Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones **31**(1): 127-151
CIMPA - UCR ISSN: 1409-2433(Print), 2215-3373(Online)
DOI: https://doi.org/10.15517/rmta.v31i1.54615

UNICIDAD PARA PROBLEMAS DE CUASI-EQUILIBRIO

UNIQUENESS FOR QUASI-EQUILIBRIUM PROBLEMS

Frank Navarro Rojas[1] Raúl Mitac Portugal[2]

Received: 13/Jun/2023; Accepted: 15/Dic/2023

---

[1] Universidad Nacional de Ingeniería, Facultad de Ciencias, Lima, Perú. Email: fnavarro@uni.edu.pe
[2] Universidad Cesar Vallejo, Facultad de Ingeniería y Arquitectura, Lima, Perú. Email: rmitac@ucv.edu.pe

Resumen

Este trabajo presenta un resultado sobre unicidad para problemas de cuasi-equilibrio (QEP), que no requiere de la hipótesis de Hölder continuidad, que según nuestro conocimiento es la hipótesis sobre el cual se ha garantizado unicidad para QEP hasta la actualidad. La idea básica de nuestro enfoque consiste en iniciar con un QEP simple, por ejemplo un problema de equilibrio (EP), que denotaremos por $QEP(t_0)$ con $t_0 \in [0,1)$, del cual asumiremos unicidad de la solución, bajo algunas condiciones suficientes de no-singularidad dadas por nuestras hipótesis garantizamos la existencia de un camino continuo de soluciones únicas de QEPs parametrizados que empiezan en la solución del $QEP(t_0)$ y finalizan en la solución del QEP(1) que es el QEP original. Finalmente estudiamos estas condiciones basadas en cierto tipo de matrices, para casos particulares de QEPs que son populares en la literatura.

Palabras clave: problemas de cuasi-equilibrio; unicidad; enfoque de continuación; función implícita.

Abstract

This work presents a result on uniqueness for quasi-equilibrium problems (QEP), which does not require the continuity of Hölder's hypothesis, which to our knowledge is the hypothesis on which uniqueness has been guaranteed for QEP until today. The basic idea of our approach is to start with a simple QEP, for example an equilibrium problem (EP), which we denote by $QEP(t_0)$ with $t_0 \in [0,1)$, of which we will assume uniqueness of the solution, under some sufficient conditions of non-singularity given by our hypotheses we guarantee the existence of a continuous path of unique solutions of parameterized QEPs that begin in the solution of the $QEP(t_0)$ and ends in the solution of QEP(1) which is the original QEP. Finally we study these conditions based on certain types of matrices, for particular cases of QEPs that are popular in the literature.

Keywords: quasi-equilibrium problems; uniqueness; continuation approach; implicit function.

Mathematics Subject Classification: Primarios: 90C33, secundarios: 65K05

1 Introducción

En este trabajo vamos a considerar el problema de cuasi-equilibrio (QEP) en un espacio euclidiano de dimensión finita. Para una bifunción $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con $f(x,x) = 0$ para todo x y una función punto conjunto $K : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, el problema de cuasi-equilibrio $QEP(f,K)$ consiste en hallar un vector $x^* \in K(x^*)$ tal que

$$f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in K(x). \tag{1.1}$$

Esta estructura puede ser vista como una generalización natural del clásico problema de equilibrio (EP), que es un QEP donde la función punto conjunto

K es constante $K(x) = K \subseteq \mathbb{R}^n$. La primera aparición de problemas de equilibrio (EPs) en la forma como lo conocemos hoy en día se debe a Muu y Oettli [29] y fue desarrollado por Blum y Oettli [5]. QEPs, originalmente fue introducido en [28], y puede ser visto como una formulación general unificada de varios problemas en el contexto de optimización, que poseen aplicaciones en diversas áreas de la ciencia, tales como ingeniería, economía, biología y otros; ver por ejemplo, [4, 20, 18] y sus referencias.

Aunque los EPs cubren en un modelo matemático único, importantes problemas como problemas de optimización, optimización multiobjetivo, desigualdades variacionales, problemas de punto fijo, problemas de complementariedad, equilibrios de Nash en juegos no cooperativos, problemas de punto silla y optimización inversa, (ver, por ejemplo, [4]). Existen importantes problemas, los cuales no se pueden reformular como un problema de equilibrio y que solo podrían analizarse a través del formato de un QEP, dentro de este grupo de problemas existen dos tipos que se destacan por su complejidad matemática y por qué pueden modelar diferentes tipos de aplicaciones en diversas áreas, tales como el problema de desigualdad cuasi-variacional (QVI) introducido en [3], que es un caso particular de un QEP, cuando la bifunción tiene la forma

$$f(x, y) = \langle F(x), y - x\rangle, \tag{1.2}$$

donde $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es continua. El otro tipo de problema es el problema de equilibrio de Nash generalizado (GNEP), que también puede ser reformulado como un QEP. En efecto, consideremos un GNEP con m jugadores, en el que cada jugador v tiene como objetivo minimizar su función objetivo $f^v(\cdot, x^{-v})$ sobre su conjunto de estrategias viables $X^v(x^{-v}) \subseteq \mathbb{R}^{n_v}$, para alguna función $f^v : \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_m} \to \mathbb{R}$ y alguna función punto conjunto $X^v : \mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_m-n_v} \rightrightarrows \mathbb{R}^{n_v}$, que depende de las estrategias $x^{-v} = (x_j)_{j\neq v}$ escogidas por los otros jugadores. Hallar un equilibrio de Nash generalizado resulta equivalente a resolver un QEP con la bifunción de Nikaido Isoda [25] dado por: para alguna función $f^v : \mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_m} \to \mathbb{R}$ y alguna función punto conjunto $X^v : \mathbb{R}^{n_1+\cdots+n_m-n_v} \rightrightarrows \mathbb{R}^{n_v}$, que depende de las estrategias $x^{-v} = (x_j)_{j\neq v}$ escogidas por los otros jugadores. Hallar un equilibrio de Nash generalizado resulta equivalente a resolver un QEP con la bifunción de Nikaido Isoda [25] dado por

$$f(x, y) = \sum_{v=1}^{m} \left[f^v(x) - f^v(x^{-v}, y^v)\right],$$

y con la función punto conjunto dada por $K(x) = X^1(x^{-1}) \times \cdots \times X^m(x^{-m})$.

Para una descripción general de GNEPs, sobre teoría y algoritmos, nos referimos a [20].

Existe una amplia literatura sobre resultados de existencia de soluciones para problemas de equilibrio en espacios de dimensión finita e infinita y, en una menor cantidad, de unicidad de la solución para este tipo de problemas, ver [4, 10, 8, 26] y sus referencias. En cuanto a resultados de existencia para QEPs se han desarrollado con más énfasis en la última década [1, 2, 7, 9, 14, 12, 4] y referencias.

Trabajos recientes sobre la existencia de soluciones para QEPs usando hipótesis de convexidad, semicontinuidad y coercitividad se dan en [4, 12, 15]. En [24] se proporcionó un resultado de existencia para problemas de cuasi-equilibrio, sin ninguna hipótesis de convexidad, vía el principio variacional de Ekeland.

En [13] se estudia la existencia de soluciones para QEPs usando hipótesis más débiles que la semicontinuidad inferior, mediante el uso del concepto de *transfer lower continuity*.

Sin embargo, cuando se trata de resultados de unicidad para un QEP, condiciones suficientes que aseguren unicidad son escasas. Una de las razones es el simple hecho de que muchos QEPs no tienen solución única, por ejemplo, los QEP que provienen de reformulaciones de problemas de equilibrio de Nash generalizados conjuntamente convexos por lo general no tienen solución única, ver por ejemplo, [20]. En general, no está claro cómo se pueden generalizar los resultados de unicidad para EPs para QEPs. Hasta donde sabemos, resultados de unicidad existentes para QEPs pueden ser encontradas en [1], estos resultados están dados para QEPs parametrizados (un parámetro en la bifunción y otro en las restricciones) por el par (λ,μ) en espacios métricos, el objetivo principal en ese trabajo es estudiar las propiedades de estabilidad asumiendo siempre la existencia de solución en una vecindad del par considerado (λ_0,μ_0), la prueba de la unicidad está basada en propiedades tipo α-Hölder continuas de la bifunción f y de la multifunción K.

En el presente trabajo desarrollaremos un enfoque diferente para obtener la existencia y unicidad de soluciones para un QEP, sin requerir la propiedad de Hölder continua para f y K dados en [1]. En su lugar, consideramos las condiciones de Karush-Kuhn-Tucker para un QEP (KKT-QEP), el cual será reformulado como un sistema de ecuaciones no diferenciable y al cual le aplicaremos el teorema de la función implícita para el caso no diferenciable. La idea de usar la condición KKT-QEP de un QEP fue estudiada en [6] en relación con el algoritmo del lagrangiano aumentado y recientemente en [30], usando métodos tipo Newton para su resolución. En [17] podemos encontrar un estudio sobre la existencia y unicidad de la solución de un QVI que será el enfoque que seguiremos en este trabajo. Uno de los objetivos principales de este trabajo es poder extender esos resultados dados en [17] para el caso de un QEP así como de dar condiciones suficientes para algunos casos particulares de QEPs a fin de obtener condiciones de no singularidad que son necesarias para garantizar la unicidad de la solución.

