 0 & 0 & 0 \\ -1/\mu & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1/\varepsilon & 0 \\ -1/\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

2.3 Solución analítica

Diversos métodos analíticos han sido desarrollados para calcular el problema de reflexión y transmisión de ondas electromagnéticas en interfaces planas y cilíndricas [15]. A continuación se desarrollará la solución analítica para el caso de la ecuación (4), esta solución consiste en la superposición de las ondas de incidencia, de reflexión y de transmisión. Una vez aplicadas las condiciones de frontera en la interfaz relacionadas con las características físicas del medio, es posible conocer los parámetros de las ondas de reflexión y transmisión en términos de los parámetros de la onda de incidencia.

En este estudio se propaga una onda plana en un dominio dividido por una interfaz plana y se asume que cada medio posee propiedades de permitividad y permeabilidad diferente. Como consecuencia del cambio de medio, la onda electromagnética incidente se descompone en una onda reflejada y una onda transmitida. El cambio de medio en el dominio de propagación, se describe mediante un salto discontinuo de los parámetros ε y μ como se ilustra a continuación:

$$\varepsilon = \begin{cases} \varepsilon_L & \text{si } x \leq x_0 \\ \varepsilon_R & \text{si } x > x_0 \end{cases} \quad (7)$$

y

$$\mu = \begin{cases} \mu_L & \text{si } x \leq x_0 \\ \mu_R & \text{si } x > x_0 \end{cases} \quad (8)$$

donde los subíndices L y R denotan la información del lado izquierdo y del lado derecho de la interfaz respectivamente.

En este trabajo, la solución analítica de la ecuación (4) se asume como una onda plana, así, las ondas electromagnéticas planas incidente, reflejada y transmitida tienen la forma:

$$\mathbf{q}_m = \begin{bmatrix} E_3^m \\ H_1^m \\ H_2^m \end{bmatrix} = a_m \psi(\mathbf{k}^m \cdot \mathbf{x} - w_m t) \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{k_x^m}{c\mu} \\ \frac{k_y^m}{c\mu} \end{bmatrix}, \quad (9)$$

donde \mathbf{k}^m es el vector de dirección, a_m es la amplitud y w_m es la frecuencia. Aquí, m es una etiqueta que permite distinguir el tipo de onda, así, la onda incidente es $m = i$, la onda reflejada es $m = r$ y la transmitida $m = t$.

Para determinar una onda electromagnética particular, se reemplaza el vector de dirección \mathbf{k} y la amplitud \mathbf{a} , donde las ondas reflejadas r y transmitidas t dependen de la perturbación incidente i , la cual es conocida y cuyo vector director se puede escribir como:

$$\mathbf{k}^i = \frac{w_i}{c_l} (k_x^i \hat{x} + k_y^i \hat{y}). \quad (10)$$

Aquí, se asume que $(k_x^i)^2 + (k_y^i)^2 = 1$. Para calcular \mathbf{k}^r y \mathbf{k}^t en función de los componentes de \mathbf{k}^i , se hace debe utilizar la **ley de Snell** para ondas electromagnéticas:

$$|\mathbf{k}^i| \sin(\theta_i) = |\mathbf{k}^r| \sin(\theta_r) = |\mathbf{k}^t| \sin(\theta_t), \quad (11)$$

donde θ es el ángulo formado por el vector \mathbf{k} con la interfaz.

De la ecuación (11) se deduce que en la interfaz las fases de las ondas son iguales, es decir, $w_i = w_r = w_t$ y los ángulos de incidencia y de reflexión son iguales, $\theta_i = \theta_r$. Por lo tanto, algebraicamente se derivan las siguientes identidades en función de las componentes del vector de la onda incidente \mathbf{k}^i :

$$\begin{aligned} \mathbf{k}^r &= -k_x^i \hat{\mathbf{x}} + k_y^i \hat{\mathbf{y}} \\ \mathbf{k}^t &= \frac{w_i}{c_R} \sqrt{1 - \frac{c_R^2}{c_L^2} (k_y^i)^2} \hat{\mathbf{x}} + \frac{w_i}{c_L} k_y^i \hat{\mathbf{y}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Para calcular las amplitudes de la onda reflejada y la onda transmitida en términos de la amplitud de la onda electromagnética incidente se hace uso de la condición de Rankine-Hugoniot, donde las tres ondas satisfacen las condiciones de salto en la interfaz, y donde el flujo normal a la interfaz debe ser continuo:

