



Herramientas de análisis de libros de texto para la formación matemática de docentes

Tools for the Analysis of Textbooks for Mathematics Teacher Education

Volumen 26, Número 1
Enero - Abril
pp. 1-29

Encarnación Sánchez Jiménez

Citar este documento según modelo APA

Sánchez Jiménez, Encarnación. (2026). Herramientas de análisis de libros de texto para la formación matemática de docentes. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 26(1), 1-29. <https://doi.org/10.15517/x9ygyh87>

Herramientas de análisis de libros de texto para la formación matemática de docentes

Tools for the Analysis of Textbooks for Mathematics Teacher Education

Encarna Sánchez Jiménez¹

Resumen: Este trabajo tiene como propósito demostrar la pertinencia de las herramientas teóricas y metodológicas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), en el campo de la historia de la educación matemática, para el análisis de libros de texto, en particular, los escritos para la formación matemática de las futuras personas maestras. La investigación sobre la historia de las disciplinas no puede prescindir de la investigación sobre los libros de texto: cuando dicho estudio afecta a las instituciones de formación del magisterio, se precisan herramientas para analizar en los libros la matemática a enseñar y la matemática para enseñar. Las herramientas teóricas y metodológicas de la TAD han venido empleándose para la investigación sobre manuales escolares en el ámbito de la didáctica de la matemática. Aquí se argumenta su adecuación al ámbito específico de la historia, a partir de las investigaciones llevadas a cabo en la Universidad de Murcia (España) durante las dos últimas décadas. Estos ejemplos permiten extraer algunas conclusiones. Una es que la perspectiva social e institucional de la TAD, y su carácter científico, le proporcionan a la persona investigadora instrumentos y nociones especialmente adaptados al análisis de libros de texto, no solo en el ámbito didáctico, sino también en el histórico. Otra es que, cuando se trata de libros para la formación docente, es preciso considerar la dialéctica entre las dos instituciones de referencia, la institución de formación del profesorado y la escolar, acerca de los contenidos en juego.

Palabras clave: historia, educación matemática, libros de texto, formación docente.

Abstract: This paper aims to demonstrate the relevance of the theoretical and methodological tools of the Anthropological Theory of the Didactic (ATD) in the field of the history of mathematics education, particularly for the analysis of textbooks written for the mathematical education of prospective teachers. Research on the history of disciplines cannot dispense with research on textbooks. When such research focuses on teacher education institutions, specific tools are needed to analyse the mathematics to be taught and the mathematics for teaching as they are presented in textbooks. The theoretical and methodological tools of the ATD have been widely used in research on school textbooks within the field of mathematics education. Here, we argue for their suitability in the specific domain of historical research, drawing on studies conducted at the University of Murcia (Spain) over the last two decades. These examples allow us to draw several conclusions. One is that the social and institutional perspective of the ATD, together with its scientific character, provides researchers with concepts and analytical tools particularly well suited to textbook analysis, not only in the didactic domain but also in the historical one. Another is that, when dealing with textbooks for teacher education, it is necessary to consider the dialectic between the two reference institutions — teacher education institutions and schools — with regard to the content at stake.

Key Words: history, mathematical education, teacher training, textbook.

¹ Universidad de Murcia, Murcia, España. Orcid <https://orcid.org/0000-0001-5689-366X>

Dirección electrónica: esanchez@um.es

Ensayo recibido: 14 de julio, 2025

Enviado a corrección: 9 de octubre, 2025

Aprobado: 15 de diciembre, 2025

1. Introducción

La historia de una disciplina no se reduce a la de los manuales o libros de texto utilizados para su enseñanza, como señala –citando a Dominique Julia– Antonio Viñao, quien resalta la relación entre la investigación sobre manuales y aquella sobre historia de las disciplinas:

Aun manteniendo, como campos de investigación, una relativa autonomía, la historia, el análisis de los libros de texto y del material de enseñanza como productos pedagógicos y culturales solo adquiere un sentido histórico pleno cuando se inserta en el ámbito, más amplio, de la historia de las disciplinas. (Viñao, 2012, p. 113).

Esta visión es compartida por las personas investigadoras en el ámbito de la educación matemática, quienes consideran que los libros son elementos fundamentales para conocer la evolución de una disciplina (Chaachoua y Comiti, 2010; Karp, 2014; Valente, 2008).

Cuando se trata de libros para las instituciones de formación de enseñantes, la investigación en historia de la educación matemática ha de ocuparse de la *matemática a enseñar*, la que tiene como referencia las disciplinas científicas y es objeto de enseñanza del personal docente; sin embargo también debe ocuparse de la *matemática para enseñar*, es decir, de los saberes propios de la cultura profesional del futuro personal docente, los cuales constituyen las herramientas de trabajo de la persona docente que enseña matemáticas. Para caracterizar históricamente esta matemática para enseñar, Valente (2019) señala como fuentes privilegiadas los programas de enseñanza y los libros, sobre todo textos innovadores, entre los que diferencia los destinados para uso del alumnado y los escritos para el profesorado, cuyo objetivo es la planificación de la actividad pedagógica. Aunque este investigador propone llamar ‘manual escolar’ a ambos tipos de libro, aquí emplearemos junto a esa denominación la de ‘libro de texto’, esta última sobre todo para aquellos que intentan responder al programa de una asignatura.²

En cuanto al contenido de los libros, se requiere disponer de herramientas específicas, apropiadas para la investigación en historia de la educación matemática. No obstante, el

² Cuando se trata de las instituciones de formación de docentes, hay libros que se escriben para utilizar en dichas instituciones, pero que no responden al programa de una asignatura concreta y se usarían, más bien, como bibliografía complementaria. Por ejemplo, el libro *Aritmética Intuitiva*, de Eyaralar (1932), se escribió y publicó cuando estaba en vigor el plan de estudios de 1931, en el que no existía una asignatura de aritmética como tal, solo la asignatura Metodología de la Matemática. No obstante, su autor, profesor normalista, era consciente de la necesidad de abordar con los futuros docentes un análisis epistemológico y didáctico de la matemática – y, en particular, de los contenidos aritméticos – que sus alumnos habrían de enseñar en la escuela primaria (Sánchez-Jiménez y Carrillo, 2018), y por ello realiza una reelaboración de su obra *Nuevo Tratado de Aritmética* (1924), publicado diez años antes.

análisis de libros de texto en historia de la educación matemática no puede limitarse a un análisis del contenido matemático; por el contrario, como objeto cultural (Choppin, 2004, citado en Valente, 2008) que se ha de ocuparse también de la influencia de los factores institucionales y del contexto sociopolítico en la matemática a enseñar y en la matemática para enseñar:

Rompendo com a análise estritamente interna dos conteúdos matemáticos desses livros, o historiador da educação matemática buscará enredá-lo numa teia de significados, de modo a que ele possa ser visto e analisado em toda a complexidade que apresenta qualquer objeto cultural³. (Valente, 2008, p. 159)

El interés de observar las circunstancias en las que se ha escrito un libro ha sido señalado por Karp (2014), quien afirma que “one has to understand the conditions in which one or another text was written, and only by relying on such an understanding can one formulate one’s hypotheses”⁴ (p. 16). Y añade que un estudio “unencumbered by considerations about the era in which these textbooks were used, can possess a certain value, but only, unfortunately, as a preliminary step. Subsequently, the researcher will need to try to understand why these changes took place”⁵ (p. 16).

El objetivo de este trabajo es poner de manifiesto que la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) proporciona herramientas teóricas y metodológicas de gran utilidad para el análisis de libros y manuales, no solo en el ámbito de la didáctica de la matemática, sino también en el seno de la historia de la educación matemática.

A continuación se exponen los fundamentos y las principales herramientas de la TAD a partir de su uso en el análisis de libros de texto. Seguidamente se ofrece un recorrido por la labor investigativa desarrollada en la Universidad de Murcia en el campo de la historia de la educación matemática, mediante el énfasis en investigaciones que conllevan el estudio de manuales. En el último apartado se destacan algunos puntos en los que coincide la perspectiva de la persona historiadora con la de la didacta, a la vez que otros más específicos de aquella. Asimismo, se describe, a modo de ejemplo, una investigación histórica que compara el tratamiento de un mismo objeto matemático –la enseñanza del sistema de numeración– en

³ Rompiendo con el análisis estrictamente interno del contenido matemático de estos libros, el historiador de la educación matemática tratará de entrecruzarlo en una red de significados, para que pueda ser visto y analizado en toda la complejidad que presenta cualquier objeto cultural.

⁴ “Hay que comprender las condiciones en las que se escribió uno u otro texto, y solo basándose en esa comprensión se pueden formular hipótesis”.

⁵ “[...] libre de consideraciones sobre la época en que se utilizaron estos libros de texto, puede poseer cierto valor, pero solo, por desgracia, como paso preliminar. Posteriormente, el investigador tendrá que tratar de entender por qué se produjeron esos cambios”.

dos libros para la formación del magisterio primario escritos en el primer tercio del siglo XX: *Nuevo Tratado de Aritmética* (Eyaralar, 1922) y *Aritmética Intuitiva* (Eyaralar, 1932).

