Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones 2007 **14**(2) : 157–164
cimpa – ucr   issn: 1409-2433

máximos y mínimos de funciones cuasiperiódicas

Vernor Arguedas*   Edwin Castro†

Recibido/Received: 22 Feb 2006; Aceptado/Accepted: 18 May 2007

Resumen

En este artículo se presentan algunos ejemplos y resultados de los máximos y mínimo de funciones cuasiperiódicas de acuerdo a los resultados presentados en: On a conjecture of Alexandr Fischer, `http://cariari.ucr.ac.cr/~vargueda/fischerconj.pdf`. Además se enfatiza en los problemas gráficos que surgen en este contexto.

Palabras clave: funciones cuasiperiódicas, transformada de Bochner, rango de Bochner, condición de Haraux.

Abstract

We present in this paper some examples and results of maxima and minima of almost periodic functions following the results in: On a conjecture of Alexandr Fischer, `http://cariari.ucr.ac.cr/~vargueda/fischerconj.pdf`. Further we remark the graphics problems which arise in this context.

Keywords: quasiperiodic functions, Bochner transform, Bochner rank, Haraux condition.

Mathematics Subject Classification: 42A75, 43A60, 35A22, 46F12.

*CIMPA—Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, 2060 San José, Costa Rica. E-Mail: `vargueda@amnet.co.cr, vargueda@cariari.ucr.ac.cr.`

†Misma dirección. E-Mail: `hyperion32001@gmail.com`.

1 Introduction

Seguimos las notaciones y definiciones que utilizamos en [CA1], [CA2], [CA4] y [CA5].

En [CA1] indicamos que "we call a continuous function $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ almost periodic if $\forall\varepsilon > 0$ there is an N-dimensional vector L whose entries are positive and satisfies that $\forall y \in \mathbb{R}^N$ there is a T in the N-dimensional box $[y, y + L]$ (componentwise) such that $|f[x + T] - f[x]| < \varepsilon$ for all x in $\mathbb{R}^N$."

En [CA3] se encuentra desde hace años el artículo en una versión preliminar "On a conjecture of Alexandr Fischer".

En ese trabajo demostramos los teoremas siguientes:

1. Sea $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ una función cuasi periódica. Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión no acotada entonces:para toda subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que: $f[x_- + x_{n_k}] -> f[x_{-.} + x_0]$ de manera uniforme si y sólo si f alcanza su máximo y su mínimo

2. Un función continua cuasi periódica es perIódica si y sólo si alcanza su máximo y su mínimo.

3. El rango de Bochner de una función cuasiperiódica periódica es compacto si y sólo si la función alcanza su máximo y su mínimo.

Recordemos que si $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ es una función cuasiperiódica, entonces f tiene el rango de Bochner compacto si para cualquier sucesión N-dimensional $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existen una subsucesión $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ y $x_0 \in \mathbb{R}^N$ tal que $f[x_- + x_{n_k}] \to f[x_- + x_0]$ converge uniformemente cuando $k \to \infty$.

Con diversas variaciones la esencia de las demostraciones se basa en el estudio de sucesiones de funciones de la forma $f[x_- + x_n]$ en donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está en el dominio de f, en el artículo citado siempre es $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}$.

Creemos que al margen de los detalles técnicos de las demostraciones, los resultados son muy geométricos.

2 Ejemplos

Los siguientes ejemplos de funciones muestran los problemas gráficos de interpretación.

Para efectos computacionales las funciones cuasiperiódicas son funciones periódicas, cuyo periodo depende de la forma en que se aproxime racionalmente algún cuasiperiodo. Esto presenta un cierto obstáculo.

En este artículo usamos un decimal, i.e. $n = 2$ en la aproximación de los periodos irracionales.

Comencemos con la función cuasiperiódica:

$$f_1(x) = \sin(x) + \sin(\sqrt{2} \times x)$$

cuyo gráfico es aproximadamente el mostrado en la figura 1.