$$\mathbf{F}_L \cdot \mathbf{n} = \mathbf{F}_R \cdot \mathbf{n} \quad (13)$$

donde \mathbf{n} es el vector normal a la interfaz. El flujo normal es:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = (B\mathbf{q}, C\mathbf{q}) \cdot (n_x, n_y) = (n_x B + n_y C) \mathbf{q} = A\mathbf{q}, \quad (14)$$

así, la condición de Rankine-Hugoniot toma la forma:

$$A_L \mathbf{q}_L = A_R \mathbf{q}_R. \quad (15)$$

Luego, reescribiendo la ecuación (15) por componentes:

$$\begin{bmatrix} 0 & n_y 1/\varepsilon_L & -n_x 1/\varepsilon_L \\ n_y 1/\mu_L & 0 & 0 \\ -n_x 1/\mu_L & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_3^L \\ H_1^L \\ H_2^L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & n_y 1/\varepsilon_R & -n_x 1/\varepsilon_R \\ n_y 1/\mu_R & 0 & 0 \\ -n_x 1/\mu_R & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_3^R \\ H_1^R \\ H_2^R \end{bmatrix}, \quad (16)$$

es posible plantear un sistema de ecuaciones para calcular la amplitud de la onda reflejada a_r y la amplitud a_t en función de la amplitud de la onda incidente a_i . Así, tras una serie de manipulaciones algebraicas se obtienen las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} a_t &= \frac{a_i}{J} [-\mathbf{k}^r \cdot \mathbf{n} + \mathbf{k}^i \cdot \mathbf{n}], \\ a_r &= \frac{a_i}{J} \left[-\frac{\mu_L \varepsilon_L}{\varepsilon_R \mu_R} (\mathbf{k}^t \cdot \mathbf{n}) + \frac{\mu_L}{\mu_R} (\mathbf{k}^i \cdot \mathbf{n}) \right], \end{aligned} \quad (17)$$

donde

$$J = -\frac{\mu_L}{\mu_R} \mathbf{k}^r \cdot \mathbf{n} - \frac{\mu_L \varepsilon_L}{\varepsilon_R \mu_R} \mathbf{k}^t \cdot \mathbf{n}.$$

3 El método numérico

En la presente sección, se describe de forma general un método espectral para calcular ecuaciones en forma conservativa [10]. La metodología es lo suficientemente robusta como para resolver diversos problemas de propagación de ondas en geometrías complejas. Adicionalmente, al introducir la transformación denominada en la literatura como ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian), [2],[1], el método permite la simulación de propagación de onda sobre dominios dinámicos, esto es, con interfaces o fronteras en movimiento.

3.1 Discretización espacial mediante DGSEM

Para discretizar espacialmente (1) se utilizará una forma de colocación nodal del método de Galerkin discontinuo donde la solución es aproximada por el producto tensorial de su expansión en polinomios de Legendre. Aquí los productos internos son reemplazados por cuadraturas de Gauss-Legendre [3], [10].

Asumiendo que (1) está definida en un dominio Ω_t donde el subíndice indica que el dominio puede depender del tiempo, considere una transformación r en (1) de la forma:

$$(\mathbf{x}, t) = r(\mathbf{x}(\xi, \tau), \tau) \quad (18)$$

donde $\xi(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ representa una coordenada curvilínea tridimensional, la cual es mapeada desde un cubo de referencia $\psi \in \Omega = [-1, 1]^3$ en Ω_t . Esta transformación se conoce en la literatura como Arbitraria Lagrangiana Euleriana (ALE), ver[6], [1]. Aplicando esta transformación se obtiene el siguiente sistema conservativo

$$\mathbf{q}_\tau + \nabla_\xi \cdot \mathcal{F} = 0, \quad (19)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathcal{J}\mathbf{q} \quad (20)$$

$$\mathcal{F}^i = \mathcal{J}\mathbf{a}^i \cdot (\mathbf{F} - \mathbf{q}\mathbf{x}_\tau) \quad (21)$$

en el dominio fijo $\vec{\xi} \in \Omega = [-1, 1]^3$.

En el caso de dos dimensiones se definen los flujos contravariantes en función de flujo original y las identidades métricas

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{f}} &= Y_\eta(\mathbf{f} - \mathbf{q}X_\tau) - X_\eta(\mathbf{g} - \mathbf{q}Y_\tau) \\ \tilde{\mathbf{g}} &= -Y_\xi(\mathbf{f} - \mathbf{q}X_\tau) + X_\xi(\mathbf{g} - \mathbf{q}Y_\tau). \end{aligned} \quad (22)$$

donde \mathbf{f} y \mathbf{g} son los componentes del flujo \mathbf{F} en (4).

