Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones **31**(2): 153-165
CIMPA - UCR ISSN: 1409-2433(Print), 2215-3373(Online)
DOI: https://doi.org/10.15517/rmta.v31i2.55788

SOBRE EL UMBRAL F-PURO DEL IDEAL HOMOGÉNEO MÁXIMO DE UN ANILLO DE STANLEY-REISNER

ON THE F-PURE THRESHOLD OF THE HOMOGENEOUS MAXIMAL IDEAL OF A STANLEY-REISNER RING

Wágner Badilla-Céspedes[1]

Received: 03/Ago/2023; Accepted: 16/May/2024

[1] Universidad Nacional Autónoma de México, Centro de Ciencias Matemáticas, Morelia, México. E-Mail: wagner@matmor.unam.mx

Resumen

En característica prima, el umbral F-puro es un invariante numérico que mide singularidades. Se conocen pocas estimaciones de este número. En esta nota, calculamos explícitamente el umbral F-puro del ideal homogéneo máximo en un anillo de Stanley-Reisner y demostramos que este número y la dimensión de escisión son iguales.

Palabras clave: umbral F-puro; anillos de Stanley–Reisner; anillos de característica prima.

Abstract

In prime characteristic, the F-pure threshold is a numerical invariant measuring singularities. Few estimates of this number are known. In this note, we explicitly compute the F-pure threshold of the homogeneous maximal ideal in a Stanley-Reisner ring and prove that this number and the splitting dimension are same.

Keywords: F-pure threshold; Stanley-Reisner rings; prime characteristic rings.

Mathematics Subject Classification: Primary: 13A35, 13F55; Secondary: 14B05.

1. Introducción

Iniciamos haciendo algunos comentarios sobre invariantes geométricos que tienen conexión con invariantes en característica prima. Cuando estamos en característica cero, el umbral log canónico $\operatorname{lct}(f)$ de un polinomio f con coeficientes en un campo, es un importante invariante en geometría birracional [3]. Desde un punto de vista analítico, consideremos $f \in \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]$ con $f(0) = 0$ y singularidad en cero. Tenemos la función

$$\begin{array}{rcc} \dfrac{1}{|f|} : \mathbb{C}^n \backslash V(f) & \longrightarrow & \mathbb{R}, \\ z & \longrightarrow & \dfrac{1}{|f(z)|}. \end{array}$$

El umbral log canónico de f es definido como

$$\operatorname{lct}(f) = \sup\left\{\lambda \in \mathbb{R}_{>0} \mid \text{existe un } \varepsilon > 0 \text{ tal que } \int_{B_\varepsilon(0)} \frac{1}{|f(z)|^{2\lambda}} < \infty\right\}.$$

Resulta que $\operatorname{lct}(f) = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}_{>0} \mid \mathcal{J}(f^\lambda) = (1)\}$, donde $\mathcal{J}(f^\lambda)$ es el ideal multiplicador de f con exponente λ. Por lo tanto, $\operatorname{lct}(f)$ es el primer número de salto de f y es un número racional. Este número mide una singularidad de f alrededor de cero; es decir, estos invariantes miden la agudeza de una curva en el punto 0. Por ejemplo, los umbrales log canónicos de las curvas de la Figura 1 son 1, $\frac{5}{6}$ y $\frac{11}{18}$, respectivamente.

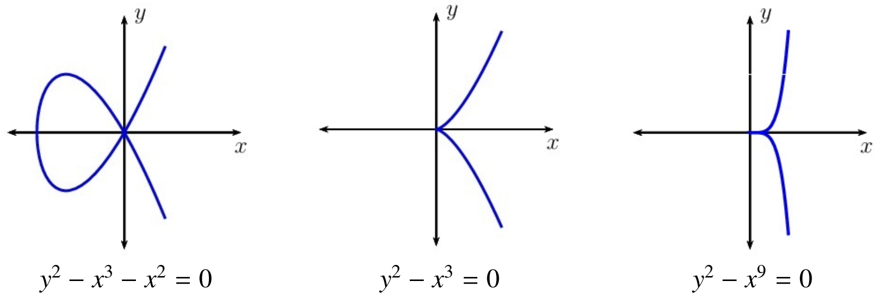

Figura 1: Curvas.

En característica positiva, el umbral F-puro de un ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$, denotado por $\operatorname{fpt}(\mathfrak{a})$, fue definido por Takagi y Watanabe [21]. Este está estrechamente relacionado con las teorías de F-puridad y clausura hermética [7, 11, 12]. Específicamente, este invariante mide el orden de escisión de $\mathfrak{a}$. El umbral F-puro es definido como

$$\lim_{e\to\infty} \frac{\max\{t \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{a}^t \nsubseteq I_e(R)\}}{p^e}.$$

Aquí $I_e(R)$ denota el ideal de escisión de R. El umbral F-puro es considerado el análogo al umbral log canónico; ellos comparten propiedades similares [18, 21]. En particular, si f es un elemento en $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$, entonces el umbral F-puro y el umbral log canónico pueden ser comparados como sigue:* $\lim\limits_{p\to\infty} \operatorname{fpt}(f \bmod p) = \operatorname{lct}(f)$ [7, 18].