Se adoptará la siguiente notación: usaremos $\langle\cdot,\cdot\rangle$ para el producto escalar euclidiano, $\|A\|$ representa norma espectral de A, es decir, la raíz cuadrada del máximo autovalor de la matriz $A^\top A$.

Las matrices definidas positivas no son necesariamente simétricas. El símbolo $\mu_m^s(A)$ denota el valor propio mínimo de la parte simétrica $\frac{1}{2}\left(A + A^T\right)$ de una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

El espacio de matrices de orden $m \times n$ estará dotado de la norma

$$\|A\| := \left(\sum_{i=1}^{m} \|A_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

donde A_i es la i-ésima fila de A.

El gradiente de una función diferenciable $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se denota por $\nabla\varphi(x) \in \mathbb{R}^n$. Además, para una matriz $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y dos subconjuntos $I \subseteq \{1, \ldots, m\}$, $J \subseteq \{1, \ldots, n\}$, el símbolo A_{IJ} representa la submatriz de A con entradas a_{ij} para $i \in I, j \in J$. Para simplificar escribimos $A_{II} = A_I$. Por otro lado, $A_{I\bullet}$ contiene todas las filas de la matriz A que pertenecen al conjunto de índices I, mientras que $A_{\bullet J}$ consta de todas las columnas de A correspondientes al conjunto de índices J. Además, escribimos $J\Psi(x)$ para el jacobiano de una función diferenciable $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, mientras que $\nabla\Psi(x)$ denota su transpuesta. Para una función $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, las derivadas parciales con respecto a la segunda variable se denotan por $\nabla_y f(x, y) \in \mathbb{R}^m$. Para una función $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$, denotamos por $\nabla f_y(x, x) \in \mathbb{R}^{m\times p}$ el gradiente parcial de f con respecto a la segunda variable, evaluada en $y = x$, y los gradientes de las funciones componentes se escriben en columnas. En contraste, $J_y f(x, x) \in \mathbb{R}^{p\times m}$ representa el jacobiano de f con respecto a la segunda variable, evaluada en $y = x$, y los gradientes de los componentes se escriben por filas. Finalmente, el dominio del mapeo multivaluado $K : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, está dado por $\{x \in \mathbb{R}^n \mid K(x) \neq \emptyset\}$.

Este trabajo está organizado de la siguiente manera: en la Sección 2, recordamos algunos conceptos útiles y resultados básicos. En la sección 3 presentamos nuestro resultado de unicidad para QEPs. En la sección 4 proporcionamos condiciones suficientes para nuestra principal hipótesis de no singularidad, estas condiciones están basados en P-matrices. Finalmente, en la sección 5 damos condiciones suficientes para el cumplimiento de nuestra hipótesis de singularidad para algunas importantes clases de QEPs que son comunes en la literatura.

2 Preliminares

Definición 1. *Una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es localmente Lipschitz en un punto $x \in \mathbb{R}^n$ si existen escalares $K > 0$ y $\varepsilon > 0$ tal que:*

$$|f(y) - f(z)| \leq K\|y - z\|, \forall y, z \in B(x; \varepsilon).$$

La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice que es localmente Lipschitz en un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ si es localmente Lipschitz en todo punto perteneciente al conjunto U. Además, si $U = \mathbb{R}^n$ la función se llama localmente Lipschitz.

La función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ se dice que es Lipschitz en un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ si existe un escalar K tal que

$$|f(y) - f(z)| \leq K\|y - z\|, \forall y, z \in U.$$

Si $U = \mathbb{R}^n$, entonces se dice que f es Lipschitz.

Lema 1. *Si una función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es continuamente diferenciable en x, entonces f es localmente Lipschitz en x.*

Definición 2. *(Clarke) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}^n$. La derivada direccional generalizada de f en x en la dirección de $d \in \mathbb{R}^n$ es definida por*

$$f^\circ(x; d) = \limsup_{\substack{y \to x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y + td) - f(y)}{t}.$$

Definición 3. *(Clarke) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}^n$. El subdiferencial de f en x es el conjunto $\partial f(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid f^\circ(x; d) \geq \xi^T d, \forall d \in \mathbb{R}^n\}$. Cada vector $\xi \in \partial f(x)$ se llama un subgradiente de f en x.*

El subdiferencial tiene las mismas propiedades básicas que en el caso convexo.

Sea $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función localmente Lipschitz, se define

$$\Omega_f = \{x \in U \mid f \text{ no es diferenciable en el punto } x\},$$

el conjunto de puntos donde f no es derivable. Por el teorema de Rademacher [19], una función que es Lipschitz en un conjunto $U \subseteq \mathbb{R}^n$ es derivable en casi todo punto en U, en otras palabras, la medida de Ω_f es 0. El siguiente resultado es esencial cuando se calculan subgradientes en la práctica. El subdiferencial se puede obtener como la cápsula convexa de todos los límites posibles de gradientes en el punto x_i, con x_i que converge a x.

Teorema 1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}^n$, entonces*

$$\partial f(x) = \operatorname{conv}\left\{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \text{ existe } (x_i) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega_f \text{ tal que } x_i \to x \text{ y } \nabla f(x_i) \to \xi\right\}.$$

Sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con $h(x) = (h_1(x), \ldots, h_m(x))^T$ donde cada función componente h_i para $i = 1, \ldots, m$ (y, por lo tanto h) es localmente Lipschitz. Entonces, debido al teorema de Rademacher, concluimos que h es derivable casi en todo punto. Denotamos por Ω_h el conjunto en $\mathbb{R}^n$ donde h no es diferenciable y por $\nabla h(x)$ para $x \notin \Omega_h$, la matriz jacobiana habitual $m \times n$. Con base en el Teorema 2 se generaliza la derivada de h.

Definición 4. *Sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ localmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces el B-subdiferencial de h en x es el conjunto*

$$\partial_B h(x) := \{A \in \mathbb{R}^{m\times n} \mid \text{ existe } (x_i) \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega_h \text{ tal que } x_i \to x \text{ y } \nabla h(x_i) \to A\},$$

que es un conjunto no vacío y compacto.

Definición 5. *Sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ localmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}^n$. Entonces el jacobiano generalizado de h en x es el conjunto*

$$\partial h(x) := \operatorname{conv}(\partial_B h(x)).$$

Definición 6. *Sea $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ localmente Lipschitz en $x \in \mathbb{R}^n$. El jacobiano generalizado $\partial h(x)$ se dice que es de rango máximo, si cualquier matriz $M \in \partial h(x)$ es de rango máximo (no singular).*

Sea $H : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$, y consideremos la ecuación

$$H(x, y) = 0,$$

donde $x \in \mathbb{R}^m$ y $y \in \mathbb{R}^k$.

Cuando H es localmente Lipschitz en $(\hat{x}, \hat{y})$, con $H(\hat{x}, \hat{y}) = 0$, el siguiente teorema nos da una condición suficiente para resolver y como una función de x alrededor del punto $(\hat{x}, \hat{y})$.

La notación $\pi_y \partial H(\hat{x}, \hat{y})$ significa el conjunto de todas las $k \times k$ matrices M tales que, para alguna $k \times m$ matriz N, la matriz $k \times (k + m)$ $[N, M]$ pertenece a $\partial H(\hat{x}, \hat{y})$.

Teorema 2. *Supongamos que $\pi_y \partial H(\hat{x}, \hat{y})$ es de rango máximo. Entonces existe una vecindad U de $\hat{x}$ y una función Lipschitz $\zeta : U \to \mathbb{R}^k$ tal que $\zeta(\hat{x}) = \hat{y}$ y tal que para cada x en U,*

$$H(x, \zeta(x)) = 0.$$

Definición 7. *Una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se llama P-matriz si todo menor principal de A es positivo. De forma equivalente $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ se llama P-matriz si $\det(A_{II}) > 0$ se cumple para todos los conjuntos de índices $I \subseteq \{1, \dots, n\}$.*

En particular, si A es una P-matriz, las entradas en la diagonal de A y el determinante de A son positivas. La clase de P-matrices incluye clases de matrices importantes, como por ejemplo, matrices definidas positivas, matrices no singulares y B-matrices.

En la siguiente sección, presentamos un enfoque por continuación de soluciones, para garantizar la existencia y unicidad de la solución de un QEP; este es un enfoque diferente al dado en [1], el teorema principal en ese trabajo [1, Teorema 2.1] reescrito en nuestro formato (1.1) es:

Teorema 3. *Considere el QEP dado en (1.1), sea* $\overline{X} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \in K(x)\}$ *y asuma que este QEP tiene solución, además suponga que las siguientes condiciones son satisfechas:*

1. *Existen* $n, \delta > 0$ *tal que para todo* $x \in \overline{X}$, $|f(x,y) - f(x,z)| \leq n\|y-z\|^{\delta}.$, $\forall y, z \in \mathbb{R}^n$.
2. *Existen* $h, \beta > 0$ $\forall x, y \in \overline{X} : f(x,y) + f(y,x) + h\|x-y\|^{\beta} \leq 0.$
3. *Para ciertos* $l, \alpha > 0$, *y para todo* $x_1, x_2 \in \overline{X}$,
$$K(x_1) \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \exists z \in K(x_2), \|x - z\| \leq l\|x_1 - x_2\|^{\alpha}\}.$$
4. $\alpha\delta = \beta$ *y* $h > 2nl^{\delta}$.

