Revista Pensamiento Actual, Universidad de Costa Rica
Vol. 9, No. 12-13, 2009 • ISSN 1409-0112 • 99 - 113

El problema de Integración simbólica

Carlos Ml. Ulate Ramírez[1]

Recepción: 13 de junio de 2008 / Aprobación: 18 de abril de 2009

Resumen

En esta investigación se obtiene las reglas heurísticas o analíticas que los ingenieros, matemáticos y estudiantes de matemática utilizan cuando deben hallar una primitiva (o antiderivada[2]). De modo que proporciona una explicación del tipo de procedimiento que el profesional (o futuro profesional en el caso de los estudiantes) da a una determinada integral, esta información fue obtenida al clasificar los datos de una encuesta que se realizó a una población de veinte personas(cinco estudiantes de II año de matemática, cinco estudiantes de IV año de matemática, cinco matemáticos y cinco ingenieros), todos miembros de la comunidad universitaria de la Universidad de Costa Rica.

Palabras claves: sistemas expertos, integración simbólica, integrales indefinidas.

Abstract

Through this research the heuristic or analytical rules that engineers, mathematicians and students of mathematics use when they must find a primitive (or antiderivative[3]). Therefore, an explanation of the type of procedure that the professional or future professional, in case of students, gives to certain integral is provided. This information was obtained by classifying the information of a survey done to a population of twenty persons: five students of second year of mathematics, five students of fourth year of mathematics, five mathematicians and five engineers, all members of the university community of the University of Costa Rica.

Key words: expert systems, symbolic integration, indefinite integrals.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se describen las reglas que los expertos utilizan cuando tienen que resolver una integral indefinida, el problema no ha sido resuelto completamente. Se ha realizado mucha investigación al respecto (Ueberhuber, 1998: 92–110), de hecho actualmente existe en el mercado mucho software: Mapple, MatLab, Mathematica, entre otros.[4]

En general, se puede decir que la solución a una integral indefinida (aquellas que se pueden resolver de forma cerrada, es decir, por métodos elementales de integración y que se enseñan en los cursos básicos a nivel de cálculo en nuestras universidades) requiere de conocer las técnicas de integración elementales y una adecuada selección de la regla, que se logra con una alta dosis de heurística y experticia.

Con los resultados obtenidos, se establece una base mínima de conocimientos para diseñar un sistema experto[5] para integración simbólica.

Los objetivos específicos propuestos para la investigación fueron:

- Determinar, cuál es la base de conocimiento (dominio de conocimiento) que se encuentra presente en el proceso de integración.
- Realizar una encuesta, dirigida a ingenieros,

---

1. Profesor investigador de la Sede de Occidente, U.C.R., [carlos.ulate@ucr.ac.cr]
2. Nombre con el que se le conoce en la práctica, al proceso mediante el cual se obtiene la integral de una función.
3. Which is the process of finding the infinitive integral of a function are obtained.
4. Para una lista más amplia y detallada que incluye la dirección electrónica, se puede consultar (Ueberhuber, 1998, pp. 73–75).
5. Los sistemas expertos se ubican dentro de los sistemas computacionales que utilizan conocimiento acerca de un dominio para llegar a conclusiones acerca de un problema en ese dominio, tienen la característica que separa entre lo que es conocimiento y la forma en que se utiliza, el conocimiento es altamente específico del dominio y recurre al conocimiento heurístico más que al algorítmico.

estudiantes de matemática y matemáticos con el fin de determinar los tipos de reglas que se utilizan en la solución de integrales indefinidas.

- Clasificar la información obtenida en la encuesta de acuerdo con el tipo de integrando y por la manera en que el experto la resuelve.

- Dar una explicación sobre la manera particular en que cada profesional o estudiante resuelve una determinada integral, que a futuro permita orientar el tipo de sistema experto que requiere cada una de las poblaciones involucradas.

- Identificar el estado del Metaconocimiento actual y que se encuentra presente en el problema de integración simbólica.

Por lo general, las personas que tienen a cargo el cálculo de integrales indefinidas son: matemáticos, profesionales de la enseñanza de la matemática, ingenieros y estudiantes afines a estas áreas, todos ellos utilizan la formación que han tenido o que están adquiriendo para encontrar la solución de los problemas que se presentan y todo este conocimiento es muy particular de la persona.

Con el fin de aproximarnos y determinar el tipo de conocimiento que se encuentra presente en la solución de una integral indefinida, se realizó un cuestionario con 17 preguntas (veáse anexo) y este fue respondido por 20 miembros de la comunidad universitaria.

El artículo está organizado de modo que en la segunda sección se plantea una breve reseña histórica del problema de Integración simbólica. En la sección tres, se plantea el problema formal de la integración simbólica, se incluyen las conclusiones de una conversación informal y un análisis de las entrevistas realizadas. En la sección cuatro, se presenta el estado del metaconocimiento y se ilustra como reconstruir la integral de una función con ayuda del teorema de Liouville y finalmente en la sección cinco se presentan las conclusiones.

2. RESEÑA HISTÓRICA

El problema de integración simbólica en forma cerrada o – como también se conoce– en términos finitos, ha sido objeto de estudio de la matemática por más de 150 años y ha sido la atracción de un gran número de investigadores (Ueberhuber, 1998: 91–92). Joseph Liouville's fue el primero en realizar un estudio extensivo del problema de integración cerrada. El principio de Lliouville's fue presentado en 1883, describe la estructura de toda función elemental[6]; donde las antiderivadas pueden ser expresadas como funciones elementales.

En el siglo XIX Charles Hermite (Ueberhuber, 1998: 91) desarrolla un método de integración que se pudo generalizar a expresiones racionales de funciones elementales y que constituye un paso importante en la construcción de algorítmos para integrar funciones elementales.

