Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones **31**(2): 167-193
CIMPA - UCR ISSN: 1409-2433(Print), 2215-3373(Online)
DOI: https://doi.org/10.15517/rmta.v31i2.56295

# SOBRE ALGUNOS OPERADORES LINEALES EN ANÁLISIS DE CLIFFORD

# ON SOME LINEAR OPERATORS IN CLIFFORD ANALYSIS

DANIEL ALFONSO SANTIESTEBAN[1]

*Received: 23/Oct/2023; Accepted: 06/Jun/2024*

---



[1] Universidad Autónoma de Guerrero, Facultad de Matemáticas, Chilpancingo, México. E-Mail: danielalfonso950105@gmail.com

**Resumen**

A finales de los años 70, el término análisis de Clifford fue empleado por primera vez por el matemático norteamericano John Ryan. Han pasado varias décadas y esta autónoma disciplina en el análisis matemático resulta sumamente efectiva para reescribir muchas de las ecuaciones de la física matemática. En el presente artículo se obtendrán algunos resultados interesantes sobre operadores lineales que se relacionan con espacios funcionales que surgen específicamente en álgebras de Clifford. La conexión de algunos de estos operadores con el conocido sistema de Lamé-Navier en elasticidad lineal posibilita que se estudien propiedades esenciales y generalizaciones naturales a altas dimensiones. Al finalizar, se considerarán nuevos operadores de Dirac construidos con bases ortonormales arbitrarias del espacio euclidiano.

**Palabras clave:** operadores lineales; álgebras de Clifford; operadores de Dirac.

**Abstract**

In the late 1970s, the term Clifford Analysis was first used by the American mathematician John Ryan. Several decades have passed and this autonomous discipline in mathematical analysis has proven to be extremely effective in rewriting many of the equations of mathematical physics. In this article we will obtain some interesting results on linear operators that are related to functional spaces that arise specifically in Clifford algebras. The connection of some of these operators with the well-known Lamé-Navier system in Linear Elasticity makes it possible to study essential properties and natural generalizations to high dimensions. At the end, new Dirac operators constructed with arbitrary orthonormal bases of Euclidean space will be considered.

**Keywords:** linear operators; Clifford algebras; Dirac operators.

**Mathematics Subject Classification:** Primary 30G35; Secondary 30G30, 35J47, 47A08.

## 1. Introducción

Un $k$-vector en $\mathbb{R}^m$ puede ser interpretado como un volumen $k$-dimensional dirigido. H. Grassmann fue el primero en considerar tales entidades, en la segunda mitad del siglo XIX. Él creó una estructura algebraica que en la actualidad es comúnmente conocida como álgebra exterior. Al mismo tiempo, sir W. Hamilton inventó su álgebra cuaterniónica, la cual permitía representar las rotaciones en el espacio tridimensional. En su trabajo de 1878, el inglés W. K. Clifford unificó ambos sistemas en una sola álgebra que hoy en día lleva su nombre.

En las últimas décadas el estudio del operador de Dirac ha sido el tema central en muchas áreas de las matemáticas. La consideración de propiedades locales de las soluciones de este operador ha conducido a una teoría de funciones, comúnmente conocida como análisis de Clifford. Esta teoría en su forma original se centra en el estudio de las soluciones nulas del operador de Dirac estándar $\underline{\partial}$ que se define como:

$$\underline{\partial} = \sum_{i=1}^{m} e_i \frac{\partial}{\partial x_i},$$

donde $\{e_1, ..., e_m\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^m$. Dichas soluciones se conocen con el nombre de funciones monogénicas y generalizan a las funciones analíticas del análisis complejo. Un gran logro en esta teoría de funciones es el hecho de que $\underline{\partial}^2 = -\Delta_m$ en $\mathbb{R}^m$, donde $\Delta_m$ denota el operador de Laplace [4, 14, 19]. Por tanto, el análisis de Clifford constituye un refinamiento del clásico análisis armónico (ver por ejemplo [5, 6]).

Recientemente, se han estudiado clases de funciones que surgen específicamente en estas álgebras no conmutativas, y se han obtenido peculiares relaciones con temas afines de la elasticidad lineal, como lo es el sistema de Lamé-Navier. Las funciones $(\varphi, \psi)$-inframonogénicas y $(\varphi, \psi)$-armónicas no comparten, en general, las buenas propiedades y estructura de las funciones armónicas. Definidas como soluciones a dos sistemas de segundo orden de ecuaciones en derivadas parciales, dichas funciones poseen características interesantes que se deben a la ausencia de la conmutatividad del producto cliffordiano [25, 28].

El objetivo de este trabajo es estudiar algunos operadores lineales que se relacionan estrechamente con estas funciones, así como clarificar algunas correspondencias entre las mismas. Al finalizar, se abordarán condiciones necesarias y suficientes para asegurar que una función sea solución de sistemas con operadores de orden superior construidos con multivectores.

## 2. Aspectos básicos del análisis de Clifford

Sea $e_1, e_2, ..., e_m$ la base ortonormal canónica de $\mathbb{R}^m$, sujeta a las relaciones multiplicativas

$$e_i^2 = -1, \quad e_i e_j + e_j e_i = 0, \quad i, j = 1, 2, ..., m, i < j.$$

Con las anteriores relaciones se obtiene una base de un álgebra:

$$\{1; e_1, e_2, ..., e_m; e_1 e_2, ..., e_{m-1} e_m; e_1 e_2 e_3, ...; e_1 e_2 ... e_m\}.$$

El álgebra generada por esta base es conocida como el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$ [14]. Esta álgebra es real asociativa con elemento unitario 1, no conmutativa y de dimensión $2^m$. El espacio euclidiano

$$\mathbb{R}^m = \left\{ \underline{x} = x_1 e_1 + x_2 e_2 + ... + x_m e_m, x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, ..., m \right\}$$

está inmerso en $\mathbb{R}_{0,m}$. Un elemento $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ puede ser escrito como $a = \sum_A a_A e_A$, donde se tiene que $a_A \in \mathbb{R}$ y $A$ recorre todos los posibles conjuntos ordenados $A = \{1 \leq i_1 < ... < i_k \leq m\}$ o $A = \emptyset$, y $e_A = e_{i_1} e_{i_2} ... e_{i_k}, e_0 = e_\emptyset = 1$. En particular, $Sc[a] = [a]_0$ denota la parte escalar de $a$. Note que cualquier $a \in \mathbb{R}_{0,m}$ puede escribirse de forma única como

$$a = [a]_0 + [a]_1 + ... + [a]_m, \tag{1}$$

donde $[.]_k$ denota la proyección de $\mathbb{R}_{0,m}$ en $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$. Aquí $\mathbb{R}_{0,m}^{(k)}$ representa el subespacio de k-vectores definido por

$$\mathbb{R}_{0,m}^{(k)} = span_{\mathbb{R}}(e_A : |A| = k).$$

Es costumbre identificar a $\mathbb{R}$ con $\mathbb{R}_{0,m}^{(0)}$, los conocidos escalares en $\mathbb{R}_{0,m}$, y $\mathbb{R}^m$ con $\mathbb{R}_{0,m}^{(1)} \cong \mathbb{R}^m$, el conjunto de los vectores en $\mathbb{R}_{0,m}$. Los elementos de $\mathbb{R}_{0,m}^{(2)}$ son llamados bivectores, mientras que los elementos de $\mathbb{R}_{0,m}^{(m)}$ son nombrados como pseudoescalares.

El producto de dos vectores de Clifford resulta un escalar y un bivector:

$$\underline{x}\underline{y} = -\underline{x} \cdot \underline{y} + \underline{x} \wedge \underline{y},$$

donde

$$\underline{x} \cdot \underline{y} = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

y

$$\underline{x} \wedge \underline{y} = \sum_{j<k} e_j e_k (x_j y_k - x_k y_j).$$

Los siguientes antiautomorfismos serán utilizados en todo el trabajo: la conjugación $a \to \overline{a}$ que se define por $\overline{e_i} = -e_i$, $i = 1, ..., m$, y la reversión $a \to \widehat{a}$, cuya relación es $\widehat{e_i} = e_i$, $i = 1, ..., m$. Por tanto,

$$\overline{a} = \sum_A a_A \overline{e_A}, \quad \overline{e_A} = (-1)^{\frac{|A|(|A|+1)}{2}} e_A,$$

y

$$\widehat{a} = \sum_A a_A \widehat{e_A}, \quad \widehat{e_A} = (-1)^{\frac{|A|(|A|-1)}{2}} e_A.$$

Sea $\psi := \left\{\psi^1, \psi^2, ..., \psi^m\right\} \subset \mathbb{R}_{0,m}^{(1)}$. Se denotará al conjunto $\left\{-\psi^1, -\psi^2, ..., -\psi^m\right\}$ como $-\psi$. También se usará la notación $\overline{\psi}$ para referirnos al conjunto $\left\{\overline{\psi^1}, \overline{\psi^2}, ..., \overline{\psi^m}\right\}$. Como el conjunto $\psi$ está conformado por vectores, entonces los conjuntos $-\psi$ y $\overline{\psi}$ son idénticos. En la clase de funciones $C^1(\mathbf{E}, \mathbb{R}_{0,m})$, donde $\mathbf{E}$ es un dominio abierto de $\mathbb{R}^m$, se definen respectivamente los operadores por la izquierda y por la derecha de Dirac como

$$^{\psi}\underline{\partial}[f] := \sum_{i=1}^{m} \psi^i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \qquad [f]^{\psi}\underline{\partial} := \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_i} \psi^i. \tag{2}$$

Para el caso particular en que $\psi = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$, se denotarán estos operadores como $\underline{\partial}[f]$ y $[f]\underline{\partial}$, respectivamente. Es fácil comprobar que las igualdades

$$^{\psi}\underline{\partial}^{-\psi}\underline{\partial}[f] = {}^{-\psi}\underline{\partial}^{\psi}\underline{\partial}[f] = [f]^{\psi}\underline{\partial}^{-\psi}\underline{\partial} = [f]^{-\psi}\underline{\partial}^{\psi}\underline{\partial} = \Delta_m \tag{3}$$

se satisfacen si y solo si

$$\psi^i\overline{\psi^j} + \psi^j\overline{\psi^i} = 2\delta_{i,j}, \quad i, j \in \{1, ..., m\},$$

donde $\delta_{i,j}$ denota la conocida función delta de Kronecker. Además,

$$2\delta_{i,j} = \psi^i\overline{\psi^j} + \psi^j\overline{\psi^i} = \psi^i\overline{\psi^j} + \overline{\psi^i\overline{\psi^j}} = 2[\psi^i\overline{\psi^j}]_0 = 2\psi^i \cdot \psi^j. \tag{4}$$

La factorización en (3) se evidencia si y solo si $\psi$ representa una base ortonormal de $\mathbb{R}^{(1)}_{0,m}$. El primero que demostró este hecho fue el japonés Kiyoharu Nôno [23]. Un conjunto $\psi$ con la propiedad (4) es llamado un *conjunto estructural.* Algunas referencias básicas sobre conjuntos estructurales y la teoría de funciones hipercomplejas se encuentran en [16, 17, 22, 29]. Es evidente que $\psi$ y $\overline{\psi}$ son conjuntos estructurales simultáneamente.

Se utilizará el símbolo $\Omega$ para denotar un dominio abierto y simplemente conexo de $\mathbb{R}^m$ con frontera $\Gamma$ lo suficientemente suave. Las funciones $f$ bajo consideración serán de la forma $f : \Omega \to \mathbb{R}_{0,m}$. Tales funciones pueden ser escritas como $f = \sum_A f_A e_A$, donde $f_A$ son funciones reales. Las nociones de continuidad, diferenciabilidad e integrabilidad de una función que toma valores en $\mathbb{R}_{0,m}$ se introducen por componentes. Por ejemplo, una función será continua si todas sus componentes reales lo son. Se definirá $\overline{f}$ como

$$\overline{f} = \sum_A f_A\overline{e_A}$$

y similarmente se define $\widehat{f}$. Los operadores de Dirac por la izquierda y por la derecha son conectados por la relación

$${}^{\psi}\underline{\partial}[f] = \overline{[\overline{f}]^{-\psi}\underline{\partial}} = -\overline{[\overline{f}]^{\psi}\underline{\partial}}. \tag{5}$$

Vea las siguientes definiciones:

**Definición 1** (Función $\psi$-monogénica)**.** *Se dice que la función $f \in C^1(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ es $\psi$-monogénica por la izquierda (por la derecha) en el dominio $\Omega$ si*

$${}^{\psi}\underline{\partial}[f] = 0 \text{ en } \Omega \text{ (respectivamente, } [f]^{\psi}\underline{\partial} = 0 \text{ en } \Omega).$$

A la condición de ser una función $\psi$-monogénica la nombraremos $\psi$-monogenicidad. Sea ahora el conjunto estructural $\varphi = \left\{\varphi^1, \varphi^2, ..., \varphi^m\right\}$.

