

UN ANÁLISIS DE ONDAS ULTRASÓNICAS NO LINEALES EN LÍQUIDOS CON BURBUJAS MEDIANTE UN MODELO NUMÉRICO

AN ANALYSIS OF NONLINEAR ULTRASONIC WAVES IN BUBBLY LIQUIDS BY A NUMERICAL MODEL

MARÍA TERESA TEJEDOR SASTRE* CHRISTIAN VANHILLE†

*Received: 01/04/2022; Revised: 22/07/2022;
Accepted: 23/11/2022*

Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones is licensed under a Creative Commons
Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License.
<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>



*Universidad Rey Juan Carlos, Departamento de Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de los Materiales y Tecnología Electrónica, Numerical Analysis in Nonlinear Acoustics research group, Madrid, España. E-Mail: mariateresa.tejedor@urjc.es

†Universidad Rey Juan Carlos, Matemática Aplicada, Ciencia e Ingeniería de los Materiales y Tecnología Electrónica, Numerical Analysis in Nonlinear Acoustics research group, Madrid, España. E-Mail: mailto:christian.vanhille@urjc.es

Resumen

En este artículo de recolección e investigación se estudia la propagación de ondas ultrasónicas en líquidos con burbujas de gas. Estos medios son extremadamente no lineales, una pequeña fracción de vacío cambia drásticamente las propiedades acústicas del medio. Las burbujas de gas no sólo producen una alta no linealidad, sino que también producen fenómenos de dispersión y atenuación que son muy importantes para el comportamiento ultrasónico. Se presentan aquí varios resultados obtenidos mediante un modelo numérico desarrollado previamente (basado en el método de los volúmenes finitos en la dimensión espacial y en el método de las diferencias finitas en el dominio temporal) que permite analizar algunos efectos complejos asociados a este problema. El modelo resuelve un sistema diferencial que acopla las oscilaciones no lineales de las burbujas y el campo acústico. Nos centramos principalmente en entender como potenciar la generación de nuevas frecuencias (armónicos y subarmónicos a partir de una fuente de una frecuencia y frecuencias suma y diferencia a partir de una fuente de dos frecuencias) teniendo en cuenta algunos aspectos como el tipo de cavidad, el suavizado y optimización del medio.

Palabras clave: Acústica no lineal; líquidos con burbujas; ultrasonidos; modelos numéricos.

Abstract

In this survey article we study the propagation of ultrasonic waves in liquids with gas bubbles. These media are extremely nonlinear. A tiny void fraction changes the properties of the medium drastically. The gas bubbles not only produce high nonlinearity, but also introduce dispersive phenomena and attenuation that can be decisive for the ultrasonic behavior. Several results obtained by a numerical model previously developed (based on the finite-volume method in the space dimension and the finite-difference method in the time domain) are presented here, which allow us to analyze some complex effects associated with this problem. The model solves a differential system that couples the nonlinear oscillations of the bubbles and the acoustic field. We mainly focus on understanding how to enhance the generation of new frequencies (harmonics and subharmonics from a one-frequency source and sum and difference frequencies from a two-frequency source) taking into account some aspects such as cavity type, smoothing and optimization of the medium.

Keywords: Nonlinear acoustics; bubbly liquids; ultrasound; numerical models.

Mathematics Subject Classification: 65Lxx, 65Mxx, 65Nxx, 65Zxx.

1 Introducción

Los medios con varias fases son muy interesantes debido a que nos permiten sacar partido a diferentes propiedades de las fases que los componen. En particular, los líquidos con burbujas lo son, puesto que una muy pequeña cantidad de gas en forma de burbujas transforma drásticamente las propiedades del líquido, cambiándolo a un medio extremadamente no lineal, muy dispersivo y cuya atenuación aumenta en varias órdenes de magnitud [4].

Debido a ese gran aumento de la no linealidad cuando un campo acústico se propaga a través de un medio con burbujas ocurren efectos muy interesantes como es la generación de nuevas frecuencias. Se producen frecuencias múltiples o submúltiplos cuando la onda que se propaga es de una frecuencia y se generan también la suma y la diferencia de frecuencias cuando se propaga una onda con varias frecuencias. [5, 1].

Generar nuevas frecuencias es muy interesante, nos permite aprovechar propiedades de varias frecuencias al mismo tiempo. Las frecuencias mayores (armónicos, frecuencia suma) nos proporcionan, a partir de una frecuencia de menor atenuación, unas frecuencias con una mayor resolución [12]. Sin embargo, generar frecuencias menores (subarmónicos, frecuencia diferencia) nos proporciona, a partir de unas frecuencias de mayor resolución unas frecuencias de menor atenuación y que por tanto van a poder viajar más lejos [11, 1]. Generar unas u otras dependerá de la aplicación [6, 2, 3].

En este trabajo de investigación, disponible también en una presentación en versión online [10], se presentan resultados parcialmente publicados mediante un modelo numérico desarrollado anteriormente [8], intentamos comprender la generación de nuevas frecuencias, así como estudiar qué mecanismos influyen en su producción a fin de potenciarlas. En la Sección 2 se presenta el modelo matemático que se utiliza para describir este fenómeno físico. En la Sección 3 se presentan varios resultados, en primer lugar con fuentes de una frecuencia (Sección 3.1) para obtener frecuencias mayores, Sección 3.1.1, y menores, Sección 3.1.2. También se muestran resultados para fuentes de dos frecuencias (Sección 3.2) para estudiar la frecuencia diferencia, Sección 3.2.1, y la frecuencia suma, Sección 3.2.2. Finalmente en la Sección 4 se dan las conclusiones derivadas de este trabajo.

2 Modelo matemático

Se considera un campo ultrasónico que se propaga a través de un líquido con una alta densidad de pequeñas burbujas de aire distribuidas de forma uniforme

en una cavidad unidimensional cuyo dominio es desde $x = 0$ a $x = L$, siendo x la coordenada espacial.