Durante aproximadamente un siglo (Ueberuber, 1998: 91–92) no hubo aportes en el campo, no fue si no hasta 1940 (Ueberhuber, 1998: 91) que Ritt desarrolla el álgebra diferencial, la cual hace posible el estudio del problema de integración de funciones elementales desde un punto de vista algebraico, sin incluir el cálculo.

Durante la década de los años 60 el uso de la computadora para el diseño de sistemas de propósito general, que posteriormente pasaron a ser los sistemas expertos y el desarrollo de los lenguajes de computación, para computación algebraica, renuevan el interés en la integración simbólica, cuyos resultados culminan con el algorítmo fundamental de Risch's (Risch, 1969: 167–189), dicho algoritmo calcula una integral indefinida elemental F, para toda función elemental o trascendental[7] f, en un número finito de pasos, o prueba que tal antiderivada no existe.

6. Informalmente hablando, hoy en día las funciones elementales son obtenidas a partir de un campo de funciones algebraicas, por adjuntar un número finito de expresiones exponenciales, trigonométricas y/o hiperbólicas junto con sus correspondientes inversas.
7. En la sección cuatro se da la definición formal de función trascendental. De modo informal, se puede afirmar que actualmente, podemos pensar en las funciones exponenciales, logarítmicas.

3. PROBLEMA DE INTEGRACIÓN SIMBÓLICA

Formalmente, el problema de integración simbólica se puede plantear como sigue (Ueberhuber, 1998: 99–100):

> *Para dos clases dadas de funciones reales o complejas F y G el problema de integración asociado, es encontrar un algorítmo, el cual para todo $f \in F$, siempre calcule una antiderivada $g \in G$ de f (es decir $g^l = f$) o pruebe que no existe el elemento g.*

3.1. Metodología utilizada

En esta investigación se han utilizado los siguientes recursos metodológicos:

- Conversación informal con un estudiante, un ingeniero y un matemático de la Universidad de Costa Rica.
- Investigación bibliográfica:
  - Hilton, P. and Wu Yel-C. (1977). A course in Modern Algebra. New York: John Wiley & Sons.
  - Krommer, Arnold and Ueberhuber, C. (1998). Computational Integration. Philadelphia: Siam.
  - Penney, E. (1994). Cálculo con Geometría Analítica México: Prentice Hall.
  - Risch, R. H. (1969). The problem of integration in finite terms, Trans. Amer. Math. Soc. 38 , pp 167–189.
  - Stewart, I. (1973). Galois Theory. Chapman and Hall, 1973.
  - ANSI/IEEE Std 100, 1984
- Se realizó una entrevista formal a estudiantes de Matemática, Ingenieros y Matemáticos. En total 20 entrevistados: 5 estudiantes de II año de matemática, 5 estudiantes de IV año de matemática, 5 matemáticos y 5 Ingenieros.
- Investigación en Internet: Mathematica http://www.wri.com/, Symbolic and Algebraic Computation (SAC), http://www.symbolicnet.org/

3.2. Análisis del problema de estudio

Como ya se mencionó en la metodología, uno de los instrumentos utilizados fue una entrevista formal dirigida (motivada por una conversación informal que previamente había tenido) y orientada a extraer información acerca de cómo se resuelve un determinado tipo de problema de integración indefinida. La otra fuente importante para la investigación la constituye el material bibliográfico.

Esta subsección se divide en dos partes, la primera corresponde a la presentación de un resumen de la conversación informal y la segunda al análisis de los resultados de la entrevista.

3.2.1. Conclusiones de conversación informal

Con el fin de conocer la posición sobre, ¿cuál es la base de conocimiento (dominio) que se encuentra presente en el proceso de integración?, se conversó con un ingeniero, un estudiante y un profesor de matemática de la Universidad de Costa Rica.

Para el ingeniero y el estudiante el proceso de integración se inicia con las reglas básicas, tales como

$x^3 \to \frac{x^4}{4} + C,\ 2x^3 + x^2 - 1 \to \frac{2x^4}{4} + \frac{x^3}{3} - x + C$ o $e^{2x} + C$, etc

Se debe tener en cuenta que cuando se aprende a integrar, se tiene ya alguna experiencia en la manipulación algebraica: factorización, simplificación, sumas, restas, etc. Una consideración importante, es el saber derivar, sobre todo, porque esto les permite confrontar la respuesta y ver su validez.

Sin embargo, consideran que esto no es suficiente para integrar, reconocen que hay integrales donde el método no es tan mecánico, de hecho resulta complicado, como es el caso de la integración por partes (la heurística es importante), que no es tan sistemático como en el caso de los ejemplos anteriores. Mencionan por ejemplo, que la elección de las sustituciones adecuadas puede resultar un problema. Coinciden en que utilizan algún software (Matlab, Mathematica), para ayudarse cuando se enfrentan con algún problema “duro” de integración, aunque la respuesta no siempre les satisface.

Manifiestan, que algunas integrales de funciones trigonométricas, son resueltas de manera muy sistemática (se parecen mucho entre ellas la forma de obtener la solución, el procedimiento es muy mecánico) y a veces difieren solo en la función (seno o coseno).

En el caso del profesor de matemática la perspectiva, es otra, su posición es más teórica, el concepto de integración lo asocia con conceptos de medida: longitud, área, volumen, etc. El concepto de suma y límite, son significativos para poder comprender el proceso de integración (análisis formal). No obstante, reconoce que en la práctica y sobre todo cuando se trabaja con integrales indefinidas, se deben manejar muy bien ciertas reglas básicas no solo de integración, sino que también de derivación, tales como:

$$x^n \quad \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; = -1 \text{ o sin } (ax+b) \rightarrow -a^{-1} \cos(ax+b) + C.$$

Considera que se puede agrupar las funciones o integrandos de diversos tipos y ver que el método para obtener su primitiva es bastante similar. Por ejemplo, los polinomios son muy fáciles de integrar, potencias enteras positivas de funciones trigonométricas (sobre todo senos y cosenos) son muy similares los métodos de integración (dependen de si el exponente es par o impar), funciones racionales donde el denominador es producto de factores lineales es otro tipo de integral en que la respuesta se da en términos de logarítmos, y probablemente se puedan encontrar otros subconjuntos con características similares. Si les llama la atención que programas como Mathematica o Matlab, pueden resolver integrales de diversos tipos, muy eficientemente.