**Definición 2** (Función $(\varphi, \psi)$-armónica)**.** *Se dice que la función $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ es $(\varphi, \psi)$-armónica por la izquierda (por la derecha) en el dominio $\Omega$ si*

$${}^{\varphi}\underline{\partial}^{\psi}\underline{\partial}[f] = 0 \text{ en } \Omega \text{ (respectivamente, } [f]^{\varphi}\underline{\partial}^{\psi}\underline{\partial} = 0 \text{ en } \Omega).$$

Cuando $\psi = \varphi$ o $\psi = -\varphi$, entonces $f$ es armónica. En $\mathbb{R}_{0,3}^{(1)}$ los conjuntos estructurales $\psi = \{e_1, e_2, e_3\}$ y $\varphi = \{e_3, e_2, e_1\}$ poseen los mismos elementos y, sin embargo, conforman distintos operadores de Dirac : ${}^{\psi}\underline{\partial}[.] = \underline{\partial}[.] = \sum_{i=1}^{3} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}[.]$ y ${}^{\varphi}\underline{\partial}[.] = e_3 \frac{\partial}{\partial x_1}[.] + e_2 \frac{\partial}{\partial x_2}[.] + e_1 \frac{\partial}{\partial x_3}[.]$.

**Definición 3** (Función $(\varphi, \psi)$-inframonogénica)**.** *Se dice que la función $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$ es $(\varphi, \psi)$-inframonogénica en el dominio $\Omega$ si*

$$ {}^{\varphi}\underline{\partial}[f]^{\psi}\underline{\partial} = 0 \text{ en } \Omega. $$

El operador ${}^{\varphi}\underline{\partial}(.)^{\psi}\underline{\partial}$ es conocido en la literatura como operador sándwich [10, 11, 12, 24, 28]. Este operador de segundo orden posee términos que contienen derivadas mixtas: $\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $i \neq j$ con $i, j \in \{1, ..., m\}$. Nos referiremos a dichos términos como rectangulares. En el caso específico $\varphi = \psi$, o sea ${}^{\psi}\underline{\partial}[f]^{\psi}\underline{\partial} = 0$, la función $f$ se llamará $\psi$-inframonogénica. Cuando $\psi$ es la base canónica de $\mathbb{R}^m$, se dice que la función $f$ es inframonogénica. Estudios de las funciones inframonogénicas se pueden hallar en [3, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 18, 20, 21, 30]. Sean $\mathcal{H}(\Omega)$ el espacio de las funciones armónicas sobre el dominio $\Omega$; $\mathcal{I}(\Omega)$, el espacio de las funciones inframonogénicas; $\mathcal{H}_{\varphi,\psi}(\Omega)$, el espacio de las funciones $(\varphi, \psi)$-armónicas por la izquierda; $\mathcal{I}_{\varphi,\psi}(\Omega)$, el espacio de las funciones $(\varphi, \psi)$-inframonogénicas, mientras que el espacio de las funciones $\psi$-inframonogénicas se denotará por $\mathcal{I}_{\psi}(\Omega)$. Las condiciones de ser una función $(\varphi, \psi)$-armónica y $(\varphi, \psi)$-inframonogénica se denominarán como $(\varphi, \psi)$-armonicidad y $(\varphi, \psi)$-inframonogenicidad, respectivamente. Se remite al lector a consultar los artículos [24, 26, 27], donde se exponen varias aplicaciones y relaciones de estas clases de funciones con tópicos físicos de trascendencia.

**Proposición 1.** *Una función $f : \Omega \to \mathbb{R}_{0,m}$ es $\psi$-inframonogénica si y solo si sus respectivas componentes $k$-vectoriales, $0 \leq k \leq m$, $[f]_k$, también son funciones $\psi$-inframonogénicas.*

*Demostración.* Como $f = \sum_{k=0}^{m} [f]_k$, entonces

$$ {}^{\psi}\underline{\partial} f^{\psi}\underline{\partial} = \sum_{k=0}^{m} {}^{\psi}\underline{\partial}[f]_k{}^{\psi}\underline{\partial}. $$

Por tanto, si cada una de las funciones $[f]_k$ es $\psi$-inframonogénica, entonces $f$ también lo será.

Por otra parte, ahora se probará que para cada $k \in \mathbb{N}$, la expresión ${}^{\psi}\underline{\partial}[f]_k{}^{\psi}\underline{\partial}$ es un $k$-vector. Se sabe que $[f]_k = \sum_A f_A e_A$ con $|A| = k$. También se aprecia que

$$ \psi^i = \sum_{k=1}^{m} \psi_k^i e_k, $$

donde $\psi_k^i \in \mathbb{R}$, y

$$^{\psi}\underline{\partial} f_A e_A {}^{\psi}\underline{\partial} = \sum_{i,j} \psi^i \frac{\partial^2 f_A}{\partial x_i \partial x_j} e_A \psi^j.$$

Teniendo en cuenta que

$$\psi^i e_A \psi^j = \sum_{k,l} \psi_k^i \psi_l^j e_k e_A e_l,$$

es claro que cuando $k = l$ prevalece un $k$-vector. Cuando $k \neq l$ y $k \in A$, $l \notin A$ (o bien, $l \in A$, $k \notin A$) también se obtiene un $k$-vector. Sin embargo, cuando $k \neq l$ y, además, tanto $l$ como $k$ pertenecen o no a $A$, entonces se tiene que $e_k e_A e_l = -e_l e_A e_k$. Este último hecho se aprecia por lo siguiente:

$$e_j e_A e_j = \begin{cases} (-1)^{|A|} e_A & si \;\; j \in A, \\ (-1)^{|A|+1} e_A & si \;\; j \notin A; \end{cases}$$

luego,

$$-e_k e_A e_l = \begin{cases} (-1)^{|A|} e_A e_k e_l & si \;\; k \in A, \\ (-1)^{|A|+1} e_A e_k e_l & si \;\; k \notin A; \end{cases}$$

$$-e_l e_A e_k = \begin{cases} (-1)^{|A|} e_A e_l e_k & si \;\; l \in A, \\ (-1)^{|A|+1} e_A e_l e_k & si \;\; l \notin A; \end{cases}$$

y entonces $e_k e_A e_l = -e_l e_A e_k$. Como $\psi^j e_A \psi^i = \sum_{k,l} \psi_k^j \psi_l^i e_k e_A e_l$, $\psi_k^i \psi_l^j = \psi_l^j \psi_k^i$ y $\partial_{x_i} \partial_{x_j} f_A = \partial_{x_j} \partial_{x_i} f_A$, se obtiene que los términos rectangulares se cancelan y, por tanto, resulta un $k$-vector. Obviamente, si $f$ es $\psi$-inframonogénica, lo serán también sus componentes $k$-vectoriales. $\square$

Esta propiedad, en general, no se cumple para funciones $(\varphi, \psi)$-inframonogénicas. Por ejemplo, sea la función $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{0,2}$ definida en $\Omega$, donde $\Omega$ es la bola abierta centrada en cero con radio 1, tal que $g(x) = x_1^3 - \frac{3}{2} e_1 e_2 x_1^2 x_2 - \frac{1}{2} e_1 e_2 x_2^3$. Como se puede observar, $g \in C^2(\overline{\Omega})$. Si se tienen los conjuntos estructurales $\varphi = \{e_1, e_2\}$ y $\psi = \{e_2, e_1\}$, entonces

$$^{\varphi}\underline{\partial} g {}^{\psi}\underline{\partial} = e_1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_1^2} e_2 + e_2 \frac{\partial^2 g}{\partial x_2^2} e_1 + e_1 \frac{\partial^2 g}{\partial x_1 \partial x_2} e_1 + e_2 \frac{\partial^2 g}{\partial x_2 \partial x_1} e_2.$$

Un simple cálculo muestra que

$$\begin{aligned} {}^{\varphi}\underline{\partial} g {}^{\psi}\underline{\partial} &= e_1[6x_1 - 3x_2 e_1 e_2] e_2 + e_2[-3x_2 e_1 e_2] e_1 + e_1[-3x_1 e_1 e_2] e_1 + e_2[-3x_1 e_1 e_2] e_2 \\ &= 6x_1 e_1 e_2 - 3x_2 + 3x_2 + 3x_1 e_2 e_1 + 3x_1 e_2 e_1 \\ &= 6x_1 e_1 e_2 + 6x_1 e_2 e_1 \\ &= 0. \end{aligned}$$

Entonces, la función $g$ es $(\varphi,\psi)$-inframonogénica en $\Omega$. Tomándose $[g]_0(x) = x_1^3$, se calcula lo siguiente:

$$^{\varphi}\underline{\partial}[g]_0{}^{\psi}\underline{\partial} = 6x_1e_1e_2 \neq 0, \ \forall x_1 \neq 0,$$

para con ello afirmar que $[g]_0$ no es $(\varphi,\psi)$-inframonogénica en $\Omega$.

Las funciones $(\varphi,\psi)$-inframonogénicas y $(\varphi,\psi)$-armónicas no satisfacen tampoco un principio del módulo máximo. Por ejemplo, si se escoge la función $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}_{0,4}$:

$$f(x) = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 + 1, \ x \in \Omega,$$

donde $\Omega$ es la bola tetradimensional centrada en el origen con radio 1. Sean $\varphi = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y $\psi = \{e_2, e_1, e_4, e_3\}$, entonces

$$\begin{aligned}
^{\varphi}\underline{\partial} f\, ^{\psi}\underline{\partial} = {}^{\varphi}\underline{\partial}\, ^{\psi}\underline{\partial} f &= \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}e_1e_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}e_2e_1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2}e_3e_4 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_4^2}e_4e_3 \\
&= -2e_1e_2 - 2e_2e_1 - 2e_3e_4 - 2e_4e_3 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por tanto, la función $f$ es $(\varphi,\psi)$-inframonogénica y $(\varphi,\psi)$-armónica en $\Omega$. Debido a la geometría de $\Omega$, resulta que

$$-x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 = -(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \in [-1, 0], \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Luego $\forall x \in \overline{\Omega}$ : $\quad f(x) \in [0, 1] \Rightarrow |f(x)| \in [0, 1]$, $|f(0)| = 1$, $0 \in \Omega$, y como $f$ no es constante, entonces el principio del módulo máximo no se cumple.