En DGSEM con ALE, el dominio Ω_t se subdivide en elementos con forma de cuadriláteros e_t los cuales se encuentran acotados por cuatro curvas, Γ_m , $m = 1, 2, 3, 4$ parametrizadas por longitud de arco. Es posible que las cuatro curvas se muevan en el tiempo. Cada curva es $\Gamma_m(s, \tau)$, $s \in [-1, 1]$ es aproximada por un polinomio en el parámetro s que es la longitud de arco, observe que la curva puede ser dependiente del tiempo τ ,

$$\Gamma_m = \sum_{j=0}^N \Gamma_m(s_j, \tau) l_j(s), \tag{23}$$

donde

$$l_j(s) = \prod_{i=0, i \neq j}^N \frac{(s - s_i)}{(s_j - s_i)} \tag{24}$$

son los polinomios de interpolación de Lagrange. Los puntos nodales s_i son los nodos de la cuadratura de Gauss-Legendre debido a que ésta se utilizará para aproximar las integrales en la formulación débil. Esta representación polinómica de las fronteras de los elementos es importante porque permite satisfacer de manera automática las identidades métricas de forma discreta. [9].

La solución, \mathbf{q} y los flujos contravariantes $\tilde{\mathbf{f}}$ y $\tilde{\mathbf{g}}$ obtenidos a través de la transformación (18) son aproximados por polinomios en la forma nodal de Lagrange:

$$\tilde{\mathbf{q}} = \mathcal{J}\mathbf{q} \approx J\mathbf{Q} \equiv \tilde{\mathbf{Q}} = \sum_{n=0}^N \sum_{m=0}^M \tilde{\mathbf{Q}}_{n,m} l_n(\xi) l_m(\eta). \tag{25}$$

De esta forma, también se utilizan aproximaciones polinómicas, $\tilde{\mathbf{F}}$ y $\tilde{\mathbf{G}}$, para los flujos contravariantes $\tilde{\mathbf{f}}$ and $\tilde{\mathbf{g}}$ y el Jacobiano, \mathcal{J} .

El proceso de discretización comienza desde la formulación débil de la ecuación (19)

$$(\tilde{q}_\tau + \nabla_\xi \cdot \mathcal{F}, \phi) \equiv \iint_E (\tilde{q}_\tau + \nabla_\xi \cdot \mathcal{F}) \phi d\xi = 0. \tag{26}$$

Al discretizar por medio del método de Galerkin discontinuo, el segundo término de la ecuación (26) se integra por partes para separar la contribución de los datos del interior del dominio de los de la frontera.

$$(\tilde{\mathbf{q}}_\tau, \phi) + \int_{\partial E} \phi \mathcal{F} \cdot \mathbf{n}_\xi dS - (\mathcal{F}, \nabla_\xi \phi) = 0. \tag{27}$$

La aproximación semidiscreta tiene soluciones y flujos reemplazados por sus correspondientes aproximaciones polinomiales, y la función de prueba ϕ es reemplazada por $\phi_{i,j} = l_i(\xi)l_j(\eta)$. Los productos internos son reemplazados por la cuadratura de Gauss-Legendre la cual se representa formalmente mediante

$$(u, v)_N \equiv \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N u(\xi_i, \eta_j) v(\xi_i, \eta_j) w_i w_j. \quad (28)$$

Finalmente, el flujo en la frontera es reemplazado por un flujo numérico. El cual se denota por el superíndice * y será definido posteriormente. Formalmente la aproximación se presenta para cada nodo $i, j = 0, \dots, N$ en un elemento de la siguiente forma:

$$\left(\tilde{\mathbf{Q}}_\tau, \phi_{i,j} \right)_N + \int_{\partial E, N} \phi_{i,j} \tilde{\mathcal{F}}^* \cdot \mathbf{n}_\xi dS - \left(\tilde{\mathcal{F}}, \nabla_\xi \phi_{i,j} \right)_N = 0 \quad (29)$$

donde $i, j = 0, 1, \dots, N$.

La implementación computacional requiere de una manipulación algebraica de los componentes de la ecuación (29), los detalles se encuentran en [10].