3.2.2. Análisis de la entrevista

La entrevista formal evidenció que las personas tienen dudas en cuanto al significado del término "heurístico". Esto se debe a la poca familiaridad que tienen del concepto, el cual no es muy usado en comparación con el concepto "análisis formal" , al menos dentro de los matemáticos.

No obstante en el cuestionario se incluyó la siguiente versión del concepto:

> "La heurística[8] trata de métodos o algorítmos exploratorios durante la resolución de problemas en los cuales las soluciones se descubren por la evaluación del progreso logrado en la búsqueda de un resultado final. Se suele usar actualmente como adjetivo, caracterizando técnicas por las cuales se mejora en promedio el resultado de una tarea resolutiva de problemas."

De la entrevista, se desprende que las únicas reglas utilizadas, son aquellas que están relacionadas con el tipo de integral, esto es, las técnicas que aprenden cuando estudian un curso de cálculo: integrales inmediatas, integrales por sustitución, integrales por partes, integrales de potencias de funciones trigonométricas, etc. Y que las podemos resumir en la regla condicional,

$$\textit{Si } [condicion_1, condicion_2 \ldots] \textit{ entonces } [accion_1, accion_2 \ldots],$$

donde $accion_1, accion_2, \ldots$ se realiza siempre que se den las condiciones $condicion_1, condicion_2, \ldots$.
La siguiente es una tabla que ilustra (algunos ejemplos), lo que para los entrevistados corresponden a este tipo de reglas

Cuadro No. 1

Reglas Integrales Inmediatas

Si	$f(x)$	Entonces	$F(x)$
	$x^n,\ n \neq -1$		$\frac{x^n}{n+1}$
	x^{-1}		$\ln(x)$
	e^x		e^x
	$\sin(x)$		$-\cos(x)$
	$(\sqrt{1-x^2})^{-1}$		$\arcsin(x)$

Se obtuvo a partir de la lista de integrales indefinidas que aparecen en el anexo del libro: Penney, E. (1994). *Cálculo con Geometría Analítica* México: Prentice Hall.

8. ANSI/IEEE Std 100, 1984

Otras reglas son más complejas, como las que son dadas por fórmulas recurrentes, por ejemplo en el caso de la pregunta 13.) la integral se debe resolver de manera recurrente, el exponente del integrando se reduce en dos unidades $\int \sin^{n-2}(\alpha)\, d\alpha$ y así sucesivamente en cada paso de recurrencia. En general, los entrevistados manifiestan que lo más comodo es usar la regla, tal y como se presenta en esta pregunta, aunque sea un poco más elaborada su aplicación y menos conocida que en los casos anteriores.

Criterios similares se encuentran con las restantes preguntas que involucran fórmulas recurrentes 13.), 14.) y 15.), en esta última uno de los entrevistados (el matemático) expresó:

> "No, usualmente resuelvo la integral dada, para algún valor de n específico, sin recurrir a esta regla."

El siguiente cuadro ilustra los resultados obtenidos en la entrevista.

Cuadro No. 2

Porcentaje obtenidos en la entrevista

No. Pregunta	Regla Heurística	Análisis Formal	No Conozco	Si Conozco	Con Frecuencia	Poca Frecuencia
1	100 %					
2	85 %	15 %				
3	100 %					
4	75 %	25 %				
5	35 %	65 %				
6	35 %	65 %				
7	35 %	65 %				
8	35 %	65 %				
9	35 %	65 %				
10	35 %	65 %				
11	35 %	65 %				
12	55 %	45 %				
13			75 %	25 %		
14			75 %	25 %		
15			80 %	20 %		
16			100 %			
17					75 %	25 %

Se obtuvo a partir de la tabulación de los datos suministrados por los encuestados.

En el caso de las preguntas 1.) y 3.), el 100% de los entrevistados coincide en usar regla heurística para resolver el problema; en el caso de la pregunta 16.), el 100% no conoce la solución (dicho sea de paso, no existe por métodos elementales).

En las preguntas 5.) a 11.), el 65% considera que el procedimiento es formal en la medida en que se requiere algún tipo de sustitución, integración por partes o sustitución trigonométrica, que a la persona se le debe ocurrir para poder resolver el problema, no obstante se desprende de sus comentarios que no están muy seguros si esto corresponde más a heurística que a un análisis formal.

La integración por fracciones simples (pregunta 12.)), es considerada por el 55% como regla heurística.

Finalmente, en relación con el uso de tablas (pregunta 17.), el 75% las usa con frecuencia.

Los resultados de la entrevista permiten determinar, que una vez que un problema de integración se propone, el objetivo fundamental es poder dar respuesta (meta), la cual requiere una búsqueda de diferentes métodos de integración que están disponibles (sustitución, partes, fracciones simples, etc.), para ver cual es posible aplicar, puede que antes de aplicar un determinado método sea necesario modificar el integrando por una expresión equivalente(por ejemplo, mediante el uso de una identidad) y con ello facilitar la elección del mejor método (por ejemplo, integración por partes se recomienda en integrandos que son productos de funciones). Aún cuando se elija un método, puede que la integral se resuelva de manera más sencilla con otro (no todos los métodos sirven para una misma integral) o puede que la integral sea del tipo recurrente y se necesite resolver varias integrales antes de llegar a la meta.