**2.1. Fórmula de Borel-Pompeiu.**

Es conocido que la solución fundamental del operador $\underline{\partial}$ es

$$E_0(\underline{x}) := \underline{\partial} E_1(\underline{x}), \tag{6}$$

donde

$$E_1(\underline{x}) = \frac{1}{(m-2)\sigma_m |\underline{x}|^{m-2}}, \ \underline{x} \neq 0, \ m \in \mathbb{N}, \ m > 2 \tag{7}$$

es la solución fundamental del operador de Laplace $\Delta_m$ y $\sigma_m$ es el área superficial de la esfera unitaria en $\mathbb{R}^m$ (ver [5, 6, 19]). De aquí que la función

$$E_0(\underline{x}) = -\frac{1}{\sigma_m}\frac{\underline{x}}{|\underline{x}|^m}, \tag{8}$$

se conoce como núcleo de Clifford-Cauchy y satisface en $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ la ecuación

$$\underline{\partial} E_0 = E_0 \underline{\partial} = 0.$$

Sea $\psi = \{\psi^1, \psi^2, ..., \psi^m\}$ un conjunto estructural, y sea $\underline{x}_\psi := \sum_{i=1}^m x_i \psi^i$. Como $-{}^\psi\underline{\partial}{}^\psi\underline{\partial} = \Delta_m$, entonces el núcleo de Cauchy; o sea, la solución fundamental de los operadores ${}^\psi\underline{\partial}$ por la derecha e izquierda estará dada por la expresión

$$K_\psi(\underline{x}) := -{}^\psi\underline{\partial}[E_1(\underline{x})] = -\frac{1}{\sigma_m |\underline{x}|^m} \sum_{i=1}^m \psi^i x_i = -\frac{1}{\sigma_m |\underline{x}|^m} \underline{x}_\psi = -[E_1(\underline{x})]^\psi\underline{\partial}. \tag{9}$$

La fórmula de Stokes asociada a estos operadores de Dirac generalizados con conjuntos estructurales es:

**Teorema 1** (Fórmula de Stokes [1]). *Sean $f, g \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_{0,m})$ y $\psi = \{\psi^1, \psi^2, ..., \psi^m\}$ un conjunto estructural. Entonces*

$$\int_\Gamma g(\xi) n_\psi(\xi) f(\xi) d\Gamma_\xi = \int_\Omega [(g(\xi)^\psi\underline{\partial}) f(\xi) + g(\xi)({}^\psi\underline{\partial} f(\xi))] d\xi, \tag{10}$$

*donde $n_\psi(\xi) = \sum_{i=1}^m n_i(\xi)\psi^i$, siendo $n_i(\xi)$ la $i$-ésima componente del vector normal, unitario y exterior sobre $\Gamma$ en el punto $\xi \in \Gamma$.*

En las investigaciones [2] y [17] se probó el siguiente teorema:

**Teorema 2** (Fórmula de Borel-Pompeiu (Cauchy-Green)). *Sea $f \in C^1(\Omega \cup \Gamma, \mathbb{R}_{0,m})$, entonces se cumple que*

$$\int_\Gamma K_\psi(\underline{y} - \underline{x}) n_\psi(\underline{y}) f(\underline{y}) dS(\underline{y}) - \int_\Omega K_\psi(\underline{y} - \underline{x})^\psi\underline{\partial}[f](\underline{y}) dV(\underline{y}) = \begin{cases} f(\underline{x}) & si \quad x \in \Omega, \\ 0 & si \quad x \in \mathbb{R}^m \backslash \Omega \cup \Gamma. \end{cases} \tag{11}$$

Denótese las transformadas siguientes:

$$(\mathcal{T}_\psi^l f)(\underline{x}) = -\int_\Omega K_\psi(\underline{y} - \underline{x}) f(\underline{y}) dV(\underline{y}) \tag{12}$$

y

$$(C_\psi^l f)(\underline{x}) = \int_\Gamma K_\psi(\underline{y} - \underline{x}) n_\psi(\underline{y}) f(\underline{y}) dS(\underline{y}), \quad \underline{x} \notin \Gamma. \tag{13}$$

Estos operadores son conocidos como las transformadas de Teodorescu y de Cauchy, respectivamente, y por (11) se tiene que

$$f(\underline{x}) = C_\psi^l[f(\underline{x})] + \mathcal{T}_\psi^l[{}^\psi\underline{\partial} f(\underline{x})], \quad \underline{x} \in \Omega. \tag{14}$$

La transformada de Cauchy puede ser generalizada al considerar los conjuntos estructurales $\varphi$ y $\psi$ como:

$$(C_{\varphi,\psi}^l f)(\underline{x}) = \int_\Gamma K_\varphi(\underline{y} - \underline{x}) n_\psi(\underline{y}) f(\underline{y}) dS(\underline{y}), \quad \underline{x} \notin \Gamma. \tag{15}$$

Esta generalización fue introducida en [1]. Cuando $\varphi = \psi$ la transformada $C^{l}_{\varphi,\psi}$ se convierte en la anterior transformada de Cauchy $C^{l}_{\psi}$. En este mismo trabajo [1], los autores obtuvieron una fórmula generalizada de Borel-Pompeiu que se muestra a continuación:

**Teorema 3** (Fórmula generalizada de Borel-Pompeiu). *Sea* $f \in C^1(\Omega \cup \Gamma, \mathbb{R}_{0,m})$*, entonces se cumple que*

$$\int_\Gamma K_{\overline{\varphi}}(\underline{y}-\underline{x})n_{\overline{\psi}}(\underline{y})f(\underline{y})dS(\underline{y}) - \int_\Omega K_{\overline{\varphi}}(\underline{y}-\underline{x})\underline{\partial}^{\overline{\psi}}[f](\underline{y})dV(\underline{y}) = \Pi^{l}_{\varphi,\psi}[f](\underline{x}), \quad \underline{x} \notin \Gamma, \tag{16}$$

*donde*

$$\Pi^{l}_{\varphi,\psi} := {}^{\varphi}\underline{\partial}\mathcal{T}^{l}_{\psi}. \tag{17}$$

**Observación 1.** *El operador* $\Pi^{l}_{\varphi,\psi}$ *se conoce como* $\Pi$*-operador y es una generalización multidimensional de la conocida transformada de Ahlfors-Beurling [15]. Usando las notaciones ya descritas, se obtiene que la fórmula generalizada de Borel-Pompeiu puede ser reescrita como*

$$C^{l}_{\overline{\varphi},\overline{\psi}}f(\underline{x}) + \mathcal{T}^{l}_{\overline{\varphi}}\underline{\partial}^{\overline{\psi}}f(\underline{x}) = \Pi^{l}_{\varphi,\psi}[f](\underline{x}), \quad \underline{x} \notin \Gamma. \tag{18}$$

En el caso de funciones $\psi$-monogénicas por la izquierda, la fórmula de Borel-Pompeiu se reduce a una fórmula integral de representación de tipo Cauchy:

$$f(\underline{x}) = \int_\Gamma K_{\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_{\psi}(\underline{y})f(\underline{y})dS(\underline{y}), \quad \underline{x} \in \Omega. \tag{19}$$

Mientras que la fórmula generalizada toma la forma

$$\Pi^{l}_{\varphi,\psi}[f](\underline{x}) = \int_\Gamma K_{\varphi}(\underline{y}-\underline{x})n_{\psi}(\underline{y})f(\underline{y})dS(\underline{y}), \quad \underline{x} \in \Omega. \tag{20}$$

La versión por la derecha de las transformadas de Teodorescu y de Cauchy está dada por

$$(\mathcal{T}^{r}_{\psi}f)(\underline{x}) = -\int_\Omega f(\underline{y})K_{\psi}(\underline{y}-\underline{x})dV(\underline{y})$$

y

$$(C^{r}_{\psi}f)(\underline{x}) = \int_\Gamma f(\underline{y})n_{\psi}(\underline{y})K_{\psi}(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}), \quad \underline{x} \notin \Gamma.$$

Mientras que la versión por la derecha de una generalización de la transformada de Cauchy será

$$(C^{r}_{\psi,\varphi}f)(\underline{x}) = \int_\Gamma f(\underline{y})n_{\psi}(\underline{y})K_{\varphi}(\underline{y}-\underline{x})dS(\underline{y}), \quad \underline{x} \notin \Gamma.$$

Sean las funciones $f$ y $g$ integrables en $\Gamma$ y $\Omega$, respectivamente. Los siguientes operadores son definidos:

$$[C^0_{\varphi,\psi}f](\underline{x}) = \int_\Gamma K_\varphi(\underline{y}-\underline{x})n_\varphi(\underline{y})f(\underline{y})(\underline{y}_\psi - \underline{x}_\psi)dS(\underline{y}), \tag{21}$$

$$[C^1_{\varphi,\psi}f](\underline{x}) = \sum_{i=1}^m \varphi^i \left[\int_\Gamma E_1(\underline{y}-\underline{x})n_\varphi(\underline{y})f(\underline{y})dS(\underline{y})\right]\psi^i, \tag{22}$$

$$[\mathcal{T}^0_{\varphi,\psi}g](\underline{x}) = -\int_\Omega K_\varphi(\underline{y}-\underline{x})g(\underline{y})(\underline{y}_\psi - \underline{x}_\psi)dV(\underline{y}), \tag{23}$$

$$[\mathcal{T}^1_{\varphi,\psi}g](\underline{x}) = -\sum_{i=1}^m \varphi^i \left[\int_\Omega E_1(\underline{y}-\underline{x})g(\underline{y})dV(\underline{y})\right]\psi^i, \tag{24}$$

A partir de los operadores anteriores, los autores de [25] definieron las siguientes dos transformadas:

$$C^{\text{infra}}_{\varphi,\psi}f = \frac{1}{2}[C^0_{\varphi,\psi}f + C^1_{\varphi,\psi}f],$$

$$\mathcal{T}^{\text{infra}}_{\varphi,\psi}g = \frac{1}{2}[\mathcal{T}^0_{\varphi,\psi}g + \mathcal{T}^1_{\varphi,\psi}g].$$

El siguiente teorema de [25] implica una fórmula de representación para las funciones $(\varphi,\psi)$-inframonogénicas:

**Teorema 4.** *Sea $f \in C^2(\Omega \cup \Gamma)$, entonces se satisface que*

$$f(\underline{x}) = [C^r_\psi f](\underline{x}) + [C^{\text{infra}}_{\varphi,\psi} f^\psi\underline{\partial}](\underline{x}) + [\mathcal{T}^{\text{infra}}_{\varphi,\psi}{}^\varphi\underline{\partial} f^\psi\underline{\partial}](\underline{x}). \tag{25}$$

## 3. Relaciones con las transformadas de Cauchy y Teodorescu

Sea $F$ la función definida en $\mathbb{R}^m \setminus \Gamma$ como

$$F(\underline{x}) = C^{\text{infra}}_{\varphi,\psi}f(\underline{x}), \quad f \in C(\Gamma),$$

se ha probado que $F$ es $(\varphi,\psi)$-inframonogénica en este dominio [25]. Debido a la estructura similar de $C^{\text{infra}}_{\varphi,\psi}f$ y $\mathcal{T}^{\text{infra}}_{\varphi,\psi}f$, se obtienen las siguientes fórmulas que pueden consultarse en [25]:

$$[C^{\text{infra}}_{\varphi,\psi}f(\underline{x})]^\psi\underline{\partial} = C^l_\varphi f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega, \tag{26}$$

$$[\mathcal{T}^{\text{infra}}_{\varphi,\psi}f(\underline{x})]^\psi\underline{\partial} = \mathcal{T}^l_\varphi f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\Omega \cup \Gamma\}. \tag{27}$$

La $\varphi$-monogenicidad por la izquierda de $\mathcal{T}^l_\varphi f$ implica la $(\varphi,\psi)$-inframonogenicidad de $\mathcal{T}^{\text{infra}}_{\varphi,\psi}f$ en $\mathbb{R}^m \setminus \{\Omega \cup \Gamma\}$. La relación descrita en (27) es válida también en $\Omega$ debido a la singularidad débil del integrando en $\mathcal{T}^{\text{infra}}_{\varphi,\psi}f$.