Entonces el QEP tiene una única solución.

La hipótesis 3 se verifica claramente para un EP. En general, es difícil verificar estas hipótesis, aun en ejemplos simples.

Ejemplo 1. Consideremos el $QEP(f, K)$, con la bifunción $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = y^2 - xy$ y $K(x) := \{y \in \mathbb{R} \mid g(x,y) \leq 0\}$, donde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$g(x,y) = (-y, y - 2 + x).$$

Entonces tenemos $K(x) = [0, x-2]$, $\overline{X} = [0,1]$ y no es difícil ver que $\bar{x} = 0$ es la única solución del QEP. Por otro lado, la hipótesis 2 del teorema anterior no es satisfecha.

3 Unicidad para QEPs por un enfoque de continuación

En todo este trabajo, consideraremos el QEP (1.1) con la multifunción $K : \mathbb{R}^n \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ definida por

$$K(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : g(x,y) \leq 0\}, \tag{3.1}$$

donde $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ denota las restricciones parametrizadas.

Nótese que si g depende únicamente de y podemos escribir por simplicidad $g(y)$ en lugar de $g(x,y)$, así, $K(x) = \{y \in \mathbb{R}^n : g(y) \leq 0\} = K$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, y entonces (1.1) se reduce a un EP.

Suponga que f y g son diferenciables con respecto a y, sea x^* una solución del $QEP(f, K)$ con K dado por (3.1), entonces $x^* \in K(x^*)$ y $f(x^*, y) \geq 0$ para todo $y \in K(x^*)$, o equivalentemente,

$$f(x^*, y) \geq 0, \quad \forall\ y :\ g(x^*, y) \leq 0. \tag{3.2}$$

Como $f(x^*, x^*) = 0$, se sigue que x^* es solución del problema de optimización parametrizado

$$\min_y f(x^*, y) \text{ tal que } g_i(x^*, y) \leq 0, \ \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}. \tag{3.3}$$

Asumiendo que alguna condición de calificación es satisfecha en x^* con respecto al conjunto $K(x^*) \subseteq \mathbb{R}^n$, entonces existe $\lambda^* \in \mathbb{R}^m_+$ tal que (x^*, λ^*) satisfacen las clásicas condiciones de KKT:

$$\begin{aligned} &\nabla_y f(x^*, x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla_y g_i(x^*, x^*) = 0, \\ &\lambda_i^* \geq 0,\ g_i(x^*, x^*) \leq 0,\ \lambda_i^* g_i(x^*, x^*) = 0,\ \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Esto lleva a la definición del las condiciones KKT-QEP, para un QEP.

Definición 8. *Consideremos la función punto conjunto K dado por (3.1). Entonces el sistema*

$$\begin{cases} \nabla_y f(x, x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_y g_i(x, x) = 0, \\ \\ \lambda_i \geq 0,\ g_i(x, x) \leq 0,\ \lambda_i g_i(x, x) = 0,\ \forall\, i \in \{1, \ldots, m\}, \end{cases}$$

es llamado las condiciones de KKT-QEP para el QEP(f, K). Cualquier punto (x, λ) que satisface KKT-QEP es llamado un punto KKT-QEP.

Definición 9. *Un QEP(f, K) es llamado convexo si $f(x, \cdot)$ y $g(x, \cdot)$ son convexas (como funciones de la segunda componente) para cada $x \in \mathbb{R}^n$.*

En el caso de un QEP convexo, las condiciones KKT-QEP son condiciones suficientes de optimalidad.

En nuestro enfoque consideraremos una familia de QEPs parametrizadas: QEP(t) con $t \in [t_0, 1]$, donde QEP(1) es la QEP original. Para esto consideremos una bi-función parametrizada $\overline{f} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [t_0, 1] \to \mathbb{R}^n$ y una función punto conjunto parametrizada $\overline{K} : \mathbb{R}^n \times [t_0, 1] \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, tal que

$$f(x, y) = \overline{f}(x, y, 1) \text{ y } K(x) = \overline{K}(x, 1).$$

Para cada $t \in [t_0, 1]$ definimos el *QEP(t)* que consiste en encontrar $x = x(t) \in \overline{K}(x, t)$ tal que

$$\overline{f}(x, y, t) \geq 0 \quad \forall y \in \overline{K}(x, t).$$

De la definición anterior, note que *QEP*(1) corresponde al *QEP(f, K)* inicial.

En nuestro enfoque, tanto $\overline{f}$ como $\overline{K}$ deben ser apropiadamente escogidos a fin de que el $QEP(t_0)$ sea simple, por ejemplo un EP, y para el cual podemos garantizar la existencia de una única solución, además que satisfagan algunas propiedades de regularidad, bajo estas hipótesis de regularidad garantizaremos un camino de soluciones continuo a partir de la solución única del $QEP(t_0)$ hasta llegar a una solución del $QEP(1)$ vía soluciones de $QEP(t)$. Asumiendo la existencia de una segunda solución diferente del $QEP(1)$ hallaremos un camino de soluciones de regreso a la solución única del $QEP(t_0)$ diferente a la inicial, contradiciendo la unicidad de su solución, esto prueba la unicidad de la solución del $QEP(1)$.

Para esta tarea utilizamos las condiciones KKT-QEP del $QEP(t)$ y, por lo tanto, asumiremos en lo sucesivo que $\overline{K}$ es explícitamente representado por desigualdades

$$\overline{K}(x,t) := \{y \in \mathbb{R}^n : \overline{g}(x,y,t) \leq 0\},$$

con $\overline{g} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times [t_0, 1] \to \mathbb{R}^m$, y donde las funciones componentes $\overline{g}_i$ verifican que $\overline{g}_i(x,\cdot,t)$ son convexas y continuamente diferenciables en $\mathbb{R}^n$ para cada $x \in \mathbb{R}^n, t \in [t_0, 1]$ y para todo $i = 1, \ldots, m.$, además $\overline{f}(x,.,t)$ verifica la misma propiedad. Claramente, tenemos $x \in \overline{K}(x,t)$, sí y solo si $\overline{g}(x,x,t) \leq 0$, la convexidad y la continuidad de $\overline{g}_i(x,\cdot,t)$ asegura que el conjunto $\overline{K}(x,t)$ es convexo y cerrado, para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, 1]$.

Para el $QEP(t)$, su sistema $KKT - QEP(t)$ es dado por:

$$\begin{cases} \nabla_y \overline{f}(x,x,t) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \nabla_y \overline{g}_i(x,x,t) = 0 \\ \\ \lambda_i \geq 0, \overline{g}_i(x,x,t) \leq 0, \lambda_i \overline{g}_i(x,x,t) = 0, \forall i \in \{1, \ldots, m\}, \end{cases} \tag{3.5}$$

Bajo la hipótesis que el $QEP(t)$ es convexo, la x-parte de un punto KKT-QEP del sistema (3.5), es una solución del $QEP(t)$, y para cada solución x del $QEP(t)$ que satisface alguna condición de calificación (como la condición de Slater o la calificación de restricción de independencia lineal LICQ) respecto a las restricciones $\overline{g}(x,.,t)$, entonces existe un multiplicador λ, tal que (x,λ) satisface el sistema (3.5).

Para reformular las condiciones de KKT-QEP del $QEP(t)$ como un sistema de ecuaciones, usamos la función $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi(a,b) := \sqrt{a^2 + b^2} - a - b. \tag{3.6}$$

Esta función fue utilizada por primera vez por Fischer [23] para reformular las condiciones KKT de un problema de optimización con restricciones de desigualdad como un sistema de ecuaciones. Desde entonces, se ha vuelto bastante popular en los campos de complementariedad lineal y no lineal, optimización con restricciones, VI, QVI y GNEPs; véase, por ejemplo [21]. La principal propiedad de esta función es la siguiente caracterización de sus raíces:

$$\varphi(a,b) = 0 \iff a \geq 0, b \geq 0, ab = 0.$$

Definiendo

$$\varphi(\lambda, \overline{g}(x,x,t)) := \begin{pmatrix} \varphi(\lambda_1, -\overline{g}_1(x,x,t)) \\ \vdots \\ \varphi(\lambda_m, -\overline{g}_m(x,x,t)) \end{pmatrix},$$

podemos reformular el sistema KKT-QEP del $QEP(t)$ cómo un sistema de ecuaciones

$$0 = \Phi(x,\lambda,t) := \begin{pmatrix} \nabla_y \overline{f}(x,x,t) + \nabla_y \overline{g}(x,x,t)\lambda \\ \varphi(\lambda, \overline{g}(x,x,t)) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+m)\times 1}.$$

Para enunciar nuestro resultado principal requerimos propiedades de suavidad adicionales, para esto hacemos las siguientes suposiciones:

(A1) Para cada $(x,t) \in \mathbb{R}^n \times [t_0, 1]$, las funciones $\overline{g}(x,\cdot,t)$ y $\overline{f}(x,\cdot,t)$ son convexas y continuamente diferenciables en $\mathbb{R}^n$ y $\nabla_y \overline{f}(x,x,t)$ es continuamente diferenciable.