La búsqueda heurística de esta meta la podemos resumir en el siguiente esquema, que describe los elementos mínimos de conocimiento que se requieren para la elaboración de un sistema experto:

- Dados:
  - estado inicial: por ejemplo $\int x^{-1/2}e^{\sqrt{x}}dx$,
  - estado final o meta: un estado que no contenga el símbolo de integración, $2e^{\sqrt{x}}$ en el caso del ejemplo,
  - espacio de estados: todas las expresiones que resulten de aplicar distintas secuencias de operaciones junto con todos los operandos disponibles,
  - operadores, dentro de los que se pueden citar:
  - ejemplos,
  - métodos generales de integración:
    - sustitución (en particular trigonométricas), $u = \sqrt{x}$ en el caso de nuestro ejemplo,
    - partes,
    - potencias de funciones trigonométricas,
    - integrales que se pueden resolver completando cuadrados,
    - fracciones simples (o parciales).
  - Integrales inmediatas,
  - relaciones trigonométricas,
  - transformaciones entre expresiones algebraicas equivalentes,
  - fórmulas de recurrencia.
- Encontrar:
  - Una secuencia de transformaciones (aplicación de operadores) que permita resolver la integral planteada o decidir que no es posible hallar tal solución.

Finalmente, de la entrevista es posible obtener las explicaciones que dan los diferentes sectores de la población encuestada, respecto al tipo de integral. Señalo que la entrevista unicamente consideró integrandos del tipo: inmediato, polinomios, potencias de funciones trigonométricas, productos de funciones, expresiones del tipo $\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$ y cociente de polinomios.

Cuadro No. 3

Explicación por parte de los entrevistados sobre el tipo de conocimiento que utiliza de acuerdo al tipo de integrando

Tipo de Integrando	Estudiante Matemática	Ingeniero	Matemático
Inmediato	Uso de la definición de derivada y sustitución	Regla heurística sustitución	Definición de derivada y sustitución
Polinomios	uso de la regla $\frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$	Regla heurística	uso de la regla $\frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$ y propiedades de la integral
Potencias de funciones trigonométricas	manipulación heurística y reglas: $D(\sin(x)) = \cos(x)$, $D(\cos(x)) = -\sin(x)$	Tablas de de integrales heurística	manipulación heurística y reglas derivación
Producto de de funciones	uso del modelo de integración por partes y fórmulas de recurrencia	Tablas de de integrales	manipulación heurística integración por partes, recurrencia y experticia
$\sqrt{\pm a^2 \pm x^2}$	sustitución trigonométrica	Tablas de de integrales	Transformación heurística trigonométrica y experticia
Cociente de de polinomios	Heurística y fracciones simples	Heurística y tablas de integrales	Heurística y fracciones simples

Se obtuvo a partir de la clasificación de la información suministrada por los encuestados.

Un hecho que sobresale por parte de los ingenieros, es el uso de tablas de integrales, lo cual como veremos en la próxima sección, forma parte de los algoritmos usados por el software Mathematica.

4. Metaconocimiento

Como se mencionó, uno de los principales resultados que ha permitido el desarrollo de la integración simbólica está fundamentado en el trabajo de Robert H. Risch (Risch, 1969: 167–189), en lo que sigue se presentan algunos de estos resultados.

La representación y las operaciones en computación algebraica se fundamentan en el cálculo entero, es decir, cálculo usando el conjunto de los números enteros, denotado por $\mathbb{Z}$, los cuales son representados como un arreglo de longitud variable(dependiendo de la capacidad de memoria), donde cada entrada corresponde a los dígitos en una base determinada, todas las operaciones así como el algorítmo euclídeo se pueden implementar (Hilton, 1977: 169–170). El siguiente paso es usar el mecanismo de extensión a partir de $\mathbb{Z}$, el cual es muy usado en álgebra. De esta forma, podemos extender el rango de aplicación de ciertos operadores, de un conjunto inicial, digamos A, a un conjunto más exhaustivo, denotado por $\overline{A},\ A \subset \overline{A}$. Si $\overline{a} \in \overline{A}$ entonces la igualdad y operaciones en $\overline{A}$ se definen en términos de *A*. El hecho de que $\overline{A}$ sea una extensión de *A* se justifica mostrando que *A* es isomorfo a $B,\ A \equiv B,$ para algún $B,\ B \subset \overline{A}$. Un ejemplo clásico de este tipo de construcción lo constituye la construcción del campo cociente, *Q(D)*, a partir de un dominio entero *D*, como caso particular $Q(\mathbb{Z}) = \mathbb{Q},$ el conjunto de los números racionales.

Los sistemas algebraicos computacionales se distinguen por la facilidad para procesar cálculo polinomial, esto es, el cálculo en *R[x]*, donde *R* es al menos un anillo conmutativo. Se debe recordar que los polinomios no dependen de la variable que uno usa, sino, más bien de los coeficientes. Así por ejemplo, si *R* es un campo, entonces *R[x]* es un dominio entero (dominio euclídeo). Si aplicamos la extensión polinomial a $\mathbb{Z}$ (o $\mathbb{Q}$) obtenemos $\mathbb{Z}[x]$ (o $\mathbb{Q}[x]$) el conjunto de polinomios con coeficientes enteros (o racionales). Igual se puede formar el campo cociente $Q(R[x]),$ probando que los elementos de *R* (las constantes) forman un campo.

Una extensión más ocurre cuando tenemos un campo *F y m(x)* un polinomio irreducible sobre *F*, en este caso podemos construir el conjunto cociente *F[x]/m(x)*. Precisamente lo que distingue los elementos del conjunto cociente de los de *F[x]*, es el concepto de igualdad, de esta forma, si $p, q \in F[x]/m(x)$ entonces

$$p = q \quad \Leftrightarrow \quad m|p - q.$$

El conjunto cociente es un campo, $F \subset F[x]/m(x)$, por lo tanto, constituye una extensión de *F*. En *F[x]/m(x)*, se tiene m(x) = 0, puesto que $m|m - 0$. Se puede mostrar (Ueberhuber, 1998, p. 95) que cada elemento de *F[x]/m(x)* es igual a un único polinomio de grado menor al grado de *m*.