Una línea reciente de investigación consiste en entender bajo cuáles condiciones el conjunto de los umbrales F-puros es un subconjuto de los números racionales. Este hecho fue probado por Blickle, Mustaţă y Smith [4] para un anillo regular F-finito. Sin embargo, es bien sabido por la comunidad que calcular los umbrales F-puros es una tarea difícil en general y pocos ejemplos de cálculos explícitos son conocidos. Entre algunos de ellos están los siguientes casos:

- En una gran clase de ideales binomiales, como los ideales binomiales que son una intersección completa y los ideales que definen el espacio de curvas monomiales, los umbrales F-puros son calculados mediante programación lineal [19].
- En hipersuperficies binomiales sobre un campo de característica prima [8].
- En un polinomio cuyo soporte satisface cierta condición de no degeneración [9].
- En polinomios cuasi-homogéneos [17].
- En polinomios tipo Thom-Sebastiani [6].

- En un polinomio homogéneo reducido de grado d, su umbral F-puro es al menos $\frac{1}{d-1}$ [15].

Además, fue hace tan solo unos pocos años que apareció la primera rutina computacional para calcular algunos ejemplos [10].

En este trabajo, nos concentramos en anillos de Stanley-Reisner. La construcción del anillo de Stanley-Reisner es una herramienta básica de mucho estudio en el álgebra conmutativa combinatoria y la combinatoria algebraica. La naturaleza combinatoria de estos anillos ha sido útil para estudiar sus estructuras en característica positiva. En este manuscrito, calculamos el umbral F-puro del ideal homogéneo máximo de un anillo de Stanley-Reisner.

Teorema A (ver el Teorema 2)**.** *Sea R un anillo de Stanley-Reisner con ideal homogéneo máximo $\mathfrak{m}$. Entonces el umbral F-puro de $\mathfrak{m}$ es igual a la dimensión de escisión de R.*

Para obtener el Teorema A, calculamos el primo de escisión de R y probamos que es igual a la suma de sus primos mínimos. Entonces, el problema es reducido al caso del anillo de los polinomios por tomar un cociente entre el primo de escisión.

Notación 1. *En este trabajo asumimos que todos los anillos son conmutativos, noetherianos, con identidad multiplicativa 1 y de característica prima p.*

2. Preliminares

En esta sección repasamos conceptos y propiedades que son necesarias en nuestro estudio de anillos en característica prima. Omitimos detalles y referimos al lector interesado al libro de Huneke [13]. A través de esta sección, R denota un anillo de característica prima p.

2.1. Morfismo de Frobenius.

Dado un anillo R, el morfismo de Frobenius es el mapeo $F : R \longrightarrow R$ dada por $F(r) = r^p$ para $r \in R$. El morfismo de Frobenius es un homomorfismo de anillos. Para un entero no negativo e, podemos considerar la función iterada de Frobenius $F^e : R \longrightarrow R$ dada por $F^e(r) = r^{p^e}$ para $r \in R$. De esta manera, R tiene una estructura de R-módulo por restricción de escalares vía F^e. Equivalentemente, R es un R^{p^e}-módulo, con $R^{p^e} = F^e(R)$.

Supongamos que R es reducido. El conjunto $R^{1/p^e} = \{r^{1/p^e} \mid r \in R\}$ es el anillo de las *raíces* p^e-ésimas de los elementos de R. Nuevamente, R^{1/p^e} es un anillo abstractamente isomorfo a R vía la función $R^{1/p^e} \longrightarrow R$, la cual envía $r \longrightarrow r^{p^e}$. En particular, el mapeo F^e puede ser identificado con la inclusión de R-módulos $R \subseteq R^{1/p^e}$. Por lo tanto, existe un isomorfismo de R-módulos entre R^{1/p^e} y R visto como R-módulo a través de F^e. En lo que resta de este manuscrito trabajamos con anillos reducidos.

Consideremos ahora $I \subseteq R$ un ideal, denotamos la extensión de I a través de F^e por $I^{[p^e]}$. El ideal $I^{[p^e]}$ es llamado la *potencia de Frobenius* de I. Si $I = (r_1, \ldots, r_s)$, entonces $I^{[p^e]} = ({r_1}^{p^e}, \ldots, {r_s}^{p^e})$. Además, notamos que $IR^{1/p^e} = (I^{[p^e]})^{1/p^e}$.

El mapeo de Frobenius es una poderosa herramienta en el estudio de singularidades en característica prima, debido a que Kunz muestra que los anillos regulares son aquellos donde F^e es un homomorfismo de anillos fielmente plano [16]. A partir de esta función podemos definir clases de singularidades como la F-finitud y la F-puridad.