3.2 Discretización temporal

Para integrar en el tiempo, se debe reescribir la aproximación semidiscreta en la forma de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\left. \frac{d\tilde{\mathbf{Q}}}{d\tau} \right|_{i,j} + \mathbf{L}_N^q(\mathbf{Q}, \mathbf{X}, \mathbf{W})|_{i,j} = 0, \quad i, j = 0, 1, \dots, N. \quad (30)$$

De esta forma es posible ver explícitamente la dependencia de la derivada temporal de $\tilde{\mathbf{Q}}$ en términos de la aproximación de la solución \mathbf{Q} . Aquí, se usa la notación \mathbf{L}_N^q para representar la discretización espacial de la divergencia utilizando el método DGSEM (3.2) con orden polinomial N . El integrador temporal es el método de Runge Kutta explícito de tercer orden de Williamson [17] aunque otros integradores explícitos pueden ser usados. En relación con el cálculo sobre dominios dependientes del tiempo, la posición de la malla \mathbf{X} y la velocidad de la malla \mathbf{W} pueden ser calculados mediante un procedimiento que preserve la precisión del error temporal y espacial, para una demostración de esta afirmación, ver [2].

3.3 Flujo numérico

Con el fin de calcular la transmisión de información entre los elementos de la malla e incorporar de forma apropiada las condiciones de frontera del problema en el método de Galerkin discontinuo es necesario calcular el flujo numérico. Por lo tanto, considere el flujo de la ecuación (4) en la dirección normal ξ :

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = (B\mathbf{q}, C\mathbf{q}) \cdot (n_x, n_y) = (n_x B + n_y C) \mathbf{q} = A\mathbf{q} \quad (31)$$

la matriz \mathbf{A} toma la forma:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\varepsilon}n_y & -\frac{1}{\varepsilon}n_x \\ -\frac{1}{\mu}n_y & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\mu}n_x & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (32)$$

Por lo tanto, en la dirección normal de la interfaz entre dos elementos que sean adyacentes, es posible construir un sistema de EDPs estrictamente hiperbólico de la forma:

$$\mathbf{q}_t + A\mathbf{q}_\xi = 0. \quad (33)$$

Por lo tanto, es posible desacoplar el vector solución q en términos de las ondas viajeras izquierda, derecha y estacionaria, con los distintos valores propios de la matriz A . La matriz A admite una diagonalización de la forma:

$$A = P\Lambda P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ Yn_y & -Yn_y & n_x \\ -Yn_x & Yn_x & n_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & -c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n_y/Y & -n_x/Y \\ 1 & -n_y/Y & n_x/Y \\ 0 & 2n_x & 2n_y \end{bmatrix} \quad (34)$$

donde, $Y = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$ y la ecuación (33) se desacopla como

$$P^{-1}\mathbf{q}_t + P^{-1}A\mathbf{q}_\xi = 0, \quad \mathbf{w}_t + \Lambda\mathbf{w}_\xi = 0 \quad (35)$$

donde $\mathbf{w} = P^{-1}\mathbf{q}$. Las componentes del vector $\mathbf{w} = [w^+ \ w^- \ w^0]^T$ se denominan *variables características* y permiten describir lo que sucede en la frontera debido a la incidencia de la onda en la interfaz en $\xi = \xi_0$ donde se ubica precisamente una discontinuidad de salto debido al cambio del medio.

Para garantizar la transmisión de información en la interfaz es necesario aplicar la condición de **Rankine-Hugoniot**, la cual establece que el flujo normal que cruza la interfaz es continuo. Por lo tanto, si denotamos el flujo normal del lado izquierdo de la interfaz con el subíndice L y el flujo normal del lado derecho de la misma con el subíndice R , se tiene que:

$$A_L\mathbf{q}_L = A_R\mathbf{q}_R. \quad (36)$$

Ahora bien, expresando en términos de w , se obtiene

$$P_L \Lambda_L w_L = P_R \Lambda_R w_R. \quad (37)$$

Dado que se pretende encontrar la solución de la onda reflejada y transmitida se define la siguiente notación, con base en la información de las variables características que entran y salen de la interfaz (ver la Figura 2):

- w_L^+ : Onda viajera a derecha con la información de la izquierda (conocida).
- w_L^- : Onda viajera a izquierda con la información de la izquierda (desconocida).
- w_R^+ : Onda viajera a derecha con la información de la derecha (desconocida).
- w_R^- : Onda viajera a izquierda con la información de la derecha (conocida).

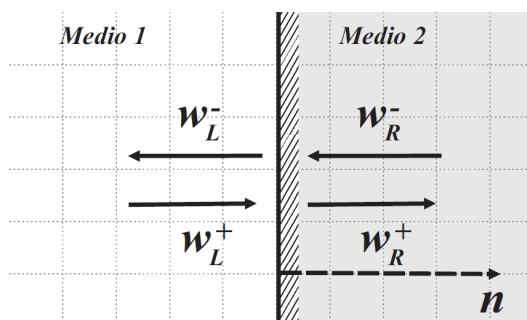


Figura 2: Variables características en la interfaz del medio 1 y el medio 2.