Por otra parte si y es otra variable, además de *x*, como los coeficientes de *m(x)* son elementos de *F* y *F[x]/m(x)* es una extensión de *F*, entonces *m(y)* es un polinomio en y sobre el campo cociente, es decir, $m(y) \in (F[x]/m(x))\,[y]$ y como $m(x) = 0$ en $F[x]/m(x),$ el polinomio *m(y)* en y sobre F[x]/m(x), tiene el cero *x*, en *F[x]/m(x)*. En decir, el campo *F[x]/m(x)* tiene la propiedad de que la ecuación m = 0(que no tiene solución en *F*) tiene una solución(no necesariamente única) en *F[x]/m(x)*.

Lo anterior permite formalizar las siguientes definiciones (Ueberhuber, 1998, p. 96).

Definición 1 $\alpha \in \overline{F}$ *(una extensión de F) se dice algebraico sobre F si existe* $m \in F[x]$ *tal que* $m(\alpha) = 0.$

Si *m* se elige como un polinomio irreducible sobre *F[x]*, entonces *F[x]/m(x)* es isomorfo al subcampo más pequeño de $\overline{F}$ que contiene a F y a $\alpha,$ el cual se denota por $F(\alpha),$ esto es,

$$F(\alpha) \equiv F[x]/m(x),$$

y se obtiene por adjuntar elementos algebraicos α al campo F.

Así por ejemplo, si adjuntamos números algebráicos al campo de los números racionales, $\mathbb{Q}$, se obtiene

$$\begin{aligned} &\mathbb{Q}(\alpha_1), \\ \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2) &:= \mathbb{Q}(\alpha_1)(\alpha_2), \\ \vdots \quad &\vdots \quad \vdots \\ \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) &:= \mathbb{Q}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}(\alpha_n)), \end{aligned}$$

donde $\alpha_1, \ldots \alpha, n$ son números reales, algebraicos sobre $\mathbb{Q}$.

La extensión que se obtiene por adjuntar elementos algebráicos al campo $F = \mathbb{Q}(x)$ de las funciones racionales se llama el campo de funciones algebraicas.

La forma en que se construyen las operaciones en el campo cociente, $F[x]/m(x)$, a partir de las operaciones en el campo F, permite que los sistemas computacionales algebraicos operen en la extensión del campo, con sólo probar que pueden operar cuando se restringen a F.

Definición 2 $\alpha \in \overline{F}$ *es trascendental sobre F si*

$$p(\alpha) \neq 0, \text{ para todo } p \in F[x], \text{ esto es, } \alpha$$

no es algebraico.

Un elemento trascendental $\alpha,\ \alpha \in \mathbb{Q}$ (o en $\mathbb{Q}(x)$) se llama número trascendental(función trascendental).

Los sistemas computacionales algebraicos operan los elementos trascensdentales de manera simbólica, así π, e o funciones como $e^x, \ln x$ se tratan como si fueran "simples" variables.

La introducción de la estructura de anillos de polinomios y de campo cociente[9] permite extender el rango de aplicaciones del cálculo racional, incluyendo un número finito de expresiones trascendentales. De esta forma(Uerberhuber, 1998: 97) el campo cociente $\mathbb{Q}(\pi)(x, e^x)$, se construye a partir del anillo de polinomios en π con coeficientes en $\mathbb{Q}$, y su campo cociente $\mathbb{Q}(\pi)$ el subcampo más pequeño de $\mathbb{R}$ que contiene a $\mathbb{Q}$ y $\pi)$. En seguida, $\mathbb{Q}(\pi)(x)$, el conjunto de funciones racionales con coeficientes en $\mathbb{Q}(\pi)$. Finalmente, el anillo de polinomios en e^x con coeficientes en $\mathbb{Q}(\pi)(x)$ y su campo cociente $\mathbb{Q}(\pi)(e^x) := \mathbb{Q}(\pi)(x, e^x)$.

Desde el punto de vista computacional, el manejo de elementos trascendentales constituye un problema, al no poder reconocer identidades entre ellas, por ejemplo *e*, e^{-1} y 1. La introducción de reglas de transformación ha permitido mejorar mucho estos sistemas.

Se establece en (Ueberhuber, 1998: 98) que el conjunto de reglas de transformación:

$$\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y),$$

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y),$$

$$\exp(\log(x)) = \log(\exp(x)) = x, \quad (1)$$

es completo[10] para el conjunto de funciones elementales, es decir, si f_1, f_2 son funciones elementales dadas y $f_1(x) = f_2(x)$ para todo x, entonces ellas pueden transformarse una en la otra usando las reglas anteriores.

Como se mencionó anteriormente, podemos afirmar que las funciones elementales son obtenidas de un apropiado campo de funciones algebraicas al cual se le agregan un número finito de expresiones exponenciales logarítmicas, trigonométricas y/o hiperbólicas junto con sus inversas.

Formalmente se define una función elemental como sigue (Ueberhuber, 1998: 97–98).

Definición 3 Sea F un campo de funciones (real o compleja) de variable x y $F \subset \overline{F}$, su extensión.

9. Para un estudio de campos y extensión de campos ver: Stewart Galois *Theory*. pp. 33–68

10. La aplicación de las reglas de transformación a expresiones trascendentales siempre da expresiones equivalentes. El recíproco no siempre es cierto: si para un conjunto dado de reglas de transformación todo par de expresiones equivalentes puede transformarse una en la otra usando las reglas. Un conjunto de reglas de transformaciones es completo, si cumple el "si y sólo si".

a.) $f \in \overline{F}$ es un logaritmo sobre F si existe $g \in F$ tal que $f' = g'/g$ o equivalentemente $f = \log(g)$.

b.) $f \in \overline{F}$ es exponencial sobre F si existe $g \in F$ tal que $f'/f = g'$ o equivalentemente $f = \exp(g)$.