Definición 1. *El anillo R es llamado F-finito si el morfismo de Frobenius F^e es finito para algún (para todo) entero $e \geq 1$. Equivalentemente, R^{1/p^e} es un R-módulo finitamente generado para algún (para todo) entero $e \geq 1$.*

Muchos de los anillos encontrados en geometría algebraica son F-finitos.

Observación 1. *Sea R un anillo F-finito. Entonces, las siguientes proposiciones son verdaderas:*

(1) Toda imagen homomórfica de R es F-finita.

(2) Dado un ideal I en R, tenemos que R/I es F-finito.

(3) El anillo de polinomios $R[x_1, \ldots, x_n]$ es F-finito.

(4) El anillo de series de potencia $R[[x_1, \ldots, x_n]]$ es F-finito.

(5) Toda R-álgebra finitamente generada es F-finita.

(6) Si W es un sistema multiplicativo en R, entonces $W^{-1}R$ es también un anillo F-finito.

(7) Si R es un anillo local, entonces $\widehat{R}$ es F-finito.

Ejemplo 1 (Anillo de polinomios en n variables)**.** *Consideremos $R = K[x_1, \ldots, x_n]$. Entonces R^{1/p^e} es un R-módulo libre con base*

$$\left\{ k^{1/p^e} x_1^{\alpha_1/p^e} \cdots x_n^{\alpha_n/p^e} \mid 0 \leq \alpha_i \leq p^e - 1 \right\},$$

donde $\{k^{1/p^e}\}$ es una base de K^{1/p^e} sobre K. Notemos que si $\dim_K(K^{1/p^e}) = d$, entonces el rango de R^{1/p^e} sobre R es dp^{ne}.

Finalizamos esta subsección recordando la definición de F-pureza.

Definición 2. *El anillo R es llamado F-puro si es F-finito y $\varphi(1) = 1$ para algún $\varphi \in \mathrm{Hom}_R(R^{1/p}, R)$.*

2.2. Umbral F-puro.

En esta subsección nos enfocamos en trabajar con R un anillo F-finito y F-puro. El umbral F-puro de un ideal $\mathfrak{a} \subseteq R$ fue introducido por Takagi y Watanabe [21]. En característica positiva, este es considerado como análogo al umbral log canónico, un invariante importante de singularidades de hipersuperficies en característica cero. En particular, si f es un polinomio con coeficientes en un campo, el umbral log canónico de f es el primer número de salto del ideal multiplicador de f con exponente $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, $\mathcal{J}(f^c)$. El estudio del umbral F-puro es motivado por el umbral log canónico, debido a que ambos tienen propiedades similares. En términos generales, el umbral F-puro mide el orden de escisión de $\mathfrak{a}$.

Antes de definir el umbral F-puro, primero introducimos un ideal que nos permite estudiar homomorfismos que no son escindes.

Definición 3 ([1])**.** *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo local o una K-álgebra graduada estándar, la cual es F-finita y F-pura. Definimos*

$$I_e(R) = \{f \in R \mid \varphi(f^{1/p^e}) \in \mathfrak{m}, \text{ para todo } \varphi \in \operatorname{Hom}_R(R^{1/p^e}, R)\},$$

donde $e \in \mathbb{N}$.

Observemos que el conjunto $I_e(R)$ es un ideal de R y es llamado el e-ésimo *ideal de escisión* de R. Además, definimos el *primo de escisión* de R como $\mathcal{P}(R) = \bigcap_{e \in \mathbb{N}} I_e(R)$ y la *dimensión de escisión* de R por $\operatorname{sdim}(R) = \dim(R/\mathcal{P}(R))$.

Por otra parte, por la Definición 3 notemos que $f \notin I_e(R)$ si y solo si $\varphi(f^{1/p^e}) = 1$ para algún homomorfismo $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(R^{1/p^e}, R)$.

El ideal $I_e(R)$ es usado para definir la F-signatura. Smith y Van den Bergh en su trabajo [20] mostraron la existencia de este invariante cuando el anillo R es fuertemente F-regular y tiene tipo de representación finita de Frobenius. Posteriormente, el trabajo de Huneke y Leuschke [14] mostró que este invariante existe si R es un dominio local completo y Gorenstein. Para anillos Gorenstein en el espectro perforado, su existencia fue dada por Yao [23]. Más tarde, Tucker [22] mostró la existencia de la F-signatura en el caso general.

Finalmente, veamos el Teorema de Tucker.

Teorema 1 ([22, Teorema 4.9])**.** *Sea $(R, \mathfrak{m}, K)$ un anillo local F-finito y F-puro de dimensión d. Entonces*

$$\lim_{e \to \infty} \frac{\lambda(R/I_e(R))}{p^{ed}}$$

existe, donde $\lambda(-)$ denota la longitud de un R-módulo.

El teorema anterior motiva la siguiente definición.