De la relación (37) es posible plantear un sistema de ecuaciones para las cantidades desconocidas w_L^- y w_R^+ en términos de las cantidades incidentes. Resolviendo este sistema se obtiene:

$$w_+^R = \frac{2Y^L c^L w_+^L + (Y^L - Y^R) c^R w_-^R}{c^R (Y^L + Y^R)} \quad (38)$$

$$w_-^L = \frac{2Y^R c^R w_-^R + (Y^R - Y^L) c^L w_+^L}{c^L (Y^L + Y^R)} \quad (39)$$

$$w_0^L = w_0^R \quad (40)$$

Una vez calculadas estas cantidades, el flujo numérico en la interfaz, en función de los estados q_L y q_R y el vector normal n , se define en la forma *upwind* como [2],[16]:

$$F^*(q^L, q^R, \mathbf{n}) = P^L A^L w^*$$

donde:

$$w^* = \begin{bmatrix} w_+^* \\ w_-^* \\ w_0^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_+^L \\ w_-^L \\ w_0^L \end{bmatrix}. \quad (41)$$

Finalmente, reemplazando las respectivas cantidades de w^* , el flujo numérico se expresa en términos de la impedancia Z como:

$$F^*(q^L, q^R, \mathbf{n}) = \begin{bmatrix} \frac{2}{Y^R + Y^L} [c^L Y^L w_+^L - c^R Y^R w_-^R] \\ \frac{2n_y}{Z^R + Z^L} [c^L w_+^L + c^R w_-^R] \\ \frac{2n_x}{Z^R + Z^L} [c^L w_+^L + c^R w_-^R] \end{bmatrix} \quad (42)$$

donde $Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$, $Y = \frac{1}{Z}$ y

$$w_+ = \frac{1}{2} [E_z + Zn_y H_x - Zn_x H_y],$$

$$w_- = \frac{1}{2} [E_z - Zn_y H_x + Zn_x H_y].$$

4 Simulación numérica

Con el fin de identificar las principales características de la propagación, reflexión y transmisión de ondas electromagnéticas, se usará como onda incidente, una onda plana de tipo gaussiano, en un modo de propagación donde el campo eléctrico es estrictamente transversal (TE), polarizada en la dirección z :

$$\mathbf{q}(\vec{x}, t) = \begin{bmatrix} E_z \\ H_x \\ H_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{k_y}{\omega} \\ -\frac{k_x}{\omega} \end{bmatrix} \exp\left(-\frac{(k_x(x-x_0) + k_y(y-y_0) - \omega t)^2}{d^2}\right) \quad (43)$$

donde el vector \mathbf{k} es la dirección normal de propagación y $k_x^2 + k_y^2 = 1$. La forma gaussiana se parametriza en términos de su ancho d y la mitad de su amplitud, esto es, $w = 0.2$, y $d = w/2\sqrt{2}$.

Para calcular computacionalmente la reflexión y la transmisión de una onda electromagnética, se considera un dominio inicial $[-1, 1] \times [-1, 1]$ dividido en 400 elementos. Se asumirá que la interfaz entre los medios de propagación está