La interacción no lineal entre el campo de presión acústica $p(x, t)$ y las vibraciones de las burbujas $v(x, t) = V(x, t) - v_{0g}$ (variación de volumen respecto al volumen inicial), puede describirse mediante el sistema de ecuaciones diferenciales formado por la ecuación de onda (1) y una ecuación de Rayleigh-Plesset (2), donde t es el tiempo, T_t es el tiempo total que dura el experimento, V es el volumen de la burbuja, y $v_{0g} = \frac{4}{3}\pi R_{0g}^3$ es el volumen inicial de la burbuja, de radio R_{0g} .

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c_{0l}^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\rho_{0l} N_g \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < T_t, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \delta \omega_{0g} \frac{\partial v}{\partial t} + \omega_{0g}^2 v + \eta p = av^2 + b \left(2v \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 \right), \quad (2)$$

$$0 \leq x \leq L, \quad 0 < t < T_t.$$

En la Ecuación (1), c_{0l} y ρ_{0l} son respectivamente la velocidad de propagación del sonido y la densidad en el estado de equilibrio del líquido, N_g es la densidad de las burbujas, el término $\rho_{0l} N_g \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ está asociado a la influencia de las burbujas sobre el campo acústico [4][5].

En la Ecuación (2), $\delta = 4\nu_l/\omega_{0g}R_{0g}^2$ es el coeficiente de amortiguación viscosa del líquido con burbujas, en el que ν_l es la viscosidad cinemática del líquido, $\omega_{0g} = \sqrt{3\gamma_g p_{0g}/\rho_{0l}R_{0g}^2}$ es la frecuencia de resonancia de las burbujas, en la que γ_g es la cociente de calores específicos del gas, $p_{0g} = \rho_{0g}c_{0g}^2/\gamma_g$ es su presión atmosférica, ρ_{0g} y c_{0g} son la densidad y la velocidad del sonido en el estado de equilibrio del gas, por tanto el término $\delta\omega_{0g} \frac{\partial v}{\partial t}$ está asociado a la viscosidad. El parámetro $\eta = 4\pi R_{0g}/\rho_{0l}$ es una constante y está asociado a la influencia del campo acústico sobre la burbuja. $a = (\gamma_g + 1)\omega_{0g}^2/2v_{0g}$ y $b = 1/6v_{0g}$ son los coeficientes no lineales correspondientes a la ley adiabática del gas y a la dinámica de las burbujas [4][5].

Las condiciones iniciales son las siguientes:

$$p(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq L. \quad (3)$$

La fuente de presión que se denota por $s(t)$ situada en $x = 0$, es una función de presión sinusoidal de una frecuencia (Sección 3.1) o de dos frecuencias (Sección 3.2):

$$s(t) = p(x = 0, t), \quad 0 \leq t \leq T_t. \quad (4)$$

Como condiciones de contorno se tiene, en cada caso, bien condición de pared libre (5) o bien pared reflectante (6) en $x = L$:

$$p(L, t) = 0, 0 \leq t \leq T_t, \quad (5)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x}(L, t) = 0, 0 \leq t \leq T_t. \quad (6)$$

Este modelo considera que las burbujas son la única fuente atenuación, dispersión y no linealidad. Se asumen también las siguientes restricciones físicas: las burbujas tienen el mismo tamaño, son esféricas y oscilan en su primer modo radial, se desprecia su tensión superficial, y que oscilan a amplitud finita pero moderada (no se modela el colapso), no irradian sonido, se utiliza la ley adiabática de los gases, y su amortiguación térmica se considera despreciable. Además, la fracción de vacío del medio debe ser muy inferior a uno, y no se tienen en cuenta las fuerzas de empuje, de Bjerknes y de arrastre viscoso [4][12].

Este sistema diferencial (las Ecuaciones (1)-(4) junto a la Ecuación (5) o la Ecuación (6)) se resuelve utilizando el modelo numérico desarrollado en [8]. Este modelo está basado en el método de volúmenes finitos en la dimensión espacial y en el método de diferencias finitas en la dimensión temporal. Se han utilizado 100 volúmenes por cada longitud de onda λ y 400 puntos temporales por periodo de la frecuencia f en cada apartado de la Sección 3.

3 Resultados

Se usan los siguientes datos para el líquido con burbujas: $c_{0l} = 1500 \text{ m/s}$, $\rho_{0l} = 1000 \text{ kg/m}^3$, y $\nu_l = 1.4310^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ para el líquido (agua) y $c_{0g} = 340 \text{ m/s}$, $\rho_{0g} = 1,29 \text{ kg/m}^3$, y $\gamma_g = 1,4$ para el gas (aire). En todos los casos el tiempo total del experimento es lo suficientemente alto como para garantizar que se alcanza el régimen estacionario.

3.1 Fuente de una frecuencia f

En este apartado se usa una fuente continua de presión $s(t) = p_0 \text{sen}(\omega t)$, $\omega = 2\pi f$ y diferentes condiciones de contorno según las frecuencias que se quieran generar.

3.1.1 Generación de armónicos

3.1.1.1 Cavidad $L = \lambda/4$ vs. cavidad $L = \lambda/2$

En este apartado se usa la condición de contorno, Ecuación (5), con dos longitudes de resonador $L = \lambda/4$ y $L = \lambda/2$, con $f = 200 \text{ kHz}$ y $R_{0g} = 2,5 \text{ }\mu\text{m}$, y la densidad de la burbujas es $N_g = 5 \times 10^{11} \text{ m}^{-3}$ para ver qué cavidad parece más idónea para generar armónicos. En la Figura 1 se muestra la FFT (transformada rápida de Fourier) de la cavidad de longitud $L = \lambda/4$ con una amplitud de presión en la fuente baja $p_0 = 1 \text{ Pa}$ donde tan sólo aparece la f fundamental, (con una amplitud del 100% respecto a p_0 , como era de esperar). En la Figura 2 se muestra la FFT de la cavidad de longitud $L = \lambda/4$ con una amplitud de presión en la fuente de $p_0 = 25 \text{ kPa}$, como se puede observar se obtienen amplitudes de 100% para f , 53,7% para $2f$, 4,6% para $3f$ y 2,7% para $4f$ respecto a p_0 .