Una generalización del resultado que se obtiene en el Teorema 8.2 en [14] es: ${}^{\varphi}\underline{\partial}[\mathcal{T}^{l}_{\varphi}f] = f$ en $\Omega$. Con ello se obtiene la identidad

$$
{}^{\varphi}\underline{\partial}[\mathcal{T}^{infra}_{\varphi,\psi}f(\underline{x})]^{\psi}\underline{\partial} = f(\underline{x}), \quad \underline{x} \in \Omega. \tag{28}
$$

Obsérvese lo siguiente:

$$
\Pi^{r}_{\psi,\varphi}[f](\underline{x})^{\varphi}\underline{\partial} = [f(\underline{x})]\mathcal{T}^{r}_{\psi}{}^{\varphi}\underline{\partial}^{\varphi}\underline{\partial} = [f(\underline{x})]\mathcal{T}^{r}_{\psi}{}^{\psi}\underline{\partial}^{\psi}\underline{\partial} = [f(\underline{x})]^{\psi}\underline{\partial}. \tag{29}
$$

Según la fórmula (25) se tiene lo siguiente:

$$
[f(\underline{x})]^{\psi}\underline{\partial} = [C^{infra}_{\varphi,\psi}f(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi}]^{\psi}\underline{\partial} + [\mathcal{T}^{infra}_{\varphi,\psi}{}^{\varphi}\underline{\partial}f(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi}]^{\psi}\underline{\partial}. \tag{30}
$$

Utilizando las relaciones (26) y (27) se obtiene

$$
[f(\underline{x})]^{\psi}\underline{\partial} = C^{l}_{\varphi}[f(\underline{x})^{\psi}\underline{\partial}] + \mathcal{T}^{l}_{\varphi}[{}^{\varphi}\underline{\partial}f(\underline{x})\underline{\partial}^{\psi}], \quad \underline{x} \in \mathbb{R}^{m} \setminus \{\Omega \cup \Gamma\}.
$$

Cuando se aplica el operador ${}^{\varphi}\underline{\partial}$ por la izquierda en (30), se obtiene la identidad. Véase que cuando $f$ es $(\varphi, \psi)$-inframonogénica se llega a

$$
[f(\underline{x})]^{\psi}\underline{\partial} = C^{l}_{\varphi}[f(\underline{x})^{\psi}\underline{\partial}], \quad \underline{x} \notin \Gamma, \tag{31}
$$

simplemente la fórmula de representación para la función $[f(\underline{x})]^{\psi}\underline{\partial}$, que es $\varphi$-monogénica por la izquierda al ser $f$ una función $(\varphi, \psi)$-inframonogénica.

Si $f$ es $(\varphi, \psi)$-inframonogénica, de acuerdo con (29), se tiene que $\Pi^{r}_{\varphi,\psi}[f]$ es $\varphi$-inframonogénica para el mismo dominio. Además, se verifica lo siguiente:

$$
\Pi^{r}_{\psi,\varphi}[f](\underline{x}) = [C^{r}_{\varphi}\Pi^{r}_{\psi,\varphi}f](\underline{x}) + \{C^{infra}_{\varphi}[(\Pi^{r}_{\psi,\varphi}f)^{\varphi}\underline{\partial}]\}(\underline{x}).
$$

Lo cual es equivalente a

$$
\Pi^{r}_{\psi,\varphi}[f](\underline{x}) = [C^{r}_{\varphi}\Pi^{r}_{\psi,\varphi}f](\underline{x}) + [C^{infra}_{\varphi}(f^{\psi}\underline{\partial})](\underline{x}).
$$

Luego, por la validez de (25) se concluye con el teorema siguiente:

**Teorema 5.** *Si $f \in C^{1}(\Omega \cup \Gamma)$, se evidencia la relación:*

$$
[C^{r}_{\psi,\varphi}f](\underline{x}) = [C^{r}_{\varphi}\Pi^{r}_{\psi,\varphi}f](\underline{x}), \quad \underline{x} \notin \Gamma. \tag{32}
$$

Otra de las interesantes propiedades del Π-operador se aprecia en el Corolario 4 de [1]:

$$
\Pi^{r}_{\psi,\varphi}\Pi^{r}_{\varphi,\psi}[f] = f. \tag{33}
$$

Si se aplica (25) para $\Pi^{r}_{\varphi,\psi}[f]$, se obtiene que

$$
f(\underline{x}) = [C^{r}_{\psi,\varphi}\Pi^{r}_{\varphi,\psi}f](\underline{x}) + [C^{infra}_{\varphi}f^{\varphi}\underline{\partial}](\underline{x}) + [\mathcal{T}^{infra}_{\varphi}{}^{\varphi}\underline{\partial}f^{\varphi}\underline{\partial}](\underline{x}),
$$

y aplicando la relación obtenida en (32) se obtiene la ya conocida representación con respecto al conjunto estructural $\varphi$ para $f$.

La solución fundamental del operador ${}^{\varphi}\underline{\partial}{}^{\psi}\underline{\partial}[.]$ es

$$K_{\varphi,\psi}(\underline{x}) := {}^{\psi}\underline{\partial}{}^{\varphi}\underline{\partial}[\Theta_m^2],$$

donde $\Theta_m^2$ es la solución fundamental del laplaciano iterado dos veces $\Delta_m^2$. Esta solución se obtiene como

$$\Theta_m^2(\underline{x}) = \frac{|\underline{x}|^{4-m}}{2\sigma_m(2-m)(4-m)}.$$

Además,

$$K_{\varphi,\psi}(\underline{x}) = \frac{P_{\psi,\varphi}(\underline{x})}{2\sigma_m|\underline{x}|^m},$$

donde $P_{\psi,\varphi}(\underline{x})$ es un polinomio homogéneo de grado 2. Si $f \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_{0,m})$, se cumple que

$$f(x) = \int_\Gamma K_\psi(\underline{y}-\underline{x})n_\psi(\underline{y})f(\underline{y})dS(\underline{y}) - \int_\Gamma K_{\varphi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_\varphi(\underline{y}){}^{\psi}\underline{\partial}[f(\underline{y})]dS(\underline{y})$$
$$+ \int_\Omega K_{\varphi,\psi}(\underline{y}-\underline{x}){}^{\varphi}\underline{\partial}{}^{\psi}\underline{\partial}[f(\underline{y})]dV(\underline{y}).$$

Si se aplica la anterior fórmula a la función $[\mathcal{T}_\psi^l f]^{\psi}\underline{\partial}$, cuando esta pertenezca a la clase $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}_{0,m})$, se obtiene lo siguiente:

$$[\mathcal{T}_\psi^l f]^{\psi}\underline{\partial}(\underline{x}) = \int_\Gamma K_\psi(\underline{y}-\underline{x})n_\psi(\underline{y})[\mathcal{T}_\psi^l f]^{\psi}\underline{\partial}(\underline{y})dS(\underline{y}) - \int_\Gamma K_{\varphi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_\varphi(\underline{y})[f(\underline{y})]^{\psi}\underline{\partial}dS(\underline{y})$$
$$+ \int_\Omega K_{\varphi,\psi}(\underline{y}-\underline{x}){}^{\varphi}\underline{\partial}[f(\underline{y})]^{\psi}\underline{\partial}dV(\underline{y}).$$

Aplicando la fórmula de Borel-Pomepeiu (11) se arriba a

$$\int_\Gamma K_\psi(\underline{y}-\underline{x})n_\psi(\underline{y})[\mathcal{T}_\psi^l f]^{\psi}\underline{\partial}(\underline{y})dS(\underline{y}) = [\mathcal{T}_\psi^l f]^{\psi}\underline{\partial}(\underline{x}) + \int_\Omega K_\psi(\underline{y}-\underline{x})[f^{\psi}\underline{\partial}](\underline{y})dV(\underline{y}), \quad \underline{x} \in \Omega.$$

Por consiguiente, se cumple que

$$\int_\Omega K_\psi(\underline{y}-\underline{x})[f^{\psi}\underline{\partial}](\underline{y})dV(\underline{y}) + \int_\Omega K_{\varphi,\psi}(\underline{y}-\underline{x}){}^{\varphi}\underline{\partial}[f(\underline{y})]^{\psi}\underline{\partial}dV(\underline{y})$$
$$= \int_\Gamma K_{\varphi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_\varphi(\underline{y})[f(\underline{y})]^{\psi}\underline{\partial}dS(\underline{y}).$$

Luego, cuando $f$ es $(\varphi,\psi)$-inframonogénica se tiene la relación

$$\int_\Omega K_\psi(\underline{y}-\underline{x})[f^{\psi}\underline{\partial}](\underline{y})dV(\underline{y}) = \int_\Gamma K_{\varphi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_\varphi(\underline{y})[f(\underline{y})]^{\psi}\underline{\partial}dS(\underline{y}).$$

Es decir,

$$[\mathcal{T}^l_\psi f^\psi\underline{\partial}](\underline{x}) = -\int_\Gamma K_{\varphi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_\varphi(\underline{y})[f(\underline{y})]^\psi\underline{\partial}dS(\underline{y}), \quad \underline{x}\in\Omega. \tag{34}$$

Si $f$ es $(\varphi,\psi)$-inframonogénica, se implica que $f^\psi\underline{\partial}$ también lo es. Por lo tanto, según (34) se obtiene lo siguiente:

$$[\mathcal{T}^l_\psi f^\psi\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}](\underline{x}) = -\int_\Gamma K_{\varphi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_\varphi(\underline{y})[f(\underline{y})]^\psi\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}dS(\underline{y}), \quad \underline{x}\in\Omega.$$

O sea,

$$[\mathcal{T}^l_\psi{}^\psi\underline{\partial}^\psi\underline{\partial}f](\underline{x}) = \int_\Gamma K_{\varphi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_\varphi(\underline{y})\Delta f(\underline{y})dS(\underline{y}), \quad \underline{x}\in\Omega.$$

Si se vuelve a aplicar la fórmula de Borel-Pompeiu (11), resulta lo siguiente:

$${}^\psi\underline{\partial}f - C^l_\psi[{}^\psi\underline{\partial}f] = \int_\Gamma K_{\varphi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_\varphi(\underline{y})\Delta f(\underline{y})dS(\underline{y}), \quad \underline{x}\in\Omega.$$

De esta forma, se tiene la apreciable relación

$${}^\psi\underline{\partial}f = C^l_\psi[{}^\psi\underline{\partial}f] + \int_\Gamma K_{\varphi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_\varphi(\underline{y})\Delta f(\underline{y})dS(\underline{y}), \quad \underline{x}\in\Omega. \tag{35}$$

Véase que cuando $f$ es $(\varphi,\psi)$-inframonogénica, entonces ${}^\psi\underline{\partial}f$ es $\psi$-inframonogénica, por lo que aplicando la fórmula de representación se obtiene que

$$C^r_\psi[{}^\psi\underline{\partial}f] + C^{\mathrm{infra}}_\psi[{}^\psi\underline{\partial}f^\psi\underline{\partial}] = C^l_\psi[{}^\psi\underline{\partial}f] + \int_\Gamma K_{\varphi,\psi}(\underline{y}-\underline{x})n_\varphi(\underline{y})\Delta f(\underline{y})dS(\underline{y}), \quad \underline{x}\in\Omega. \tag{36}$$

Obsérvese una peculiaridad en (35): como $f^\psi\underline{\partial}$ es $(\varphi,\psi)$-inframonogénica cuando $f$ lo es también, se arriba a que necesariamente

$${}^\psi\underline{\partial}f^\psi\underline{\partial} = C^l_\psi[{}^\psi\underline{\partial}f^\psi\underline{\partial}], \quad \underline{x}\in\Omega.$$

Este hecho es obvio porque ${}^\psi\underline{\partial}f^\psi\underline{\partial}$ es $\psi$-monogénica por la izquierda cuando $f$ es $(\varphi,\psi)$-inframonogénica; pero, una vez más se observa la crucial diferencia entre las funciones $\psi$-inframonogénicas y las $(\varphi,\psi)$-inframonogénicas. Note que según la fórmula de Borel-Pompeiu en su versión a la derecha, si $f$ es $(\varphi,\psi)$-inframonogénica se implica la siguiente relación:

$$C^{\mathrm{infra}}_\psi[{}^\psi\underline{\partial}f^\psi\underline{\partial}] = \mathcal{T}^r_\psi[{}^\psi\underline{\partial}f^\psi\underline{\partial}]. \tag{37}$$

Debido a su naturaleza, las funciones $(\varphi,\psi)$-inframonogénicas provocan modificaciones estructurales en la mayoría de los operadores usados que actúan sobre ellas.

## 4. Operadores ${}^{\varphi,\psi}\Psi_k$ y $\Xi_k^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}$

A partir de esta sección se presentarán los resultados fundamentales de esta investigación.