Denotemos $F(f)$, el subcampo más pequeño de $\overline{F}$ que contiene a F y f.

a.) $F(f)$ es una extensión elemental de F, si f es siempre algebráico, logarítmico o exponencial sobre F.

b.) $F(f)$ es una extensión trascendental de F, si f es trascendental y siempre logarítmica o exponencial sobre F.

El teorema de estructura de Risch, citado en (Ueberhuber, 1998, pp. 98) suministra un método para evaluar si una función *f*, es o no exponencial, o logarítmica sobre un campo de funciones elementales, o si f es trascendental sobre *F*, y si se cumple o no, que el conjunto de constantes en *F* y en *F(f)* es el mismo. Lamentablemente, el teorema de estructura de Risch ha sido establecido solo para funciones trascendentales, para números trascendentales constituye un problema abierto, no se conoce si dos constantes trascendentales tales como π *e* *e* son independientes (no se pueden expresar una en términos de la otra) y esto tiene implicaciones en la integración simbólica (Ueberhuber, 1998: 99), en efecto si *a y b* son números trascendentales (por ejemplo *e* y π) como no podemos probar o negar la independencia algebraica de *a y b* el agregar a y b a un campo de números algebraicos o racionales *F(a, b)* produce que el problema de la igualdad de dos elementos en *F(a, b)* es indecidible y puede conducir a dos tipos de problema, considerar todas las antiderivadas como siempre correctas o un diagnóstico incorrecto de que la *función no es integrable.*

Un ejemplo muy sencillo y que se expone en los cursos de cálculo I, lo constituyen las fracciones simples (considerado por nuestros entrevistados como regla heurística), se tiene que si *r(x)* = $(p_1(x) \cdots p_k(x))/q(x)$, entonces *q* admite la siguiente representación sobre *C*

$$q = (x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}\cdots(x-a_k)^{n_k}, \quad a_1, \ldots a_k \in \mathbf{C},$$

la función racional *r* se escribe

$$r = \sum_{i=1}^{k} \frac{p_i(x)}{(x-a_i)^{n_i}},$$

donde cada p_i es un polinomio de grado menor a n_i. Si se representa $p_i(x)$ en la base de polinomios $\{1, x-a_i, \ldots, (x-a_i)^{n_i-1}\}$,

$$p_i = \sum_{j=0}^{n_i-1} b_{i,j}(x-a_i)^j,$$

y se obtiene

$$r(x) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i-1} \frac{b_{i,j}}{(x-a_i)^{n_i-j}},$$

lo cual se puede integrar facilmente

$$\int r(x)dx = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i-2} \frac{b_{i,j}}{(j+1-n_i)(x-a_i)^{n_i-j-1}} + \sum_{i=1}^{k} b_{i,n_i-1}\log(x-a_i).$$

Es decir, el resultado de la integral original se parte de manera natural en dos, la suma de términos racionales y la suma de términos logarítmicos.

Los sistemas de cálculo simbólico, no procesan la integral de funciones racionales usando fracciones simples, más bien utilizan la técnica de extensión de campos para obtener el resultado, el siguiente ejemplo ilustra esta situación (Ueberhuber, 1998, p. 102). La integral

$$\int \frac{dx}{x^3+x} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right),$$

se obtiene por adjuntar a $\mathbb{Q}(x)$ la función trascendental log $\left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)$.

Cuando uno integra funciones elementales o racionales, parece notar cierta similitud entre la forma del integrando y la forma de su antiderivada, lo cual lo confirman nuestros entrevistados, cuando mencionan que algunos patrones en la forma del integrando se repiten, por ejemplo con las funciones trigonométricas. Se menciona en (Ueberhuber, 1998: 101),

> *"si un integrando contiene ciertos tipos de funciones (racionales, algebraicas, etc), la correspondiente integral indefinida puede ser expresada en términos de estas funciones y combinaciones lineales de logaritmos de estas funciones."*

Precisamente la relación existente entre ambas partes de la integral, se formaliza en el siguiente teorema (Ueberhuber, 1998, p. 105).

Teorema (Principio de Liouville)

Sea $\mathcal{F}$ un campo de funciones y denotemos por $\mathcal{K}$ el campo de constantes contenido en $\mathcal{F}$. Asuma que la función $f \in \mathcal{F}$ tiene una antiderivada $g \in \mathcal{G}$, esto es, $f = g'$, donde $\mathcal{G}$ es una extensión elemental del campo $\mathcal{F}$, con el mismo campo de constantes $\mathcal{K}$. Entonces, la función f es de la forma

$$f = v_0' + \sum_{i=1}^{n} c_i \frac{v_i'}{v_i},$$

donde $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathcal{K}$ y $v_0, v_1, \ldots, v_n \in \mathcal{F}$.

El teorema permite resolver el problema de integración, para todas estas funciones *f* de manera muy sencilla, en efecto,

$$g(x) = \int f(x)dx = v_0 + \sum_{i=1}^{n} c_i \log(v_i),$$

de modo que la antiderivada se reconstruye a partir de la forma de la función *f*.

Por ejemplo,

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) = -\frac{\imath}{2} \log\left(\frac{x+\imath}{x-\imath}\right),$$

la primera igualdad es la que usualmente se enseña en los cursos de cálculo (la regla), la segunda igualdad es una aplicación directa del principio de Liouville.