En la Figura 3 se muestra la FFT de la cavidad de longitud $L = \lambda/2$ con una amplitud de presión en la fuente de $p_0 = 250 \text{ Pa}$, se obtienen amplitudes de 6900% para f , 209% para $2f$, 103% para $3f$ y 9,6% para $4f$ respecto a p_0 . Como se puede observar con amplitudes de la fuente muy diferentes se obtienen amplitudes de frecuencias de la fuente del mismo orden de magnitud $p_{max} = 25 \text{ kPa}$ (Figura 2) y $p_{max} = 17,25 \text{ kPa}$ (Figura 3), la principal diferencia es donde se sitúa el máximo, para el resonador $L = \lambda/4$ se sitúa en $x = 0$ y para el resonador $L = \lambda/2$ se sitúa en $x = \lambda/4$. Si nos fijamos en las amplitudes de los armónicos (respecto a la amplitud de la fuente) se observa que las amplitudes son mucho mayores cuando la longitud del resonador es $L = \lambda/2$, la mejora es del orden del 150% respecto a p_0 , como se observa en la Figura 4.

3.1.1.2 Resonancia no lineal

En este apartado se sigue considerando el mismo tipo de condición de contorno de pared libre, Ecuación (5), y una longitud de resonador $L = \lambda/2$ y burbujas de $R_{0g} = 2,5 \text{ }\mu\text{m}$ con densidad $N_g = 5 \times 10^{11} \text{ m}^{-3}$, para potenciar la generación de armónicos, esta vez teniendo en cuenta el suavizado del medio [9]. Cuando las amplitudes aumentan ocurre que la velocidad de propagación del ultrasonido disminuye y eso hace que la longitud de la onda no encaje a la perfección en la cavidad (se pierde la resonancia) y por tanto no se obtiene un nivel óptimo de frecuencia fundamental y por tanto de armónicos. Para cada amplitud se busca cual es la nueva frecuencia de resonancia de la cavidad para

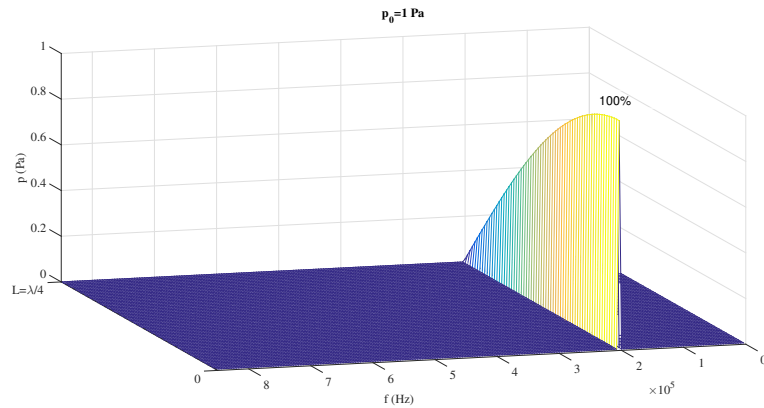


Figura 1: FFT en la cavidad $L = \lambda/4$, con amplitud en la fuente presión de $p_0 = 1 Pa$, y condición de contorno de pared libre, Ecuación (5). Los porcentajes son respecto a p_0 .

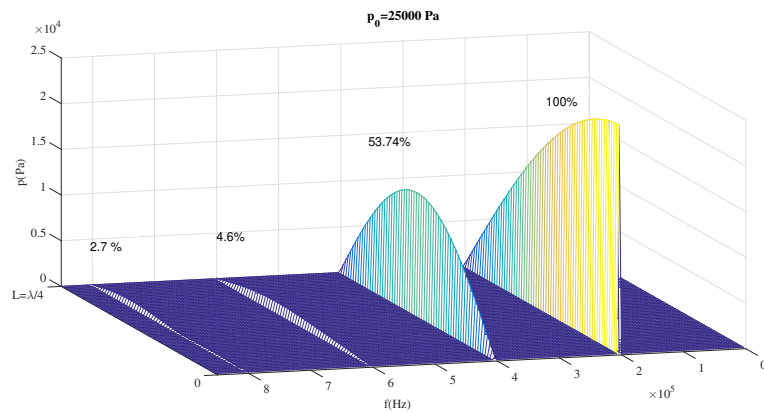


Figura 2: FFT en la cavidad $L = \lambda/4$, con amplitud en la fuente presión de $p_0 = 25 kPa$, y condición de contorno de pared libre, Ecuación(5). Los porcentajes son respecto a p_0 .

así obtener mayores amplitudes de frecuencia fundamental y por tanto de armónicos. En la Figura 5 se muestra como varía la f de resonancia de la cavidad en función de la amplitud de la fuente de presión. En la Figura 6 se muestra la amplitud en toda la cavidad que tienen el segundo, tercer y cuarto armónico considerando la resonancia lineal (líneas continuas) y las amplitudes del segundo, tercer y cuarto armónico considerando la resonancia no lineal (líneas discontinuas). Como se puede observar, teniendo en cuenta la propiedad del suavizado

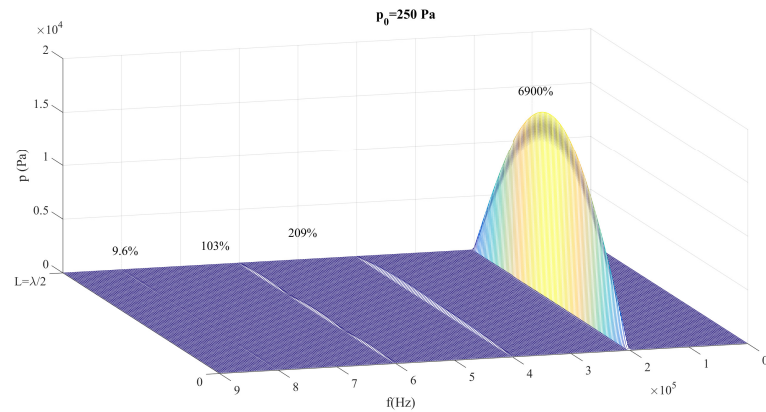


Figura 3: FFT en la cavidad $L = \lambda/2$, con amplitud en la fuente presión de $p_0 = 250$ Pa, y condición de contorno de pared libre, Ecuación (5). Los porcentajes son respecto a p_0 .