Definición 4. *Supongamos que* $(R, \mathfrak{m}, K)$ *es un anillo local* F*-finito y* F*-puro de dimensión* d*. La* F*-signatura de* R *es definida por*

$$s(R) = \lim_{e\to\infty} \frac{\lambda(R/I_e(R))}{p^{ed}},$$

donde $\lambda(-)$ *denota la longitud de un* R*-módulo.*

Retomando el ideal de escisión, veamos la siguiente propiedad de $I_e(R)$.

Proposición 1 ([1]). *Sea* $(R, \mathfrak{m}, K)$ *un anillo local o una* K*-álgebra graduada estándar, la cual es* F*-finita y* F*-pura. Entonces las siguientes proposiciones son verdaderas:*

(1) Si $r \notin I_e(R)$*, entonces* r *es un no divisor de cero.*

(2) $\mathfrak{m}^{[p^e]} \subseteq I_e(R)$*. La igualdad se da si* R *es un anillo regular.*

Con la ayuda del ideal de escisión, podemos definir el umbral F-puro.

Definición 5 ([5]). *Sea* $(R, \mathfrak{m}, K)$ *un anillo local o una* K*-álgebra graduada estándar, la cual es* F*-finita y* F*-pura. Dado* $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$ *un ideal en* R*, definimos*

$$b_{\mathfrak{a}}(p^e) = \max\{t \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{a}^t \nsubseteq I_e(R)\}.$$

Definimos el umbral F*-puro de* $\mathfrak{a}$ *en* R *como*

$$\operatorname{fpt}(\mathfrak{a}) = \lim_{e\to\infty} \frac{b_{\mathfrak{a}}(p^e)}{p^e}.$$

Cuando $\mathfrak{a} = \mathfrak{m}$*, el umbral* F*-puro* $\operatorname{fpt}(\mathfrak{m})$ *es denotado por* $\operatorname{fpt}(R)$*.*

Resaltamos el hecho no obvio de que el umbral F-puro es un número racional en el caso de ser R un anillo regular [4]. La racionalidad del umbral F-puro continúa siendo un problema abierto en el caso general. Notemos que el umbral F-puro es menor o igual a la dimensión de Krull de R. Más aún, el umbral F-puro de $\mathfrak{m}$ y la dimensión de Krull de R coinciden, siempre que R sea un anillo regular.

3. Anillo de Stanley-Reisner

En el anillo de polinomios $S = K[x_1, \ldots, x_n]$, un monomio $x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ es llamado *libre de cuadrados* si los exponentes $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ toman valores de cero o uno. Decimos que un ideal monomial I de S es *monomial libre de cuadrados* si es generado por monomios libres de cuadrados. Como una consecuencia, el ideal I es un ideal radical y sus primos mínimos están generados por variables.

Un anillo formado por el cociente entre un anillo de polinomios sobre un campo y un ideal monomial libre de cuadrados es llamado *anillo de Stanley-Reinser*. Estos anillos tienen estructura combinatoria dada por complejos simpliciales. También tienen singularidades suaves; por ejemplo, son F-puros.

Ahora, establecemos la notación que seguimos a través de esta sección.

Notación 2. *Denotamos $S = K[x_1, \ldots, x_n]$ con K un campo F-finito de característica prima p. Sea I un ideal monomial libre de cuadrados de S. Sea $I = \bigcap_{i=1}^{l} \mathfrak{p}_i$ tal que $\mathfrak{p}_i \nsubseteq \mathfrak{p}_j$ para $i \neq j$ y $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_l$ están generados por variables. Denotamos $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ para $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Tomamos $R = S/I$ y $\mathfrak{m}$ su único ideal homogéneo máximo.*

Consideremos $\mathfrak{a} \subseteq R$ un ideal. Abusamos de la notación y denotamos la imagen inversa de $\mathfrak{a} \subseteq R$ bajo la proyección natural $S \longrightarrow S/I$ por $\mathfrak{a} \subseteq S$.

La siguiente proposición nos permite calcular el anillo de las raíces p^e-ésimas de R en términos de ideales cocientes. Recordemos que $R^{1/p^e} = S^{1/p^e}/I^{1/p^e}$.

Proposición 2 ([2, Proposición 2.2])**.** *Sea e un entero no negativo. Entonces*

$$R^{1/p^e} \cong \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq s \\ \alpha \in \mathcal{A}}} (S/J_\alpha)(a_i x^\alpha)^{1/p^e}$$

como R-módulos, con $\mathcal{A} = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid 0 \leq \alpha_i \leq p^e - 1 \text{ para } i = 1, \ldots, n\}$, $\mathcal{B} = \{a_i{}^{1/p^e} \mid i = 1, \ldots, s\}$ es una base de K^{1/p^e} como K-espacio vectorial y $J_\alpha = (I : x^\alpha)$.