La posibilidad de construir una extensión de un campo, ha permitido dar un procedimiento algorítmico para el cálculo de integrales, al menos de funciones elementales (Ueberhuber, 1998, pp. 105–106)

"El primer paso computacional cuando se integra una función elemental f es la determinación del campo de constantes $\mathcal{K}$ y la extensión de funciones elementales

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x),$$

tal que

$$f \in \mathcal{K}(x, f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$

El teorema de estructura de Risch se usa para determinar si una función elemental $f_i(x)$ $i = 1, \ldots, n$ es trascendental o algebraica sobre $\mathcal{K}(x, f_1(x), \ldots, f_{i-1}(x))$.

La naturaleza recursiva de la definición de $\mathcal{K}(x, f_1(x), \ldots, f_n(x))$,

$$\mathcal{K}(x, f_1(x), \ldots, f_i(x)) :=$$

$$\mathcal{K}(x, f_1(x), \ldots, f_{i-1}(x))(f_i(x)), \quad i = 1, \ldots, n,$$

sugiere el método general para integrar funciones elementales, por la aplicación recursiva del siguiente módulo, el cual tiene la siguiente tarea: para todo campo F de funciones elementales, toda función g, la cual es elemental sobre F y toda función f_g contenida en la extensión $F(g)$, el módulo siempre:

a. Resuelve directamente el problema de integración simbólica para f_g.

b. Determina que la integral indefinida de f_g no es elemental, o

c. reduce el problema de integrar f_g, a un número finito de problemas de integración simbólica que involucra funciones en F.

El algoritmo aplica este modulo recursivamente a $f \in \mathcal{K}(x, f_1(x), \ldots, f_n(x))$ y termina después de un número finito de pasos. Este siempre da una respuesta efectiva o reduce el problema a un número finito de problemas de integración que involucran integrandos racionales."

La búsqueda por mejorar este algoritmo se mantiene y se cita en (Ueberhuber, 1998, p. 106) los trabajos de Trager, Davenport y Bronstein's (Ueberhuber, 1998: 106–107), siendo la obra de este último *Symbolic Integration I-Transcendental Functions*, la que mejor expone el estado actual de los métodos de integración simbólica para funciones elementales.

Por ejemplo, al aplicar el algoritmo a la integral

$$\int \frac{-e^{-x} - x + \ln(x)x + \ln(x)xe^{x}}{x(e^{x} + x)^2} dx,$$

considerando la extensión $\mathbb{Q}(x)(\alpha_1, \alpha_2)$, donde $\alpha_1 = e^x$ y $\alpha_2 = \ln(x)$ permite obtener después de un número finito de pasos, el resultado

$$\int \frac{-e^{-x} - x + \ln(x)x + \ln(x)xe^{x}}{x(e^{x} + x)^2} dx =$$

$$\left(\frac{-1}{\alpha_1 + x}\right)\alpha_2 = \frac{-\ln(x)}{e^x + x}.$$

Finalmente siendo el software mathematica uno de los más completos para realizar cálculo simbólico, me di a la tarea de accesar el "centro de cálculo"[11] y se incluye o muestra la siguiente lista de algorítmos http://www. wri.com/.

Cuadro No. 4

Centro de cálculo Mathematica

Caso	**Algorítmo**
Integrales indefinidas	Una versión extendida del algorıtmo de Risch, el cual es usado cuando la integral puede ser expresada en términos de funciones elementales.
Otras integrales indefinidas	Simplifcación heurística en concordancia con los modelos. El algorıtmo cubre todas las integrales indefinidas que usualmente aparecen en los libros de texto tal como Gradshteyn–Ryshik

Tomado del centro de cálculo: `http://www.wri.com/`

11. Nombre con el que el los creadores del software Mathematica, se refieren a los algorítmos encargados de la integración simbólica y numérica

Confirmando lo efectivo que ha resultado el uso del algorítmo de Risch y la importancia que tiene la búsqueda heurística para el diseño de sistemas expertos para la obtención de primitivas. Aun así, encontramos integrales que Mathematica no puede resolver eficientemente, tal es el caso de la integral $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3+x+1}$,

cuya respuesta usando Mathematica 5.0, es

```
RootSum[1+#1+#1^3&Log[x-#1]/(1+3#1^2)&]*,
```

esta forma de presentar la primitiva nos indica que debemos sumar todos los términos de la forma,

$$\frac{\log[x-t]}{1+3t^2}, \qquad (\clubsuit)$$

donde t representa los ceros de la ecuación $t^3+t+1=0$, observe que esto es consecuencia del teorema de Liouville, y corresponde a la aparición de términos logarítmicos. Precisamente usando el comando Solve, encontramos los tres ceros

$$-\frac{(1\pm\imath\sqrt{3})(\frac{1}{2}(-9+\sqrt{93}))^{1/3}}{23^{2/3}}+\frac{1\mp\imath\sqrt{3}}{2^{2/3}(3(-9+\sqrt{93}))^{1/3}},$$

$$-\left(\frac{2}{3(-9+\sqrt{93})}\right)^{1/3}+\frac{\frac{1}{2}(-9+\sqrt{93}))^{1/3}}{3^{2/3}},$$

que ponen de manifiesto la complejidad de la primitiva, efectivamente, la antiderivada es el resultado de sustituir en $(\clubsuit)$ los ceros y sumar los tres términos correspondientes, ¡sin olvidar sumar la constante de integración!

5. CONCLUSIONES

Las principales conlusiones se pueden resumir en:

- El uso de tablas es frecuente por parte de los estudiantes y más frecuente por parte de los ingenieros, los matemáticos las usan con menos frecuencia, incluyendo sistemas como Mathematica.
- El estudiante de matemática es más formal, usualmente requiere del uso de la definición ya sea de integral o de de derivada, necesita manejar las técnicas y reglas de transformación.
- El matemático por su parte utiliza una alta dosis de experiencia (experticia).
- La búsqueda heurística de primitivas, requiere conocer las técnicas, intuición y experticia.
- Un sistema experto con estas características es demasiado expansivo (computacionalmente hablando).
- El teorema de estructura de Risch, que da origen al algoritmo de Risch junto con el principio de Liouville, permiten obtener algoritmos bastante eficientes, al menos para la clase de funciones elementales.
- Finalmente, resulta interesante investigar sobre el problema de la igualdad de dos elementos en $\mathcal{F}(a,b)$, donde *a, b* son números trascendentales y las posibles consecuencias que esto presenta para la integración simbólica.