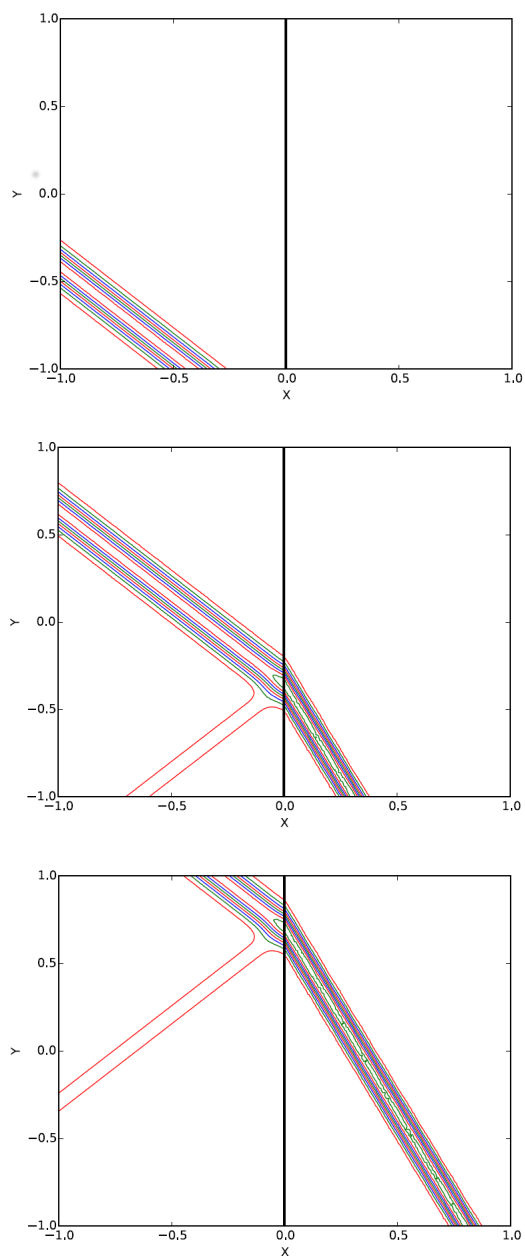


Figura 3: Gráficas de contorno de reflexión y transmisión de una onda electromagnética plana en una interfaz sobre $x = 0$ en tres momentos en el tiempo.

en $x = 0$. Adicionalmente, el medio de propagación de la izquierda tiene coeficientes de permeabilidad $\mu_1 = 1$ y permitividad $\epsilon_1 = 1$ y el medio de propagación de la derecha tiene coeficientes $\mu_2 = 1$ y $\epsilon_2 = 2.77$. La función de la condición inicial es un pulso gaussiano de la forma (43) con ángulo de incidencia $\theta_i = \pi/4$, así $\mathbf{k} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. La Figura 3 muestra las gráficas de contorno de reflexión y transmisión de una onda electromagnética plana en una interfaz sobre $x = 0$ en tres momentos en el tiempo: $t = 0$, $t = 0.75$ y $t = 1.5$. Para calcular la propagación de la onda se utilizaron polinomios de grado $N = M = 8$ en el espacio y $\Delta t = 0.001$ en el tiempo. Para los estados externos en la frontera computacional se utiliza la solución exacta. La transmisión y reflexión en la interfaz se calcula por medio del resolvente de Riemann.

Como el problema planteado tiene una solución analítica exacta y cerrada, es posible para efectos de validación del algoritmo cuantificar el error entre la solución aproximada por DGSEM y la solución analítica en el espacio y en el tiempo. El error se calculó como la máxima diferencia absoluta entre $E_z = E_z^i + E_z^r$ y la correspondiente solución analítica en la malla. La Figura 4 muestra la convergencia en el espacio-tiempo al usar DGSEM-ALE en el espacio, 2NRK3 (Runge Kutta de tercer orden de Williamson) en el tiempo.

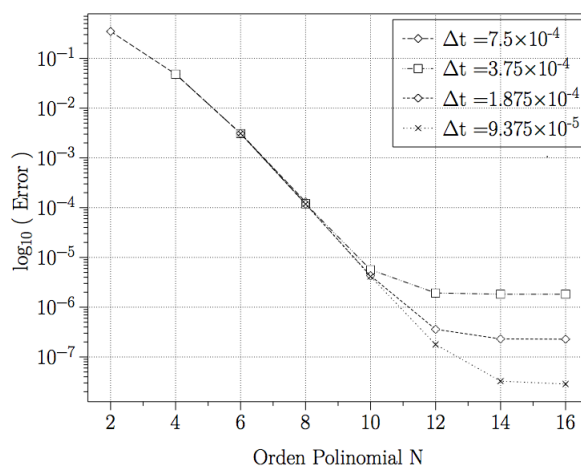


Figura 4: Estudio de convergencia espacio-temporal para el problema de reflexión y transmisión de ondas electromagnéticas viajando en dos medios isotrópicos y homogéneos, los cuales se encuentran separados por una interfaz plana vertical con características diferentes de permitividad ϵ y permeabilidad μ . El error se calculó en la norma del máximo en función de Δt y el orden polinomial. La gráfica muestra tercer orden de convergencia temporal y convergencia espectral en el espacio.