Sean los conjuntos estructurales

$$\varphi = \{\varphi^1, \varphi^2, \ldots, \varphi^m\}$$

y

$$\psi = \{\psi^1, \psi^2, \ldots, \psi^m\}.$$

Defínanse los siguientes operadores sobre $\mathbb{R}_{0,m}$:

$${}^{\varphi,\psi}\Psi_k(f) := (-1)^k \sum_{|A|=k} \varphi_A f \overline{\psi_A}, \qquad k = 1, \ldots, m, \tag{38}$$

donde $A = \{j_1, j_2, \ldots, j_k\} \subset \{1, \ldots, m\}$, $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, $\varphi_A = \varphi^{j_1} \ldots \varphi^{j_k}$ y $\psi_A = \psi^{j_1} \ldots \psi^{j_k}$. Para el conjunto vacío se define ${}^{\varphi,\psi}\Psi_0(f) := f$ debido a que $\varphi_\emptyset = \psi_\emptyset = 1$. Nótese que

$${}^{\varphi,\psi}\Psi_k(f) = \sum_{|A|=k} \varphi_A f \widehat{\psi_A}, \qquad k = 0, \ldots, m. \tag{39}$$

Los siguientes operadores son definidos:

$$\sigma_0(f) := \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} {}^{\varphi,\psi}\Psi_{2i}(f), \tag{40}$$

$$\sigma_1(f) := \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} {}^{\varphi,\psi}\Psi_{2i+1}(f). \tag{41}$$

Consulte la referencia [28] para un estudio profundo sobre estos operadores. Sea $g = \sigma_0(f) + \sigma_1(f) = \sum_{i=0}^{m} {}^{\varphi,\psi}\Psi_i(f)$, es claro que

$$\sum_{i=0}^{m} {}^{\varphi,\psi}\Psi_i(f) = \varphi_A g \widehat{\psi_A} = g$$

para todo conjunto $A$ tal que $|A| = k$ con $k = 0, 1, \ldots, m$, o sea $\varphi_A g = (-1)^k g \psi_A$. Si $k = 1$, se tiene que $\varphi^j g + g \psi^j = 0$ para toda $j = 1, \ldots, m$. Sea $g = \sum_{k=0}^{m} [g]_k$ en cualesquiera de ambas bases dadas por los conjuntos estructurales, entonces como

$$[\varphi_A g + (-1)^{k+1} g \psi_A]_0 = 0,$$

se obtiene que

$$\begin{aligned}
[g]_1 &= g_1 \varphi^1 + \cdots + g_m \varphi^m = -g_1 \psi^1 - \cdots - g_m \psi^m, \\
[g]_2 &= g_{12} \varphi^1 \varphi^2 + \cdots + g_{(m-1)m} \varphi^{m-1} \varphi^m = g_{12} \psi^1 \psi^2 + \cdots + g_{(m-1)m} \psi^{m-1} \psi^m, \\
&\vdots \quad \vdots \\
[g]_m &= g_{12\ldots,m} \varphi^1 \cdots \varphi^m = (-1)^m g_{12\ldots m} \psi^1 \cdots \psi^m.
\end{aligned}$$

Observe que si se toma $\varphi = \{e_1, e_2, e_3\}$, $\psi = \{e_3, e_2, e_1\}$ y la función constante $f(\underline{x}) = e_1$ en $\mathbb{R}_{0,3}$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{3} {}^{\varphi,\psi}\Psi_i(e_1) = {} & e_1 + e_1e_1e_3 + e_2e_1e_2 + e_3e_1e_1 + e_1e_2e_1e_2e_3 + e_1e_3e_1e_1e_3 + e_2e_3e_1e_1e_2 \\ & + e_1e_2e_3e_1e_1e_2e_3 \\ = {} & e_1 - e_3 + e_1 - e_3 - e_3 + e_1 - e_3 + e_1 \\ = {} & 4e_1 - 4e_3 \neq 0.\end{aligned}$$

En el caso de conjuntos estructurales iguales se cumple que

$$\begin{aligned}\psi^1 g\psi^1 + \psi^2 g\psi^2 + \cdots + \psi^m g\psi^m &= -m[g]_0 + (m-2)[g]_1 - (m-4)[g]_2 + \cdots \\ &\quad + (-1)^{k+1}(m-2k)[g]_k + \cdots + (-1)^m m[g]_m \\ &= m[g]_0 + m[g]_1 + m[g]_2 + \cdots + m[g]_k + \cdots + m[g]_m.\end{aligned}$$

Por tanto, se obtiene que $[g]_k = 0$ para $k = 0, ..., m-1$. En este caso, cuando $m$ es impar, se obtendrá también que $[g]_m = 0$; pero en el caso en que $m$ es par, no se evidencia necesariamente este hecho. Como $g = c_1\psi^1\psi^2\cdots\psi^m$, entonces $f = c_2\psi^1\psi^2\cdots\psi^m$. Luego, como

$$\sum_{i=0}^{m} {}^{\psi,\psi}\Psi_i(f) = f + mf + \binom{m}{2}f + \cdots + \binom{m}{k}f + \cdots + \binom{m}{m}f = 2^m f \neq 0, \tag{42}$$

entonces $c_1 = 2^m c_2$ y $g \neq 0$. En el caso en que la dimensión sea impar, para una función pseudoescalar lo que se obtiene es lo siguiente:

$$\sum_{i=0}^{m} {}^{\psi,\psi}\Psi_i(f) = f - \binom{m}{1}f + \binom{m}{2}f - \cdots + (-1)^k\binom{m}{k}f + \cdots - \binom{m}{m}f = 0. \tag{43}$$

**Proposición 2.** *Si $f$ es una función en $\mathbb{R}_{0,m}$, con $m$ impar, entonces*

$$\sum_{i=0}^{m} {}^{\psi,\psi}\Psi_i(f) = 0.$$

**Proposición 3.** *Las únicas funciones en $\mathbb{R}_{0,m}$, con $m$ par, tales que*

$$\sum_{i=0}^{m} {}^{\psi,\psi}\Psi_i(f) = 0,$$

*son aquellas con $[f]_m = 0$.*

Sea la función $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{0,m}$ y sea el operador lineal

$$\Xi(f) := \varphi^i f\psi^i + \varphi^j f\psi^j + \varphi^k f\psi^k,$$

donde $\{\varphi^i, \varphi^j, \varphi^k\} \subset \varphi$ y $\{\psi^i, \psi^j, \psi^k\} \subset \psi$. Como las álgebras de Clifford tienen representaciones irreducibles, entonces estas son isomorfas a una determinada álgebra de matrices (ver [7]). Por ende, la noción de inversibilidad de operadores lineales sobre estas álgebras es equivalente a la inversibilidad de su representación matricial. El primer resultado que se probará es la inversibilidad del operador antes definido.

**Teorema 6.** *El operador $\Xi$ siempre es inversible.*

*Demostración.* Debido a la linealidad del operador $\Xi$ y al hecho de que se puede relacionar con una matriz real, bastaría probar $\ker \Xi = \{0\}$. Por ello, se tendría como hipótesis que

$$\varphi^i f \psi^i + \varphi^j f \psi^j + \varphi^k f \psi^k = 0. \tag{44}$$

A partir de esta ecuación (44), es fácil obtener el siguiente sistema si se multiplican por ambos lados de cada miembro las respectivas componentes de los conjuntos estructurales correspondientes:

$$\begin{cases} f + \varphi^i \varphi^j f \psi^j \psi^i + \varphi^i \varphi^k f \psi^k \psi^i & = & 0, \\ f + \varphi^j \varphi^i f \psi^i \psi^j + \varphi^j \varphi^k f \psi^k \psi^j & = & 0, \\ f + \varphi^k \varphi^i f \psi^i \psi^k + \varphi^k \varphi^j f \psi^j \psi^k & = & 0. \end{cases}$$

Este sistema se reduce a

$$\begin{cases} \varphi^i \varphi^k f \psi^k \psi^i & = & \varphi^j \varphi^k f \psi^k \psi^j, \\ \varphi^i \varphi^j f \psi^j \psi^i & = & \varphi^k \varphi^j f \psi^j \psi^k, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi^i f \psi^i & = & \varphi^j f \psi^j, \\ \varphi^i f \psi^i & = & \varphi^k f \psi^k. \end{cases}$$

Por consiguiente, por (44) resulta que $\varphi^i f \psi^i = 0$, lo que provoca que $f \equiv 0$. □

Sean $\{\varphi^{j_1}, \varphi^{j_2}, ..., \varphi^{j_k}\} \subset \varphi$ y $\{\psi^{j_1}, \psi^{j_2}, ..., \psi^{j_k}\} \subset \psi$. Defínanse los operadores siguientes:

$$\Xi_k^{\{j_1, j_2, ..., j_k\}}(f) := \sum_{i=1}^{k} \varphi^{j_i} f \psi^{j_i}, \quad k \leq m. \tag{45}$$

Los operadores $\Xi_k^{\{j_1, j_2, ..., j_k\}}$, con $k$ impar, son inversibles. Si $m$ es impar, entonces el operador ${}^{\varphi,\psi}\Psi_1$ es también inversible. Por tanto, una función $f \in C^2(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{0,m})$ es $(\varphi, \psi)$-inframonogénica (armónica) sobre $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ si y solo si ${}^{\varphi,\psi}\Psi_1(f)$ es $(\varphi, \psi)$-inframonogénica (armónica) en $\Omega$.

Ahora, defínanse los operadores de Dirac y de Laplace truncados de la siguiente forma:

**Definición 4.** *Sea el conjunto estructural $\varphi = \{\varphi^1, ..., \varphi^m\}$ de $\mathbb{R}^m$. Si se escoge $\{j_1, j_2, ..., j_k\} \subset \{1, 2, ..., m\}$, con $j_1 < j_2 < ... < j_k$, $1 \leq k \leq m$, entonces los operadores de Dirac truncados de peso $k$ con signatura $\{j_1, j_2, ..., j_k\}$ se definen como*

$$D_\varphi^{\{j_1, j_2, ..., j_k\}}(.) := \sum_{i=1}^{k} \varphi^{j_i} \frac{\partial}{\partial x_{j_i}}, \qquad (.)D_\varphi^{\{j_1, j_2, ..., j_k\}} := \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial}{\partial x_{j_i}} \varphi^{j_i}. \tag{46}$$

*También, se define el correspondiente operador de Laplace truncado como*

$$\Delta^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}} := \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial^2}{\partial x_{j_i}^2}. \tag{47}$$

Una observación necesaria es que para el caso de operadores de Dirac truncados de peso $m$, se obtiene el operador ordinario. Exactamente lo mismo ocurre con el operador de Laplace truncado. Es fácil notar que $[D_{\varphi}^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}]^2 = -\Delta^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}$.

**Proposición 4.** *Las siguientes relaciones se cumplen:*

*(1).* $D_{\varphi}^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}(\Xi_k^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}(f)) = -2(f)D_{\psi}^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}} - \Xi_k^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}(D_{\varphi}^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}(f))$,

*(2).* $(\Xi_k^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}(f))D_{\psi}^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}} = -2D_{\varphi}^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}(f) - \Xi_k^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}((f)D_{\psi}^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}})$,

*(3).* $\Delta^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}(\Xi_k^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}(f)) = \Xi_k^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}(\Delta^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}(f))$,

*(4).* $D_{\varphi}^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}(\Xi_k^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}(f))D_{\psi}^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}} = \Xi_k^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}(D_{\varphi}^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}(f)D_{\psi}^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}})$.

*Demostración.* Las demostraciones de las relaciones son obtenidas por un cálculo directo. □

**Teorema 7.** *Si* $f \in C^2(\Omega, \mathbb{R}_{0,m})$*, entonces para todo* $k \leq m$ *impar se evidencia que* $f \in \ker[D_{\varphi}^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}(.)D_{\psi}^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}})]$ $(f \in \ker[\Delta^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}])$ *si y solo si* $\Xi_k^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}(f) \in \ker[D_{\varphi}^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}(.)D_{\psi}^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}})]$ $(\Xi_k^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}(f) \in \ker[\Delta^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}])$.