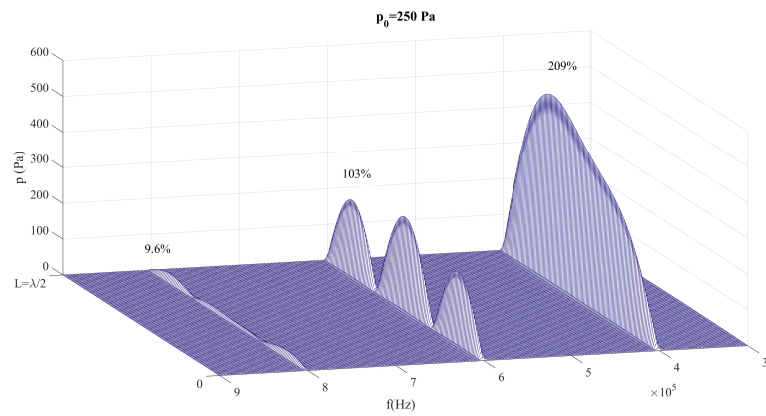


Figura 4: Detalle de la FFT en la cavidad $L = \lambda/2$, con amplitud en la fuente presión de $p_0 = 250$ Pa, condición de contorno de pared libre, Ecuación(5). Los porcentajes son respecto a p_0 .

del medio se obtienen amplitudes que mejoran en torno al 200% para los tres armónicos considerados.

3.1.1.3 Optimización del medio

Como hemos visto hasta ahora, los líquidos con burbujas son muy interesantes para generar nuevas frecuencias. En este caso se ha hecho un

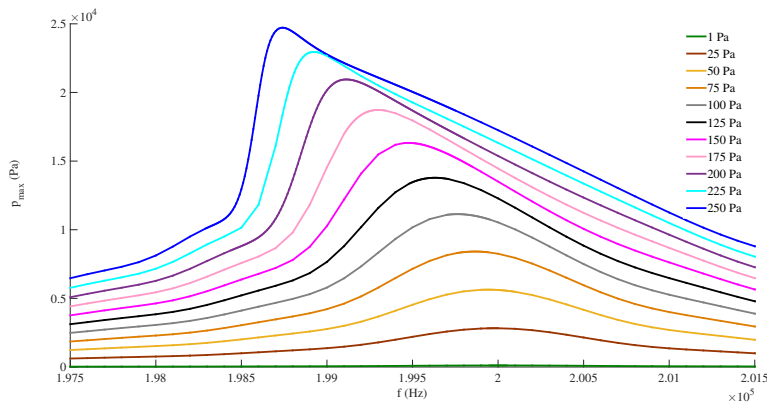


Figura 5: Presión máxima de la frecuencia fundamental f en la cavidad en función de la f fuente para diferentes amplitudes, longitud de resonador $L = \lambda/2$, y condición de contorno de pared libre, Ecuación(5).

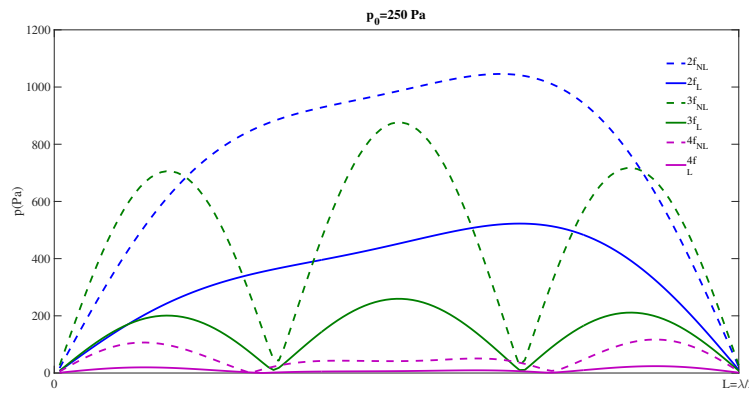


Figura 6: Amplitudes de presión de $2f_{NL}$, $3f_{NL}$, $4f_{NL}$ teniendo en cuenta el suavizado (líneas discontinuas) y amplitudes presión de $2f_L$, $3f_L$, $4f_L$ sin tener en cuenta el suavizado del medio (líneas continuas), longitud de resonador $L = \lambda/2$, y condición de contorno de pared libre, Ecuación (5).

estudio, para una frecuencia $f = 200 \text{ kHz}$ y una cantidad de aire fija, para ver qué medio es más interesante para generar armónicos, un medio con más burbujas más pequeñas o uno con menos burbujas pero más grandes. En este caso se trabaja con una longitud de resonador $L = \lambda/4$ para controlar mejor la amplitud máxima que se alcanza en la cavidad, y una amplitud en la fuente $p_0 = 20 \text{ kpa}$. En la Figura 7 se representa el valor máximo de amplitud de

presión para el segundo armónico en función del cociente entre la f de la fuente y la frecuencia de resonancia de la burbuja f_{0g} . Como se puede observar cuanto mayor es el cociente entre f/f_{0g} más amplitud tiene el segundo armónico, lo cual se traduce en cuantas más burbujas más pequeñas más amplitud del segundo armónico se obtiene.