Demostración. Cada elemento $r^{1/p^e} \in S^{1/p^e}$ puede ser escrito en forma única como

$$r^{1/p^e} = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq s \\ \alpha \in \mathcal{A}}} r_{i,\alpha}(a_i x^\alpha)^{1/p^e},$$

donde $r_{i,\alpha} \in S$. Tomemos el morfismo

$$\varphi : S^{1/p^e} \longrightarrow \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq s \\ \alpha \in \mathcal{A}}} (S/J_\alpha)(a_i x^\alpha)^{1/p^e},$$

definido por

$$\varphi(r^{1/p^e}) = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq s \\ \alpha \in \mathcal{A}}} (r_{i,\alpha} + J_\alpha)(a_i x^\alpha)^{1/p^e}.$$

Por la manera de definir a φ, notamos que φ es un homomorfismo sobreyectivo de S-módulos.

Para obtener lo deseado vamos a utilizar el primer teorema de isomorfismo. Entonces debemos probar que $\ker \varphi = I^{1/p^e}$. Con el fin de mostrar esta igualdad, primero mostramos la inclusión $\ker\varphi \subseteq I^{1/p^e}$. Sea $r^{1/p^e} \in \ker\varphi$. Supongamos sin perder generalidad que $r^{1/p^e} = x^\theta(a_i x^\alpha)^{1/p^e}$ para algunos $\theta \in \mathbb{N}^n$, $\alpha \in \mathcal{A}$ y $0 \leq i \leq s$. Se sigue que $0 = \varphi(r^{1/p^e}) = (x^\theta + J_\alpha)(a_i x^\alpha)^{1/p^e}$. Como una consecuencia, $x^\theta \in J_\alpha$. De esta manera, $x^{\alpha+\theta} \in I$. Por lo tanto $r^{1/p^e} = x^\theta(a_i x^\alpha)^{1/p^e} = (a_i x^{p^e\theta+\alpha})^{1/p^e} \in I^{1/p^e}$.

Para mostrar la otra inclusión es suficiente considerar $r^{1/p^e} = x^\theta(a_i x^\alpha)^{1/p^e} x^{\beta/p^e} \in I^{1/p^e}$ con $\theta \in \mathbb{N}^n$, $\alpha \in \mathcal{A}$, $0 \leq i \leq s$ y x^β un generador libre de cuadrados de I. Debido a que $0 \leq \alpha_j \leq p^e - 1$ y $0 \leq \beta_j \leq 1$ para todo $1 \leq j \leq n$, existe $\gamma \in \{0,1\}^n$ tal que $\alpha' = \alpha + \beta - p^e\gamma \in \mathcal{A}$. Notemos que $a_i x^{\theta+\gamma+\alpha'} \in I$, lo cual nos lleva a $x^{\theta+\gamma} \in J_{\alpha'}$. Además, $r^{1/p^e} = x^{\theta+\gamma}(a_i x^{\alpha'})^{1/p^e}$. Se sigue que $r^{1/p^e} \in \ker\varphi$, pues $\varphi(r^{1/p^e}) = (x^{\theta+\gamma} + J_{\alpha'})(a_i x^{\alpha'})^{1/p^e} = 0$.

De lo hecho anteriormente deducimos que

$$R^{1/p^e} \cong \bigoplus_{\substack{1\leq i\leq s\\ \alpha\in\mathcal{A}}} (S/J_\alpha)(a_i x^\alpha)^{1/p^e}$$

como S-módulos. Por ende, ellos son isomorfos como R-módulos. □

En el trabajo de Badilla-Céspedes [2] se considera una forma general del umbral F-puro, llamado umbral de Cartier, y se prueba la racionalidad en varios casos para los anillos de Stanley-Reisner. Nuestro objetivo en este trabajo es calcular el umbral F-puro de $\mathfrak{m}$ en un anillo de Stanley-Reisner (ver el Teorema A). Para ello comparamos este número con su correspondiente en $R/\mathcal{P}(R)$. Primero, necesitamos calcular el ideal de escisión y el primo de escisión de un anillo de Stanley-Reisner. Antes de calcular estos ideales necesitamos el siguiente lema.

Lema 1 ([2, Lema 4.16]). *Sea e un entero no negativo. Entonces $I_e(R)$ y $\mathcal{P}(R)$ son ideales monomiales.*