*Demostración.* La prueba es inmediata mediante el uso de los incisos (3) y (4) de la Proposición 4 y de la inyectividad de los operadores $\Xi_k^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}$ cuando $k$ es impar. □

Los operadores $\Xi_k^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}$ tienen inversa cuando $k$ es impar. Para hallar dichas inversas es necesario recurrir a un enfoque matricial, porque por la diversidad de los conjuntos estructurales no existirá una fórmula explícita que resuma todos los casos posibles. Si se denotan $M^l_{\varphi^{j_i}}$ y $M^r_{\psi^{j_i}}$ como las matrices antisimétricas de $2^m \times 2^m$ asociadas a la multiplicación de $\varphi^{j_i}$ y $\psi^{j_i}$, por la izquierda y derecha de $f$, respectivamente, entonces se tendrá que

$$(\Xi_k^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}})^{-1} = \left( \sum_{i=1}^{k} M^l_{\varphi^{j_i}} M_{\psi,\varphi} M^r_{\psi^{j_i}} \right)^{-1}. \tag{48}$$

Es de apreciar que

$$\varphi^1\varphi^2\cdots\varphi^m\sigma_0(f)\psi^m\cdots\psi^2\psi^1 = \sigma_1(f).$$

Luego, si $m$ es impar, estos pseudoescalares conmutan, y como

$$\varphi^1\varphi^2\cdots\varphi^m = \psi^1\psi^2\cdots\psi^m$$

o bien

$$\varphi^1\varphi^2\cdots\varphi^m = -\psi^1\psi^2\cdots\psi^m,$$

se obtiene que

$$\sigma_0(f) + \sigma_1(f) = 0$$

o

$$\sigma_0(f) - \sigma_1(f) = 0,$$

respectivamente.

**Teorema 8.** *Sea $m$ impar y sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{0,m}$, entonces*

$$\begin{cases} \sigma_0(f) + \sigma_1(f) & = & 0 & si & \varphi^1\varphi^2\cdots\varphi^m = \psi^1\psi^2\cdots\psi^m, \\ \sigma_0(f) - \sigma_1(f) & = & 0 & si & \varphi^1\varphi^2\cdots\varphi^m = -\psi^1\psi^2\cdots\psi^m. \end{cases} \tag{49}$$

Si $m$ es par, entonces

$$\psi^1\psi^2\cdots\psi^m\sigma_0(f)\psi^m\cdots\psi^2\psi^1 = \sigma_1(f)$$

o

$$-\psi^1\psi^2\cdots\psi^m\sigma_0(f)\psi^m\cdots\psi^2\psi^1 = \sigma_1(f)$$

según la igualdad o diferencia de signos entre ambos pseudoescalares. Por tanto:

**Teorema 9.** *Sea $m$ par y sea $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}_{0,m}$, entonces*

$$\begin{cases} \sigma_0(f) + \sigma_1(f) & = & 2\sum_{k=0}^{m/2}[\sigma_0(f)]_{2k} & si & \varphi^1\varphi^2\cdots\varphi^m = \psi^1\psi^2\cdots\psi^m, \\ \sigma_0(f) - \sigma_1(f) & = & 2\sum_{k=0}^{m/2}[\sigma_0(f)]_{2k} & si & \varphi^1\varphi^2\cdots\varphi^m = -\psi^1\psi^2\cdots\psi^m. \end{cases} \tag{50}$$

Ahora se analizarán algunas relaciones que surgen particularmente en el espacio $\mathbb{R}_{0,3}$. Primeramente, si $\varphi^1\varphi^2\cdots\varphi^m = \psi^1\psi^2\cdots\psi^m$ se obtiene que

$${}^{\varphi,\psi}\Psi_1(f) + {}^{\varphi,\psi}\Psi_2(f) = 0.$$

Usando este hecho y un cálculo sencillo resulta la siguiente fórmula:

$$f = \frac{{}^{\varphi,\psi}\Psi_1^2(f) + 2\,{}^{\varphi,\psi}\Psi_1(f)}{3}. \tag{51}$$

Por ende,

$$\begin{aligned}
{}^{\varphi}\underline{\partial}[f] &= \frac{1}{3}[-2^{\varphi,\psi}\Psi_1(f)^{\psi}\underline{\partial} - {}^{\varphi,\psi}\Psi_1(-2f^{\psi}\underline{\partial} - {}^{\varphi,\psi}\Psi_1({}^{\varphi}\underline{\partial}[f])) + 2(-2[f]^{\psi}\underline{\partial} - {}^{\varphi,\psi}\Psi_1({}^{\varphi}\underline{\partial}[f]))],\\
3{}^{\varphi}\underline{\partial}[f] &= 4{}^{\varphi}\underline{\partial}[f] + 4^{\varphi,\psi}\Psi_1(f^{\psi}\underline{\partial}) + 3{}^{\varphi}\underline{\partial}[f] - 4^{\varphi,\psi}\Psi({}^{\varphi}\underline{\partial}[f]) - 4[f]^{\psi}\underline{\partial},\\
{}^{\varphi}\underline{\partial}[f] - [f]^{\psi}\underline{\partial} &= {}^{\varphi,\psi}\Psi_1({}^{\varphi}\underline{\partial}[f] - [f]^{\psi}\underline{\partial}).
\end{aligned}$$

Si ahora se tiene que $\varphi^1\varphi^2\cdots\varphi^m = -\psi^1\psi^2\cdots\psi^m$, entonces

$$f + {}^{\varphi,\psi}\Psi_2(f) - {}^{\varphi,\psi}\Psi_1(f) - {}^{\varphi,\psi}\Psi_3(f) = 0,$$

y por tanto

$${}^{\varphi,\psi}\Psi_1(f) - {}^{\varphi,\psi}\Psi_2(f) = 0.$$

Se concluye que

$$f = \frac{{}^{\varphi,\psi}\Psi_1^2(f) - 2^{\varphi,\psi}\Psi_1(f)}{3}.$$

Si se trabaja con el operador de Dirac correspondiente, se arriba a lo siguiente:

$$\begin{aligned}
{}^{\varphi}\underline{\partial}[f] &= \frac{1}{3}[-2^{\varphi,\psi}\Psi_1(f)^{\psi}\underline{\partial} - {}^{\varphi,\psi}\Psi_1(-2f^{\psi}\underline{\partial} - {}^{\varphi,\psi}\Psi_1({}^{\varphi}\underline{\partial}[f])) - 2(-2[f]^{\psi}\underline{\partial} - {}^{\varphi,\psi}\Psi_1({}^{\varphi}\underline{\partial}[f]))],\\
3{}^{\varphi}\underline{\partial}[f] &= 4{}^{\varphi}\underline{\partial}[f] + 4^{\varphi,\psi}\Psi_1(f^{\psi}\underline{\partial}) + 3{}^{\varphi}\underline{\partial}[f] + 4^{\varphi,\psi}\Psi({}^{\varphi}\underline{\partial}[f]) + 4[f]^{\psi}\underline{\partial},\\
{}^{\varphi}\underline{\partial}[f] + [f]^{\psi}\underline{\partial} &= -{}^{\varphi,\psi}\Psi_1({}^{\varphi}\underline{\partial}[f] + [f]^{\psi}\underline{\partial}).
\end{aligned}$$

**Teorema 10.** *Sea $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_{0,3})$, entonces*

$$\begin{cases} {}^{\varphi}\underline{\partial}[f] - [f]^{\psi}\underline{\partial} = {}^{\varphi,\psi}\Psi_1({}^{\varphi}\underline{\partial}[f] - [f]^{\psi}\underline{\partial}) & si \quad \varphi^1\varphi^2\cdots\varphi^m = \psi^1\psi^2\cdots\psi^m,\\ {}^{\varphi}\underline{\partial}[f] + [f]^{\psi}\underline{\partial} = -{}^{\varphi,\psi}\Psi_1({}^{\varphi}\underline{\partial}[f] + [f]^{\psi}\underline{\partial}) & si \quad \varphi^1\varphi^2\cdots\varphi^m = -\psi^1\psi^2\cdots\psi^m. \end{cases} \tag{52}$$

Asumiendo la diferenciabilidad hasta el orden necesario, se infiere que si los pseudoescalares son idénticos, entonces

$$\begin{aligned}
{}^{\varphi}\underline{\partial}[f] - [f]^{\psi}\underline{\partial} &= {}^{\varphi,\psi}\Psi_1({}^{\varphi}\underline{\partial}[f] - [f]^{\psi}\underline{\partial}),\\
-\Delta[f] - {}^{\varphi}\underline{\partial}[f]^{\psi}\underline{\partial} &= {}^{\varphi,\psi}\Psi_1(-\Delta[f] - {}^{\varphi}\underline{\partial}[f]^{\psi}\underline{\partial}),\\
{}^{\varphi}\underline{\partial}{}^{\psi}\underline{\partial}[f]{}^{\varphi}\underline{\partial} - {}^{\psi}\underline{\partial}[f]{}^{\varphi}\underline{\partial}{}^{\psi}\underline{\partial} &= {}^{\varphi,\psi}\Psi_1({}^{\varphi}\underline{\partial}{}^{\psi}\underline{\partial}[f]{}^{\varphi}\underline{\partial} - {}^{\psi}\underline{\partial}[f]{}^{\varphi}\underline{\partial}{}^{\psi}\underline{\partial}),\\
{}^{\varphi}\underline{\partial}{}^{\psi}\underline{\partial}{}^{\varphi}\underline{\partial}[f] - {}^{\psi}\underline{\partial}{}^{\varphi}\underline{\partial}[f]{}^{\psi}\underline{\partial} &= {}^{\varphi,\psi}\Psi_1({}^{\varphi}\underline{\partial}{}^{\psi}\underline{\partial}{}^{\varphi}\underline{\partial}[f] - {}^{\psi}\underline{\partial}{}^{\varphi}\underline{\partial}[f]{}^{\psi}\underline{\partial}),
\end{aligned}$$

y un resultado análogo se obtiene para el caso en que los pseudoescalares difieren en un signo.

## 5. Operadores de Dirac generalizados

El operador de Dirac construido sobre el álgebra de Clifford $\mathbb{R}_{0,m}$ es un caso especial de operador de Atiyah-Singer-Dirac sobre un fibrado espinorial [7]. Dicho operador elíptico puede ser asociado con una matriz antisimétrica del orden $2^m$ en esta álgebra (consultar [24]). Existen muchas representaciones de este clásico operador en diferentes ámbitos [5]. En la presente sección se mostrarán algunas generalizaciones del operador de Dirac y se probarán algunos resultados relacionados con los operadores ${}^{\varphi,\psi}\Psi_k$. Se asumirán también los conjuntos estructurales: $\psi = \{\psi^1, ..., \psi^m\}$ y $\varphi = \{\varphi^1, ..., \varphi^m\}$. Sean los siguientes operadores de Dirac construidos con los $(m-1)$-vectores asociados al conjunto estructural $\psi$ de $\mathbb{R}_{0,m}$:

$$ {}^{\psi}\underline{\partial}^{\star}(.) = \sum_{\substack{|A|=m-1\\ j=1}}^{m} \psi_A \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad (.)^{\psi}\underline{\partial}^{\star} = \sum_{\substack{|A|=m-1\\ j=1}}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\psi_A, \tag{53} $$

donde $A = \{i_1, i_2, ..., i_{m-1}\} \subset \{1, ..., m\}$, $i_1 < i_2 < ... < i_{m-1}$, $\psi_A = \psi^{i_1}...\psi^{i_{m-1}}$, y donde se mantiene el propio orden en que se presenta esta base de $\mathbb{R}_{0,m}^{(m-1)}$. Los operadores definidos de esta manera factorizan al operador de Laplace m-dimensional $\Delta_m$ y pueden considerarse como generalizaciones naturales del clásico operador de Dirac.

Existe un isomorfismo entre el espacio de funciones que pertenecen al núcleo de estos operadores y el espacio de funciones monogénicas, pues se evidencia la siguiente relación:

$$ \psi^m...\psi^2\psi^1 \cdot {}^{\psi}\underline{\partial}^{\star} f = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{m-j}\psi^{m-j+1}\frac{\partial f}{\partial x_j}, \tag{54} $$

luego, es claro que si se escoge el conjunto estructural

$$ \vartheta = \{(-1)^{m-1}\psi^m, (-1)^{m-2}\psi^{m-1}, \cdots, \psi^1\}, $$

entonces $\ker[{}^{\psi}\underline{\partial}^{\star}(.)] = \ker[{}^{\vartheta}\underline{\partial}(.)] \cong \ker[\underline{\partial}(.)]$. Con la relación (54) se observa la factorización del laplaciano mediante estos operadores, salvo un signo según la paridad de la dimensión: $({}^{\psi}\underline{\partial}^{\star})^2 = \pm\Delta_m$.