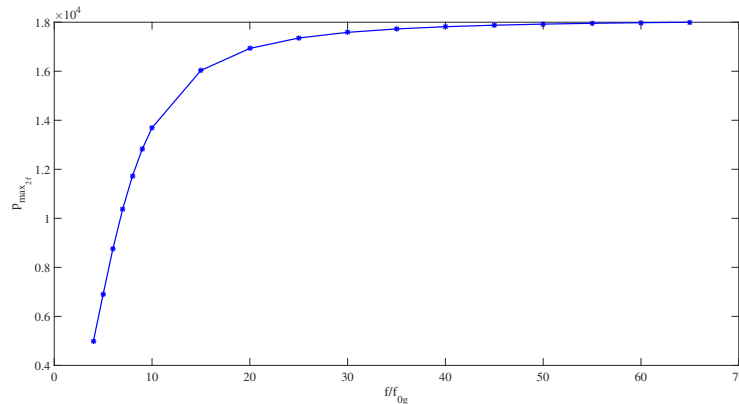


Figura 7: Amplitud de presión máxima para $2f$ para una misma cantidad de aire (varía la cantidad y el tamaño de las burbujas) en función del cociente f/f_{0g} , longitud de resonador $L = \lambda/4$, $p_0 = 20 \text{ kPa}$, y condición de contorno de pared libre, Ecuación (5).

3.1.2 Generación de subarmónicos

Con una fuente de una frecuencia también podemos generar subarmónicos. En este caso la condición de contorno que usamos es pared reflectante, Ecuación (6), y dos longitudes de resonador $L = \lambda/2$ y $L = \lambda$ con frecuencia fuente $f = 300 \text{ kHz}$ y radio de la burbuja $R_{0g} = 2,5 \text{ }\mu\text{m}$ y densidad $N_g = 5 \times 10^{11} \text{ m}^{-3}$.

3.1.2.1 Cavity $L = \lambda/2$

Cuando la amplitud es baja $p_0 = 1 \text{ Pa}$ tras aplicar la FFT, sólo aparece la frecuencia f de la fuente como se muestra en la Figura 8, sin embargo cuando aumentamos la amplitud a $p_0 = 14 \text{ kPa}$, además de f aparecen varias frecuencias como se observa en la Figura 9, entre ellas una de gran amplitud $f/2$ con amplitud $p_{m,f/2} = 35,7 \text{ kPa}$ (255% respecto p_0). Este comportamiento resulta que no es progresivo, sino que tiene un comportamiento abrupto, hay

que superar un cierto umbral de presión para que aparezca esta frecuencia [7]. Además, una vez que se ha generado dicha frecuencia el crecimiento parece ser lineal con la amplitud de la fuente, como se ve en la Figura 10.

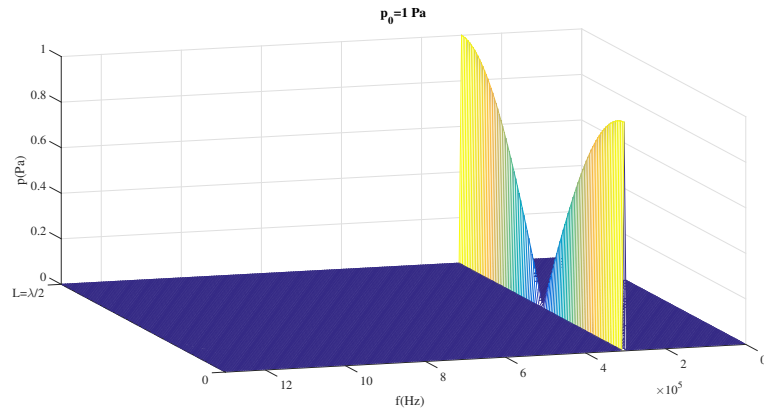


Figura 8: FFT en la cavidad $L = \lambda/2$, $p_0 = 1 Pa$, condición de contorno (6).

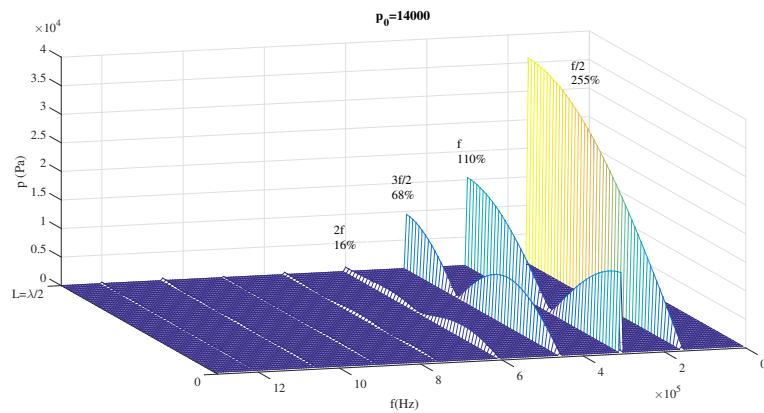


Figura 9: FFT en la cavidad $L = \lambda/2$, $p_0 = 14k Pa$, condición de contorno (6). Los porcentajes son respecto a p_0 .

3.1.2.2 Cavidad $L = \lambda$

Cuando la amplitud es alta con esta longitud de resonador, tras aplicar la FFT, $p_0 = 14 kPa$ aparecen varias frecuencias como se puede observar en la Figura

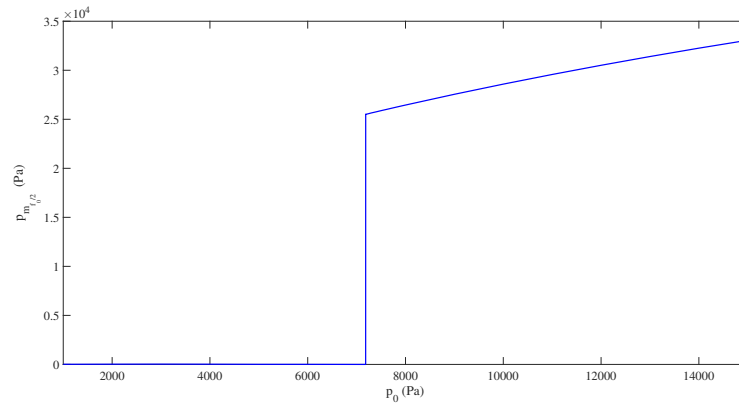


Figura 10: Amplitud máxima de $f/2$ en función de la amplitud de la fuente, $L = \lambda/2$, condición de contorno (6).