2. Desarrollo del tema

2.1 Proposición

Igual que ocurre en educación matemática, la investigación en historia de la educación matemática requiere observar y estudiar la realidad desde un marco teórico y metodológico. Este marco que configura nuestra forma de mirar las fuentes, incluso el tipo de fuentes consideradas, es el que va a determinar la interpretación de los fenómenos analizados y la propia construcción de esos fenómenos.

Corine Castela (2017) destaca tres rasgos que caracterizan la TAD: el *carácter social* de los fenómenos investigados, el *modelo praxeológico* como base para el análisis de las conductas humanas, y una *perspectiva institucional y epistemológica* del proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Dicho de otro modo, Chevallard (2019) considera que cualquier conocimiento, matemático o no, es una producción humana –de ahí la perspectiva antropológica que adopta para investigar los fenómenos relativos a la enseñanza y aprendizaje de esta disciplina– y además, su uso y su funcionamiento están íntimamente relacionados con la institución en la que se enseña y se aprende, o en la que se utiliza.

En la TAD el concepto *institución* se entiende como “una organización social estable en el seno de la cual se realizan ciertas actividades sociales, bajo ciertas restricciones; los participantes en dichas actividades tienen que convertirse en sujetos de la institución” (Castela, 2017, p. 10). Este concepto puede referirse también a un cierto subsistema educativo: el significado de un objeto matemático dependerá de la institución en la que se use o se estudie, y puede ser distinto en cada una de ellas. Este carácter institucional es un rasgo caracterizador de la TAD, la cual se enfoca, principalmente, en los saberes matemáticos y de didáctica de las matemáticas compartidos socialmente por la institución o subsistema educativo objeto de estudio, en lugar de centrarse en aspectos cognitivos e individuales.

Mostraremos cómo la combinación del enfoque *praxeológico* y el enfoque *ecológico* propios de la TAD ayudan a entender mejor las condiciones y restricciones que imponen los diversos contextos desde los que se ha ido configurando la matemática en los libros para la formación del profesorado.

2.2 Argumentos para la discusión

2.2.1. La Teoría Antropológica de lo Didáctico. Análisis praxeológico

La TAD postula que las actividades matemáticas y didácticas, como toda actividad humana, pueden modelarse mediante la noción de *praxeología*, la cual combina dos componentes: la praxis, que hace referencia a la práctica; y el *logos* o componente teórico. Dicha noción de praxeología estudia las condiciones que favorecen o impiden su existencia en un cierto ambiente institucional (Chevallard, 2019).

Una praxeología se origina a partir de alguna cuestión problemática. Al especificarla y explicarla surgen o, más bien, se construyen las tareas o tipos de tareas, y la praxeología asociada, que es una construcción institucional. Por tanto, los elementos de una praxeología son relativos a la institución en la que ocurre el proceso de estudio. Para la TAD, toda actividad humana se divide en *tareas* (t) pertenecientes a un cierto *tipo de tareas* (T). Cuando en una institución hay que realizar habitualmente tareas de un tipo, se acaba desarrollando una cierta manera de realizar ese tipo de tareas; es decir, una *técnica* (τ) para el tipo de tareas que se institucionalizará a mediano plazo. El bloque compuesto por el tipo de tareas y una técnica para realizarlas, no necesariamente algorítmica o pseudoalgorítmica, se denomina bloque práctico o práctico-técnico $[T, \tau]$ de la praxeología, o sea, la parte relativa a la praxis o 'saber hacer'. La *tecnología* relativa a dicha técnica es el discurso que produce, justifica y explica la técnica. Y en un nivel superior de justificación, está la *teoría* que, junto con la tecnología, forma el componente teórico de la praxeología $[\theta, \Theta]$, la parte correspondiente al 'saber'.

Desde la perspectiva praxeológica, el estudio de la práctica matemática y de su descripción y justificación son dimensiones que no pueden abordarse por separado. Una praxeología u *organización matemática* (OM) se compone de los cuatro componentes descritos $[T, \tau, \theta, \Theta]$.

Hay que advertir que estas nociones son relativas a la institución. Una técnica puede existir en una institución y no en otra; por ejemplo, ciertas técnicas de cálculo abreviado que debían formar parte del equipamiento técnico de cualquier estudiante en la escuela primaria de hace décadas ya no se estudian en la primaria actual.

Además, el papel de los elementos que constituyen la praxeología tampoco es el mismo, sino que depende de la institución. Así, un objeto matemático que forma parte de una técnica en una institución cambia su papel en otra. Para ejemplificar, una relación entre variables puede formar parte de una técnica para resolver un tipo de tareas (cálculo de áreas de figuras planas) en la escuela primaria, pero en la institución de formación del magisterio su función

puede ser la de formar parte de una tarea en la que se piden los ámbitos y problemas en los que dicha relación puede funcionar como modelo o técnica de resolución.

Según su complejidad existe una organización jerárquica en las praxeologías: las *puntuales* implican un solo tipo de tareas; cuando se agrupan varias praxeologías puntuales con diferentes técnicas que pueden, no obstante, justificarse mediante una misma tecnología dan lugar a una praxeología *local*, estas se agrupan formando praxeologías *regionales* que comparten una teoría común y, por último, en las praxeologías *globales* intervienen varias teorías (Chevallard, 1999).

Analizar una propuesta para llevar a cabo un proceso de estudio precisa diferenciar entre la organización o praxeología matemática, es decir, la que modela los conocimientos en juego; y la *organización o praxeología didáctica*, la que posibilita el estudio de esos conocimientos. Lo anterior es así tanto si los conocimientos objeto de estudio son de naturaleza matemática como si son de naturaleza didáctica (Artaud, 2019). Una praxeología didáctica consta de los mismos componentes: un componente práctico, que forma la tarea y la técnica didácticas; y el *logos*, que comprende dos niveles de justificación, la tecnología y la teoría. Tenemos, de nuevo, una cuaterna $[T_D, \tau_D, \theta_D, \Theta_D]$.

Además, para describir los procesos de estudio contamos con el modelo de los *momentos didácticos* o momento del estudio. Chevallard (1999, 2001, 2002b) estructura el proceso de estudio definiendo seis momentos: el momento del *primer encuentro* con la organización matemática o encuentro con un cierto tipo de tareas; el *momento de la exploración* de ese tipo de tareas y de la construcción de una técnica para abordarlas; el momento de la *construcción del entorno tecnológico-teórico* relativo a esa técnica; el cuarto momento es el del *trabajo de la técnica*, que no se limita a la práctica de la técnica generada, sino que conlleva cuestionarla y, probablemente, crear, a partir de ella, una nueva técnica cuyo uso pueda extenderse a otros problemas; el quinto es el *momento de la institucionalización* de la organización matemática elaborada; por último, el *momento de la evaluación* se refiere a la evaluación de la OM generada. En definitiva, “los momentos del estudio proporcionan así una infraestructura funcional que permite dar cuenta de las organizaciones existentes del estudio y revelar fenómenos didácticos” (Artaud, 2011, p. 161)

Esta estructuración no supone una secuencia temporal, los momentos hacen referencia a una realidad funcional más que cronológica –suelen darse varias veces a lo largo del proceso–. En realidad, se refieren a situaciones que se dan siempre en el estudio de cualquier

organización matemática, aunque no en todos los casos del mismo modo y con la misma intensidad, lo que los caracteriza son los 'gestos' del estudio (Chevallard, 2001).

Estos gestos (Chevallard, 2019) son parte de las técnicas y de las tecnologías didácticas (una técnica didáctica puede venir caracterizada por un dispositivo, material o no, y unos gestos que informan acerca del uso de tal dispositivo). Identificarlos e interpretarlos en los libros escritos para las instituciones de formación del profesorado contribuye a precisar la *matemática a enseñar* y también la *matemática para enseñar*, la que constituye el conocimiento profesional de quienes se dedican a la docencia. Sin embargo, para interpretar esa matemática para la enseñanza hay que atender también su dimensión ecológica.

2.2.2. La Teoría Antropológica de lo Didáctico. Análisis ecológico

El análisis *ecológico* de lo didáctico es el estudio de las relaciones y de las interacciones entre los fenómenos didácticos y los entornos en los que tienen lugar. Se propone pues, reconocer las condiciones que favorecen ciertas prácticas matemáticas en una institución concreta, así como las restricciones institucionales que las dificultan o las impiden. Desde esta perspectiva se plantean cuestiones acerca de los libros de texto, como ¿por qué están estructurados de un modo u otro?, ¿por qué la selección de contenidos? y, por supuesto, las influencias que hayan podido recibir.