6. BIBLIOGRAFIA

Hilton, P. and Wu Yel-C. (1977). *A course in Modern Algebra*. New York: John Wiley& Sons.

Krommer, Arnold and Ueberhuber, C. (1998). *Computational Integration*. Philadelphia: Siam.

Penney, E. (1994). *Cálculo con Geometría Analítica* México: Prentice Hall.

Risch, R. H. (1969). *The problem of integration in finite terms*, Trans. Amer. Math.Soc. 38 , pp 167–189.

Stewart, I. (1973). *Galois Theory*. Chapman and Hall, 1973.

http://www.wri.com/, Symbolic and Algebraic Computation (SAC).

http://www.symbolicnet.org/

ANSI/IEEE Std 100, 1984

7. ANEXO

Integración Simbólica

- PROBLEMA DE INTEGRACIÓN SIMBÓLICA

El problema de Integración Simbólica lo podemos resumir en: "Para dos clases dadas de funciones reales o complejas $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ el problema de integración asociado, es encontrar un algoritmo, el cual para todo $f \in \mathcal{F}$, siempre calcule una antiderivada $g \in \mathcal{G}$ de f (es decir $g' = f$) o pruebe que no existe el elemento *g*".
El problema ya ha sido resuelto, al menos parcialmente, de hecho existen en el mercado diversos programas, tales como MATHEMATICA Y MATLAB. Mathematica utiliza el comando **Integrate[f[x],x]** para encontrar la antiderivada (primitiva) de *f(x)*, con resultados vastantes sorprendentes. Es por esto que resulta interesante llegar a conocer algunas de estas reglas y los algorítmos que ellas conllevan.

Definición: De acuerdo con ANSI/IEEE Std 100–1984, la heurística trata de métodos o algoritmos exploratorios durante la resolución de problemas en los cuales las soluciones se descubren por la evaluación del progreso logrado en la búsqueda de un resultado final. Se suele usar actualmente como adjetivo, caracterizando técnicas por las cuales se mejora en promedio el resultado de una tarea resolutiva de problemas (parecido al uso de "método óptimo").

- INSTRUCCIONES

Responda con todo detalle las siguientes preguntas, puede citar sus experiencias, así como teoremas que respalden sus respuestas.

- CUESTIONARIO

(1.) Al resolver la integral $\int x dx$, ¿utiliza usted alguna regla heurística o recurre a un análisis formal para su solución?

(2.) Cuando resuelve $\int 4x^3 dx$; ¿usa alguna regla heurística o recurre a un análisis formal, por ejemplo mediante sumas de Riemann, en el caso de integral definida?

(3.) ¿Utiliza usted la regla

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \qquad n \neq -1$$

cuando tiene que resolver una integral que involucre este tipo de integrandos?

(4.) ¿Al resolver $\int \sin(x) dx$ utiliza usted alguna regla heurística o un análisis formal?

(5.) ¿El método que usted usa y plantea en la respuesta a la pregunta anterior le sirve para resolver $\int \sin(ax+b)dx,\ a, b \in I\!R$?

(6.) ¿Qué nos puede decir en el caso de $\int \cos(ax+b)dx,\ a, b \in I\!R$?

(7.) ¿Y en el caso de $\int \tan(ax+b)dx,\ a, b \in I\!R$?

(8.) ¿Al resolver

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$$

utiliza usted alguna regla heurística o un análisis formal?

(9.) ¿Al resolver $\int x\cos(x)dx$ utiliza usted alguna regla heurística o un análisis formal?

(10.) ¿Cuando usted resuelve $\int \sin^3(x)\cos^3(x)dx$, utiliza alguna regla heurística o un análisis formal?

(11.) ¿Al resolver $\int \sqrt{x^2-4}dx$ utiliza usted alguna regla heurística o un análisis formal?

(12.) ¿Conoce usted alguna regla heurística para resolver

$$\int \frac{x+1}{x(x-2)(x+3)}dx \ ?$$

(13.) ¿Conoce usted la regla recurrente

$$\int \sin^n(\alpha)d\alpha = -\frac{1}{n}\sin^{n-1}(\alpha)\cos(\alpha)+$$

$$\frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}(\alpha)d\alpha, \ n \in I\!N \ ?$$

(14.) ¿Conoce usted alguna regla heurística para resolver

$$\int u^n \cos(u)du, \qquad n \in I\!N?$$

(15.) ¿Conoce usted la regla recurrente[12]

$$\int \frac{u^n}{\sqrt{2au-u^2}}du = -\frac{u^{n-1}}{n}\sqrt{2au-u^2}+$$

$$\frac{(2n-1)a}{n}\int \frac{u^{n-1}}{\sqrt{2au-u^2}}du, \ n \in I\!N \ ?$$

(16.) ¿Conoce usted alguna regla heurística para resolver

$$\int \frac{\sin(x)}{x}dx \quad ?$$

(17.) ¿Qué tan frecuentemente usa las tablas de integrales que aparecen en los libros de texto, tales como las sugeridas en las preguntas (13.) y (15.)?

- Bibliografía

1 Krommer, Ueberhuber. *Computational Integration Siam*, 1998.

2 Edwards, Penney. *Cálculo con Geometría Analítica* Prentice Hall, 1994

cmuLATEX.........
1/06/2008

12. En la mayoría de los libros de Cálculo diferencial e Integral aparecen en los apendices listas de reglas de integración, algunas muy amplias, en particular esta fue tomada de Edwards, *Cálculo con Geometría Analítica*. 1994