Demostración. Notemos que R es $\mathbb{N}^n$ - graduado y R^{1/p^e} es un R-módulo $\frac{1}{p^e}\mathbb{N}^n$-graduado. Como $R \subseteq R^{1/p^e}$, podemos ver a R como un R-módulo $\frac{1}{p^e}\mathbb{N}^n$-graduado. Mostrar que $I_e(R)$ es un ideal monomial, es equivalente a probar que $I_e(R)$ es un ideal homogéneo con la $\mathbb{N}^n$ graduación. Sea $r = r_{\alpha_1} + \cdots + r_{\alpha_t} \in I_e(R)$, con $r_{\alpha_i} \in R$ de grado $\alpha_i \in \mathbb{N}^n$. Sea $\varphi \in \operatorname{Hom}_R(R^{1/p^e}, R)$. Al ser R^{1/p^e} un R-módulo finitamente generado, todo homomorfismo $R^{1/p^e} \longrightarrow R$ es una suma finita de homomorfismos graduados. En tal caso podemos tomar φ homogéneo de grado $\beta \in \frac{1}{p^e}\mathbb{N}^n$. Evaluando φ en r^{1/p^e} tenemos que

$$\varphi(r^{1/p^e}) = \varphi(r_{\alpha_1}^{1/p^e}) + \cdots + \varphi(r_{\alpha_t}^{1/p^e}) \in \mathfrak{m}$$

y cada $\varphi(r_{\alpha_i}^{1/p^e})$ tiene grado $\frac{1}{p^e}\alpha_i + \beta$. Como $\mathfrak{m}$ es un ideal homogéneo, $\varphi(r_{\alpha_i}^{1/p^e}) \in \mathfrak{m}$. Siendo así $r_{\alpha_i} \in I_e(R)$ para todo $i \in \{1, \ldots, t\}$. Por lo tanto, $I_e(R)$ es un ideal homogéneo.

Finalmente, como la intersección de ideales monomiales es un ideal monomial, $\mathcal{P}(R)$ es monomial. $\square$

Badilla-Céspedes trabaja una forma general del ideal de escisión llamado la contracción de Cartier; con él introduce el núcleo de Cartier [2, Definición 4.12], el cual es una generalización del primo de escisión. Además, para ideales primos monomiales en anillos de Stanley-Reisner, el autor da una descripción de la contracción de Cartier a partir de la potencia de Frobenius y el núcleo de Cartier [2, Proposición 4.17], pero sin dar una descripción del núcleo de Cartier. La siguiente proposición nos da una fórmula explícitamente para el primo de escisión en virtud de los primos mínimos de R.

Proposición 3. *Sea e un entero no negativo. Las siguientes proposiciones son verdaderas:*

(1) $I_e(R) = \mathfrak{m}^{[p^e]} + \sum_{i=1}^{l} \mathfrak{p}_i$,

(2) $\mathcal{P}(R) = \sum_{i=1}^{l} \mathfrak{p}_i$.

Demostración. Afirmamos que $\mathfrak{m}^{[p^e]} + \sum_{i=1}^{l} \mathfrak{p}_i \subseteq I_e(R)$. En efecto, $\sum_{i=1}^{l} \mathfrak{p}_i$ está contenida en la unión de los primos asociados de R, por ello cada elemento de dicha suma es un divisor de cero. Por la Proposición 1, $\mathfrak{m}^{[p^e]} + \sum_{i=1}^{l} \mathfrak{p}_i \subseteq I_e(R)$.

Ahora mostremos que $I_e(R) \subseteq \mathfrak{m}^{[p^e]} + \sum_{i=1}^{l} \mathfrak{p}_i$. Procedemos por contradicción. Sea s un generador de $I_e(R)$. Supongamos que $s \notin \mathfrak{m}^{[p^e]} + \sum_{i=1}^{l} \mathfrak{p}_i$. Por el Lema 1, podemos elegir a s como un monomio. De este modo, $s = x^\alpha$ para algún $\alpha \in \mathcal{A} = \{\alpha \in \mathbb{N}^n \mid 0 \leq \alpha_i \leq p^e - 1 \text{ para } i = 1, \ldots, n\}$, pues $s \notin \mathfrak{m}^{[p^e]}$.

Asimismo, x^α no está contenido en ninguno de los primos asociados de R, porque $s \notin \sum_{i=1}^{l} \mathfrak{p}_i$. Esto implica que x^α es un no divisor de cero. Así que el homomorfismo $R \xrightarrow{\cdot x^\alpha} R$ es inyectivo, lo cual fuerza $I = J_\alpha = (I : x^\alpha)$. Pero entonces tenemos un homomorfismo $\psi \in \operatorname{Hom}_R((S/J_\alpha)x^{\alpha/p^e}, R)$ tal que $\psi(x^{\alpha/p^e}) = 1$.

Sea $\mathcal{B} = \{{a_i}^{1/p^e} \mid i = 1, \ldots, s\}$ una base de K^{1/p^e} como K-espacio vectorial. Sin perder generalidad podemos asumir que $a_1 = 1$. Adicionalmente, por la Proposición 2 hay una función R-lineal

$$\varphi : R^{1/p^e} \longrightarrow \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq s \\ \alpha \in \mathcal{A}}} (S/J_\alpha)(a_i x^\alpha)^{1/p^e}$$

dada por

$$\varphi(r^{1/p^e}) = \bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq s \\ \alpha \in \mathcal{A}}} (r_{i,\alpha} + J_\alpha)(a_i x^\alpha)^{1/p^e},$$

donde

$$r^{1/p^e} = \bigoplus_{\substack{1\le i\le s\\ \alpha\in\mathcal{A}}} r_{i,\alpha}(a_i x^\alpha)^{1/p^e}.$$

Fijando $\phi = \psi \circ \pi_\alpha \circ \varphi$ produce $\phi \in \mathrm{Hom}_R(R^{1/p^e}, R)$ y $\phi(s^{1/p^e}) = \phi(x^{\alpha/p^e}) = 1$; esto contradice el hecho de que $s \in I_e(R)$.