(A2) La función $\overline{g}$ es continuamente diferenciable.

(A3) LICQ-QEP es satisfecho, esto es, para cada $t \in [t_0, 1]$ y $x \in X(t) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \overline{g}(x,x,t) \leq 0\}$, x verifica la condición LICQ sobre $\overline{K}(x,t)$. Esto es equivalente a decir que el conjunto $\{\nabla_y \overline{g}_i(x,x,t) : i \in I(x,t)\} \subseteq \mathbb{R}^n$ es l.i., donde

$$I(x,t) := \{i \in \{1,\ldots,m\} \mid \overline{g}_i(x,x,t) = 0\}$$

(A4) Para todo $t \in [t_0, 1]$ y cualquier solución $(\overline{x}(t), \overline{\lambda}(t))$ de $\Phi(x,\lambda,t) = 0$, todas las matrices en $\partial_{(x,\lambda)}\Phi(\overline{x}(t), \overline{\lambda}(t), t)$ son no singulares.

(A5) El conjunto

$$X := \bigcup_{t\in[t_0,1]} X(t)$$

es acotado.

Lema 2. *Suponga que (A1), (A2), (A3) y (A4) son satisfechas, si* $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ *es solución del sistema KKT-QEP del* QEP($\bar{t}$) *para algún* $\bar{t} \in [t_0, 1]$, *y todas las matrices en* $\partial_{(x,\lambda)}\Phi(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{t})$ *no son singulares, entonces, existe una vecindad* N *de* $\bar{t}$ *y una función continuamente Lipschitz* $(x,\lambda) : N \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ *con* $x(\bar{t}) = \bar{x}, \lambda(\bar{t}) = \bar{\lambda}$, *tal que* $x(t)$ *es la única solución local del* QEP(t) *para todo* $t \in N$.

Demostración. Las hipótesis implican que $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ es una solución del QEP(t), si y solo sí $\Phi(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{t}) = 0$. La función Φ es localmente Lipschitz y, por tanto, el jacobiano generalizado (parcial) de Clarke $\partial_{(x,\lambda)}\Phi(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{t})$ está bien definida, por lo tanto, la afirmación se deriva del teorema de la función implícita debido a Clarke. □

Teorema 4. *Suponga que (A1) a (A5) se cumplen, además se verifican las siguientes condiciones:*

(H1) La función $\overline{f}(x,y,\cdot)$ *es continua sobre* $[t_0,1]$.

(H2) $QEP(0)$*: Hallar* $x\in\overline{K}(x,0)$ *tal que*

$$\overline{f}(x,y,0)\geq 0 \quad \forall y\in\overline{K}(x,0),$$

tiene una única solución.

Entonces, existe una función continua $t\mapsto x(t)$ *tal que* $x(t)$ *es la única solución del* QEP(t) *para cada* $t\in[t_0,1]$.

Demostración. Sea $x(t_0)$ la única solución de $QEP(t_0)$, por A3 obtenemos un único multiplicador $\lambda(t_0)$ tal que $\Phi(x(t_0),\lambda(t_0),t_0)=0$. La no singularidad de todos los elementos en $\partial_{(x,\lambda)}\Phi(x(t_0),\lambda(t_0),t_0)$ permite la aplicación del teorema de la función implícita de Clarke, por tanto, existe $\widetilde{t}>0$ y una única función continua $t\longmapsto(\overline{x}(t),\overline{\lambda}(t))$ tal que $(\overline{x}(t_0),\overline{\lambda}(t_0))=(x(t_0),\lambda(t_0))$ y $\Phi(\overline{x}(t),\overline{\lambda}(t),t)=0$ para todo $t\in[t_0,\widetilde{t})$. Sea $\widetilde{t}>0$ el mayor valor para el que esto se cumpla.

Supongamos por contradicción que $\widetilde{t}\lesssim 1$, tenemos que $\overline{x}(t)$ está acotado, pues $\Phi(\overline{x}(t),\overline{\lambda}(t),t)=0$ implica que $\overline{g}(\overline{x}(t),\overline{x}(t),t)\lesssim 0$ y, por tanto $\overline{x}(t)\in X$, el cual está acotado por hipótesis. Usando la condición LICQ obtenemos que $\overline{\lambda}(t)$ es acotado, luego existe una sucesión $t_k\in[t_0,\widetilde{t})$ con $t_k\mapsto\widetilde{t}$ tal que $(\overline{x}(t_k),\overline{\lambda}(t_k))$ converge a algún punto $(\widetilde{x},\widetilde{\lambda})$. Ahora la continuidad de Φ implica que $\Phi(\widetilde{x},\widetilde{\lambda},\widetilde{t})=0$, como $\widetilde{t}\leq 1$ todos los elementos en $\partial_{(x,\lambda)}\Phi(\widetilde{x},\widetilde{\lambda},\widetilde{t})$ son no singulares y podemos usar de nuevo el teorema de la función implícita de Clarke, para obtener una vecindad $(\widetilde{t}-\epsilon,\widetilde{t}+\epsilon),\epsilon>0$ y una única función continua $t\mapsto(\widetilde{x}(t),\widetilde{\lambda}(t))$ con $(\widetilde{x}(t),\widetilde{\lambda}(\widetilde{t}))=(\widetilde{x},\widetilde{\lambda})$ y $\Phi(\widetilde{x}(t),\widetilde{\lambda}(t),t)=0$ para todo $t\in(\widetilde{t}-\epsilon,\widetilde{t}+\epsilon)$. Ahora las funciones $(\overline{x}(t),\overline{\lambda}(t))$ y $(\widetilde{x}(t),\widetilde{\lambda}(t))$ deben ser iguales a la intersección $(\widetilde{t}-\epsilon,\widetilde{t})$ de los intervalos y por tanto existe una continuación de $(\overline{x}(t),\overline{\lambda}(t))$ sobre el intervalo $[\widetilde{t},\widetilde{t}+\epsilon)$, lo cual contradice que $\widetilde{t}$ es maximal y, por tanto, tenemos $\widetilde{t}>1$.

Hasta ahora hemos demostrado la existencia de una función continua $t\mapsto(\overline{x}(t),\overline{\lambda}(t))$ tal que $\overline{x}(t)$ es una solución del $QEP(t)$ para todo $t\in[t_0,1]$, y en particular la existencia de una solución para $QEP(1)$. Resta por probar la unicidad.

Por lo tanto, asumamos que para algún $\widetilde{t}\in(t_0,1]$, $QEP(\widetilde{t})$ tiene dos soluciones $x_1(\widetilde{t})\neq x_2(\widetilde{t})$, de la condición LICQ-QEP obtenemos un único multiplicador $\lambda_1(\widetilde{t})$ and $\lambda_2(\widetilde{t})$ tal que $\Phi(x_i(\widetilde{t}),\lambda_i(\widetilde{t}),\widetilde{t})=0$ para $i=1,2$. Por la supuesta no singularidad de los elementos en $\partial_{(x,\lambda)}\Phi(x_i(\widetilde{t}),\lambda_i(\widetilde{t}),\widetilde{t})$ podemos aplicar el teorema de la función implícita para hallar dos intervalos $(\widetilde{t}-\epsilon_i,\widetilde{t}+\epsilon_i),\epsilon_i>0$ y funciones continuas $t\mapsto(\overline{x}_i(t),\overline{\lambda}_i(t))$ tal que $(\overline{x}_i(\widetilde{t}),\overline{\lambda}_i(\widetilde{t}))=(x_i(\widetilde{t}),\lambda_i(\widetilde{t}))$ y $\Phi(\overline{x}_i(t),\overline{\lambda}_i(t),t)=0$ para toda $t\in(\widetilde{t}-\epsilon_i,\widetilde{t}]$ y $i=1,2$. Repitiendo el argumento de la contradicción de arriba, podemos mostrar que ambas funciones pueden ser continuadas en el intervalo $[t_0,\widetilde{t}]$. Por la hipótesis de no singularidad, todos los puntos KKT de $QEP(t)$ deben ser aislados y, por lo tanto, los caminos solución no pueden cruzarse en $[t_0, \tilde{t}]$ así no podemos tener $(\overline{x}_1(t), \overline{\lambda}_1(t)) = (\overline{x}_2(t), \overline{\lambda}_2(t))$ para cualquier $t \in [t_0, \tilde{t}]$. Esto en particular implica $(\overline{x}_1(t_0), \overline{\lambda}_1(t_0)) \neq (\overline{x}_2(t_0), \overline{\lambda}_2(t_0))$, como la solución del $QEP(t_0)$ debe ser única, tenemos $\overline{x}_1(t_0) = \overline{x}_2(t_0)$ y por LICQ también $\overline{\lambda}_1(t_0) = \overline{\lambda}_2(t_0)$, una contradicción. Por lo tanto, debemos tener $x_1(\tilde{t}) = x_2(\tilde{t})$ para todo $t \in [t_0, 1]$ y, por tanto, una única solución $QEP(t)$ para todo $t \in [t_0, 1]$, lo que completa la prueba. □