La Figura 4 presenta un estudio de convergencia espacio temporal para el problema de reflexión y transmisión de ondas electromagnéticas viajando en dos medios isotrópicos y homogéneos, los cuales se encuentran separados por una interfaz plana vertical con características diferentes de permitividad ϵ y permeabilidad μ . Se observa convergencia espectral en el orden polinomial hasta $N = 10$, esta se reduce en polinomios de orden superior debido al error temporal producido por los valores elegidos para Δt con el fin de demostrar convergencia en el tiempo de tercer orden. Disminuyendo los valores de Δt a un orden de 10^{-8} se recupera convergencia espectral en el orden polinomial. Estos resultados se deben a que el dato inicial es un pulso gaussiano el cual es infinitamente diferenciable y coinciden con lo que se espera en la teoría de métodos espectrales ([4]).

Observe, sin embargo, que la discretización no garantiza $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ o $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ [8]. Por lo tanto, es importante revisar el error de la divergencia en función del orden de aproximación. La Figura 5 presenta la convergencia del error en la divergencia para el caso de la Figura 4. Se observa entonces que la divergencia converge de forma exponencial en el orden polinomial.

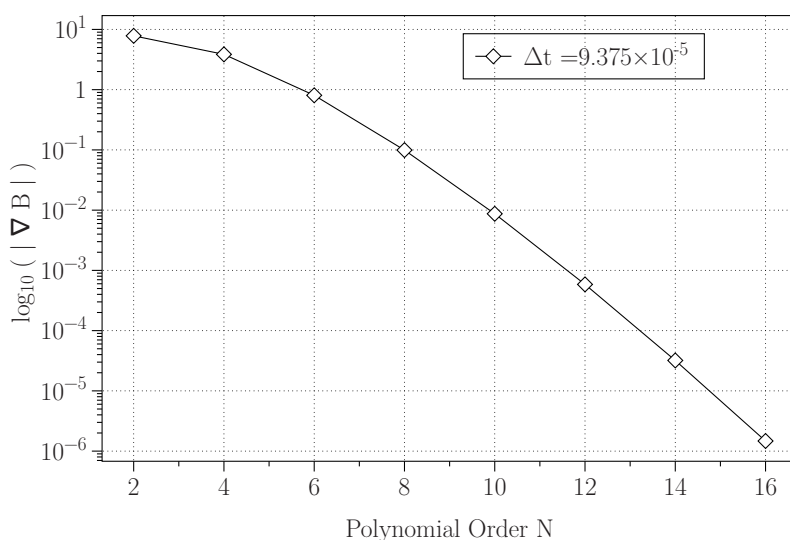


Figura 5: Cálculo de la divergencia para el problema de reflexión y transmisión de onda electromagnética. Se observa convergencia espectral en el espacio de la divergencia en función del orden polinomial.

Por otra parte, debido a que el resolvente de Riemann representado en la ecuación (42) transmite la información solo en la dirección normal, es importante cuantificar el error de la aproximación asociado con el ángulo de incidencia. Por lo tanto, se realizó un estudio del error en función del ángulo de incidencia del pulso gaussiano, específicamente, ángulos de la forma $\theta_j = (\pi/20)j$, $j = 0, \dots, 9$. El tiempo final para la simulación es $T = 1.5$ con $\Delta t = 0.000375$. La Figura 6 muestra el error en función del ángulo de incidencia. Se observa que el error es mayor para pequeños ángulos de incidencia, aunque la variación de este error no es significativa. En los casos de pequeños ángulos de incidencia es posible aumentar el orden polinomial de aproximación para alcanzar errores del mismo orden de magnitud de ángulos de incidencia mayores. Sin embargo, en todos los casos estudiados se puede obtener convergencia espacio-temporal mediante refinamiento.

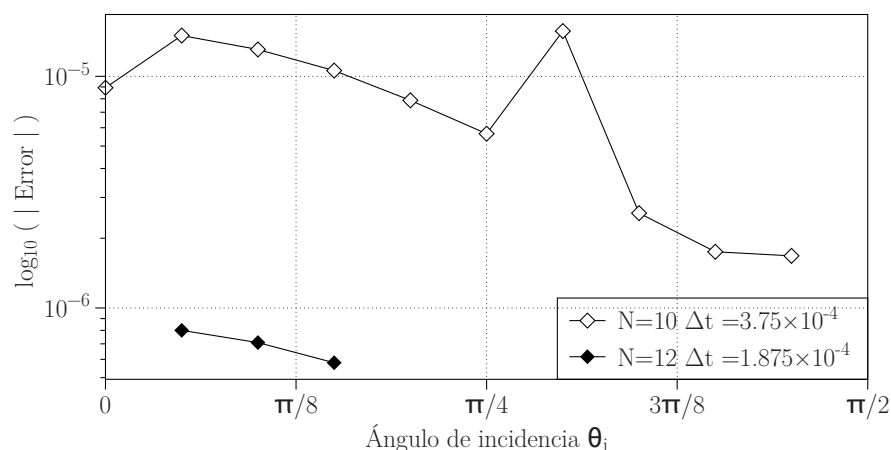


Figura 6: Error de la aproximación en función del ángulo de incidencia. Los ángulos son de la forma $\theta_j = (\pi/20)j$, $j = 0, \dots, 9$. Orden polinomial $N = 10$, paso en el tiempo $\Delta t = 3.75 \times 10^{-4}$.