Para la segunda parte de la prueba es suficiente mostrar $\mathcal{P}(R) \subseteq \sum_{i=1}^{l} \mathfrak{p}_i$. Sea s un generador de $\mathcal{P}(R)$. Por el Lema 1 podemos elegir a s como un monomio. El teorema de intersección de Krull dice que $\bigcap_{e\in\mathbb{N}} \mathfrak{m}^{[p^e]} = 0$, por esta razón $s \notin \mathfrak{m}^{[p^{e'}]}$ para algún $e' \in \mathbb{N}$. Por la primera parte, $s \in \mathfrak{m}^{[p^{e'}]} + \sum_{i=1}^{l} \mathfrak{p}_i$. De donde se sigue que $s \in \sum_{i=1}^{l} \mathfrak{p}_i$, debido a que ambos $\mathfrak{m}^{[p^{e'}]}$ y $\sum_{i=1}^{l} \mathfrak{p}_i$ son ideales monomiales. □

Finalmente, usamos la Proposición 3 para comparar los ideales de escisión de R y $R/\mathcal{P}(R)$, respectivamente, y calcular el umbral F-puro de $\mathfrak{m}$ en términos de la dimensión de escisión de R.

Teorema 2. *Sea e un entero no negativo. Las siguientes proposiciones son verdaderas:*

(1) $I_e(R)/\mathcal{P}(R) = I_e(R/\mathcal{P}(R))$,

(2) $\mathrm{fpt}(R) = \mathrm{sdim}(R)$.

Demostración. De la Proposición 3, tenemos que

$$\begin{aligned} I_e(R)/\mathcal{P}(R) &= \frac{\mathfrak{m}^{[p^e]} + \mathcal{P}(R)}{\mathcal{P}(R)} \\ &= \mathfrak{m}^{[p^e]}\frac{R}{\mathcal{P}(R)} \\ &= I_e(R/\mathcal{P}(R)), \end{aligned}$$

de donde la última igualdad se da por ser $R/\mathcal{P}(R)$ un anillo de polinomios y el punto (2) de la Proposición 1 .

Para la segunda parte de la prueba, usando la primera parte obtenemos las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} b_{\mathfrak{m}}(p^e) &= \text{máx}\{t \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{m}^t \nsubseteq I_e(R)\} \\ &= \text{máx}\{t \in \mathbb{N} \mid \mathfrak{m}^t R/\mathcal{P}(R) \nsubseteq I_e(R/\mathcal{P}(R))\} \\ &= b_{\mathfrak{m}R/\mathcal{P}(R)}(p^e). \end{aligned}$$

De esta manera, $\mathrm{fpt}(R) = \mathrm{fpt}(R/\mathcal{P}(R)) = \dim(R/\mathcal{P}(R)) = \mathrm{sdim}(R)$, donde la penúltima igualdad se da por ser $R/\mathcal{P}(R)$ un anillo de polinomios. □

Observación 2. *Otra forma de demostrar la primera parte del Teorema 2 es usando el punto (1) de la Proposición 4.18 y el Lema 5.7 del trabajo de Badilla-Céspedes [2].*

Ejemplo 2. *Consideremos el anillo* $S = \mathbb{F}_p[x, y, z, u, v, w]$ *y el ideal* $I = (xyw, xvw, zv, zw)$. *La descomposición de* I *como la intersección de sus primos mínimos es* $I = (y, z, v) \cap (x, z) \cap (z, w) \cap (v, w)$. *Tomemos* $R = S/I$. *El punto (2) de la Proposición 3 da que* $\mathcal{P}(R)$ *está generado por las variables* x, y, z, v, w, *por lo que* $R/\mathcal{P}(R) = \mathbb{F}_p[u]$. *Por lo tanto,* $\operatorname{fpt}(R) = \operatorname{sdim}(R) = \dim(\mathbb{F}_p[u]) = 1$ *por el Teorema 2.*

4. Agradecimientos

El autor agradece a Luis Núñez-Betancourt por sus útiles comentarios y sugerencias. También agradece al árbitro anónimo por sus útiles comentarios. El autor hizo este trabajo durante una estancia posdoctoral realizada gracias al Programa de Becas Posdoctorales en la UNAM (POSDOC).

5. Financiamiento

El autor fue parcialmente financiado por SNII, México.