La problématique écologique se présente, d'emblée, comme un moyen de questionner le réel. Qu'est-ce qui existe, et pourquoi? Mais aussi, qu'est-ce qui n'existe pas, et pourquoi? Et qu'est-ce qui pourrait exister? Sous quelles conditions? Inversement, étant donné un ensemble de conditions, quels objets sont-ils poussés à vivre, ou au contraire sont-ils empêchés de vivre dans ces conditions?⁶ (Artaud 1998, citado en Bourgade et al., 2021, p. 169)

Las condiciones que influyen sobre el tipo de tareas didácticas que se pueden plantear y abordar y, por tanto, facilitan o limitan la existencia de ciertas organizaciones matemáticas y didácticas en las instituciones formadoras del magisterio primario en un periodo establecido, se sitúan con frecuencia en niveles más genéricos que el disciplinar. Chevallard propone una *escala de codeterminación didáctica* (Bosch, 2010). Tomando como referencia el nivel

⁶ Desde el principio, la cuestión ecológica se presenta como un medio para cuestionar la realidad. ¿Qué existe, y por qué? Pero también, ¿qué no existe, y por qué? ¿Y qué podría existir? ¿En qué condiciones? A la inversa, dadas unas condiciones, ¿qué objetos se ven impulsados a vivir o, por el contrario, se ven impedidos de vivir en esas condiciones? (Artaud 1998, citado en Bourgade et al., 2021, p. 169).

disciplinar, en este caso las matemáticas, este autor considera subniveles de mayor especificidad relativos a la estructuración de las organizaciones matemáticas, como sector, ámbito y tema, hasta llegar al estudio de una cuestión concreta. También contempla otros niveles superiores, menos específicos, que hemos de incluir en una investigación, puesto que interaccionan con los niveles inferiores. Estos son: *Pedagogía*, *Escuela*, *Sociedad* y *Civilización*. El nivel *pedagógico* se refiere a cuestiones que afectan a la enseñanza y el aprendizaje de todas las disciplinas, no solo la matemática. El *escolar* es el relativo a la manera en la que una institución organiza la enseñanza y lo que docentes y discentes podrán hacer o no. Los niveles correspondientes a la *sociedad* y la *civilización* tienen que ver con el modo de interpretar las matemáticas o de concebir la función de las matemáticas y de la institución escolar en esos niveles. En cada uno de los niveles, las organizaciones matemáticas y las organizaciones didácticas se van a ver influidas por condiciones y restricciones recíprocas (Chevallard, 2002a).

La importancia que ejercen los niveles más generales se pone de manifiesto si se tiene en cuenta que entre las restricciones existentes en los diferentes niveles de generalidad se encuentran las derivadas de la epistemología y de la pedagogía dominantes. Reconocerlas es una de las funciones del análisis ecológico (Barquero et al., 2013).

2.2.3. Fines del análisis de libros históricos para la formación del magisterio

En este apartado se muestran algunos ejemplos en los que el análisis de manuales se ha efectuado con herramientas de la teoría antropológica. Nos centramos en trabajos realizados en la Universidad de Murcia por profesorado investigador perteneciente al área de Didáctica de la Matemática y vinculado al Centro de Estudios sobre la Memoria Educativa (CEME) que trabajamos en historia de las disciplinas, concretamente en historia de la educación matemática (Carrillo et al., 2020; González y Sánchez-Jiménez, 2021). Ligada a esta línea de estudio está la investigación sobre libros de texto o manuales escolares. Mantenemos relación con un grupo de investigación en historia de la educación, liderado en su origen por el profesor Antonio Viñao y somos conscientes tanto de la necesidad de utilizar el método histórico en nuestra investigación, como de incorporar herramientas teórico-metodológicas propias de nuestra disciplina.

La línea de investigación en Historia de la Educación Matemática (HEM) en nuestra universidad fue iniciada por Dolores Carrillo (Madrid et al., 2023), con la publicación de un artículo en el que analizaba la codeterminación entre las organizaciones matemáticas y las

organizaciones didácticas en la propuesta de enseñanza mutua de Pestalozzi (Carrillo, 2004). Esta investigación culminó con su tesis doctoral sobre la formación de las maestras y los maestros en aritmética durante el segundo tercio del siglo XIX, periodo que coincidió con la primera etapa de las Escuelas Normales⁷. El objetivo de dicha investigación era desentrañar los factores que han condicionado la constitución de la aritmética como disciplina en los primeros centros de formación de maestros de España” (Carrillo, 2005, p. XXI).

Otras personas, la primera yo misma, hemos transitado por la senda que ella abrió, y que dio lugar a mi trabajo de doctorado (Sánchez-Jiménez, 2015) codirigido por esta profesora y por Antonio Viñao, y que, de algún modo, continuaba el suyo sobre la formación matemática de los maestros en España en otro periodo significativo: del primer tercio del siglo XX hasta la Guerra Civil.

La tesis de Josefa Dólera (2022), codirigida por Dolores Carrillo y por mí misma, se centra en la figura de Pedro Puig Adam y la enseñanza de la matemática en el bachillerato desde la última década del periodo escolanovista, interrumpido por la Guerra Civil, hasta la muerte de este profesor en 1960. En ella se analizan libros dirigidos a la formación continua del profesorado de secundaria.

En estos trabajos y en otros realizados durante este periodo (Carrillo y Espín, 2023; Carrillo et al., 2020; Dólera y Sánchez-Jiménez, 2019, 2024; Sánchez-Jiménez, 2020a, 2020b; Sánchez-Jiménez y Carrillo, 2018; Sánchez-Jiménez et al., 2020; Sánchez-Jiménez y Dólera, 2023a, 2023b) se han analizado manuales, la mayoría de ellos para la formación del profesorado, aplicando el método histórico en combinación con las herramientas de la TAD.

En casi todos ellos se han comparado obras seleccionadas según diferentes criterios no excluyentes, con base en las características o la finalidad de la investigación. A continuación, comentamos brevemente algunas de las investigaciones desarrolladas, agrupadas de acuerdo con el tipo de libros cotejados y la finalidad del estudio.

⁷ Las Escuelas Normales fueron creadas en España en 1838 para la formación inicial del magisterio primario, aunque hasta 1846 no se exigió haber estudiado en uno de esos centros para ejercer la profesión (Carrillo, 2015). La denominación de las instituciones de formación del magisterio ha variado según los periodos. Con la Ley de Educación Primaria de 1945, durante la dictadura del General Franco, pasaron a denominarse Escuelas de Magisterio. Recuperaron su nombre original dos décadas más tarde, con el Plan de 1967, ya al final de la existencia de estos centros, hasta que, a principios de los años setenta, la formación del magisterio se integró en la universidad. Había escuelas normales masculinas y femeninas; solo fueron mixtas durante la vigencia del Plan republicano de 1931; la llegada de la Dictadura franquista acabó con la coeducación, que no se recuperó hasta 1967.

(a) *Obras de una misma autoría, dirigidas a una misma institución, escritas en diferentes momentos*

Es el caso del tratamiento dado a la numeración y las operaciones aritméticas (Sánchez-Jiménez y Carrillo, 2018) en los libros de José María Eyaralar *Nuevo Tratado de Aritmética* (1922) y *Aritmética Intuitiva* (1932), escritos para la enseñanza de la aritmética en las escuelas normales: la primera de ellas publicada cuando su autor, profesor normalista de matemáticas, apenas llevaba cinco años ejerciendo en las Normales de Huesca y Barcelona y el plan de estudios vigente era el de 1914, el cual contemplaba los contenidos de aritmética en las asignaturas de los dos primeros cursos⁸; la segunda cuando estaba en vigor el plan de estudios de 1931 durante el periodo republicano, un plan de estudios profesionalizador en el que las asignaturas disciplinares, en particular la aritmética, no estaban incluidas.

En otro trabajo, Carrillo y Sánchez-Jiménez (2011) comparan el modo en que Eyaralar trata una cuestión metamatemática, concretamente la validación, en los dos libros citados.

(b) *Estudio comparativo del tratamiento dado a un tema en dos obras de una misma autoría y destinadas a diferentes instituciones*

Sánchez-Jiménez (2015) analiza y compara las obras de Margarita Comas *Aritmética* (1928), dirigida a la escuela primaria, y *Metodología de la Aritmética y la Geometría* (1932), dirigida a la formación del magisterio. También se comparan los libros de Felipe Sáiz Salvat, profesor normalista, igual que la anterior autora, *Arte de Estudiar. Matemáticas. Metodología, Didáctica, Cálculo Mental* (1931), escrito para las escuelas normales, y *Aritmética experimental. Libro primero* (1936), destinado a la escuela primaria.

(c) *Análisis comparativo de libros de diferente autoría que tratan sobre la enseñanza, en una cierta institución, del mismo contenido*

Carrillo (2004) compara dos propuestas para la enseñanza de la aritmética en la escuela primaria, la de la enseñanza mutua y la de Pestalozzi, por su influencia en la organización de los contenidos sobre metodología de la aritmética que se estudiaron en las Escuelas Normales durante su primera etapa. La autora analiza el libro *Sistema inglés de instrucción*, de Lancaster, el que publicó la Junta protectora del Método de Enseñanza Mutua en 1820, y los libros *Doctrina de la visión de las relaciones de los números. Tomo primero* y *Cómo Gertrudis enseña a sus hijos*, de Pestalozzi.