11, entre ellas dos de gran amplitud $f/4$ y $3f/4$ con amplitudes $p_{m,f/4} = 18,62kPa$ (133% respecto p_0) y $p_{m,3f/4} = 12,32kPa$ (88% respecto p_0). Este comportamiento tampoco es progresivo, sino que tiene un comportamiento abrupto, hay que superar un cierto umbral de presión para que aparezcan estas frecuencias. Además, una vez que se han generado dichas frecuencias el crecimiento parece ser lineal con la amplitud de la fuente como se puede observar en la Figura 12.

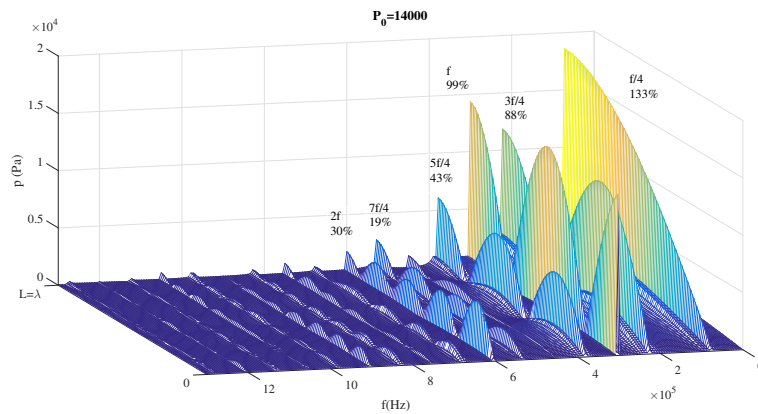


Figura 11: FFT en la cavidad $L = \lambda$, $p_0 = 14 kPa$, condición de contorno (6). Los porcentajes son respecto a p_0 .

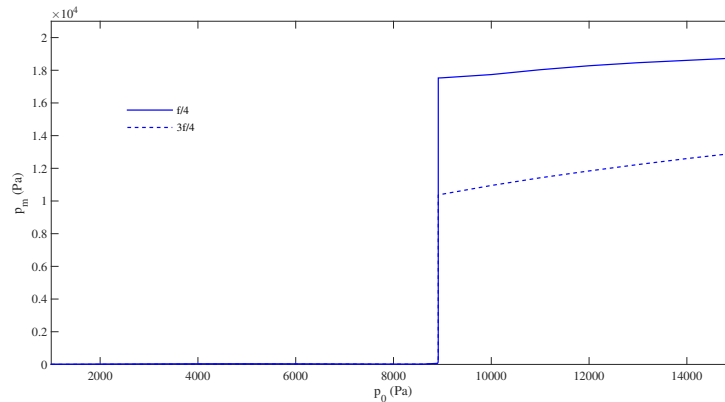


Figura 12: Amplitud máxima de $f/4$, $3f/4$ en función de la amplitud de la fuente, $L = \lambda$, condición de contorno (6).

3.2 Fuente de dos frecuencias f_1, f_2

En este apartado se usa una fuente continua de presión $s(t) = p_0(\text{sen}(\omega_1 t) + \text{sen}(\omega_2 t))$, $\omega_1 = 2\pi f_1$ y $\omega_2 = 2\pi f_2$, $f_1 = 700 \text{ kHz}$, $f_2 = 900 \text{ kHz}$, $R_{0g} = 2,5 \text{ }\mu\text{m}$, $L = \lambda_d/2$ y la condición de contorno (5). Cuando se tiene una baja amplitud de la fuente $p_0 = 1 \text{ Pa}$, una vez aplicada una FFT, se obtiene la Figura 13, sin embargo cuando aumentamos la amplitud de la fuente a $p_0 = 7,5 \text{ kPa}$, se generan frecuencias menores, como la frecuencia diferencia $f_d = f_2 - f_1$ con amplitud $p_{mf_d} = 10,3 \text{ kPa}$ (136% respecto a p_0), y frecuencias mayores, como la frecuencia suma $f_s = f_2 + f_1$, con amplitud $p_{mf_s} = 3,38 \text{ kPa}$ (45% respecto a p_0) tal y como se observa en la Figura 14.

3.2.1 Generación de frecuencia diferencia, cavidad $L = \lambda_d/2$

En este caso vamos a aprovechar el fenómeno de suavizado del medio para amplificar la generación de la f_d . En la Figura 15 se muestra cómo varía la f_d de resonancia de la cavidad en función de la amplitud de la fuente. En la Figura 16, se muestra cómo mejora su generación teniendo en cuenta este efecto (líneas discontinuas) y sin tenerlo en cuenta (líneas continuas). Como se puede observar su generación mejora en torno a un 200%.

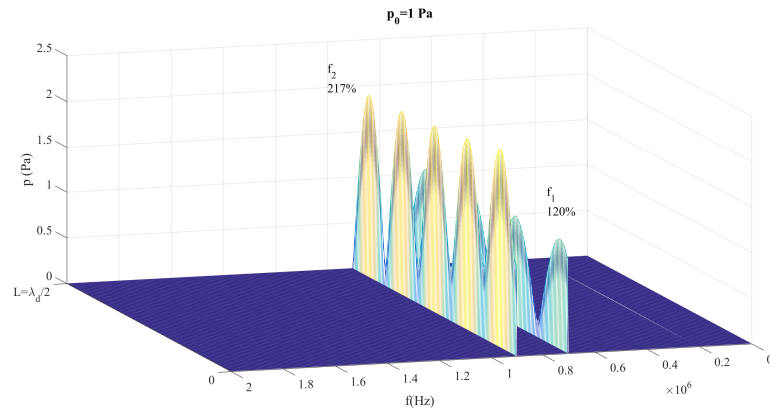


Figura 13: FFT en la cavidad $L = \lambda_d/2$, $p_0 = 1 Pa$, condición de contorno (5). Los porcentajes son respecto a p_0 .