5 Conclusiones

En este trabajo se derivó y evaluó una aproximación de elementos espectrales nodal de Galerkin discontinuo para calcular la reflexión y la transmisión de ondas electromagnéticas viajando en dos medios isotrópicos y homogéneos, los cuales se encuentran separados por una interfaz plana vertical con características diferentes de permitividad ε y permeabilidad μ . Los estudios realizados con

base en la solución analítica del problema permitieron validar el algoritmo evidenciando convergencia espectral en el espacio y de tercer orden en el tiempo, lo cual concuerda con los resultados observados en la literatura. Esto nos permite concluir que el algoritmo es lo suficientemente robusto como para realizar simulación de transmisión y reflexión de ondas y permitirá explorar la posibilidad de resolver problemas donde la interfaz entre los medios de propagación presente geometrías más complejas y cuya solución analítica sea computacionalmente difícil de calcular.

Agradecimientos

Esta investigación fue apoyada por la Universidad del Quindío mediante el proyecto de investigación con código 679.

Referencias

- [1] Acosta-Minoli, C.A.; Kopriva, D.A. (2012) "Boundary states at reflective moving boundaries", *Journal of Computational Physics* **231**(11): 4160–4184.
- [2] Acosta-Minoli, C.A.; Kopriva, D.A. (2010) "Discontinuous Galerkin spectral element approximations on moving meshes", *Journal of Computational Physics* **230**(15): 1876–1902.
- [3] Black, K. (1999) "A conservative spectral element method for the approximation of compressible fluid flow", *Kybernetika* **vol**(35): 133–146.
- [4] Canuto, C.; Hussaini M.Y.; Quarteroni A. (2006) *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*. Springer, Netherlands.
- [5] Censor, D. (2004) "Non-relativistic scattering by time-varying bodies and media", *Progress in Electromagnetics Research* **48**(1): 249–278.
- [6] Etienne S.; Garon, A.; Pelletier, D. (2009) "Perspective on the geometric conservation law and finite element methods for ale simulations of incompressible flow", *Journal of Computational Physics* **vol**(228): 2313–2333.
- [7] Kopriva, D.A. (1986) "A spectral multidomain method for the solution of hyperbolic systems", *Applied Numerical Mathematics* **2**(3): 221–241.

- [8] Kopriva, D.A.; Woodruff, S.; Hussaini, M.Y. (2002) "Computation of electromagnetic scattering with a non-conforming discontinuous spectral element method", *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **53**(1): 105–122.
- [9] Kopriva, D.A. (2006) "Metric identities and the discontinuous spectral element method on curvilinear meshes", *Journal of Scientific Computing* **26**(3): 301–327.
- [10] Kopriva, D.A. (2009) *Implementing Spectral Methods for Partial Differential Equations*. Springer, Netherlands.
- [11] Lee, S.W.; Mittra, R. (1967) "Scattering of electromagnetic waves by a moving cylinder in free space", *Canadian Journal of Physics* **45**(9): 2999–3007.
- [12] Mohammadian, A.H.; Shankar, V.; Hall, W.F. (1991) "Computation of electromagnetic scattering and radiation using a time-domain finite-volume discretization procedure", *Computer Physics Communications* **68**(1-3): 175–196.
- [13] Orfanidis, S. (2008) "Electromagnetic waves and antennas", en: <http://www.ece.rutgers.edu/~orfanidi/ewa>, consultado el 11/03/2017.
- [14] Patera, A.T. (1984) "A spectral element method for fluid dynamics laminar flow in a channel expansion", *Journal of Computational Physics* **54**(3): 468–488.
- [15] Shang, J.S. (1997) "Characteristic-based methods in computational electromagnetics", *Computational Electromagnetics and its Applications*. Kluwer Academic Publishers.
- [16] Toro, E.F. (2006) *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics. A Practical Introduction*, 2 ed. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [17] Williamson, J.H. (1980) "Low storage Runge Kutta schemes", *Journal of Computational Physics* **35**(1): 48–56.