⁸ Nociones y ejercicios de Aritmética y Geometría, en el primer curso, y Aritmética y Geometría, en el segundo.

Los contenidos de este artículo están bajo una licencia [Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/)



El modelado de las organizaciones matemáticas y didácticas y la relación entre ambas permite a la autora extraer conclusiones sobre varios aspectos: las restricciones que la institución impone sobre los métodos de enseñanza; el condicionamiento recíproco entre los contenidos y las técnicas didácticas usadas; la diferencia en el *logos* que justifica la técnica que caracteriza a cada uno de los dos métodos; y la explicación de la ausencia de ciertos contenidos a través de la influencia de las praxeologías didácticas, entre otras.

Otro ejemplo es el trabajo de Dólera y Sánchez-Jiménez (2024) en el que se analizan y comparan la propuesta de Puig Adam sobre la enseñanza de la proporcionalidad según el método heurístico, y la de otro profesor contemporáneo, Viedma Castaño. El análisis praxeológico realizado a partir de la propuesta reflejada en el libro *Didáctica matemática eurística* (Puig Adam, 1956), dirigido a la formación continua del profesorado de secundaria, y de otras fuentes, como artículos publicados en revistas, permite conocer el *logos* didáctico asociado.

(d) *Análisis de ciertos contenidos en una obra destinada a distintas instituciones a la vez*

Un trabajo de estas características es el realizado sobre la enseñanza de la aritmética en los libros *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual* (1933) y *Lecciones de cálculo. Grado elemental. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual* (s.f.), ambos de Aurelio Rodríguez Charentón (Sánchez-Jiménez, 2020b). Hay que destacar que, aunque se trata de libros escritos para la escuela primaria, su autor era maestro y profesor normalista formado en la Escuela de Estudios Superiores del Magisterio, quien había viajado al extranjero pensionado por la *Junta para Ampliación de Estudios e Investigaciones Científicas* (JAE) (en la formación del magisterio primario durante la llamada Edad de Plata de la educación en España, todas las personas que se encargan de la renovación metodológica en matemáticas habían pasado por alguna de estas instituciones o por ambas).

Según Margolinas y Wozniak (2009), los manuales pueden reflejar cambios curriculares o una evolución de los métodos de enseñanza del cuerpo docente. Esto último ocurre solo si las personas autoras no se ven sometidas a las mismas condiciones y, por ende, a las mismas limitaciones que las personas a las que se dirigen los manuales. Es el caso de Charentón, por su doble condición de docente de ambas instituciones –la escuela primaria y la escuela normal–.

(e) *Análisis de las propuestas sobre un dispositivo (novedoso) de enseñanza*

Un trabajo de esta índole es el que trata sobre el método de proyectos durante la Segunda República en España (Sánchez-Jiménez et al., 2020). El método de proyectos se considera una técnica didáctica para desarrollar procesos de estudio, y estos procesos se modelan mediante una praxeología didáctica que contiene tareas, y modos de abordarlas y un *logos* didáctico asociado. En este trabajo se utilizó un dispositivo creado en la TAD, el cual resulta útil para el diseño y también para el análisis de propuestas de enseñanza. Se trata del *Recorrido de Estudio e Investigación* (REI) (Chevallard, 2004).

En dicho trabajo se intenta determinar qué características de los REI comparten los proyectos y cuáles se echan en falta. El análisis de varios libros escritos por profesorado normalista y otras personas dedicadas a la inspección de enseñanza primaria y a la dirección de grupos escolares⁹ permitió extraer conclusiones sobre el método en relación con la matemática.

El método intentaba superar las restricciones del modelo pedagógico clásico generalista anterior, pero no cuestionaba el modelo epistemológico de las matemáticas. También ignoraba restricciones derivadas de la naturaleza de la matemática. Se pudo concluir que el dispositivo didáctico basado en los proyectos no estaba diseñado para la construcción de nuevas técnicas ni del *logos* relativo a ellas, sino más bien para lograr que los conocimientos matemáticos pasaran de 'movilizables' a 'disponibles' (Robert et al., 2012), ya que promovía, más que una construcción del conocimiento matemático, una concepción de la matemática basada en lo que se ha denominado "aplicacionismo" (Barquero et al., 2013). La comparación entre los proyectos y los REI puso de manifiesto la influencia del *modelo epistemológico* de las matemáticas sobre las propuestas docentes.

(f) *Estudio de la influencia de una cierta institución en los modelos de enseñanza en la institución de formación del magisterio*

Los resultados del análisis de los libros escritos para las Escuelas Normales por profesores y profesoras normalistas de matemáticas en los años previos y durante la etapa republicana, en particular los de carácter metodológico o pedagógico, han sido decisivos para conocer el verdadero papel que desempeñó la JAE (1907-1936) en el conocimiento de la *matemática para la enseñanza* por parte de este profesorado. Sánchez-Jiménez y Dólera

⁹ Muchas veces se trataba de libros que se empleaban para la formación inicial y la formación permanente de las maestras y maestros.

(2023a) concluyen que en matemáticas, al contrario de lo sucedido en otras disciplinas, la influencia de esta institución se ejerció, sobre todo, a través de las pensiones para visitar Escuelas Normales y escuelas primarias en varios países de Europa. Sin embargo, no ocurrió lo mismo con la formación de docentes de matemáticas de enseñanza secundaria, en la que el papel principal fue desempeñado por el Instituto-Escuela, una institución dependiente de la JAE.

3. Propuesta

En este apartado se exponen algunas características de la investigación sobre manuales en historia de la educación matemática. En primer lugar, se señalan algunas diferencias con la investigación acerca de manuales cuando esta se realiza desde la didáctica de la matemática. Tales diferencias se deben a las características específicas de una investigación histórica. A continuación se describe un trabajo de investigación sobre libros de texto para escuelas normales publicados durante la II República (1931-1936) y la década anterior, la denominada Edad de Plata de la cultura en España, el cual pone de manifiesto, por un lado, cómo se han usado las herramientas de la TAD y, por otro lado, el interés de este marco teórico-metodológico para futuras investigaciones en este ámbito.

3.1 La perspectiva del didacta y la del historiador en el análisis de manuales

El análisis de libros de texto, como parte de la investigación en historia de la educación matemática, es un análisis histórico y, por tanto, debe emplearse la metodología histórica. Así lo aprecian las personas expertas en historia de las disciplinas escolares (Viñao, 2012), argumentando que las disciplinas son construcciones sociales, elaboraciones humanas. Visión compartida desde la historia de la educación matemática por personas expertas internacionalmente (Karp, 2014; Valente, 2020) que, al mismo tiempo, llaman la atención sobre la necesidad de una formación matemática firme, aludiendo al carácter matemático de los textos que se analizan:

In general, to repeat, the methods of the history of mathematics education are first and foremost historical methods. It is clear, however, that much greater mathematical preparedness is demanded of the researcher in the history of mathematics education

than of the general historian: the texts studied are often mathematical texts¹⁰. (Karp, 2014, p. 20)

Así pues, el análisis de libros no puede hacerse exclusivamente desde la didáctica de la matemática, pero tampoco sin su participación (González y Sánchez-Jiménez, 2021). Este análisis histórico va a tener una componente descriptiva que explique las propuestas contenidas, en particular en los manuales, pero no puede quedar reducido a ello; es preciso igualmente examinar dichas propuestas y relacionarlas con las concepciones pedagógicas dominantes en la institución en el momento de su publicación y con el modelo epistemológico de las matemáticas subyacente, el cual Bosch y Gascón (2010) estiman que es uno de los más importantes factores de la actividad matemática que la institución considera prioritaria. Este análisis requiere herramientas propias de la didáctica de la matemática.

En este ámbito, y sin ánimo de ser exhaustivos, son varios los trabajos de diferente autoría (Bittar, 2017, 2022; Bosch et al., 2009; Castela, 2017; Chaachoua y Comiti, 2010; Ruiz-Higueras y García-García, 2009) en los que se ha señalado la utilidad del marco conceptual y las herramientas de la TAD para el análisis de manuales escolares o para investigar acerca de su uso académico (Margolin y Wozniak, 2009). Marilena Bittar (2017, 2022) comenta numerosas investigaciones en lengua portuguesa, principalmente brasileñas, que han utilizado la TAD para el análisis de libros de texto.

Bittar (2020, 2022) propone un esquema de análisis de libros de texto basado en la TAD: elección del corpus para el análisis; elaboración de las praxeologías matemáticas presentes en la parte de exposición de la materia; elaboración de las praxeologías matemáticas presentes en la parte de ejercicios propuestos para los discentes; elaboración de las praxeologías didácticas presentes en la lección y los ejercicios; cruce y análisis de los datos. Un aspecto del análisis que esta autora considera esencial es el análisis cuantitativo de los tipos de tareas presentes en los ejercicios propuestos, ya que ello permite determinar la importancia concedida en el texto a cada praxeología, sobre todo, de cara a comparar textos e intentar establecer el modelo de organización didáctica (Gascón, 2003) al que tiende cada uno. De hecho, la propia autora destaca este análisis cuantitativo como una parte esencial de su modelo de análisis de manuales.