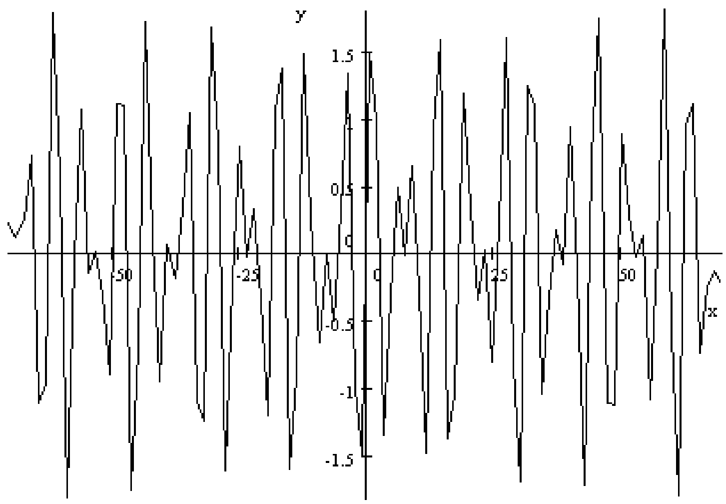

Figura 1: Gráfico de la función $f_1(x) = \sin(x) + \sin(\sqrt{2} \times x)$.

La computadora muestra un gráfico que induce a creer en la periodicidad de dicha función; lo mismo ocurre con el ejemplo de la figura 2, para la función

$$f_2(x) = \cos(x) + \sin(\sqrt{2}x).$$

Los periodos mínimos son más grandes a medida que aumenta el número de dígitos en la aproximación de $\sqrt{2}$. De hecho los periodos mínimos teóricos crecen muy rápido, en este caso para 2π y $\sqrt{2}$ son de la forma: $T = 2 \times \pi \times 10^{(n-1)}$ en donde $n-1$ es el número de decimales de $\sqrt{2}$.

Es muy sencillo demostrar que esas funciones son realmente cuasiperiódicas y que no alcanzan simultáneamente su máximo y su mínimo.

Como tercer ejemplo presentamos una función periódica con un gráfico parecido a las anteriores:

$$f_3(x) = \sin 3x + \cos 5x,$$

esta función alcanza su máximo y su mínimo (ver figura 3).

La función *-periódica

$$f_4(x, y) = \sin x \cos \sqrt{2}y$$

tiene como periodo mínimo a $T = (2\pi, \frac{2\pi}{\sqrt{2}})$.

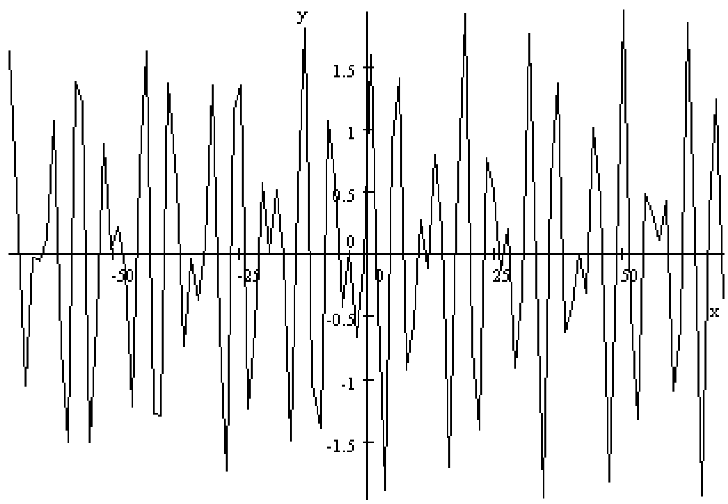

Figura 2: Gráfico de la función $f_2(x) = \cos(x) + \sin(\sqrt{2}x)$.

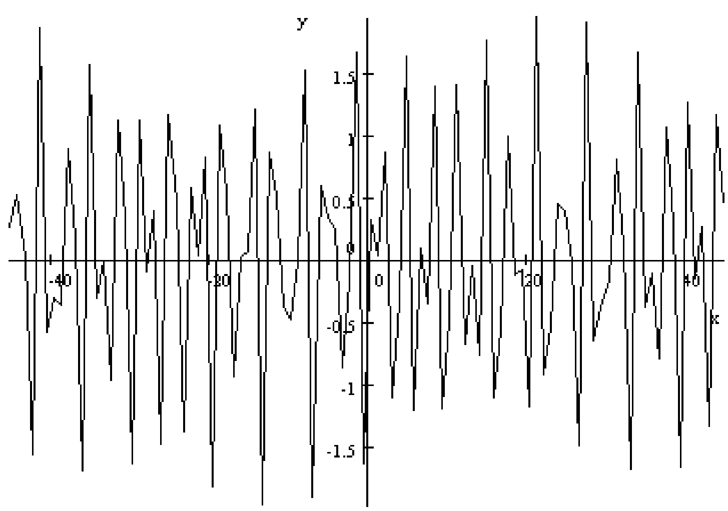

Figura 3: Gráfico de la función $f_3(x) = \sin 3x + \cos 5x$.