En contraste con los QEPs, existen varios resultados para garantizar la unicidad de la solución de problemas de equilibrio (EPs). Por tanto, con el fin de garantizar la existencia de una solución única para el $QEP(t_0)$, uno puede definir por ejemplo para algún vector constante $c \in \mathbb{R}^n$ la función

$$\overline{g}(x, y, t) := g((t - t_0) \cdot x + (1 + t_0 - t)c, y).$$

Entonces se tiene $\overline{g}(x, y, 0) = g(c, y)$ y, por tanto, obtenemos un EP para $t = t_0$, ya que la función $g(c, y)$ es independiente de x. Ahora, si $\overline{f}(x, y, 0)$ es tal que $\overline{f}(\cdot, y, 0)$ es semicontinua superior para cada $y \in \mathbb{R}^n$ y $\overline{f}(x, \cdot, 0)$ es cuasiconvexa para cada $x \in \mathbb{R}^n$, la unicidad de la solución para $QEP(t_0)$ sigue de la suposición de compacidad del conjunto $\overline{K}(x, 0) = \{y \in \mathbb{R}^n : g(c, y) \leq 0\}$, la hipótesis de cuasi convexidad sobre $\mathbb{R}^n$ puede ser retirada si imponemos la condición de coercividad para $\overline{f}(x, \cdot, 0)$.

Verificar la condición de no singularidad A4 en el Lema 2 no es fácil y, por lo tanto, en la siguiente sección proporcionamos algunas condiciones suficientes para que esto ocurra.

4 Condiciones de no singularidad

En esta sección, presentamos condiciones que garantizan que todos los elementos en el jacobiano generalizado $\partial_{(x,\lambda)}\Phi(\overline{x}(t), \overline{\lambda}(t), t)$ no son singulares.

Primero mostraremos un resultado general para obtener la no singularidad de todos los elementos en $\partial_{(x,\lambda)}\Phi(\overline{x}, \overline{\lambda}, t)$ en un punto KKT-QEP $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ para algún t fijo en $[t_0, 1]$.

Nuestro primer objetivo es comprender mejor la estructura del jacobiano generalizado $\partial_{(x,\lambda)}\Phi(\overline{x}, \overline{\lambda}, t)$.

El siguiente resultado da una idea de la estructura del jacobiano generalizado $\partial_{(x,\lambda)}\Phi(\overline{x}, \overline{\lambda}, t)$.

Sea

$$L(x, \lambda, t) := \nabla_y \overline{f}(x, x, t) + \nabla_y \overline{g}(x, x, t)\lambda,$$

tenemos que

$$\Phi(x, \lambda, t) = \begin{pmatrix} L(x, \lambda, t) \\ \varphi(\lambda, \overline{g}(x, x, t)) \end{pmatrix}.$$

Proposición 1. *Sea* $t \in [t_0, 1]$, $\overline{f}_y(x, x, t)$ *es una función* C^1 *con respecto a* x *y* $\overline{g}(x, x, t)$ *una función* C^2. *Sea* $w = (x, \lambda, t) \in \mathbb{R}^{n+m+1}$. *Entonces, cada elemento* $H \in \partial_{(x,\lambda)}\Phi(\overline{x}, \overline{\lambda}, t)$ *se puede representar de la siguiente manera:*

$$H = \begin{pmatrix} J_x L(w) & \nabla_y \overline{g}(x, x, t) \\ -D^a(w)(\nabla_y \overline{g}(x, x, t) + \nabla_x \overline{g}(x, x, t))^\top & D^b(w), \end{pmatrix}$$

donde

$$D_a(w) := diag(a_1(x, \lambda_1, t), \ldots, a_m(x, \lambda_m, t)) \in \mathbb{R}^{m\times m},$$
$$D_b(w) := diag(b_1(x, \lambda_1, t), \ldots, b_m(x, \lambda_m, t)) \in \mathbb{R}^{m\times m},$$

son matrices diagonales cuyos i-ésimos elementos diagonales están dados por:

$$a_i(x, \lambda_i, t) = \frac{-\overline{g}_i(x, x, t)}{\sqrt{\overline{g}_i(x, x, t)^2 + \lambda_i^2}} - 1, \quad b_i(x, \lambda_i, t) = \frac{\lambda_i}{\sqrt{\overline{g}_i(x, x, t)^2 + \lambda_i^2}} - 1$$

sí $(-\overline{g}_i(x, x, t), \lambda_i) \neq 0$, *y por* $a_i(x, \lambda_i, t) = \xi_i - 1$, $b_i(x, \lambda_i, t) = \rho_i - 1$ *para cualquier* (ξ_i, ρ_i) *con* $\|(\xi_i, \rho_i)\| \leq 1$ *si* $(-\overline{g}_i(x, x, t), \lambda_i) = 0$.

Demostración. La demostración sigue pasos similares como la Proposición 3.1 de [21]. □

Note que las matrices $D^a(x, \lambda, t), D^b(x, \lambda, t)$ son matrices diagonales semidefinidas negativas y su suma $D^a(x, \lambda, t) + D^b(x, \lambda, t)$ es definida negativa.

Para simplificar la notación, de ahora en adelante suprimiremos la dependencia de (x, t) cuando nos referimos al conjunto de restricciones activas, es decir, escribiremos:

$$I := I(\overline{x}, t) = \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid \overline{g}_i(\overline{x}, \overline{x}, t) = 0\}.$$

La siguiente propiedad de una P-matriz puede ser vista en [16]: para una P-matriz M y matrices diagonales semidefinidas negativas D^a y D^b con $D^a + D^b$ siendo definida negativa, la matriz $D^a \cdot M + D^b$ es no singular.

Teorema 5. *Sea* $t \in [t_0, 1]$ *y sea* $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ *un punto KKT-QEP del QEP*(t). *Suponga que las hipótesis (A1), (A2) y (A3) son satisfechas, además*

(*a*) $J_x L(\overline{x}, \overline{\lambda}, t)$ *es no singular,*

(*b*) *la submatriz* $M_I(\overline{x}, \overline{\lambda}, t)$ *es una* P*-matriz, donde*

$$M(\overline{x}, \overline{\lambda}, t) = (\nabla_y \overline{g}(\overline{x}, \overline{x}, t) + \nabla_x \overline{g}(\overline{x}, \overline{x}, t))^\top J_x L(\overline{x}, \overline{\lambda}, t)^{-1} \nabla_y \overline{g}(\overline{x}, \overline{x}, t).$$

Entonces todos los elementos de $\partial_{(x,\lambda)}\Phi(\overline{x}, \overline{\lambda}, t)$ *son no singulares.*

Demostración. La demostración sigue los mismos pasos que el Teorema 3 en [17]. □

Notemos que una P-matriz es en particular no singular y entonces una condición necesaria para satisfacer la hipótesis (b) es que la siguiente matriz tenga rango completo por filas:

$$(\nabla_y \overline{g}_I(\overline{x}, \overline{x}, t) + \nabla_x \overline{g}_I(\overline{x}, \overline{x}, t))^\top.$$

Para una aplicación de nuestro teorema, consideremos el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2. En el siguiente ejemplo verificaremos las condiciones de no singularidad dadas en el teorema anterior a fin de garantizar la unicidad del siguiente $QEP(f, K)$, donde

$$f(x, y) = (3x + 1 + y)(y - x) \quad \text{y} \quad K(x) = \{y \in \mathbb{R} : -\frac{1}{5} - y \leq 0, x + y - \frac{1}{2} \leq 0\}.$$

Tenemos que $K(x) = \left[-\frac{1}{5}, \frac{1}{2} - x\right]$, por tanto, el dominio de K es $\langle -\infty, \frac{7}{10}]$ y el conjunto viable del QEP es $\overline{X} = [-\frac{1}{5}, \frac{1}{4}]$. Usando la definición, obtenemos $SOL(QEP) = \{-\dfrac{1}{5}\}$.

Para verificar la unicidad por medio de nuestro enfoque, definimos $\overline{f}(x, y, t) = (3x + 1 + y)(y - x)$ (independiente de t) y la función

$$\overline{g}(x, y, t) = (-\frac{1}{5} - y, y - \frac{1}{2} + tx)^\top.$$

Claramente, para cada $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, 1]$, $\overline{f}(x, \cdot, t)$ y $\overline{g}(x, \cdot, t)$ son convexas y continuamente diferenciables y $\overline{f}_y(x, y, t) = 4x + 1$ es continuamente diferenciable con respecto a x.

La función $\nabla_y \overline{g}(x, y, t)$ es continuamente diferenciable.