¹⁰ En general, los métodos de la historia de la educación matemática son primero y ante todo métodos históricos. Está claro, no obstante, que al investigador en historia de la educación matemática se le exige una preparación matemática mucho mayor que al historiador general: los textos estudiados son a menudo textos matemáticos.

En cualquier caso, hay que tener en cuenta que este esquema no está pensado, en principio, para un análisis histórico, como tampoco lo son los ejemplos que presenta la autora, pues, a pesar de que, como hemos dicho, hay bastante literatura en la que se analizan textos utilizando la TAD, estos trabajos se inscriben en la didáctica de la matemática y no en la historia de la educación matemática. Y por ello las finalidades que asigna Bittar (2022) en el trabajo citado al análisis de libros de texto (buscar elementos que expliquen las razones para los errores persistentes del alumnado o diseñar nuevas propuestas de enseñanza) no son las que se persiguen en un trabajo de corte histórico.

Conviene, además, precisar algunos aspectos del análisis cuando se trata de un estudio histórico, en particular, para la formación del profesorado.

En primer lugar, se busca identificar en los libros las praxeologías matemáticas y didácticas, pero la investigación ha de preguntarse por las llamadas *praxeologías de formación* (Ruiz-Higueras y García, 2010) que los libros pueden favorecer que el futuro docente construya. Esas praxeologías para enseñar integran conjuntamente organizaciones matemáticas y didácticas, por lo que, aunque esto no es exclusivo de un estudio histórico, es conveniente analizar conjuntamente unas y otras.

Las clases de libros para la formación del magisterio que se analizan no son exactamente libros de matemáticas para el alumno, que desarrollan el programa de una asignatura, y libros para el profesorado, con indicaciones acerca del uso de los anteriores y/o las respuestas a las actividades propuestas. Tratándose de las instituciones de formación como las escuelas normales, tenemos libros de matemáticas para docentes y libros didácticos o pedagógicos, que pueden responder a un programa para una asignatura específica de carácter profesionalizador en relación con la matemática (como los libros para las asignaturas Metodología de la Matemática, que se impartió en las Normales entre 1931 y 1936, y Didáctica de las Matemáticas, en el plan de estudios de 1967). También se dispone de libros concebidos para la formación matemática inicial de las maestras y maestros, que intentan responder a los contenidos de una cierta asignatura del plan de estudios, y otros dirigidos tanto a las instituciones de formación del magisterio como a la formación de maestros y maestras en ejercicio.

Además, en la investigación sobre la formación de docentes interviene más de una institución o subsistema educativo, la institución normalista y la escuela primaria. Como consecuencia interesa contrastar las praxeologías (del nivel de generalidad que se elija, puede ser la aritmética, la numeración, etc.) en ambas instituciones. Esto nos lleva a utilizar un tercer

tipo de libro, que son los libros para la escuela escritos por los autores de los libros para la formación del magisterio. Estas obras reciben la influencia de las dos instituciones y están sujetas a las condiciones ecológicas procedentes de ambas.

Otra diferencia tiene que ver con la autoría de los libros. Los libros de texto, en general, han sido escritos por personas, pertenecientes a la *noosfera*¹¹, distintas al profesorado que ha de manejarlos en las instituciones de enseñanza. En cambio, los libros para las instituciones de formación del magisterio suelen estar escritos por profesorado normalista y en ellos hay rastros de la *matemática para enseñar*.

El perfil de los usuarios de los libros de texto tampoco es el mismo. En los niveles escolares frecuentemente el alumnado se enfrenta por primera vez a los contenidos de una organización matemática, mientras que en las instituciones de formación del profesorado el alumnado suele tener, al menos, un nivel básico en el conocimiento de los objetos matemáticos y las técnicas que son objeto de estudio; cambia el estatus de los conocimientos matemáticos. Esta es una de las razones por las que un análisis de tipo cuantitativo de la parte del libro dedicada a las actividades es menos habitual, y más aún en los libros didácticos.

En otro tipo de investigaciones, quien investiga puede observar, incluso reproducir, ciertas fases del proceso de estudio de las matemáticas en una institución que aporten información sobre la utilización de los manuales. En historia de la educación matemática no es posible hacer encuestas o entrevistas a docentes y discentes, observaciones en el aula, etc.; no se puede generar esa información para contrastar el análisis del manual con las praxeologías didácticas realmente desarrolladas ni, en particular, detectar la presencia de los distintos momentos didácticos. Es más evidente la conveniencia de un análisis conjunto de los libros de matemáticas y de libros sobre metodología didáctica de la misma autoría, cuando los hay.

Además, puesto que en historia de la educación matemática interesa el *proceso de constitución* del conocimiento profesional del profesorado, el análisis praxeológico ha de ser completado y contrastado con el análisis ecológico, sin el cual la comprensión de ese proceso quedaría incompleta, se ha de inferir información relativa a ello a partir de fuentes históricas complementarias a los libros: fuentes legislativas, artículos en revistas profesionales, documentos de archivo, etc., incluso fuentes no narrativas que forman parte del patrimonio

¹¹ Conjunto de instituciones con cierto derecho a opinar sobre los contenidos y métodos de enseñanza en la escuela (Gascón, 1998).

material. Estas fuentes son imprescindibles para comprender las razones de las praxeologías matemáticas y didácticas en los manuales para la formación del magisterio.

3.2 Un ejemplo que muestra el potencial de la TAD para el análisis de libros en historia de la educación matemática

Sánchez-Jiménez (2015) y Sánchez-Jiménez y Carrillo (2018) han analizado la enseñanza del sistema de numeración en dos obras escritas por José María Eyaralar con diez años de diferencia y en el contexto de dos situaciones políticas distintas que implicaban planes de estudio diferentes en estructura y contenidos: *Nuevo Tratado de Aritmética* (1922) y *Aritmética Intuitiva* (1932a). Se modelizan las praxeologías matemáticas y didácticas en estos dos manuales para la formación de maestras y maestros, buscando identificar componentes de estas praxeologías y la función que pueden llevar asociadas, con el fin de determinar en esos libros la *matemática a enseñar* pero, sobre todo, la *matemática para enseñar* en una institución y un periodo concretos. Estas *matemáticas para la enseñanza* que ha de proporcionar la institución de formación del magisterio requieren, según la TAD, una remotivación de los saberes –en este caso los relativos a la numeración– que tenga en cuenta sus razones de ser (Cirade, 2006, citado en Ruiz-Higueras y García, 2010), además de la presencia y articulación de los diferentes momentos del estudio.

En cuanto al bloque práctico de la organización matemática, la cuestión se centra en las tareas y las técnicas, así como en los elementos –explícitos e implícitos– pertenecientes al *logos*.

En el primero de los libros se parte de una *cuestión problemática*: limitaciones de la representación analógica para representar un conjunto infinito de números teniendo en cuenta, además, su naturaleza abstracta. No obstante, amplía esta problemática clásica con la necesidad de comparar cuantitativamente conjuntos mediante una técnica más eficaz que una representación analógica, real o gráfica. Las sucesivas respuestas a las *tareas* en las que va concretando la cuestión que propone culminan con el sistema de numeración posicional, que surge así como un avance en la eficiencia de la *técnica*. De esta manera, alude al *alcance* de las técnicas de agrupamiento con objetos reales, en la vida cotidiana, no prolongables indefinidamente y, por tanto, con limitaciones. Presenta la numeración escrita como una respuesta a la cuestión inicial, pero va proporcionando *respuestas provisionales* (sistemas aditivos y multiplicativos) con las que construye progresivamente la técnica. Esta construcción progresiva en la que va haciendo evolucionar las técnicas hacia otras más económicas y de

mayor alcance le sirve también para poner de manifiesto la razón de ser de la existencia del cero y el carácter convencional –como construcción humana– del principio posicional.

Por otra parte, la construcción paulatina de la respuesta a la cuestión inicial, al tiempo que implica una evolución de las técnicas, hace posible aludir a *razones tecnológicas*, por ejemplo, cuando se plantea el ámbito de aplicación o el alcance del sistema de numeración romano en cuanto a sus limitaciones para el cálculo, aunque no alude a su economía, cuestión que solo comenta cuando compara la cantidad de símbolos necesaria para representar un número en sistema multiplicativo con la necesaria en uno posicional.