Ahora, se analizarán operadores de un orden superior que comparten algunas características con el operador de Dirac de primer orden. Defínanse estos operadores de Dirac de la siguiente forma para $k = 1, ..., m$:

$$ {}^{\psi}\underline{\partial}_k(.) := \sum_{|A|=k} \psi_A \partial^j, \quad (.)^{\psi}\underline{\partial}_k := \sum_{|A|=k} \partial^j \widehat{\psi_A}, \tag{55} $$

donde $A = \{j_1, j_2, ..., j_k\} \subset \{1, ..., m\}$, $j_1 < j_2 < ... < j_k$, $\psi_A = \psi^{j_1}...\psi^{j_k}$ y $\partial^j := \frac{\partial^k}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}...\partial x_{j_k}}$. Observe como, para el caso del álgebra $\mathbb{R}_{0,3}$ si se toma una función diferenciable hasta el orden necesario, entonces

$$
\begin{aligned}
&{}^{\psi}\underline{\partial}_1[f] = {}^{\psi}\underline{\partial}[f], \quad [f]^{\psi}\underline{\partial}_1 = [f]^{\psi}\underline{\partial},\\
&{}^{\psi}\underline{\partial}_2[f] = \psi^1\psi^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} + \psi^1\psi^3\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3} + \psi^2\psi^3\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3},\\
&[f]^{\psi}\underline{\partial}_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\psi^2\psi^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}\psi^3\psi^1 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}\psi^3\psi^2,\\
&{}^{\psi}\underline{\partial}_3[f] = \psi^1\psi^2\psi^3\frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3}, \quad [f]^{\psi}\underline{\partial}_3 = \frac{\partial^3 f}{\partial x_1\partial x_2\partial x_3}\psi^3\psi^2\psi^1.
\end{aligned}
$$

Por las siguientes relaciones:

$$
\begin{aligned}
&\psi^1\psi^2\psi^1\psi^2 = \psi^1\psi^3\psi^1\psi^3 = \psi^2\psi^3\psi^2\psi^3 = -1, \quad \psi^1\psi^2\psi^1\psi^3 = -\psi^1\psi^3\psi^1\psi^2,\\
&\psi^1\psi^2\psi^2\psi^3 = -\psi^2\psi^3\psi^1\psi^2, \quad \psi^1\psi^3\psi^2\psi^3 = -\psi^2\psi^3\psi^1\psi^3,
\end{aligned}
$$

se obtiene que

$$
{}^{\psi}\underline{\partial}_2^2[f] = [f]^{\psi}\underline{\partial}_2^2 = -\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2\partial x_2^2} - \frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2\partial x_3^2} - \frac{\partial^4 f}{\partial x_2^2\partial x_3^2},
$$

y

$$
\begin{aligned}
{}^{\varphi}\underline{\partial}_2[f]^{\psi}\underline{\partial}_2 = {}&\varphi^1\varphi^2\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2\partial x_2^2}\psi^2\psi^1 + \varphi^1\varphi^2\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2\partial x_2\partial x_3}\psi^3\psi^1 + \varphi^1\varphi^2\frac{\partial^4 f}{\partial x_1\partial x_2^2\partial x_3}\psi^3\psi^2\\
&+ \varphi^1\varphi^3\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2\partial x_2\partial x_3}\psi^2\psi^1 + \varphi^1\varphi^3\frac{\partial^4 f}{\partial x_1^2\partial x_3^2}\psi^3\psi^1 + \varphi^1\varphi^3\frac{\partial^4 f}{\partial x_3^2\partial x_2\partial x_1}\psi^3\psi^2\\
&+ \varphi^2\varphi^3\frac{\partial^4 f}{\partial x_2^2\partial x_1\partial x_3}\psi^2\psi^1 + \varphi^2\varphi^3\frac{\partial^4 f}{\partial x_3^2\partial x_2\partial x_1}\psi^3\psi^1 + \varphi^2\varphi^3\frac{\partial^4 f}{\partial x_2^2\partial x_3^2}\psi^3\psi^2.
\end{aligned}
$$

Note que el operador bilaplaciano o biarmónico tiene la forma

$$
\Delta_3^2 = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4}{\partial x_3^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_2^2} + 2\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_3^2} + 2\frac{\partial^4}{\partial x_2^2\partial x_3^2},
$$

por consiguiente

$$
\Delta_3^2 + 2{}^{\psi}\underline{\partial}_2^2 = \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + \frac{\partial^4}{\partial x_3^4}.
$$

Además,

$$
{}^{\varphi}\underline{\partial}_3^2[f] = \frac{\partial^6 f}{\partial x_1^2\partial x_2^2\partial x_3^2}
$$

y

$$
{}^{\varphi}\underline{\partial}_3[f]^{\psi}\underline{\partial}_3 = {}^{\varphi,\psi}\Psi_3\left(\frac{\partial^6 f}{\partial x_1^2\partial x_2^2\partial x_3^2}\right).
$$

Para el estudio de las funciones $f \in \ker[{}^{\psi}\underline{\partial}_2^2(.)]$ o de aquellas tales que $f \in \ker[{}^{\varphi}\underline{\partial}_2(.){}^{\psi}\underline{\partial}_2]$ es recomendable analizar los operadores ${}^{\varphi,\psi}\Psi_2$. La siguiente propiedad posibilita un interesante hecho:

$$\begin{aligned}
{}^{\varphi,\psi}\Psi_2({}^{\varphi}\underline{\partial}_2[f]) &= \varphi^1\varphi^2\varphi^1\varphi^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\psi^2\psi^1 + \varphi^1\varphi^2\varphi^1\varphi^3\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}\psi^2\psi^1 + \varphi^1\varphi^2\varphi^2\varphi^3\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}\psi^2\psi^1\\
&+ \varphi^1\varphi^3\varphi^1\varphi^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\psi^3\psi^1 + \varphi^1\varphi^3\varphi^1\varphi^3\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}\psi^3\psi^1 + \varphi^1\varphi^3\varphi^2\varphi^3\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}\psi^3\psi^1\\
&+ \varphi^2\varphi^3\varphi^1\varphi^2\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}\psi^3\psi^2 + \varphi^2\varphi^3\varphi^1\varphi^3\frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_3}\psi^3\psi^2 + \varphi^2\varphi^3\varphi^2\varphi^3\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_3}\psi^3\psi^2\\
&= -2[f]{}^{\psi}\underline{\partial}_2 - {}^{\varphi}\underline{\partial}_2[{}^{\varphi,\psi}\Psi_2(f)].
\end{aligned}$$

Similarmente, se tiene lo siguiente:

$${}^{\varphi,\psi}\Psi_2([f]{}^{\psi}\underline{\partial}_2) = -2{}^{\varphi}\underline{\partial}_2[f] - [{}^{\varphi,\psi}\Psi_2(f)]{}^{\psi}\underline{\partial}_2.$$

Por tanto,

$${}^{\varphi}\underline{\partial}_2[{}^{\varphi,\psi}\Psi_2(f)]{}^{\psi}\underline{\partial}_2 = -2[f]{}^{\psi}\underline{\partial}_2^2 + 2{}^{\varphi}\underline{\partial}_2^2[f] + {}^{\varphi,\psi}\Psi_2({}^{\varphi}\underline{\partial}_2[f]{}^{\psi}\underline{\partial}_2) = {}^{\varphi,\psi}\Psi_2({}^{\varphi}\underline{\partial}_2[f]{}^{\psi}\underline{\partial}_2), \tag{56}$$

$${}^{\psi}\underline{\partial}_2^2[{}^{\varphi,\psi}\Psi_2(f)] = {}^{\varphi,\psi}\Psi_2({}^{\psi}\underline{\partial}_2^2[f]). \tag{57}$$

En este espacio se conoce que esta función ${}^{\varphi,\psi}\Psi_2$ es inyectiva, ya que ${}^{\varphi,\psi}\Psi_1$ lo es [28]. Se puede enunciar la siguiente proposición específica para el álgebra $\mathbb{R}_{0,3}$:

**Proposición 5.** *Una función $f \in C^4(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}_{0,3})$ satisface que $f \in \ker[{}^{\varphi}\underline{\partial}_2(.){}^{\psi}\underline{\partial}_2]$ ($f \in \ker[{}^{\psi}\underline{\partial}_2^2(.)]$) si y solo si ${}^{\varphi,\psi}\Psi_2(f) \in \ker[{}^{\varphi}\underline{\partial}_2(.){}^{\psi}\underline{\partial}_2]$ (${}^{\varphi,\psi}\Psi_2(f) \in \ker[{}^{\psi}\underline{\partial}_2^2(.)]$).*

Este resultado indica una de las aplicaciones de estos operadores ${}^{\varphi,\psi}\Psi_2$. Cuando se aumenta en dimensión, esta propiedad esencial (56) no se verifica trabajando con bivectores. La esencia radica en que existirían bivectores que conmutan, por ejemplo: $\psi^1\psi^2\psi^3\psi^4 = \psi^3\psi^4\psi^1\psi^2$.

Ahora se operará con los $(m-1)$-vectores de $\mathbb{R}_{0,m}$. Antes que todo, observe que si se toma un $(m-1)$-vector de $\mathbb{R}_{0,m}$, entonces

$$(\psi^{j_1}\psi^{j_2}\cdots\psi^{j_{m-1}})^2 = (-1)^{\sum_{k=1}^{m-1}k} = (-1)^{(m-1)m/2} = \begin{cases} 1 & si \quad m \equiv 0, 1(4),\\ -1 & si \quad m \equiv 2, 3(4). \end{cases}$$

Si se toma otro $(m-1)$-vector diferente, sea este $\psi^{i_1}\psi^{i_2}...\psi^{i_{m-1}}$, y si se denotan con $r$ y $s$ las expresiones

$$\psi^{i_1}\psi^{i_2}...\psi^{i_{m-1}}\cdot\psi^{j_1}\psi^{j_2}\cdots\psi^{j_{m-1}},$$

y

$$\psi^{j_1}\psi^{j_2}...\psi^{j_{m-1}}\cdot\psi^{i_1}\psi^{i_2}\cdots\psi^{i_{m-1}},$$

respectivamente. Sea $\psi^{i_m}$ el elemento del conjunto estructural que falta para convertir el primer $(m-1)$-vector a un pseudoescalar, y sea $\psi^{j_m}$ este elemento para el segundo. Se arriba a lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
\psi^{i_m} r \psi^{j_m} &= (-1)^t(-1)^v \psi^{i_1}\psi^{i_2}\ldots\psi^{i_m}\ldots\psi^{i_{m-1}} \cdot \psi^{j_1}\psi^{j_2}\ldots\psi^{j_m}\ldots\psi^{j_{m-1}},\\
\psi^{i_m} s \psi^{j_m} &= (-1)^{m-2}(-1)^t(-1)^{m-1}(-1)^v \psi^{j_1}\psi^{j_2}\ldots\psi^{j_{m-1}}\ldots\psi^{i_1}\psi^{i_2}\ldots\psi^{i_{m-1}}\\
&= -\psi^{i_m} r \psi^{j_m}.
\end{aligned}
$$

Por tanto, $r=-s$ y se prueba que en general los $(m-1)$-vectores anticonmutan. Este hecho conlleva a

$$
{}^{\varphi,\psi}\Psi_{m-1}({}^{\varphi}\underline{\partial}_{m-1}[f]) = \begin{cases} -2[f]^{\psi}\underline{\partial}_{m-1} - {}^{\varphi}\underline{\partial}_{m-1}[{}^{\varphi,\psi}\Psi_{m-1}(f)] & si \quad m \equiv 2,3(4),\\ 2[f]^{\psi}\underline{\partial}_{m-1} - {}^{\varphi}\underline{\partial}_{m-1}[{}^{\varphi,\psi}\Psi_{m-1}(f)] & si \quad m \equiv 0,1(4), \end{cases} \tag{58}
$$

$$
{}^{\varphi,\psi}\Psi_{m-1}([f]^{\psi}\underline{\partial}_{m-1}) = \begin{cases} -2{}^{\varphi}\underline{\partial}_{m-1}[f] - [{}^{\varphi,\psi}\Psi_{m-1}(f)]^{\psi}\underline{\partial}_{m-1} & si \quad m \equiv 2,3(4),\\ 2{}^{\varphi}\underline{\partial}_{m-1}[f] - [{}^{\varphi,\psi}\Psi_{m-1}(f)]^{\psi}\underline{\partial}_{m-1} & si \quad m \equiv 0,1(4). \end{cases} \tag{59}
$$