La condición LICQ-QEP es satisfecha para todo $x \in X(t)$ y para todo $t \in [0, 1]$.

Por otro lado, para cada $t \in [0, 1]$, se tiene que $X(t) \subseteq [-\frac{1}{5}, 1]$, luego $X := \bigcup\limits_{t \in [0,1]} X(t)$ es acotado.

El $QEP(0)$: hallar un $x^* \in [-\frac{1}{5}, \frac{1}{2}]$ tal que

$$f(x^*, y) \geq 0 \quad \forall y \in [-\frac{1}{5}, \frac{1}{2}],$$

es un EP con una función estrictamente monótona $f(x, y)$ y un conjunto factible compacto, por lo tanto, $QEP(0)$ tiene una solución única.

Además, tenemos

$$J_x L(x, \lambda, t) = 4$$

que es no singular, y tenemos

$$(\nabla_y g(\overline{x}, \overline{x}, t) + \nabla_x g(\overline{x}, \overline{x}, t))^\top J_x L(\overline{x}, \overline{\lambda}, t)^{-1} \nabla_y g(\overline{x}, \overline{x}, t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1+t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1+t}{4} & \frac{1+t}{4} \end{pmatrix}.$$

Dado que para cualquier punto factible no pueden estar activas al mismo tiempo las 2 restricciones, solo tenemos que mostrar que cada submatriz principal con filas y columnas indexadas por $I \in \{\{1\}, \{2\}\}$ es una P-matriz, sin embargo, es fácil de ver, ya que son matrices con un único elemento positivo. Por lo tanto, el Teorema 5 proporciona la condición de no singularidad, lo que demuestra que el QEP considerado tiene una solución única.

5 Condición de no singularidad para ciertas clases de QEPs

La hipótesis de no singularidad puede resultar difícil de verificar para un QEP general, pero para ciertas clases de QEP que son comunes en la literatura podemos encontrar condiciones suficientes para el cumplimiento de esta hipótesis. Presentamos a continuación condiciones suficientes para que las hipótesis del Teorema 5 sean satisfechas y así obtener la condición de no singularidad para ciertas clases de QEPs [11].

5.1 Restricciones con un conjunto móvil

Consideramos una función punto conjunto $\overline{K}$ que es popular en los QVI, que la usaremos ahora en el contexto de los QEP, que son las llamadas restricciones de conjuntos móviles, que es una función punto conjunto $\overline{K}(x, t)$ definido por

$$\overline{K}(x, t) = c(x, t) + Q,$$

con $c : \mathbb{R}^n \times [t_0, 1] \to \mathbb{R}^n$ y un conjunto fijo $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ que suponemos que tiene una representación de la forma

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid q(x) \leq 0\},$$

donde $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene funciones componentes q_i convexas. Supondremos que c es al menos continuamente diferenciable con respecto a x y q es al menos dos veces continuamente diferenciable. Es fácil ver que podemos reescribir $\overline{K}(x, t)$ como

$$\overline{K}(x, t) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid q(y - c(x, t)) \leq 0\},$$

de donde $\overline{g}(x, y, t) := q(y - c(x, t))$.

Para esta estructura particular damos un resultado de no singularidad, la prueba del resultado subsiguiente utiliza el hecho de que la inversa de una matriz definida positiva (no necesariamente simétrica) es nuevamente definida positiva.

Teorema 6. *Sea* $t \in [t_0, 1]$ *y* $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ *un punto KKT-QEP del* $QEP(t)$*. Supongamos que,* $J_x f_y(\overline{x}, \overline{x}, t)$ *es definida positiva y los gradientes* $\nabla q_i\left(\overline{x} - c\left(\overline{x}, t\right)\right)$ $(i \in I)$ *son linealmente independientes y*

$$\|J_x c(\overline{x}, t)\| < \frac{\mu_m^s (J_x f_y(\overline{x}, \overline{x}, t)^{-1})}{\|J_x f_y(\overline{x}, \overline{x}, t)^{-1}\|}. \tag{5.1}$$

Entonces todo elemento de $\partial_{(x,\lambda)}\Phi(\overline{x}, \overline{\lambda}, t)$ *es no singular.*

Demostración. La demostración es similar al Teorema 3 de [22]. □

5.2 Restricciones con lado derecho variable

Aquí consideramos el caso donde el conjunto $\overline{K}(x, t)$ está definido por

$$\overline{K}(x, t) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \overline{g}(x, y, t) := q(y) - c(x, t) \leq 0\},$$

donde $c, q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ son dos veces continuamente diferenciables y cada componente q_i es convexa. Por lo tanto, el conjunto $\overline{K}(x, t)$ se describe mediante el sistema de desigualdades q con una variable del lado derecho $c(x, t)$.

Para restricciones dadas en esta forma, tenemos el siguiente resultado de no singularidad:

Teorema 7. *Sea* $t \in [t_0, 1]$ *y* $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ *un punto KKT-QEP del* $QEP(t)$*. Suponga que* $J_x f_y\left(\overline{x}, \overline{x}, t\right)$ *es definida positiva, y que*

$$\|J_x c\left(\overline{x}, t\right)_{I\bullet}\| < \frac{\mu_m^s\left(\left[Jq\left(\overline{x}\right) J_x L\left(\overline{x}, \overline{\lambda}, t\right)^{-1} \nabla q\left(\overline{x}\right)\right]_I\right)}{\|J_x L\left(\overline{x}, \overline{\lambda}, t\right)^{-1}\| \cdot \|Jq\left(\overline{x}\right)_{I\bullet}\|}. \tag{5.2}$$

Entonces todo elemento de $\partial_{(x,\lambda)}\Phi(\overline{x}, \overline{\lambda}, t)$ *es no singular.*

Demostración. La demostración esencialmente sigue los mismos pasos del Teorema 5 de [22]. □

En el caso lineal donde $q(y) = Ey - b$ para alguna matriz $E \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y un vector fijo $b \in \mathbb{R}^m$, tenemos $J_x L(x, \lambda, t) = J_x f_y(x, x, t)$ y $Jq(x) = E$. Por lo tanto, obtenemos el siguiente caso especial como corolario inmediato del Teorema 7.

Corolario 1. *Considere el caso lineal con $q(y) = Ey - b$, y sea $(\overline{x}, \overline{\lambda})$ un punto KKT-QEP del QEP(t). Suponga que $J_x f_y(\overline{x}, \overline{x}, t)$ es definida positiva, y que*

$$\|J_x c(\overline{x}, t)_{I\bullet}\| < \frac{\mu_m^s\left(\left[EJ_x f_y(\overline{x}, \overline{x}, t)^{-1} E^T\right]_I\right)}{\|J_x f_y(\overline{x}, \overline{x}, t)^{-1}\| \cdot \|E_{I\bullet}\|} \tag{5.3}$$

se cumple. Entonces todos los elementos de $\partial_{(x,\lambda)}\Phi(\overline{x}, \overline{\lambda}, t)$ son no singulares.

Es conocido que para una matriz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ y conjunto de índices arbitrarios $I, J \subseteq \{1, \dots, n\}$, se tiene que $\|A_{IJ}\| \leq \|A\|$ y $\mu_m^s(A_{II}) \geq \mu_m^s(A)$, por tanto, la condición

$$\|J_x c(\overline{x}, t)\| < \frac{\mu_m^s\left(EJ_x f_y(\overline{x}, \overline{x}, t)^{-1} E^T\right)}{\left\|J_x f_y(\overline{x}, \overline{x}, t)^{-1}\right\| \cdot \|E\|}$$

implica la condición (5.3).

Ejemplo 3. Consideremos el QEP con lado derecho variable dado por

$$f((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 - x_1^2 - x_1^2) \text{ y } K(x) = \{y \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) \leq 0\},$$

donde

$$g(x, y) := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} y - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_2 \\ 0 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que el QEP es convexo. Queremos verificar que este QEP tiene una única solución. Para esto consideremos:

$$\overline{f}(x, y, t) := f(x, y) \text{ y } \overline{g}(x, y, t) := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} y - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{t}{2}x_2 \\ 0 \\ \frac{t}{2}x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tenemos que

$$J_x f_y(x, x, t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } \nabla_x c(\overline{x}, t)^\top = \begin{pmatrix} 0 & t \\ 0 & 0 \\ t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

de forma que

$$\frac{1}{2}E(J_x f_y(\overline{x}, \overline{x}, t)^{-1} + J_x f_y(\overline{x}, \overline{x}, t)^{-T})E^\top = EE^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Se puede verificar que para un punto factible $I \in \{\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{1,3\},\{2,4\}\}$, LICQ-QEP es satisfecho y $\mu_m^s\left(\left[EJ_xf_y\left(\overline{x},\overline{x},t\right)^{-1}E^T\right]_I\right) = 1$, $\|E_{I\bullet}\| = 1$, $\|J_xc(\overline{x},t)\| = \frac{t}{2}$ y $\|J_xf_y(\overline{x},\overline{x},t)^{-1}\| = 1$, luego

$$\frac{t}{2} = \|J_xc(\overline{x},t)^\top\| < \frac{\mu_m^s\left(\left[EJ_xf_y\left(\overline{x},\overline{x},t\right)^{-1}E^T\right]_I\right)}{\left\|J_xf_y\left(\overline{x},\overline{x},t\right)^{-1}\right\|\|E_{I\bullet}\|} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1$$

es satisfecho para todo $t \in [0,1]$, y así obtenemos la condición de no singularidad. Puede verificarse que el $QEP(0)$ tiene una única solución y que el conjunto X es acotado, luego la solución del QEP es única.