En su segundo libro, parte de la misma cuestión inicial pero la primera respuesta provisional es un sistema de tipo multiplicativo, aunque en esta obra enumera con detalle al final del proceso los principios del sistema de numeración y los presenta de manera destacada. El sistema romano aparece al final del capítulo como una curiosidad histórica. Otra diferencia con la propuesta anterior es el papel de algunos ostensivos, como la representación de los números en la semirrecta numérica, respecto a los cuales en el primer libro destaca más bien, aunque no solo, la función representativa, mientras que en el segundo proporciona una técnica para contar y otra para ordenar números, a partir de la representación en la recta. Se pone así de manifiesto la función instrumental de la representación en la recta como parte de manipulaciones de tipo técnico, tecnológico y teórico (Bosch y Chevallard, 1999).

La comparación entre ambos manuales ha de extenderse a los ejercicios propuestos para el alumnado. Bittar (2022) destaca la importancia de identificar en ellos cuáles son los tipos de tareas que se le proponen a la persona discente y qué técnicas se espera que esta movilice, e incluso detectar la presencia en ellos de nuevas praxeologías; por ejemplo, cuándo hay ejercicios propuestos con el fin de que el alumno construya o emplee una técnica diferente a la técnica o técnicas expuestas antes en la lección (hablaríamos, en el seno de la TAD, de *organizaciones matemáticas puntuales complejas*, compuestas por varias praxeologías puntuales que comparten un mismo tipo de tarea, pero distintas técnicas (Castela, 2008, citado en Bittar, 2022). En este caso, los parecidos y diferencias descritos en los dos libros se reflejan igualmente en los ejercicios propuestos.

En el segundo es mayor la cantidad de ejercicios encaminados a la comprensión del principio posicional y a mostrar la evolución de la respuesta a la cuestión de representar y comparar cantidades, los sistemas de numeración, y contrastar unos sistemas y otros en cuanto a su operatividad y eficiencia. Hay ejercicios en los que se pide representar números en un sistema aditivo:

4. Representando la unidad por **I**, la decena por **I-I** y la centena por **I=I**, representar los números 3, 24, 205, 300, 132, 123, 312.

[...]

6. Distribuir un conjunto en unidades de los diferentes órdenes del sistema de base 10 y representarlo con la notación adoptada en 4 y con la usual. (Eyaralar, 1932a, p. 21)

En este caso no recurre, como en el libro anterior, a un sistema aditivo como respuesta provisional al problema de representar números, y por eso este sistema aparece por primera vez en esta sección y no antes de la escritura posicional. Estos ejercicios forman parte de una *técnica didáctica* (un *gesto didáctico* asociado a dicha técnica es la selección de los números en el primer ejercicio), cuya *tecnología didáctica* asociada es la de ayudar a la reflexión sobre el principio del agrupamiento y del principio posicional, y de las ventajas respecto a otros sistemas que había propuesto como soluciones intermedias a la cuestión general planteada. En este segundo libro están también más presentes los ejercicios en los que se pide comparar números que tienen los mismos dígitos, pero permutados o con ceros añadidos al final o en posiciones intermedias, en los que parte del equipamiento técnico para resolverlos es precisamente el conocimiento en juego, es decir, el principio posicional.

Para la evaluación de la organización didáctica, Chevallard (1999) propone estudiar la presencia de los *momentos del estudio*. Los manuales, por sí solos, no proporcionan suficiente información para evaluar la praxeología didáctica, pero sí podemos inferir algunas características. Se trata de libros escritos para la formación de docentes de primaria, por lo que el sistema de numeración es conocido con anterioridad por sus destinatarios y se trata de ofrecer en los libros *la matemática para enseñar*. El objetivo, por tanto, sería exponer estos contenidos matemáticos sistematizados a la vez que se realiza una reflexión de tipo epistemológico. Por ello no hay un genuino *momento de primer encuentro* de las lectoras y los lectores potenciales del libro con el problema de la numeración, ni un *momento exploratorio* y de *elaboración de una técnica*, las técnicas se presentan ya construidas y justificadas en el libro, pero de forma progresiva, haciendo ver sus limitaciones, hasta llegar a una técnica que se puede institucionalizar. La atención se centra en los momentos de la *construcción del entorno tecnológico-teórico* y del *trabajo de la técnica*, para que el futuro enseñante conozca la razón de ser de los conocimientos, y distinga y pueda comparar las distintas técnicas y los elementos tecnológico-teóricos asociados, para poder decidir acerca de su uso pertinente en la escuela primaria. Se aleja así de los modelos de enseñanza considerados 'clásicos' (Gascón, 2003). Del análisis de los enunciados de los ejercicios propuestos se deduce que su

finalidad en la escuela normal no es tanto rutinizar las técnicas presentadas en la lección como promover este tipo de reflexión tecnológico-teórica.

Para conocer mejor la *praxeología para la enseñanza* que propone el autor de los libros que estamos analizando, podemos completar el estudio con otro libro, *Metodología de la Matemática* (1933), considerado también manual escolar aunque, en este caso, para la asignatura del mismo nombre, en el que da indicaciones para diseñar y llevar a cabo organizaciones didácticas en la escuela primaria.

Este libro recoge un cuento de Juan Macé, "El rebaño de Juanillo", para que sirva en la escuela primaria como cuestión motivadora. En él se presenta la tarea de comparar una colección con ella misma en otro momento. Lo relevante es que Eyaralar anima a su alumnado a que cuestionen con las niñas y los niños de primaria las técnicas para resolver la tarea planteada y no se limiten a presentar la técnica definitiva, ya institucionalizada, sino que vean esta como el resultado de una evolución desde la técnica primitiva (construir una colección coordinable con la de partida), y donde las técnicas sucesivas sean objeto de cuestionamiento en cuanto a su economía y alcance:

Para que el conocimiento de los sistemas de numeración sea completo y educativo desde un punto de vista humano, es necesario que se estudien los diferentes sistemas, sus evoluciones con los inconvenientes y ventajas que presentan (numeración romana inclusive), para llegar a percibir la larga evolución del pensamiento humano hasta la adquisición del actual y maravilloso mecanismo. (Eyaralar, 1933, p. 43)

Si en los libros para la Escuela Normal parte de la técnica didáctica era la recurrencia a la historia de la matemática, ahora se ha sustituido ese dispositivo por otro más apropiado a la institución escuela primaria.

En este libro –como también en artículos publicados en revistas profesionales– hallamos otras muestras del *logos didáctico* que inspira la propuesta de Eyaralar para la aritmética. En particular, señala que las actividades de comparación y descomposición de números facilitarán el estudio de las técnicas de cálculo para las operaciones elementales. Es decir, proponer estas *tareas matemáticas* de descomponer números es parte de la *técnica didáctica* para el estudio de las operaciones.

Indagar acerca de las tecnologías didácticas, requiere la consulta de otros libros pero también, si se dispone de ellas, de otras fuentes, como artículos en revistas, etc. En este ejemplo esas fuentes nos permiten confirmar que el trabajo en otras bases diferentes de la

base decimal es parte de una técnica didáctica que responde al interés de este profesor por que los alumnos se cuestionen la razón de ser de los conocimientos matemáticos:

En todas las escuelas se estudia en cierto modo el paso de un sistema de numeración al decimal y viceversa al transformar los números complejos. En algunos libros españoles (Palau Vera) se estudian directamente estas transformaciones. Nosotros creemos conveniente el estudio de los sistemas de numeración por su valor educativo. (Eyaralar, 1932b, p. 92)

Para finalizar, recogemos algunas consideraciones de carácter *ecológico* situadas en niveles de codeterminación más genéricos que el disciplinar, y que completan el análisis.

En un estudio de tipo histórico es preciso tener en cuenta la historia y la cultura del periodo en cuestión (Karp, 2014). Los libros analizados se publicaron en un momento de renovación de la estructura y los contenidos de las escuelas normales en España cuando la pedagogía escolanovista era el modelo dominante. Además, hay que tener en cuenta la influencia de varias instituciones clave en aquel momento, sobre todo, la de la Escuela Superior del Magisterio, en la que Eyaralar ingresó con unos sólidos conocimientos matemáticos anteriores, y la de la JAE, gracias a la cual pudo contemplar cómo era la enseñanza de las matemáticas en Francia y contrastarla con su propia experiencia y su conocimiento de la realidad española.

No obstante, además de las influencias del *nivel pedagógico* que propugnaban una enseñanza activa e intuitiva, hay que analizar el *modelo epistemológico de las matemáticas* de cada docente. En el caso de Eyaralar, su epistemología le hace valorar una enseñanza intuitiva, pero en la que la intuición esté al servicio del razonamiento.

El análisis ecológico ha de preguntarse también por la influencia de los niveles superiores al de la Pedagogía. En el segundo libro las justificaciones intuitivas para la numeración y las operaciones tienen una presencia mayor. No solo hay justificaciones basadas en representaciones gráficas, sino que recurre a los ejemplos genéricos para justificar las propiedades de las operaciones. Los cambios sociales que trajo el régimen republicano y que dieron lugar a cambios legislativos en la formación del magisterio pueden ser parte de la explicación. Cuando se publicó la *Aritmética Intuitiva*, el alumnado ingresaba en las escuelas normales tras haber cursado el bachillerato, luego se suponían estudiadas las demostraciones algebraicas más formales para las propiedades aritméticas. Como consecuencia, en la Normal tenía sentido centrarse en demostraciones intuitivas de carácter aritmético para quienes iban a ejercer como enseñantes en el nivel de primaria.