Referencias

[1] I. M. Aberbach y F. Enescu, *The structure of F-pure rings*. Math. Z. **250**(2005), no. 4, 791-806. DOI: 10.1007/s00209-005-0776-y

[2] W. Badilla-Céspedes, *F-invariants of Stanley-Reisner rings*. J. Pure Appl. Algebra **225**(2021), no. 9, Paper No. 106671, 19. DOI: 10.1016/j.jpaa.2021.106671

[3] A. Benito, E. Faber y K. E. Smith, *Measuring singularities with Frobenius: the basics*. Commutative algebra. Springer, New York, 2013, 57-97. DOI: 10.1007/978-1-4614-5292-8_3

[4] M. Blickle, M. Mustaţă y K. E. Smith, *Discreteness and rationality of F-thresholds*. Michigan Math. J. **57**(2008). Special volume in honor of Melvin Hochster, 43-61. DOI: 10.1307/mmj/1220879396

[5] A. De Stefani y L. Núñez-Betancourt, *F-thresholds of graded rings*. Nagoya Math. J. **229**(2018), 141-168. DOI: 10.1017/nmj.2016.65

[6] M. González Villa, D. Jaramillo-Velez y L. Núñez-Betancourt, *F-thresholds and test ideals of Thom-Sebastiani type polynomials*. Proc. Amer. Math. Soc. **150**(2022), no. 9, 3739-3755. DOI: 10.1090/proc/16025

[7] N. Hara y K.-I. Yoshida, *A generalization of tight closure and multiplier ideals*. Trans. Amer. Math. Soc. **355**(2003), no. 8, 3143-3174. DOI: 10.1090/S0002-9947-03-03285-9

[8] D. J. Hernández, *F-pure thresholds of binomial hypersurfaces*. Proc. Amer. Math. Soc. **142**(2014), no. 7, 2227-2242. DOI: 10.1090/S0002-9939-2014-11941-1

[9] D. J. Hernández, *F-purity versus log canonicity for polynomials*. Nagoya Math. J. **224**(2016), no. 1, 10-36. DOI: 10.1017/nmj.2016.14

[10] D. J. Hernández, K. Schwede, P. Teixeira y E. E. Witt, *The FrobeniusThresholds package for Macaulay2*. J. Softw. Algebra Geom. **11**(2021), no. 1, 25-39. DOI: 10.2140/jsag.2021.11.25

[11] M. Hochster y C. Huneke, *Tight closure, invariant theory, and the Briançon-Skoda theorem*. J. Amer. Math. Soc. **3**(1990), no. 1, 31-116. DOI: 10.2307/1990984

[12] M. Hochster y J. L. Roberts, *The purity of the Frobenius and local cohomology*. Advances in Math. **21**(1976), no. 2, 117-172. DOI: 10.1016/0001-8708(76)90073-6

[13] C. Huneke, *Tight closure and its applications*. Vol. 88. Regional Conference Series in Mathematics. Conference Board of the Mathematical Sciences, 1996.

[14] C. Huneke y G. J. Leuschke, *Two theorems about maximal Cohen-Macaulay modules*. Math. Ann. **324**(2002), no. 2, 391-404. DOI: 10.1007/s00208-002-0343-3

[15] Z. Kadyrsizova et al., *Lower bounds on the F-pure threshold and extremal singularities*. Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B **9**(2022), 977-1005. DOI: 10.1090/btran/106

[16] E. Kunz, *Characterizations of regular local rings for characteristic p*. Amer. J. Math. **91**(1969), 772-784. DOI: 10.2307/2373351

[17] S. Müller, *The F-pure threshold of quasi-homogeneous polynomials*. J. Pure Appl. Algebra **222**(2018), no. 1, 75-96. DOI: 10.1016/j.jpaa.2017.03.005

[18] M. Mustaţă, S. Takagi y K.-i. Watanabe, *F-thresholds and Bernstein-Sato polynomials*. European Congress of Mathematics. Eur. Math. Soc., Zürich, 2005, 341-364. DOI: 10.48550/arXiv.math/0411170

[19] T. Shibuta y S. Takagi, *Log canonical thresholds of binomial ideals*. Manuscripta Math. **130**(2009), no. 1, 45-61. DOI: 10.1007/s00229-009-0270-7

[20] K. E. Smith y M. Van den Bergh, *Simplicity of rings of differential operators in prime characteristic*. Proc. London Math. Soc. (3) **75**(1997), no. 1, 32-62. DOI: 10.1112/S0024611597000257

[21] S. Takagi y K.-i. Watanabe, *On F-pure thresholds*. J. Algebra **282**(2004), no. 1, 278-297. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2004.07.011

[22] K. Tucker, *F-signature exists*. Invent. Math. **190**(2012), no. 3, 743-765. DOI: 10.1007/s00222-012-0389-0

[23] Y. Yao, *Observations on the F-signature of local rings of characteristic p*. J. Algebra **299**(2006), no. 1, 198-218. DOI: 10.1016/j.jalgebra.2005.08.013