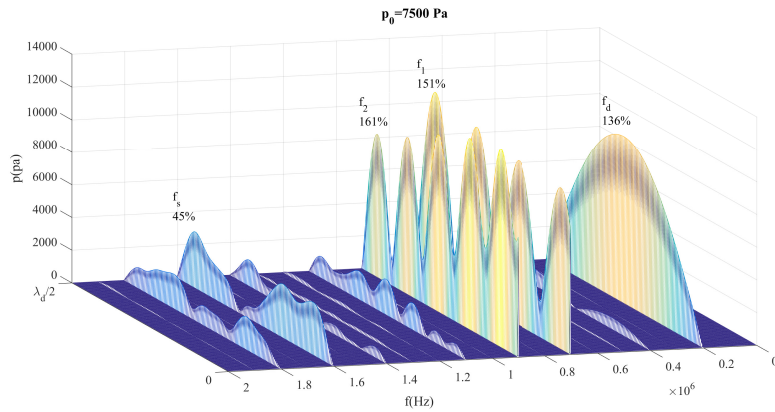


Figura 14: FFT en la cavidad $L = \lambda_d/2$, $p_0 = 7,5 kPa$, condición de contorno (5). Los porcentajes son respecto a p_0 .

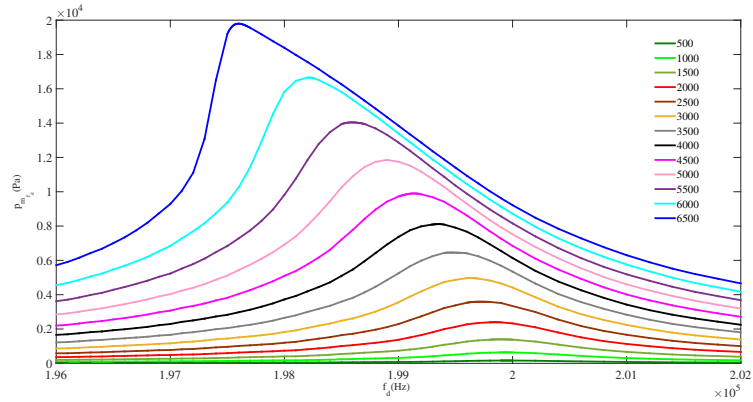


Figura 15: Amplitud máxima de f_d en la cavidad en función de f_d para diferentes amplitudes, $L = \lambda_d/2$, condición de contorno (5).

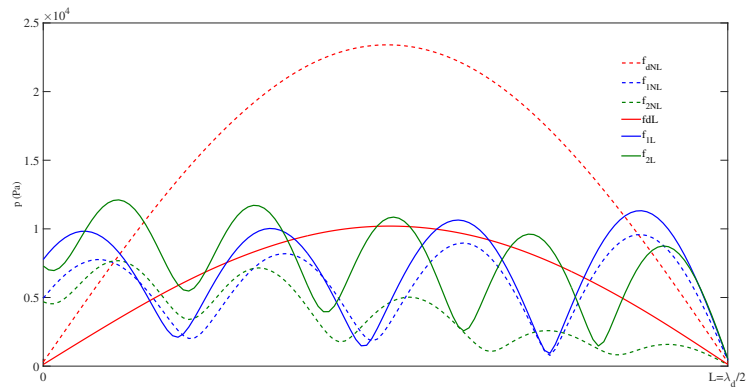


Figura 16: Amplitudes de f_{1NL} , f_{2NL} , f_{dNL} teniendo en cuenta el suavizado (líneas discontinuas) y f_{1L} , f_{2L} , f_{dL} sin tenerlo en cuenta (líneas continuas), $L = \lambda_d/2$, $p_0 = 7,5 \text{ kPa}$, condición de contorno (5).

3.2.2 Generación de frecuencia suma, cavidad $L = \lambda_s/2$

En este caso vamos a aprovechar el fenómeno de suavizado del medio para amplificar la generación de la f_s . En la Figura 17 se muestra cómo varía la f_s de resonancia de la cavidad en función de la amplitud. En la Figura 18, se muestra cómo mejora su generación teniendo en cuenta este efecto (líneas discontinuas) y sin tenerlo en cuenta (líneas continuas) con una amplitud de $p_0 = 9 \text{ kPa}$. Como se puede observar su generación mejora en torno a un 150% respecto a la amplitud de la fuente.

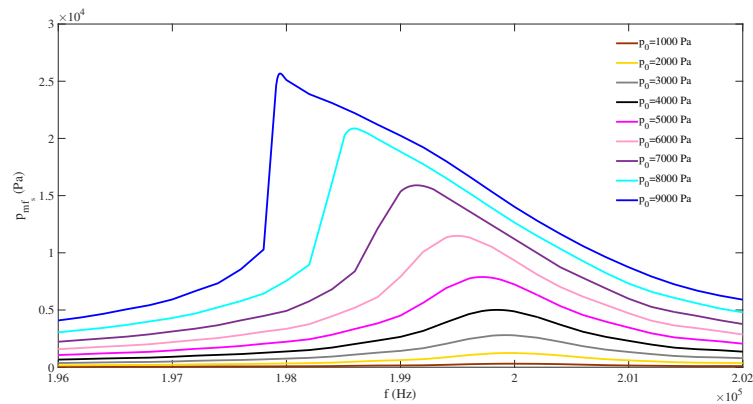


Figura 17: Amplitud máxima de f_s en la cavidad en función de f_s para diferentes amplitudes, $L = \lambda_s/2$, condición de contorno (5).