Utilizando las fórmulas (58) y (59) se obtiene

$$
{}^{\varphi}\underline{\partial}_{m-1}[{}^{\varphi,\psi}\Psi_{m-1}(f)]^{\psi}\underline{\partial}_{m-1} = {}^{\varphi,\psi}\Psi_{m-1}({}^{\varphi}\underline{\partial}_{m-1}[f]^{\psi}\underline{\partial}_{m-1}), \tag{60}
$$

$$
{}^{\varphi}\underline{\partial}^2_{m-1}[{}^{\varphi,\psi}\Psi_{m-1}(f)] = {}^{\varphi,\psi}\Psi_{m-1}({}^{\varphi}\underline{\partial}^2_{m-1}[f]). \tag{61}
$$

Las fórmulas anteriores indican que los operadores ${}^{\varphi}\underline{\partial}_{m-1}(.)^{\psi}\underline{\partial}_{m-1}$ y ${}^{\varphi}\underline{\partial}^2_{m-1}$ conmutan con el operador ${}^{\varphi,\psi}\Psi_{m-1}$. Se puede relacionar de forma directa a un determinado $\Xi_m$ con ${}^{\varphi,\psi}\Psi_{m-1}$. Cuando $m$ es impar y al multiplicar por el pseudoescalar del espacio, la inyectividad de ${}^{\varphi,\psi}\Psi_{m-1}$ se implica de la inyectividad de $\Xi_m$. En estas álgebras geométricas la paridad de la dimensión posee un rol crucial para la obtención de muchos resultados. Por ello, es muy frecuente que muchos investigadores opten por la separación en dos casos según la paridad de $m$ (ver por ejemplo el artículo [13]).

De esta forma, se concluye con el siguiente teorema principal:

**Teorema 11.** *Si $m$ es impar, sea una función $f \in C^{2m-2}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}_{0,m})$, entonces se cumple que*

$$
f \in \ker[{}^{\varphi}\underline{\partial}_{m-1}(.)^{\psi}\underline{\partial}_{m-1}](f \in \ker[{}^{\varphi}\underline{\partial}^2_{m-1}(.)])
$$

*si y solo si*

$$
{}^{\varphi,\psi}\Psi_{m-1}(f) \in \ker[{}^{\varphi}\underline{\partial}_{m-1}(.)^{\psi}\underline{\partial}_{m-1}]({}^{\varphi,\psi}\Psi_{m-1}(f) \in \ker[{}^{\varphi}\underline{\partial}^2_{m-1}(.)]).
$$

## 6. Conclusiones

En este trabajo se estudiaron propiedades esenciales de algunos operadores lineales que surgen específicamente en el contexto del análisis de Clifford. Se evidenció que la paridad de la dimensión $m$ influye en la inyectividad de algunos de estos; como por ejemplo, en el caso de los operadores $\Xi_k^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}$. Se obtuvo que una función es una solución nula del operador de Dirac truncado si y solo si su imagen por el operador $\Xi_k^{\{j_1,j_2,\ldots,j_k\}}$ con $k$ impar es también una solución. Además, se demostraron algunas relaciones que existen entre transformadas de tipo Cauchy y Teodorescu con los operadores estudiados, como también se determinaron identidades con las funciones ${}^{\varphi,\psi}\Psi_k$. Finalmente, se definieron operadores de Dirac generalizados con $k$-vectores y se extendió el resultado anterior al considerar los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales homogéneos que surgen. Como trabajo futuro, se pretende estudiar generalizaciones del operador de Lamé-Navier considerando estos nuevos operadores y encontrar, si fuese posible, una interpretación física para los desplazamientos del núcleo.

## Agradecimientos

El autor agradece a su padre Arsenio Danilo Alfonso Pulido por todo el apoyo brindado en sus estudios y al Dr. Ricardo Abreu Blaya por todas sus enseñanzas del análisis de Clifford. Un agradecimiento para los revisores de este trabajo, cuyos comentarios y sugerencias ayudaron a mejorar indiscutiblemente la calidad de este.

## Financiamiento

El autor fue financiado por una beca para estudios de posgrado (CVU: 1043969) otorgada por Consejo Nacional de Humanidades, Ciencias y Tecnologías (CONAHCYT) del gobierno mexicano.

## Referencias

[1] R. A. Blaya, J. B. Reyes, A. Guzmán y U. Kähler, *On the* Π*-operator in Clifford Analysis*. Journal of Mathematical Analysis and Applications **434**(2016), 1138-1159. DOI: 10.1016/j.jmaa.2015.09.038

[2] R. A. Blaya, J. B. Reyes, A. Guzmán y U. Kähler, *On the φ-Hiperderivative of the ψ-Cauchy-Type Integral in Clifford Analysis*. Comput. Methods Funct. Theory **17**(2017), 101-119. DOI: 10.1007/s40315-016-0172-0

[3] R. A. Blaya, D. A. Santiesteban, J. B. Reyes y A. M. García, *Inframonogenic decomposition of higher-order Lipschitz functions*. Math. Meth. Appl. Sci. **45**(2022), 4911-4928. DOI: 10.1002/mma.8078

[4] S. Bock, K. Gürlebeck, D. Legatiuk y H. M. Nguyen, *ψ-Hyperholomorphic functions and a Kolosov-Muskhelishvili formula*. Math. Methods Appl. Sci. **38**(2015), 5114-5123. DOI: 10.1002/mma.3431

[5] F. Brackx, R. Delanghe y F. Sommen, *Clifford analysis*. Wiley, 1982.

[6] R. Delanghe, R. S. Krausshar y H. R. Malonek, *Differentiability of functions with values in some real associative algebras: approaches to an old problem*. Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège **70**(2001), 231-249.

[7] R. Delanghe, F. Sommen y V. Souček, *Clifford Algebras and Spinor-Valued Functions, A Funtion Theory for the Dirac Operator*. Springer (Ed.). Springer-Science+Business Media, B.V., 1992. DOI: 10.1007/978-94-011-2922-0

[8] D. C. Dinh, *On structure of inframonogenic functions*. Adv. Appl. Clifford Algebras **31**(2014), 1-12. DOI: 10.1007/s00006-021-01157-0

[9] A. M. García, T. M. García y R. A. Blaya, *Comparing harmonic and inframonogenic functions in Clifford Analysis*. Mediterr. J. Math. **19**(2022), 1-19. DOI: 10.1007/s00009-021-01957-5

[10] A. M. García, T. M. García, R. A. Blaya y J. B. Reyes, *A Cauchy integral formula for inframonogenic functions in Clifford analysis*. Adv. Appl. Clifford Algebras **27**(2017), 1147-1159. DOI: 10.1007/s00006-016-0745-z

[11] A. M. García, T. M. García, R. A. Blaya y J. B. Reyes, *Inframonogenic functions and their applications in three dimensional elasticity theory*. Math. Meth. Appl. Sci. **41**(2018), 3622-3631. DOI: 10.1002/mma.4850

[12] A. M. García, T. M. García, R. A. Blaya y J. B. Reyes, *Decomposition of inframonogenic functions with applications in elasticity theory*. Math. Meth. Appl. Sci. **43**(2020), 1915-1924. DOI: 10.1002/mma.6015

[13] A. M. García, D. A. Santiesteban y R. A. Blaya, *On the Dirichlet problem for second order elliptic systems in the ball*. Journal of Differential Equations **364**(2023), 498-520. DOI: 10.1016/j.jde.2023.03.050

[14] K. Gürlebeck, K. Habetha y W. Sprößig, *Holomorphic Functions in the Plane and n-Dimensional Space*. B. Birkhäuser Verlag (Ed.). Birkhäuser Verlag, Basel, 2008. DOI: 10.1007/978-3-7643-8272-8

[15] K. Gürlebeck, U. Kähler y M. Shapiro, *On the* $\Pi$*-operator in hyperholomorphic function theory*. Advances in Applied Clifford Algebras **9**(1999), 23-40. DOI: 10.1007/BF03041935

[16] K. Gürlebeck y H. M. Nguyen, *On* $\psi$*-hyperholomorphic Functions and a Decomposition of Harmonics*. Hyper complex Analysis: New Perspectives and Applications, Trends in Mathematics (2014), 181-189. DOI: 10.1007/978-3-319-08771-9_12

[17] K. Gürlebeck y H. M. Nguyen, $\psi$*-Hyperholomorphic functions and an application to elasticity problems*. AIP Conference Proceedings **1648**(2015), 440005. DOI: 10.1063/1.4912656

[18] R. Lávicka, *The Fischer decomposition for the H-action and its applications*. Hypercomplex analysis and applications trends in mathematics. Edited by Sabadini and F. Sommen **I**(2011). DOI: 10.1007/978-3-0346-0246-4_10

[19] L. W. Liu y H. K. Hong, *Clifford algebra valued boundary integral equations for three-dimensional elasticity*. Appl. Math. Modell. **54**(2018), 246-267. DOI: 10.1016/j.apm.2017.09.031

[20] H. Malonek, D. Peña-Peña y F. Sommen, *Fischer decomposition by inframonogenic functions*. CUBO A Mathematical Journal **12**(2010), 189-197. DOI: 10.4067/S0719-06462010000200012

[21] H. Malonek, D. Peña-Peña y F. Sommen, *A Cauchy-Kowalevski Theorem for Inframonogenic Functions*. Math. J. Okayama Univ. **53**(2011), 167-172. DOI: 10.48550/arXiv.0911.0716

[22] M. H. Nguyen, *$\mu$-Hyperholomorphic Function Theory in $R^3$: Geometric Mapping Properties and Applications*. 2015.

[23] K. Nôno, *On the quaternion linearization of Laplacian* $\Delta$. Bull. Fukuoka Univ. Ed. III **35**(1986), 5-10.

[24] D. A. Santiesteban y R. A. Blaya, *Isomorphisms of partial differential equations in Clifford analysis*. Adv. Appl. Clifford Algebras **32**(2022), 1-18. DOI: 10.1007/s00006-021-01191-y

[25] D. A. Santiesteban, R. A. Blaya y M. Á. Alejandre, *On $(\phi,\psi)$-inframonogenic functions in Clifford analysis*. Bull. Braz. Math. Soc. New Series **53**(2022), 605-621. DOI: 10.1007/s00574-021-00273-6

[26] D. A. Santiesteban, R. A. Blaya y M. Á. Alejandre, *On a generalized Lamé-Navier system in* $\mathbb{R}^3$. Mathematica Slovaca **72**(2022), no. 6, 1527-1540. DOI: 10.1515/ms-2022-0104

[27] D. A. Santiesteban, R. A. Blaya y J. B. Reyes, *Boundary value problems for a second-order elliptic partial differential equation system in Euclidean space*. Math. Meth. Appl. Sci. **46**(2023), 15784-15798. DOI: 10.1002/mma.9426

[28] D. A. Santiesteban, Y. P. Pérez y R. A. Blaya, *Generalizations of harmonic functions in* $\mathbb{R}^m$. Anal. Math. Phys. **12**(2022), 1-12. DOI: 10.1007/s13324-021-00620-2

[29] M. V. Shapiro y N. Vasilevski, *Quaternionic $\psi$-hyperholomorphic functions, singular integral operators and boundary value problems. I. $\psi$-hyperholomorphic function theory*. Complex Variables **27**(1995), 17-46. DOI: 10.1080/17476939508814803

[30] L. Wang, S. Jia, L. Luo y F. Qiu, *Plemelj formula of inframonogenic functions and their boundary value problems*. Complex Var. Elliptic Equ. (2002). DOI: 10.1080/17476933.2022.2040019