5.3 Restricciones bilineales

En esta subsección, consideramos el caso donde el conjunto factible $\overline{K}(x,t)$ está definido por la función

$$\overline{g}(x,y,t) := \begin{pmatrix} q_1(y) \\ \vdots \\ q_p(y) \\ x^TQ_1(t)y - c_1(t) \\ \vdots \\ x^TQ_b(t)y - c_b(t) \end{pmatrix}, \tag{5.4}$$

donde $q_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es dos veces continuamente diferenciable y convexa para $i = 1,\ldots,p$, $Q_j(t) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ son matrices semidefinidas positivas simétricas para todo $i = 1,\ldots,b$ y $t \in [t_0,1]$, $c_j : [0,1] \to \mathbb{R}$ son continuas para todo $i = 1,\ldots,b$. Para esta clase de QEPs, tenemos el siguiente resultado de no singularidad [27]:

Teorema 8. *Sea $t \in [t_0,1]$ y $(\overline{x},\overline{\lambda})$ un punto KKT-QEP del $QEP(t)$. Suponga que $J_xf_y(\overline{x},\overline{x},t)$ es definida positiva, y que $\nabla_y\overline{g}_i(\overline{x},\overline{x},t)$ con $i \in I$ son linealmente independientes. Entonces todo elemento de $\partial_{(x,\lambda)}\Phi(\overline{x},\overline{\lambda},t)$ es no singular.*

Demostración. La demostración es una adaptación simple del Teorema 7 de [22]. □

Ejemplo 4. Consideremos el QEP con restricciones bilineales dado por

$$f(x,y) = y^2 - x^2 \text{ y } K(x) = \{y \in \mathbb{R} : y \leq 2, -y \leq -1, xy \leq 2\}.$$

Queremos estudiar la unicidad de este QEP. Para esto definamos

$$\overline{f}(x,y,t) = f(x,y) \text{ y } K(x,t) = \{y \in \mathbb{R} : y \leq 2, -y \leq -1, xty - t^2 - 1 \leq 0\}.$$

En un punto KKT-QEP se tiene que $\delta \in \{\{1\},\{2\},\{3\}\}$, luego $\nabla_y g_i(\overline{x},\overline{x},t)$ con $i \in \delta$ son linealmente independientes, de forma que la condición de no singularidad del Teorema 8 es satisfecha. QEP(0) es una EP que tiene solución única y $X \subseteq [0,1]$, además, las otras condiciones del Teorema 5 son satisfechas, luego el QEP tiene solución única.

5.4 Restricciones binarias

En esta clase de QEPs, las restricciones $\overline{g}_i$ dependen de un solo par $\left(x_j, y_j\right)$ de variables para $j \in \{1,\ldots,n\}$. Dado que este índice j depende de la componente particular i, escribimos $j(i)$ a lo largo de esta sección, así la función punto conjunto $\overline{K}$ es definida por

$$\overline{K}(x,t) := \left\{y \in \mathbb{R}^n \mid \overline{g}_i\left(x_{j(i)}, y_{j(i)}, t\right) \leq 0, i = 1,\ldots,m\right\}.$$

Primero daremos un resultado general para esta clase de problemas.

Teorema 9. *Sea $t \in [t_0,1]$ y $(\overline{x},\overline{\lambda})$ un punto KKT-QEP del QEP(t). Suponga que $J_x f_y(\overline{x},\overline{x},t)$ es definida positiva, y que*

$$\nabla_{y_{j(i)}}\overline{g}_i\left(x_{j(i)}, x_{j(i)}, t\right) + \nabla_{x_{j(i)}}\overline{g}_i\left(x_{j(i)}, x_{j(i)}, t\right) \neq 0 \quad \forall i = 1,\ldots,m$$

y

$$\nabla_{x_{j(i)}}\left(\nabla_{y_{j(i)}}\overline{g}_i\left(x_{j(i)}, x_{j(i)}, t\right)\right) \geq 0 \quad \forall i = 1,\ldots,m$$

ocurren. Entonces todo elemento de $\partial_{(x,\lambda)}\Phi(\overline{x},\overline{\lambda},t)$ es no singular.

Demostración. Primero tenga en cuenta que el gradiente de $\overline{g}_i$ con respecto a y está dado por

$$\nabla_y\overline{g}_i(x,x,t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \nabla_{y_{j(i)}}\overline{g}_i\left(x_{j(i)}, x_{j(i)}, t\right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},$$

donde la única entrada posiblemente distinta de cero está en la posición $j(i)$. Por lo tanto, el jacobiano $J_x\left(\nabla_y\overline{g}_i(x,x,t)\right)$ es una matriz con la entrada

$$\nabla_{x_{j(i)}}\left(\nabla_{y_{j(i)}}\overline{g}_i\left(x_{j(i)}, x_{j(i)}, t\right)\right)$$

en la posición diagonal $(j(i), j(i))$ y todas las demás entradas iguales a cero, luego por hipótesis esta matriz es semidefinida positiva, luego $J_x L\left(\overline{x},\overline{\lambda},t\right)$ es definida positiva, luego no singular.

Para la segunda parte podemos asumir sin pérdida de generalidad que las restricciones g están ordenadas de tal manera que las primeras restricciones m_1 dependen únicamente del par (x_1, y_1), las siguientes restricciones m_2 dependen del par (x_2, y_2) solamente, y así sucesivamente, con las últimas m_n restricciones dependiendo de (x_n, y_n) solamente. Tenga en cuenta que m_i podría ser igual a cero para algunos de los índices $i \in \{1, \dots, n\}$, y que tenemos $m_1 + m_2 + \dots + m_n = m$. Teniendo en cuenta este orden, no es difícil ver que

$$\nabla_y \overline{g}(x, x, t) = \begin{pmatrix} \nabla_{y_1}\overline{g}_1(x_1, t) & \cdots & \nabla_{y_1}\overline{g}_{m_1}(x_1, t) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \nabla_{y_n}\overline{g}_s(x_n, t) & \cdots & \nabla_{y_n}\overline{g}_m(x_n, t) \end{pmatrix},$$

donde para simplificar la notación se ha denotado $\overline{g}_i(x_i, t) = \overline{g}_i(x_i, x_i, t)$ y $s = m - m_n + 1$.

Sea $S = J_x h(x, t) = \left(\nabla_y \overline{g}(\bar{x}, \bar{x}, t) + \nabla_x \overline{g}(\bar{x}, \bar{x}, t)\right)^\top$, tenemos que

$$S = \begin{pmatrix} \nabla_{x_1}h_1(x_1, t) & 0 & \cdots & 0 \\ \nabla_{x_1}h_2(x_1, t) & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \nabla_{x_1}h_{m_1}(x_1, t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \nabla_{x_2}h_{m_1+1}(x_2, t) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \nabla_{x_2}h_{m_1+m_2}(x_2, t) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & \nabla_{x_n}h_{m-m_n+1}(x_n, t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \nabla_{x_n}h_m(x_n, t) \end{pmatrix},$$

y entonces

$$M(\bar{x}, \bar{\lambda}, t)_I = (\nabla_x \overline{g}(\bar{x}, \bar{x}, t)_{\bullet I} + \nabla_y \overline{g}(\bar{x}, \bar{x}, t)_{\bullet I})^T J_x L(\bar{x}, \bar{\lambda}, t)^{-1} \nabla_y g(\bar{x}, \bar{x}, t)_{\bullet I}.$$

La hipótesis de independencia lineal implica que $\nabla_y \overline{g}(\overline{x}, \overline{x}, t)_{\bullet\delta}$ tiene rango por columnas completo, como esta matriz es escalonada y $\nabla_x \overline{g}(\bar{x}, \bar{x}, t)_{\bullet I} + \nabla_y \overline{g}(\bar{x}, \bar{x}, t)_{\bullet I}$ tiene rango por columnas completo, entonces $M(\bar{x}, \bar{\lambda}, t)_I$ es definida positiva y entonces una P-matriz. □

Ahora consideramos un caso especial de restricciones con lado derecho variable que también son restricciones binarias, donde $\overline{K}(x, t)$ que está definido por

$$\overline{K}(x, t) := \left\{y \in \mathbb{R}^n \mid \overline{g}_i(x, y, t) := q_i\left(y_{j(i)}\right) - c_i\left(x_{j(i)}, t\right) \leq 0, i = 1, \dots, m\right\}, \tag{5.5}$$

donde todas las funciones q_i son convexas y dos veces continuamente diferenciables, y las funciones c_i son continuamente diferenciables. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}\nabla_{y_{j(i)}}\overline{g}_i(x,y) &= q_i'\left(y_{j(i)}\right),\\ \nabla_{x_{j(i)}}\left(\nabla_{y_{j(i)}}\overline{g}_i\left(x_{j(i)},x_{j(i)},t\right)\right) &= q_i''\left(x_{j(i)}\right),\\ h_i'\left(x_{j(i)}\right) &= q_i'\left(x_{j(i)}\right)-c_i'\left(x_{j(i)},t\right).\end{aligned}$$

Dado que $q_i''\left(x_{j(i)}\right)\geq 0$ por la convexidad de q_i, obtenemos inmediatamente el siguiente resultado del Teorema 9.