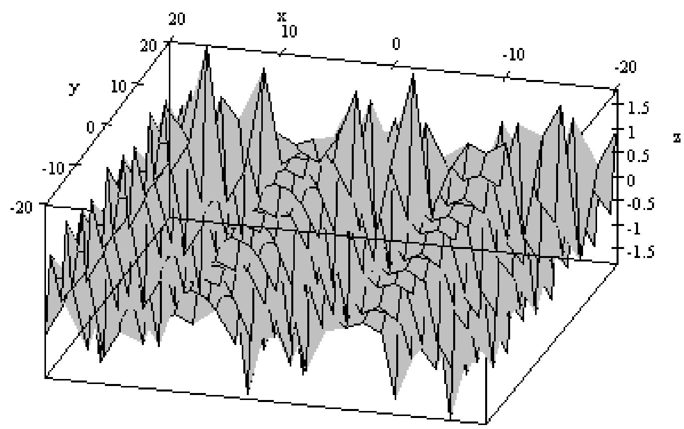

Figura 4: Gráfico de la función $f_4(x,y) = \sin x \cos \sqrt{2}y$.

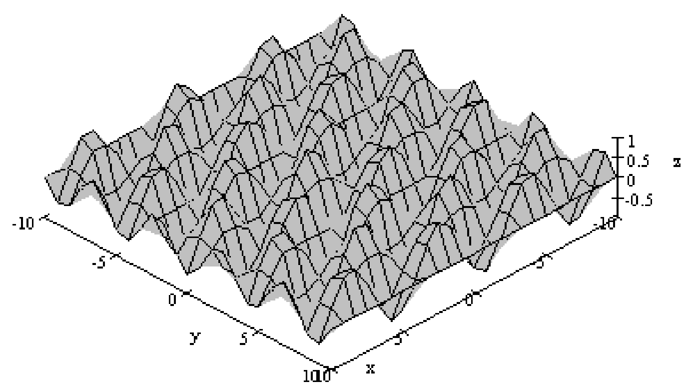

Figura 5: Gráfico de la función $f_5(x,y) = (\sin x + \sin \sqrt{2}x) \times \cos \sqrt{2}y$.

El siguiente ejemplo es de una función cuasi periódica en dos dimensiones (ver su gráfico en la figura 5):

$$f_5(x, y) = (\sin x + \sin \sqrt{2}x) \times \cos \sqrt{2}y.$$

En el primer argumento es cuasiperiódica y periódica en el segundo, es fácil demostrar que una función de variables separables es $*$-periódica si y sólo si cada función es periódica. Esta función no alcanza su máximo y su mímimo. Esta condición no es fácil de visualizar.

En el artículo citado demostramos el siguiente lema.

Lema 1 *Sea $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una función cuasi periódica, sea $(x_n) \in \mathbb{R}^N$ una sucesión convergente a $x_o \in \mathbb{R}^N$, entonces $f[x_{-} + x_n] \to f[x_{-} + x_0]$ de manera uniforme.*

Las sucesiones no acotadas $(x_n) \in \mathbb{R}^N$ presentan características muy interesantes; por ejemplo $\sin[x_{-} + n], n \in \mathbb{N}$ satisface que:

Para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ existe una subsucesión $(n_k) \subset \mathbb{R}$ tal que $\sin[x_{-}+n_k] \to \sin[x_{-}+x_0]$ de manera uniforme cuando $k \to \infty$. En el mismo sentido anterior se tiene que $\sin[x_{-}+2\pi n] \to \sin[x_{-} + 0] = \sin[x_{-}]$.

Sin embargo en el ejemplo $\cos(x) + \sin(\sqrt{2} \times x)$ podemos encontrar sucesiones no acotadas para las cuales existen subsucesiones que no admiten la existencia de un $x_0 \in \mathbb{R}$, como en el ejemplo anterior, basta por ejemplo considerar la sucesión:

$$x_n = 2\pi n, n \in \mathbb{N}.$$

La condición de alcanzar el máximo y el mínimo simultáneamente en el teorema de la periodicidad para funciones cuasiperiódicas no es debilitable.

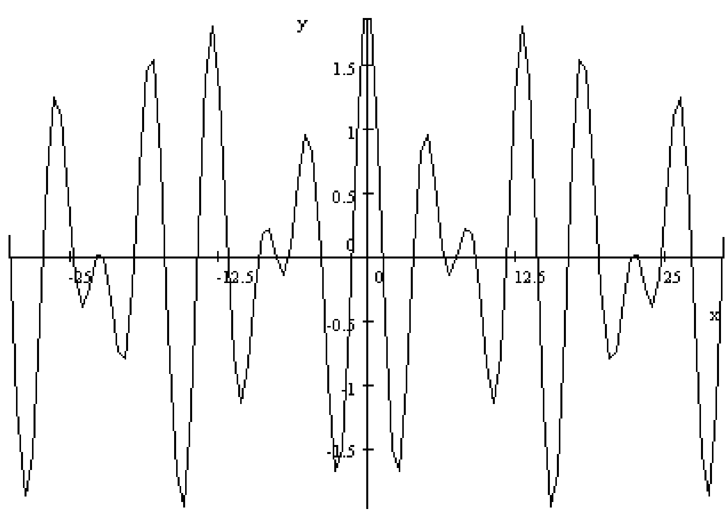

Figura 6: Gráfico de la función $f_6(x) = \cos[x_{-}] + \cos[\sqrt{2}x_{-}]$.

Por ejemplo $|\sin[x\_] + \sin[\sqrt{2}x\_]|$ es una función cuasi periódica que alcanza su mínimo en $x = 0$, su máximo es 2 que no lo alcanza la función.

Por otra parte

$$f_6(x) = \cos[x\_] + \cos[\sqrt{2}x\_]$$

es una función cuasiperiódica que alcanza su máximo en $x = 0$, su mínimo -2 no lo alcanza. El gráfico mostrado en la figura 6 es muy ilustrativo.

Concluimos este artículo, presentando un resultado sencillo que se deduce de [CA3] y las técnicas ahí utilizadas.

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función cuasi periódica y si existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $f[t_0] > 0$ entonces existe una sucesión $(a_n) \subset \mathbb{R}$ y existe $a > 0$ tal que $a_n \to \infty$ y $f[a_n] \to a$.

Un resultado análogo se obtiene en el caso $f[t_0] < 0$.

Referencias

[Bo] Bohr, H. (1951) *Almost Periodic Functions*. Chelsea Publishing Company, New York.

[Be] Besicovitch, A.S. (1954) *Almost Periodic Functions*. Dover Publications Inc, New York.

[Bl] Blot, J. (1996) "Variational methods for the almost periodic Lagrangian oscilations", *Cahiers Eco et Maths C.E.R.M.S.E.M.* 96, 44.

[Bo2] Bochner, S. (1992) *Collected Papers of Salomon Bochner*, Part2. American Mathematical Society, Providence RI.

[Ca] Castro, E. (1994) "Funciones periódicas, cuasiperiódicas y clasificación de funciones", *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **1**(1): 73–86.

[CA1] Castro, E.; Arguedas, V. (1998) "Funciones *–periódicas", *VI Encuentro Centroamericano de Investigadores Matemáticos*, Managua: 41–49.

[CA2] Castro, E.; Arguedas, V. (2000) "Algunos aspectos teóricos de las funciones casiperiódicas N-dimensionales", *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **7**(1-2): 165–174.

[CA3] Castro, E.; Arguedas, V. (1998) "On a Conjecture of Alexandr Fisher ", `http://cariari.ucr.ac.cr/~vargueda/fischerconj.pdf`

[CA4] Arguedas, V.; Castro, E. (2003) "N–dimensional almost periodic functions II", *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **10**(1-2): 199–205.

[CA5] Arguedas, V.; Castro, E. (2004) "Some aspects in n-dimensional almost periodic functions III", *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones* **11**(2): 25–33.

[CA6] Castro, E.; Arguedas, V. (2006) "Periodic and almost periodic functions", *Studia Univ. Babeş-Bolyai, Mathematica* **51**(3): 31–40.

[Co] Cooke, R. (1981) "Almost periodic functions", *Amer. Math. Monthly* **88**(7): 515–525.

[Cor] Corduneanu, C. (1989) *Almost Periodic Functions*. Chelsea Publishing Company, New York.

[Fi] Fink, A.M. (1977) *Almost Periodic Differential Equations*. Lectures Notes in Mathematics 377, Springer Verlag, New York.

[Fis] Fischer, A. (1996) "Structure of Fourier exponents of almost periodic functions and periodicity of almost periodic functions", *Mathematica Bohemica* **3**: 249–262.

[Ha] Haraux, A. (1987) "A simple almost-periodicity criterion and applications", *Journal of Differential Equations* **66**: 51–61.

[Mu] Muntean, I. (1990) *Analiza Functionala: Capitole Speciale*. Universitatea Babes-Bolyai, Cluj-Napoca.