4. Reflexiones finales

A lo largo de este trabajo hemos mostrado la utilidad de las herramientas teóricas y metodológicas de la TAD para el análisis de libros en el seno de la historia de la educación matemática y, en particular, cuando se trata de libros utilizados en la formación del magisterio. Las investigaciones presentadas revelan que, a partir del hecho de que el método propio de investigación en historia de la educación matemática es el método histórico, es posible combinar ambos.

Uno de los rasgos distintivos de la TAD es la perspectiva *institucional y epistemológica* desde la que aborda el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. La TAD problematiza la actividad matemática y la actividad didáctica como dimensiones relacionadas e interdependientes. Esto es, si cabe, más importante cuando se trata de libros para la formación de enseñantes. Como consecuencia del trabajo llevado a cabo en este campo a lo largo de casi dos décadas, estamos convencidos de la necesidad de no separar, cuando se trata de las instituciones de formación del profesorado, el análisis de las praxeologías matemáticas y el de las praxeologías didácticas, siempre en relación con los condicionantes de tipo ecológico. El cuestionamiento ecológico ayuda a identificar aquellos elementos que influyen en las restricciones que pueden afectar a la *matemática a enseñar* y a la *matemática para enseñar* en dichas instituciones, y que son observables en los libros para esa formación en cada periodo histórico.

La TAD continúa desarrollándose e incorporando nuevas nociones y herramientas para el diseño y el análisis de los procesos de estudio. Se trata de una teoría “ampliamente desarrollada y validada en la descripción y análisis de la actividad matemática, en general, y de la actividad matemática escolar, en particular, objeto de toda propuesta de formación” (Ruiz-Higueras y García, 2010, p. 191).

En el caso de investigaciones de carácter histórico existen algunas limitaciones, principalmente las derivadas del hecho de que hemos de trabajar con las fuentes que nos han llegado, y esto dificulta a veces la identificación de los elementos praxeológicos, sobre todo de la organización didáctica. Los resultados obtenidos alientan a continuar indagando acerca del potencial de los constructos de la TAD en el campo de la historia de la educación matemática, pese a las restricciones con las que hemos de contar cuando hay que reconstruir esos procesos de estudio a partir de los libros y las fuentes históricas disponibles.

Referencias

- Artaud, Michèle. (2011). Les moments de l'étude, un point d'arrêt de la diffusion? En Marianna Bosch, Josep Gascón, Alicia Ruiz Olarría, Michèle Artaud, Alain Bronner, Yves Chevallard, Gisele Cirade, Caroline Ladage y Mirene Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 141-162). Centre de Recerca Matemàtica. https://ddd.uab.cat/pub/lilibres/2011/hdl_2072_200617/Documents10.pdf
- Artaud, Michèle. (2019). Des liens entre l'organisation de savoir et l'organisation de l'étude dans l'analyse praxéologique. *Educação Matemática Pesquisa*, 21(4), 248-264. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019v21i4p248-264>
- Barquero, Berta., Bosch, Marianna., y Gascón, Josep. (2013). The ecological dimension in the teaching of mathematical modelling at university. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 33(3), 307-338. <https://revue-rdm.com/2013/the-ecological-dimension-in-the/>
- Bittar, Marilena. (2017). A Teoria Antropológica do Didático como ferramenta metodológica para análise de livros didáticos. *Zetetiké, Campinas, SP*, 25(3), 364-387. <http://dx.doi.org/10.20396/zet.v25i3.8648640>
- Bittar, Marilena. (2020). Une proposition pour l'analyse de manuels. A proposal for textbook analysis. *Educação Matemática Pesquisa*, 22(4), 54-69. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p054-069>
- Bittar, Marilena. (2022). A methodological proposal for textbook analysis. *The Mathematics Enthusiast*, 19(2), 307-340. <https://scholarworks.umt.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1555&context=tme>
- Bosch, Marianna. (2010). L'écologie des parcours d'étude et de recherche au secondaire. In Ghislaine Gueudet, Gilles Aldon, Jacques Douaire y Jana Tragalova (Eds.), *Apprendre, enseigner, se former en mathématiques: quels effets des ressources?* (pp. 19-33). Institut National de Recherche Pédagogique.
- Bosch Marianna., y Chevallard Yves. (1999). La sensibilité de l'activité mathématiqueaux ostensifs. Objet d'étude et problématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(1), 77-124. <https://revue-rdm.com/1999/la-sensibilite-de-l-activite/>
- Bosch, Marianna., y Gascón, Josep. (2010). Fundamentación antropológica de las organizaciones didácticas. De los 'talleres de prácticas' a los 'recorridos de estudio e investigación'. En Alain Bronner, Mirene Larguier, Michele Artaud, Marianna Bosch, Yves Chevallard, Gisele Cirade y Caroline Ladage (Eds.), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 55-91). IUFM de l'Academie de Montpellier. <https://hal.science/hal-05141151/document>
- Bosch, Marianna., Gascón, Josep., y Sierra Tomás. (2009). Análisis de los manuales españoles para la formación de maestros: el caso de los sistemas de numeración. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (pp. 139-150). SEIEM. <https://www.seiem.es/acta/xiii-2009-santander/>

- Bourgade, Jean-Pierre., Crumière, Anne., y Cirade, Gisèle (2021). Écologie de la TAD en Formation Initiale de Professeurs de Mathématiques. *Caminhos da educação matemática em revista (online)/IFS* 11(1), 167-199. https://periodicos.ifs.edu.br/periodicos/caminhos_da_educacao_matematica/article/view/754/630
- Carrillo, Dolores. (2004). La codeterminación entre las organizaciones matemáticas y las organizaciones didácticas. Pestalozzi y la enseñanza mutua. *Recherches en didactique des mathématiques*, 24(1), 11-44. <https://revue-rdm.com/2004/la-codeterminacion-entre-las/>
- Carrillo, Dolores. (2005). *La Metodología de la aritmética en los comienzos de las Escuelas Normales (1838-1868) y sus antecedentes* [Tesis doctoral, Universidad de Murcia]. De la base de datos de Digitum: Repositorio Institucional de la Universidad de Murcia. <http://hdl.handle.net/10201/26973>
- Carrillo, Dolores., y Espín, José Ginés. (2023). A proposal by Ángel Llorca for teaching and learning geometry. *Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME13)*, Alfréd Rényi Institute of Mathematics; Eötvös Loránd University of Budapest, Jul 2023, Budapest, Hungary. <https://hal.umontpellier.fr/hal-04430809v1/document>
- Carrillo, Dolores., Maurandi, Antonio., y Olivares, Pilar (2020). El cálculo y la medida en el primer grado de la escuela Decroly: Análisis desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *RECME - Revista colombiana de Matemática Educativa*, 5(1), 13-24. <http://hdl.handle.net/10201/141301>
- Carrillo, Dolores., Moreno, Pedro Luis., y Sánchez-Jiménez, Encarna. (2020). El Centro de Estudios sobre la Memoria Educativa (CEME) de la Universidad de Murcia y la investigación en historia de la educación matemática. *Historia y memoria de la educación*, (11), 615-646. <https://revistas.uned.es/index.php/HMe/article/view/25668>
- Carrillo, Dolores., y Sánchez-Jiménez, Encarna. (2011). La validación en la formación de maestros: José María Eyaralar. En Mariana Bosch, Josep Gascón, Alicia Ruiz Olarría, Michele Artaud, Alain Bronner, Yves Chevallard, Gisele Cirade, Caroline Ladage y Mirene Larguier (Eds.), *Un panorama de la TAD* (pp. 283-298). Centre de Recerca Matemàtica. https://ddd.uab.cat/pub/llibres/2011/hdl_2072_200617/Documents10.pdf
- Castela, Corine. (2017). La teoría antropológica de lo didáctico: Herramientas para las ciencias de La educación. *Acta Herediana*, 59, 8. <https://doi.org/10.20453/ah.v59i0.3052>
- Chaachoua, Hamid., y Comiti, Claude. (2010). L'analyse du rôle des manuels dans l'approche anthropologique. En Alain Bronner, Mirene Larguier, Michele Artaud, Mariana Bosch, Yves Chevallard, Gisel Cirade, Caroline Ladage (Eds), *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 771-789). Montpellier: IUFM de l'Académie de Montpellier. <https://hal.science/hal-05141151/document>
- Charentón, Aurelio R. (1933). *Lecciones de cálculo. Grado preparatorio. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual*. Estudio de Juan Ortiz.