4 Conclusiones

Desarrollar modelos numéricos permite estudiar y comprender fenómenos físicos no lineales complejos. Aquí consideramos fenómenos no lineales que tienen lugar cuando un campo ultrasónico se propaga a través de un líquido con burbujas, principalmente la generación de nuevas frecuencias. Generar nuevas frecuencias es interesante ya que permite aprovechar propiedades de varias frecuencias al mismo tiempo. Generar frecuencias mayores a partir de otras menores permite tener frecuencias con una mayor resolución espacial a partir de otras de menor atenuación, esto podría ser útil en el campo del diagnóstico por ultrasonidos usando burbujas como agente de contraste. Generar frecuencias menores a partir de otras mayores permite tener frecuencias con una menor atenuación y que por tanto podrán alcanzar distancias mayores a partir de otras de una longitud de ondas más corta, esto podría ser útil en el campo de

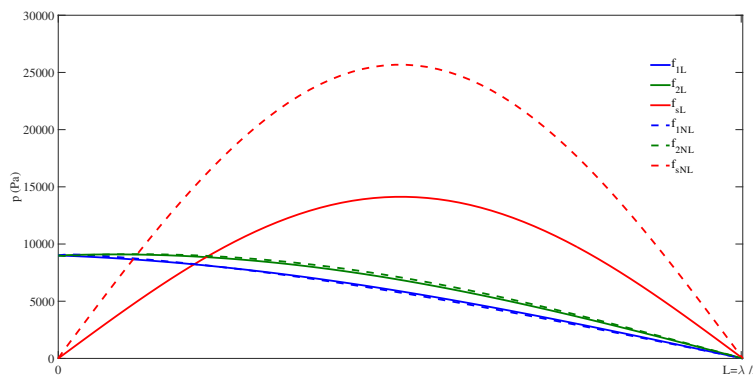


Figura 18: Amplitudes de f_{1NL} , f_{2NL} , f_{sNL} teniendo en cuenta el suavizado (líneas discontinuas) y f_{1L} , f_{2L} , f_{sL} sin tenerlo en cuenta (líneas continuas), $L = \lambda_s/2$, $p_0 = 9 \text{ kPa}$, condición de contorno (5).

las telecomunicaciones subacuáticas. Hemos visto que a partir de una fuente de una frecuencia podemos generar frecuencias mayores, armónicos, que podemos potenciar teniendo en cuenta la resonancia de la frecuencia fundamental, el suavizado del medio y la optimización del medio para cada frecuencia y cantidad de aire dadas. También, a partir de una fuente de una frecuencia se pueden generar subarmónicos, que tienen un comportamiento abrupto, y que a partir de una frecuencia umbral se comportan de manera lineal. A partir de una fuente de dos frecuencias podemos generar frecuencias menores (frecuencia diferencia) y frecuencias mayores (frecuencia suma), las cuales podemos potenciar considerando la resonancia para esas frecuencias y teniendo en cuenta el suavizado del medio.

Todos estos efectos son extrapolables a varias dimensiones, en trabajos futuros se esperan poder hacer los cálculos pertinentes.

Financiamiento

Este trabajo está financiado por la Agencia Nacional de Investigación (Ministerio de Ciencia e Innovación, España) y el Fondo Europeo de Desarrollo Regional (proyecto DPI2017- 84758-P).

Referencias

- [1] J. Bellin, R. Beyer, *Experimental investigation of an end-fire array*. The Journal of the Acoustical Society of America **34**(1962), no. 8, 1051–1054. DOI: 10.1121/1.1918243
- [2] J. C. Buckley, D. A. Knaus, D. L. Alvarenga, M. A. Kenton, P. J. Magari, *Dual-frequency ultrasound for detecting and sizing bubbles*. Acta Astronautica **56**(2005), no. 9-12, 1041–1047. DOI: 10.1016/j.actaastro.2005.01.032
- [3] T. S. Desser, R. B. Jeffrey, *Tissue harmonic imaging techniques: physical principles and clinical applications*. Seminars in Ultrasound, CT and MRI. Elsevier. 2001. Vol. 22. no. 1, 1–10. DOI: 10.1016/S0887-2171(01)90014-9
- [4] M. Hamilton, D. Blackstock, *Nonlinear Acoustics*. Academic Press, 1998.
- [5] K. Naugolnykh, L. Ostrovsky, D. Crighton, M. Ablowitz, *Nonlinear Wave Processes in Acoustics*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, 1998.
- [6] D. N. Sinha, C. Pantea, *Broadband unidirectional ultrasound propagation using sonic crystal and nonlinear medium*. Emerging Materials Research **2**(2013), no. 3, 117–126. DOI: 10.1680/emr.12.00039
- [7] M. T. Tejedor, O. Louisnard, C. Vanhille, *Une étude numérique de la génération de sous-harmoniques en liquides bulleux au sein de résonateurs ultrasonores*. 5èmes Journées Scientifiques Ultrasons et Procédés. 2019.
- [8] M. T. Tejedor, C. Vanhille, *A numerical model for the study of the difference frequency generated from nonlinear mixing of standing ultrasonic waves in bubbly liquids*. Ultrasonics Sonochemistry **34**(2017), 881–888. DOI: 10.1016/j.ultsonch.2016.07.020
- [9] M. T. Tejedor, C. Vanhille, *Nonlinear resonance of cavities filled with bubbly liquids: A numerical study with application to the enhancement of the frequency mixing effect*. Shock and Vibration **2018**(2018). DOI: 10.1155/2018/1570508
- [10] M. T. Tejedor, C. Vanhille, *An analysis of nonlinear ultrasonic waves in bubbly liquids by a numerical model*. 2022. <https://www.youtube.com/watch?v=vEK12N5PmJI>.
- [11] P. J. Westervelt, *Parametric Acoustic Array*. The Journal of the Acoustical Society of America **35**(1963), no. 4, 535–537. DOI: 10.1121/1.1918525

- [12] E. Zabolotskaya, *Emission of harmonic and combination-frequency waves by air bubbles*. Sov. Phys. Acoust. **18**(1973), 396–398.