Corolario 2. *Sea $t\in[t_0,1]$ y $(\overline{x},\overline{\lambda})$ un punto KKT-QEP del $QEP(t)$. Suponga que $J_xf_y(\overline{x},\overline{x},t)$ es definida positiva, g_i definida como en (5.5), y que*

$$\left(q_i'\left(\overline{x}_{j(i)}\right)-c_i'\left(\overline{x}_{j(i)},t\right)\right)\neq 0 \quad \forall i=1,\dots,m. \tag{5.6}$$

Entonces todos los elementos en $\partial_{(x,\lambda)}\Phi(\bar{x},\bar{\lambda},t)$ son no singulares.

Existe toda una clase de problemas en los que el conjunto factible tiene la forma (5.5), las llamadas restricciones de caja (con lado derecho variable). Para esta clase de problemas, el conjunto factible está definido por

$$\overline{K}(x,t):=\{y\in\mathbb{R}^n \mid y_i-\alpha_i x_i-\gamma_i(t)\leq 0, i=1,\dots,m:=n\}. \tag{5.7}$$

Teniendo en cuenta la estructura muy especial de estas restricciones, obtenemos directamente la siguiente consecuencia del corolario anterior.

Corolario 3. *Sea $t\in[t_0,1]$ y $(\overline{x},\overline{\lambda})$ un punto KKT-QEP del $QEP(t)$. Suponga que $J_xf_y(\overline{x},\overline{x},t)$ es definida positiva, g_i definida como en (5.7), y suponga que $\alpha_i\neq 1$ para todo $i=1,\dots,n$. Entonces todos los elementos en $\partial_{(x,\lambda)}\Phi(\bar{x},\bar{\lambda},t)$ son no singulares.*

Agradecimientos

Queremos agradecer a los evaluadores de la Revista de Matemáticas: Teoría y Aplicaciones por el tiempo, comentarios y valoración que tuvieron en la revisión de nuestro artículo. Su arbitraje dio lugar a que nuestro trabajo mejorará considerablemente en calidad y contenido.

Financiamiento

Este trabajo ha sido financiado y apoyado por la Facultad de Ciencias de la Universidad Nacional de Ingeniería.

Referencias

[1] L. Q. Anh y P. Q. Khanh, *Hölder continuity of the unique solution to quasiequilibrium problems in metric spaces*. J. Optim. Theory Appl. **141**(2009), no. 1, 37-54. DOI: 10.1007/s10957-008-9508-x

[2] D. Aussel, J. Cotrina y A. Iusem, *An existence result for quasi-equilibrium problems*. Journal of Convex Analysis **24**(2017), 55-66.

[3] A. Bensoussan y Lions, *Nouvelles Methodes en Contrôle Impulsionnel*. French. Applied Mathematics & Optimization **1**(1975), no. 4, 289-312. DOI: 10.1007/BF01447955

[4] G. Bigi, M. Castellani, M. Pappalardo y M. Passacantando, *Nonlinear Programming Techniques for Equilibria*. 2018. DOI: 10.1007/978-3-030-00205-3

[5] E. Blum y W. Oettli, *From optimization and variational inequalities to equilibrium problems*. (1994).

[6] L. Bueno, G. Haeser, F. Lara y F. navarro rojas, *An Augmented Lagrangian Method for Quasi-Equilibrium Problems*. Computational Optimization and Applications **76**(2020). DOI: 10.1007/s10589-020-00180-4

[7] M. Castellani y M. Giuli, *An existence result for quasiequilibrium problems in separable Banach spaces*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **425**(2015), no. 1, 85-95. DOI: https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2014.12.022

[8] M. Castellani y M. Giuli, *Refinements of existence results for relaxed quasimonotone equilibrium problems*. Journal of Global Optimization **57**(2013). DOI: 10.1007/s10898-012-0021-2

[9] M. Castellani y M. Giuli, *A coercivity condition for nonmonotone quasiequilibria on finite-dimensional spaces*. Journal of Global Optimization **75**(2019). DOI: 10.1007/s10898-019-00811-z

[10] M. Castellani, M. Pappalardo y M. Passacantando, *Existence results for nonconvex equilibrium problems*. Optimization Methods and Software **25**(2010), 49-58. DOI: 10.1080/10556780903151557

[11] F. H. Clarke, *Optimization and nonsmooth analysis*. SIAM, 1990. DOI: 10.1137/1.9781611971309

[12] J. Cotrina, A. Hantoute y A. Svensson, *Existence of quasi-equilibria on unbounded constraint sets*. English. Optimization **71**(2022), no. 2, 337-354. DOI: 10.1080/02331934.2020.1778690

[13] J. Cotrina, M. Théra y J. Zúñiga, *An existence result for quasi-equilibrium problems via Ekeland's variational principle*. J. Optim. Theory Appl. **187**(2020), no. 2, 336-355. DOI: 10.1007/s10957-020-01764-0

[14] J. Cotrina y J. Zúñiga, *A note on quasi-equilibrium problems*. Operations Research Letters **46**(2018), no. 1, 138-140. DOI: https://doi.org/10.1016/j.orl.2017.12.002

[15] J. Cotrina y J. Zúñiga, *Quasi-Equilibrium Problems with Non-self Constraint Map*. 2019. DOI: 10.1007/s10898-019-00762-5

[16] R. W. Cottle, *Linear complementarity problem*. C. A. Floudas y P. M. Pardalos (Eds.). Encyclopedia of Optimization. Springer US, Boston, MA, 2009, 1873-1878. DOI: 10.1007/978-0-387-74759-0_333

[17] A. Dreves y S. Sagratella, *Nonsingularity and Stationarity Results for Quasi-Variational Inequalities*. Journal of Optimization Theory and Applications **185**(2020). DOI: 10.1007/s10957-020-01678-x

[18] C. M. Elliott, *Variational and Quasivariational Inequalities Applications to Free—Boundary ProbLems. (Claudio Baiocchi And António Capelo)*. SIAM Review **29**(1987), no. 2, 314-315. DOI: 10.1137/1029059

[19] L. Evans, *Measure theory and fine properties of functions*. Routledge, 2018.

[20] F. Facchinei y C. Kanzow, *Generalized Nash equilibrium problems*. Annals of Operations Research **175**(2010), 177-211. DOI: 10.1007/s10479-009-0653-x

[21] F. Facchinei, A. Fischer y C. Kanzow, *Regularity properties of a semismooth reformulation of variational inequalities*. SIAM J. Optim. **8**(1998), no. 3, 850-869. DOI: 10.1137/S1052623496298194

[22] F. Facchinei, C. Kanzow, S. Karl y S. Sagratella, *The semismooth Newton method for the solution of quasi-variational inequalities*. Computational Optimization and Applications **62**(2014). DOI: 10.1007/s10589-014-9686-4

[23] F. Facchinei, C. Kanzow y S. Sagratella, *Solving quasi-variational inequalities via their KKT conditions*. Mathematical Programming **144**(2014). DOI: 10.1007/s10107-013-0637-0

[24] M. Giuli, *Cyclically monotone equilibrium problems and Ekeland's principle*. Decisions in Economics and Finance **40**(2017), 1-12. DOI: 10.1007/s10203-017-0188-6

[25] A. von Heusinger y C. Kanzow, *Optimization reformulations of the generalized Nash equilibrium problem using Nikaido-Isoda-type functions*. Computational Optimization and Applications **43**(2009), 353-377. DOI: 10.1007/s10589-007-9145-6

[26] A. Iusem, G. Kassay y W. Sosa, *On certain conditions for the existence of solutions of equilibrium problems*. Math. Program. **116**(2009), 259-273. DOI: 10.1007/s10107-007-0125-5

[27] C. Kanzow, *On the multiplier-penalty-approach for quasi-variational inequalities*. Mathematical Programming, 2016, 33-63. DOI: 10.1007/s10107-015-0973-3

[28] U. Mosco, *Implicit variational problems and quasi variational inequalities*. (1976). DOI: 10.1007/BFb0079943

[29] L. D. Muu y W. Oettli, *Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria*. Nonlinear Analysis-theory Methods & Applications **18**(1992), 1159-1166. DOI: 10.1016/0362-546X(92)90159-C

[30] P. J. Santos, P. Santos y S. Scheimberg, *A Newton-type method for quasi-equilibrium problems and applications*. Optimization **71**(2021), 1-26. DOI: 10.1080/02331934.2021.1945052