- Charentón, Aurelio R. (s.f.). *Lecciones de cálculo. Grado elemental. Aritmética, Geometría, Dibujo y Trabajo Manual*. Estudio de Juan Ortiz.
- Chevallard, Yves. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221–266. <https://revue-rdm.com/1999/l-analyse-des-pratiques/>
- Chevallard, Yves. (2001). Organiser l'étude 1. Structures et fonctions. In Jean-Luc Dorier, Michele Artaud, Michele Artigue, René Berthelot, Ruhai Floris (Eds.), *Actes de la XI e école d'été de didactique des mathématiques* (pp. 3-32). La Pensée sauvage. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=52
- Chevallard, Yves. (2002a). Organiser l'étude: 3. Ecologie & régulation, In J. L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, R. Floris (Coord.). *Actes de la XIe École d'été de didactique des mathématiques* (41-46). La pensée sauvage. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=53
- Chevallard, Yves. (2002b). Nouveaux dispositifs didactiques au collège et au lycée: raisons d'être, fonctions, devenir. Communication aux *Journées de la commission inter-IREM Didactique* (Dijon, 24-25 mai 2002). IREM, Dijon, 1-26. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Nouveaux_dispositifs_didactiques_au_college_et_au_lycee.pdf
- Chevallard, Yves. (2004). Vers une didactique de la codisciplinarité. Notes sur une nouvelle épistémologie scolaire. *Journées de didactique comparée 2004*, Lyon, France. http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=45
- Chevallard, Yves. (2019). Introducing the Anthropological Theory of the Didactic: An Attempt at a Principled Approach. *Hiroshima Journal Of Mathematics Education*, 12, 71-114. <https://doi.org/10.24529/hjme.1205>
- Comas, Margarita. (1928). *Aritmética*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía.
- Comas, Margarita. (1932). *Metodología de la Aritmética y la Geometría*. Publicaciones de la Revista de Pedagogía.
- Dólera, Josefa. (2022). *Pedro Puig Adam y la enseñanza de la Matemática en el bachillerato en España(1926-1960)* [Tesis doctoral inédita]. Universidad de Murcia, Murcia.
- Dólera, Josefa., y Sánchez-Jiménez, Encarna. (2019). La resolución de la ecuación de primer grado en los textos de Rey Pastor y Puig Adam. *HISTEMAT –Revista de História da Educação Matemática*, 5 (3). <https://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/286>
- Dólera, Josefa., y Sánchez-Jiménez, Encarna. (2024). Pedro Puig Adam y el método heurístico en la enseñanza de las matemáticas en España. *El Futuro del Pasado*, 15, 703–723. <https://doi.org/10.14201/fdp.31159>
- Eyaralar, José María (1922). *Nuevo Tratado de Aritmética*. Reus.

- Eyaralar, José María. (1932a). *Aritmética intuitiva*. Madrid: Reus.
- Eyaralar, José María. (1932b). Curiosidades Matemáticas. *Revista de Escuelas Normales*, 87, 90–92.
- Eyaralar, José María (1933). *Metodología de la matemática*. Reus.
- Gascón, Josep. (2003). La necesidad de utilizar modelos en didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática Pesquisa*, 5(2), 11-37. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/issue/view/556/pdf_11
- Gascón, Josep. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 18(1), 7–34. <https://revue-rdm.com/1998/evolucion-de-la-didactica-de-las/>
- González, María Teresa., y Sánchez-Jiménez, Encarna. (2021). La investigación sobre historia de la educación matemática en España. En R. E. Gutiérrez y J. L. Prieto (Comp.), *Memorias del VI Congreso Iberoamericano de Historia de la Educación Matemática (CIHEM)* (128-143). Maracaibo, Venezuela: Asociación Aprender en Red. <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/230722?show=full>
- Karp, Alexander. (2014). The History of Mathematics Education: Developing a Research Methodology. En Alexander Karp y Gert Schubring (Eds.), *Handbook on the History of Mathematics Education* (pp. 9- 24). New York: Springer.
- Madrid, María José., Pedrosa-Jesús, Cristina., Gutiérrez-Rubio, David., y León-Mantero, Carmen. (2023). Las primeras investigadoras y docentes del área de Didáctica de la Matemática en España: Dolores Carrillo Gallego. *Matemáticas, Educación y Sociedad*, 6(1), 54-58. <https://journals.uco.es/mes/article/view/16028>
- Margolinas, Claire., y Wozniak, Floriane. (2009). Usage des manuels dans le travail de l'enseignant :l'enseignement des mathématiques à l'école primaire. *Revue des sciences de l'éducation*, 35(2), 59-82. <https://doi.org/10.7202/038729ar>
- Puig Adam, Pedro. (1956). *Didáctica matemática eurística*. Instituto de Formación del Profesorado de Enseñanza Laboral.
- Robert, Aline., Penninckx, Jacqueline., y Lattuati, Marie. (2012). *Une camera au fond de la classe de mathématiques*. Presses universitaires de Franche-Comté.
- Ruiz-Higueras, Luisa., y García-García, Francisco Javier (2009). Arithmetica Practica y Speculativa de J. Pérez de Moya (1513-1596). Análisis epistemológico y didáctico. *Llull*, 32(69), 103–133. <https://recyt.fecyt.es/index.php/LLUL/article/view/14913>
- Ruiz-Higueras, Luisa., y García-García, Francisco Javier. (2010). Didáctica de las matemáticas y formación de maestros: respuestas y desafíos (desde la TAD). En Alain Bronner, Mirene Larguier, Michele Artaud, Marianna Bosch, Yves Chevallard, Gisele Cirade, Caroline Ladage (Eds). *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* (pp. 171-215). IUFM de l'Academie de Montpellier. <https://hal.science/hal-05141151/document>

- Sáiz Salvat, Felipe. (1931). *Arte de Estudiar. Matemáticas. Metodología, Didáctica, Cálculo Mental*. Imprenta Mercé.
- Sáiz Salvat, Felipe. (1936). *Aritmética experimental. Libro del maestro*. Imprenta Elzeviriana y Librería Camí, S.A.
- Sánchez-Jiménez, Encarna. (2015). *Las Escuelas Normales y la renovación de la enseñanza de las matemáticas (1909-1936)* [Tesis doctoral, Universidad de Murcia]. De la base de datos de Digitum: Repositorio Institucional de la Universidad de Murcia. <https://repositorio.ufsc.br/xmlui/handle/123456789/181417>
- Sánchez-Jiménez, Encarna. (2020a). Materiales didácticos y renovación de la enseñanza de la matemática en la «Edad de Plata». ¿Cómo puede contribuir la TAD a la investigación en Historia de la Educación Matemática? En Ivanete B. Dos Santos, Elisabete Z. Búrigo, Wagner R. Valente (Org.), *Materiais didáticos e história da educação matemática* (pp. 49-79). Editora Livraia da Física.
- Sánchez-Jiménez, Encarna. (2020b). Matemática para enseñar en los libros de Aurelio Rodríguez Charentón: la numeración y las operaciones. *HISTEMAT –Revista de História da Educação Matemática*, 6(2), 26-52. <https://www.histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/362>
- Sánchez-Jiménez, Encarna., y Carrillo, Dolores. (2018). La aritmética en las escuelas normales españolas en la Segunda República y los años previos. *Revista Paradigma*, 39(Extra1), 31-55. <http://revistaparadigma.online/ojs/index.php/paradigma/article/view/667/663>
- Sánchez-Jiménez, Encarna., Carrillo, Dolores., Chevallard, Yves., y Bosch, Marianna. (2020). The Second Spanish Republic and the project method: A view from the ATD. In Mariana Bosch, Yves Chevallard, Francisco García, John Monaghan (Eds.), *Working with the Anthropological Theory of the Didactic in Mathematics Education: A comprehensive Casebook* (pp. 101-117). Routledge.
- Sánchez-Jiménez, Encarna y Dólera, Josefa (2023a). Algunos dispositivos didácticos para las matemáticas en las escuelas normales españolas durante la edad de plata. *Revista Paradigma*, 44(2), 596-622. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=9824824>
- Sánchez-Jiménez, Encarna., y Dólera, Josefa (2023b). La Junta para Ampliación de Estudios y la formación matemática del profesorado en España. *Revista História da Educação (Online)*, 27, e125566. <http://dx.doi.org/10.1590/2236-3459/125566>
- Valente, Wagner Rodrigues. (2008). Livro didático e educação matemática: uma história inseparável. *ZETETIKÉ*, 16(30), 39-161. <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646894>
- Valente, Wagner Rodrigues. (2019). Programas de Ensino e Manuais Escolares como Fontes para Estudo da Constituição da *Matemática para Ensinar*. *ALEXANDRIA, Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 12(2), 51-63. <https://doi.org/10.5007/1982-5153.2019v12n2p51>

Valente, Wagner Rodrigues. (2020). História da educação matemática em perspectiva iberoamericana: relações entre campo disciplinar e ciências da educação. *Revista História da Educação (Online)*, 24, e101986. <http://doi.org/10.1590/2236-3459/101986>

Viñao, Antonio. (2012). Historia de las disciplinas, profesionalización docente y formación de profesores: el caso español. *Pro-Posições*, 23(3), 103-118. <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/proposic/article/view/8642838>

Revista indizada en



Distribuida en las bases de datos:

