



PROCESOS MATEMÁTICOS EN PRÁCTICAS DE ESTUDIANTES DE PROFESORADO EN MATEMÁTICA Y FÍSICA

MATHEMATICAL PROCESSES IN THE PRACTICES OF STUDENT TEACHERS IN MATHEMATICS AND PHYSICS

Pablo Alejandro Wiernes¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0005-1736-194X>

Ricardo Fabián Espinoza²

 ORCID iD: 0000-0001-8921-6956

RESUMEN

Se analizan y caracterizan procesos matemáticos en prácticas realizadas por estudiantes del profesorado en Matemática y Física de la Universidad Nacional del Chaco Austral de Presidencia Roque Sáenz Peña, Chaco, Argentina. El marco teórico adoptado es la “Teoría de las Configuraciones Didácticas” perteneciente al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Se elaboró un programa de investigación de tipo cuasiexperimental, con un diseño transeccional descriptivo, desarrollando un estudio de casos e indagando sobre procesos matemáticos al momento de resolver problemas algebraicos con ecuaciones de primer grado con una incógnita, así como sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. Se siguieron los pasos principales de la investigación basada en diseño. Se confeccionó un instrumento de indagación, constituido por cinco situaciones-problema y se realizó un análisis a priori del mismo, empleando como herramienta la “configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos”. También, se analizaron las prácticas de los estudiantes a quienes se les suministró el instrumento, por medio de la herramienta mencionada.

Palabras clave: procesos matemáticos, resolución de ecuaciones lineales, resolución de sistemas lineales, configuración ontosemiótica, prácticas matemáticas.

ABSTRACT

Mathematical processes are analyzed and characterized within practices carried out by students from the Mathematics and Physics Teacher Training Program at the National University of Chaco Austral, located in Presidencia Roque Sáenz Peña, Chaco, Argentina. The theoretical framework adopted is the “Theory of Didactic Configurations,” which belongs to the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction. A quasi-experimental research

1 Departamento de Ciencias Sociales y Humanísticas, Universidad Nacional del Chaco Austral, Presidencia Roque Sáenz Peña, Chaco, Argentina, C.P. 3700. Correo electrónico: pablowiernes@gmail.com

2 Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura, Universidad Nacional del Nordeste, Corrientes, Argentina, C.P. 3400. Correo electrónico: rrfespinoza@exa.unne.edu.ar



program was developed with a descriptive cross-sectional design, involving a case study and focusing on mathematical processes during the resolution of algebraic problems involving first-degree equations with one unknown, as well as systems of two linear equations with two unknowns. The main steps of design-based research were followed. An inquiry instrument was developed, consisting of five problem-solving situations, and a priori analysis was conducted using the “ontosemiotic configuration of practices, objects, and processes” as an analytical tool. Furthermore, the students’ practices—after being given the instrument—were also analyzed using the same tool.

Keywords: mathematical processes, solving linear equations, solving linear systems, ontosemiotic configuration of practices, objects and processes, mathematical practices.

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo forma parte de una tesis doctoral, la cual se centra en el estudio de los procesos matemáticos desarrollados por estudiantes/ingresantes a las diferentes carreras de grado de la Universidad Nacional del Chaco Austral (UNCAus).

Exponemos aquí los resultados de una prueba piloto realizada con cinco estudiantes de 4° año de las carreras de los profesorados en Matemática y en Física, con el fin de evaluar el instrumento de recolección de información y estudiar los resultados obtenidos, tanto de los procesos matemáticos que quedan al descubierto como del funcionamiento del propio instrumento. Se desarrolló una investigación cualitativa, a través de un estudio de casos, empleando los pasos de la investigación basada en diseño (IBD), para identificar y caracterizar procesos matemáticos.

Existe una dificultad marcada en alumnos de diferentes instituciones educativas en la resolución de problemas algebraicos. Las estadísticas y resultados de evaluaciones sobre la enseñanza de las matemáticas (Dirección Nacional de Evaluación, Información y Estadística Educativa, 2022; NCTM, 2000; NCTM, 2002) indican que la resolución de problemas matemáticos y los procedimientos resolutorios son focos de conflicto preocupantes en los niveles medio y superior. A partir de las evidentes dificultades, vemos necesario profundizar sobre los procesos matemáticos implicados en la resolución de problemas, lo cual puede contribuir a la mejora educativa.

En este sentido, el enfoque ontosemiótico (EOS) señala la existencia de objetos y procesos matemáticos (Font et al., 2008). El análisis de la resolución de problemas algebraicos desde dicho enfoque nos permitirá evidenciar aquellos procesos que se presentan en la resolución de una situación-problema.

En este trabajo se utilizó la herramienta denominada configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos para analizar las prácticas de los estudiantes.

Por lo tanto, se planteó el problema de investigación de la siguiente manera: ¿Qué/cuáles procesos matemáticos elaboran los estudiantes de los profesorados en Matemática y Física de la Universidad Nacional del Chaco Austral (UNCAus), al momento de resolver problemas algebraicos?

El objetivo perseguido se dirige a identificar y caracterizar tales procesos desde el EOS.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

El EOS es un sistema teórico que articula diferentes modelos en la educación matemática. Este modelo epistémico y cognitivo resignifica constructos como objeto matemático,

significado y comprensión, y destaca los procesos de comunicación, interpretación y variedad de objetos en las prácticas matemáticas.

El EOS combina elementos ontológicos y semióticos para analizar y comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se centra en cómo los significados matemáticos se construyen y se comunican en el aula, tanto desde lo que se espera que aprendan institucionalmente, como desde lo que pueden construir de manera personal (Espinoza, 2020; Godino, 2022).

Para el EOS existen objetos primarios y objetos a los que denominaremos secundarios (Godino et al., 2009; Godino et al., 2020; Godino, 2024). Los objetos primarios son situaciones-problema, elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos. De ellos surgen o se encuentran apareados procesos primarios como los siguientes: problematización, comunicación, definición, algoritmización, enunciación y argumentación.

Los objetos secundarios se presentan de manera dual: personal/institucional, ostensivo/no ostensivo, expresión/contenido, extensivo/intensivo, unitario/sistémico. De ellos surgen o se encuentran apareados procesos secundarios de personalización/institucionalización, materialización/idealización, representación/significación, particularización/generalización y unitarización/descomposición.

Los objetos primarios pueden ser analizados o contemplados desde las cinco dualidades presentadas antes, a modo de análisis complementario y con el fin de obtener un despliegue profundo de la actividad matemática al momento del desarrollo de una práctica matemática (Godino et al., 2009; Godino, 2024). Es decir, las dualidades son atributos contextuales aplicables a los distintos objetos primarios.

Para este trabajo se utilizó la herramienta “configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos” para realizar un análisis microscópico de la complejidad de la actividad matemática; o sea, de las prácticas matemáticas de estudiantes al momento de resolver situaciones-problemas. Llamaremos *configuración ontosemiótica epistémica* al análisis *a priori* realizado por el investigador como referencia para posteriores estudios de prácticas de alumnos. Mientras que llamaremos *configuración ontosemiótica cognitiva*, al análisis de las prácticas de los estudiantes (Burgos et al., 2021; Godino et al., 2020; Font et al., 2010).

2.1 Objetos/procesos primarios

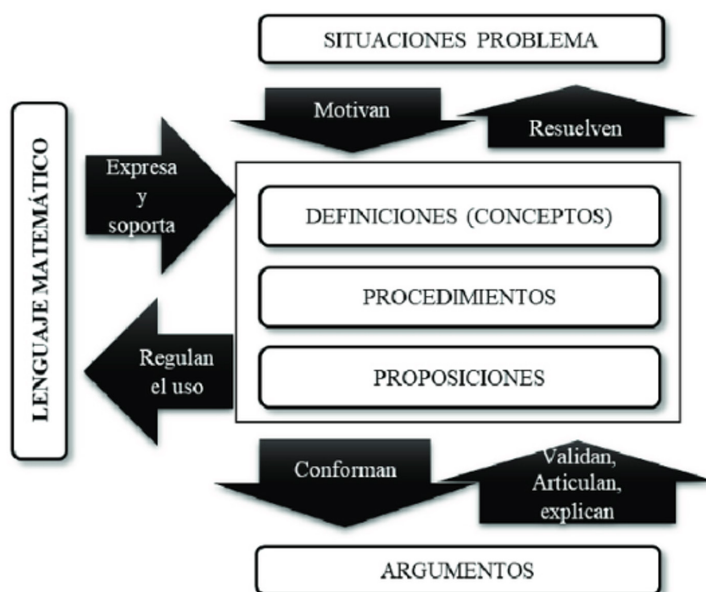
Los objetos matemáticos primarios surgen o son emergentes de los sistemas de prácticas como fenómeno complejo, a modo de objetos emergentes de las prácticas matemáticas. En un primer nivel de análisis propuesto por el EOS, surgen objetos matemáticos observables denominados primarios. Según Godino et al. (2009) y Aké, (2014) los objetos primarios son los siguientes:

- *Situaciones-problema*: son situaciones matemáticas, problemas, aplicaciones extra-matemáticas o intra-matemáticas, tareas, actividades y ejercicios que inducen a la actividad matemática.
- *Elementos lingüísticos*: como términos y expresiones matemáticas, notaciones, representaciones gráficas en sus diferentes tipos de registro como el escrito, el oral, el gestual, etc.

- *Conceptos*: entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición. Son introducidos a través de descripciones. Ejemplos: recta, punto, ecuación, función, etc.
- *Procedimientos*: técnicas de cálculo como algoritmos y operaciones. Son aquellos pasos por seguir para resolver un problema matemático; es el proceder de un resolutor para lograr su fin, sobre la base de ciertos argumentos que avalan dichos procedimientos.
- *Proposiciones*: son enunciados matemáticos o sobre conceptos, que necesitan ser validados. Son propuestas de resolución que necesitan ser demostradas.
- *Argumentos*: enunciados utilizados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, las deducciones, inducciones u otros.

Si consideramos como ejemplo plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, entonces aparecen conceptos, procedimientos y proposiciones, los cuales pueden generar argumentos, en el contexto del lenguaje matemático correspondiente, todo lo cual se enfoca en la resolución de un problema. Existe una determinada configuración (relaciones interconectadas) entre dichos objetos primarios, como lo representa la Figura 1.

Figura 1 - Configuración de objetos primarios.



Fuente: Font, et al. (2010).

En el caso concreto del análisis de la resolución de un problema (intra o extra-matemático), estos seis objetos primarios se interrelacionan y forman configuraciones epistémicas o

cognitivas que se construyen a partir del planteamiento y resolución de una situación-problema (Godino et al., 2009).

2.2 Objetos/procesos secundarios

La realidad actual nos muestra que la investigación en educación matemática y los currículos oficiales advierten tres características interesantes: a) existe una diversidad de conceptualizaciones del término proceso matemático, b) un determinado proceso puede ser descompuesto en otros procesos más simples o básicos, y c) existe una diversidad de procesos y términos para nombrarlos (Font y Rubio, 2017).

A pesar de la diversidad de conceptualizaciones del término, en el marco teórico del EOS

se considera que un proceso matemático es lo que podemos inferir que ha causado una cierta respuesta a una demanda dada. Es una secuencia de acciones que es activada o desarrollada, durante un cierto tiempo, para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea matemática (entrada). (Font y Rubio, 2017 p.2)

Por lo tanto, los objetos matemáticos pueden ser analizados o contemplados mediante ciertas dimensiones duales que intervienen en las prácticas, a modo de procesos considerados para el EOS como relevantes para la actividad matemática (Espinoza, 2020; Gallo et al., 2017; Font et al., 2010; Godino et al., 2009; Godino, 2024). Estos objetos, a los que denominamos secundarios, generan procesos secundarios que se describen a continuación.

- *Personal - Institucional*: el EOS atribuye a las prácticas matemáticas un doble carácter, esto es, personal (o individual) e institucional (o social). Es decir, pueden ser propias de un individuo o compartidas en el seno de una comunidad de práctica. Las personas están sujetas a formas de prácticas matemáticas, compartidas y provenientes de las comunidades a las que pertenecen. A su vez, los individuos aportan a las instituciones propuestas particulares y creativas, maneras de hacer matemática creadas por dichas personas. Es así como se articulan las dimensiones psicológica o cognitiva con la epistemológica o sociológica. Hablamos de objetos personales cuando los sistemas de prácticas son específicos de una persona, e institucionales cuando son compartidos en el seno de una institución. Los procesos que aparecen aquí, como dualidad, son la *personalización* y la *institucionalización*.
- *Ostensivo - No ostensivo*: son objetos ostensivos cuando son públicos y pueden ser mostrados a otros, o sea, elementos concretos; por ejemplo, gestos, notaciones, símbolos, representaciones gráficas, diagramas, bloques o figuras geométricas, artefactos materiales, objetos reales o concretos. Se trata de objetos matemáticos que son perceptibles y materiales, por lo que pueden ser observados y manipulados de manera directa. La función de los objetos ostensivos es permitir a los estudiantes interactuar directamente con el objeto matemático, lo que facilita su comprensión mediante la percepción sensorial. En cambio, son no ostensivos aquellos objetos considerados como constructos o creaciones discursivas de la actividad humana y no perceptibles por sí mismos, considerados ideales o mentales; es decir, aquellos pensados o imaginados por alguien. Por ejemplo, las ideas de número, funciones, teoremas, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos, relaciones matemáticas, todas las cuales se comprenden mediante el razonamiento y la lógica, pero no se pueden observar físicamente. Un objeto ostensivo es usado para representar o visualizar un objeto no

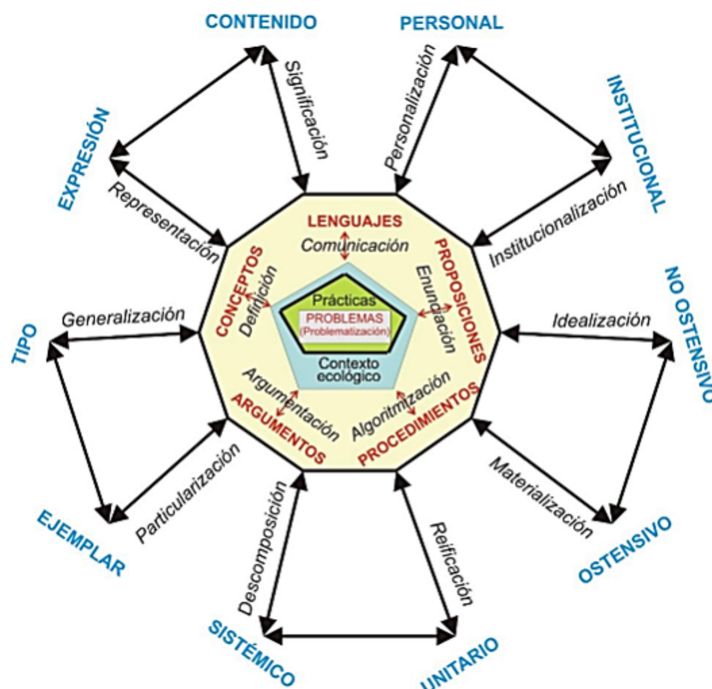
ostensivo. Por lo tanto, los objetos no ostensivos requieren de un determinado nivel de abstracción para su comprensión, para lo cual recibe la ayuda de los objetos ostensivos. La creación de objetos no ostensivos da lugar al proceso de idealización, y la creación de objetos ostensivos que materializan los no ostensivos da lugar al proceso de materialización. Los procesos que aparecen aquí -como dualidad- son la *materialización* y la *idealización*.

- *Expresión - Contenido*: están vinculadas con las correspondencias o relaciones de dependencia existentes entre el antecedente (o signifiante) y el consecuente (o significado), dadas por una persona o institución. Es la expresión concreta a través de símbolos y su correspondencia con el contenido o significado de dicha expresión. La expresión hace referencia a la forma de representación mediante símbolos de los diferentes objetos matemáticos. La función que cumple la expresión es permitir la visualización y manipulación de conceptos matemáticos. Por ejemplo, una función matemática puede ser expresada mediante una ecuación, un gráfico o una tabla de valores numéricos. El contenido hace referencia al significado o a la comprensión que una persona desarrolla sobre un objeto matemático. Como tal, es el resultado del proceso cognitivo que permite a dicha persona relacionar las diferentes expresiones de un objeto matemático con sus conocimientos previos y experiencias. Un ejemplo puede ser el de la función $f(x) = x^2$, expresión cuyo significado puede implicar la relación cuadrática entre variables independiente y dependiente, o el comportamiento de un parámetro en un problema particular de aplicación (contenido). Otro ejemplo puede ser la ecuación $2x + 3 = 7$, expresión de la que se puede deducir que debe encontrarse un valor numérico que satisfaga la igualdad, lo que implica comprender el concepto de solución de ecuaciones (contenido). Los procesos que aparecen aquí, como dualidad, son la *representación* y la *significación*.
- *Extensivo - Intensivo*: al momento de realizar un análisis de la actividad matemática, es necesario tener en cuenta ciertos procesos como los de particularización y generalización. Las dimensiones duales extensivo e intensivo (o ejemplar y tipo) refiere a un caso particular y su correspondiente expresión general que representa a todos los casos particulares considerados. Por ejemplo, una función lineal como $y = x + 3$ (extensivo) y su forma general de $y = ax + b$ (intensivo). O sea, es extensivo un ejemplo particular de una clase generalizada (intensivo) de ese ejemplo. El proceso de generalización se basa en identificar un patrón o una regularidad sobre la base de ciertos casos particulares. Por su parte, el proceso de particularización consiste en identificar, indicar o mostrar casos particulares que pertenecen a un determinado patrón. Los procesos que aparecen aquí, como dualidad, son la *particularización* y la *generalización*.
- *Unitario - Sistémico*: un objeto matemático puede ser considerado de manera elemental o unitaria, sin la consideración de las relaciones con otros; sin embargo, para ciertos fines, puede estudiarse el mismo desde el sistema de objetos en el que aparece compuesto y estructurado. Por ejemplo, para el estudio de la adición en cursos altos de instrucción, el objeto matemático “sistema de numeración decimal” (unidades, decenas, centenas, etc.) es considerado como algo conocido, como una entidad unitaria. Es decir, no es necesario desglosarlo en entidades más elementales, sino que se sintetiza ese objeto matemático para poder abordar el nuevo objeto que es la adición. Pero en cursos más bajos de instrucción, el mismo sistema de numeración decimal necesariamente debe ser considerado de manera sistémica; debe poder descomponerse

o analizarse en sus elementos más simples para poder comprenderlos, estudiarlos y aprenderlos. Tanto las configuraciones ontosemióticas como los objetos matemáticos pueden analizarse desde sus dos perspectivas: unitaria y sistémica, dependiendo del tipo de estudio que se realice. La unitarización (también denominada reificación) es el proceso que realiza una síntesis a partir de toda la información disponible sobre un objeto matemático; mientras que la descomposición realiza el análisis de los componentes de un sistema. Es decir, podemos considerar un problema general o global (sistémico) que puede descomponerse en problemas elementales o más simples. Luego, los conceptos y propiedades analizados pueden ser reificados o unitarizados, o sea, comprendidos como objetos unitarios a fin de aplicarlos a nuevos problemas. En la práctica, podemos descomponer un problema principal en sub-problemas y tratar a estos últimos como una unidad para luego plantearse una mirada integral sobre el primero. Podemos decir que el proceso de unitarización se inicia a partir del análisis de una entidad matemática sistémica y que, a los fines de eficiencia operativa y discursiva (o ahorro de energía), posteriormente se lo considera como una nueva entidad unitaria, que podríamos denominar proceso de objetivación. Más sencillamente, la unitarización consiste en el proceso de colecciones de objetos a un solo objeto. El proceso de descomposición será el contrario al anterior. Los procesos que aparecen aquí, como dualidad, son la *unitarización* y la *descomposición*.

En la Figura 2 se visualizan las relaciones entre los objetos primarios, los objetos secundarios y los procesos detallados antes, a modo de esquema o modelo ontosemiótico para el análisis de prácticas matemáticas.

Figura 2 – Configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos.



Fuente: Godino (2024).

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

3.1 Paradigma de investigación

El paradigma cualitativo en investigación educativa se enfoca en la comprensión de los procesos educativos desde una perspectiva subjetiva y contextualizada. Se basa en la interpretación de los datos y la construcción de significados a partir de ellos, y se centra en el diseño y exploración de innovaciones educativas a través de la construcción de instrumentos para tal fin (Bell, 2004; Hernández Sampieri et al., 2006; Muñoz, 2017; Quintero Saavedra, 2016).

Dicho paradigma apunta a la comprensión de los procesos educativos y a la exploración de las experiencias y percepciones de los individuos involucrados en estos procesos. Algunas de las características del paradigma cualitativo en investigación educativa son: el enfoque subjetivo, la contextualización, la flexibilidad ante procesos educativos y la interpretación de los datos. Esto se evidenció a través de la intervención del investigador para comprender e interpretar los datos recolectados durante el proceso de indagación.

Para identificar y caracterizar los procesos matemáticos que los estudiantes desarrollan al momento de resolver problemas algebraicos, son necesarios el análisis en profundidad, la contextualización de las situaciones-problema, la flexibilidad ante la obtención de respuestas disímiles y la interpretación de los datos para la posterior construcción de significados.

Se trabajó con la población de estudiantes de los profesorados en Matemática y Física de la UNCAus. En el presente estudio se presentan resultados de cinco estudiantes. El papel del investigador fue de participante; es decir, realizó interacciones escolares con sus alumnos. Dichas intervenciones se pudieron concretar sabiendo que la contextualización y la flexibilidad son características de los procesos educativos, los cuales fueron considerados en favor de los objetivos de la investigación.

3.2 Encuadre metodológico

Se desarrolló una investigación de tipo cuasi-experimental con un diseño transeccional descriptivo, trabajando a través de un estudio de casos y desde una perspectiva etnográfica, indagando sobre procesos matemáticos al momento de resolver problemas algebraicos con ecuaciones de primer grado con una incógnita y sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.

La investigación basada en diseño se diferencia de la experimentación de corte clásico-positivista porque se realiza en contextos reales, no en laboratorios. Se inicia con un plan general y con materiales no necesariamente determinados de manera definitiva en sus inicios, sino que se van ajustando durante el proceso investigativo. No está orientado a demostrar una hipótesis, sino al desarrollo de un perfil que caracterice la práctica (Kelly et al., 2008; Brown, 1992; DBRC, 2003).

Además, dentro de las herramientas teóricas de análisis de las prácticas matemáticas del EOS, nos centramos en la identificación y caracterización de objetos y procesos matemáticos al momento de resolver problemas algebraicos.

3.3 Investigación basada en diseño (IBD)

La IBD se presenta como cierto tipo de aproximaciones metodológicas cuyo objetivo es el estudio del aprendizaje en contexto. Implica una interdependencia entre un posible diseño instruccional que se pueda elaborar para un fin determinado, y el proceso de investigación o indagación sobre la propia situación. La teoría, el diseño metodológico y la experimentación en un contexto escolar o áulico son componentes de un mismo camino de indagación.

La IBD trata de distanciarse y diferenciarse de la investigación empírica, cuantitativa o básica. Más bien se concentra en la articulación entre investigación, diseño, desarrollo y práctica, con el enfoque en la resolución de problemas prácticos y en la implicación de todos los actores institucionales al momento de indagar sobre una situación (De Benito et al., 2016).

Según Molina et al. (2011), la IBD establece el desarrollo de tres fases al momento de realizar un experimento de diseño: fase 1, preparación del experimento; fase 2, experimentación; y fase 3, análisis retrospectivo. Se detallan a continuación cada una de ellas, así como sus pasos correspondientes.

La fase 1 corresponde a una instancia previa a la realización del experimento. Se deben considerar aspectos como la indagación de los fines instruccionales (aunque estén marcados de antemano por los diseños curriculares), los conocimientos previos de los estudiantes y sus limitaciones, la delimitación de la propuesta que se está realizando, así como todo lo que implica la implementación del experimento, y el contexto teórico y metodológico en el cual se sitúa la experiencia. Esta primera fase de diseño implica pensar en todos los pasos a seguir para indagar sobre el problema, analizar la documentación existente, recabar información, diseñar y aplicar el instrumento de recolección de datos. La fase 2 corresponde a la experimentación o trabajo de campo y la fase 3 consiste en situar los datos recogidos en un contexto teórico más amplio, realizar el análisis de los datos y realizar una reconstrucción instructiva de la teoría.

3.4 Trabajo de campo

Dentro de la fase 1 (preparación del experimento), como primer paso se realizó un análisis de toda la documentación existente y vinculada con la enseñanza de los temas “ecuaciones” y “sistemas de ecuaciones”, tanto en el nivel secundario como universitario. Además, se indagó acerca de las metodologías de enseñanza que oficialmente se aplican en las carreras universitarias de la UNCAus. Es decir, se realizaron los siguientes procesos:

- *Lectura y análisis de los diseños curriculares:* tanto del nivel secundario como de las diferentes carreras universitarias. En general es documentación que se encuentra disponible en las instituciones educativas, incluso al alcance vía internet en sus diferentes sitios. Para el nivel secundario están disponibles los diseños curriculares jurisdiccionales de la provincia del Chaco. En este caso se analizaron tres orientaciones, por ser las más frecuentes en el ámbito educativo del nivel: orientación en Economía y Administración; orientación en Ciencias Naturales, orientación en Informática. Se indagó sobre la propuesta de formación del nivel y del ciclo orientado. Para el caso de las carreras de grado universitario, se analizó el diseño curricular de cada carrera que ofrece la UNCAus.

- *Análisis de propósitos y objetivos instruccionales:* a partir de la lectura de programas, planificaciones y diseños curriculares.
- *Análisis de las orientaciones metodológicas y didácticas:* indagando las utilizadas por los docentes como intención declarativa desde la documentación disponible oficialmente.
- *Análisis de programas y planificaciones:* tanto del último año del nivel secundario como del primer año universitario. Se analizaron proyectos áulicos del nivel secundario y programas y planificaciones de las carreras de los profesorados y de otras carreras universitarias, a modo de comparación. Se analizaron especialmente los contenidos o saberes que figuran en dicha documentación, con el fin de tomar conocimiento de estos y seleccionarlos para elaborar, posteriormente, el instrumento de recolección de datos.
- *Selección de contenidos, problemas, saberes:* se realizó una primera lista o selección de temas para ser organizados e incorporados como material para el instrumento de recolección. Se contrastaron los contenidos del nivel secundario y del primer año universitario.

Como segundo paso, a través de la elaboración propia y contando con la información recabada en la etapa anterior, se realizó lo siguiente.

- *Pre-selección de problemas:* se seleccionaron una serie de situaciones-problema (entre veinte y veinticinco) para analizar sus formas de resolución y los diferentes pasos o procedimientos matemáticos y metodológicos, con el fin de lograr una diversidad y un desarrollo amplio en el espectro de caminos resolutorios. Esta primera selección permite al investigador profundizar en las técnicas matemáticas y en los pasos que pueden aplicarse para la resolución.
- *Elaboración del instrumento de recolección:* a partir del análisis anterior, se confeccionó el instrumento de recolección de datos, teniendo en cuenta el marco teórico, el buceo bibliográfico y la revisión de la documentación. Además, se elaboró una matriz de desempeño con el fin de registrar el tipo de resolución que los diferentes estudiantes podían realizar al momento de resolver los problemas propuestos. Se confeccionó el instrumento con un total de cinco situaciones-problema para que los estudiantes pudieran resolverlas.

Dentro de la fase 2 (experimentación) se realizó la aplicación del instrumento de recolección de datos a un grupo de cuatro estudiantes del profesorado en Matemática y un estudiante del profesorado en Física de la UNCAus, que se encontraban cursando el 4° año de dichas carreras. Se decidió trabajar con ellos para probar el instrumento con alumnos que cuenten con experiencia en el pasaje por la formación universitaria, a modo de reaseguro para posteriores aplicaciones con ingresantes, en el marco de la tesis doctoral en desarrollo.

En la fase 3 (de análisis retrospectivo) se realizó el análisis de las producciones realizadas por los estudiantes, a partir del marco teórico y de la observación realizada durante la aplicación del instrumento, tomando como referencia la configuración ontosemiótica epistémica, realizada con anterioridad a la aplicación del instrumento.

3.5 Instrumento de recolección

Uno de los propósitos de la presente experiencia fue poner a prueba el instrumento de recolección y establecer si es científicamente válido o si requiere modificaciones. Esto facilitó advertir sus aspectos positivos y posteriores mejoras, útiles tanto para el desarrollo de la tesis doctoral mencionada al inicio como para futuras investigaciones.

Retomando la preselección de problemas y la elaboración del instrumento de recolección (Fase 1), este se confeccionó a partir de una exhaustiva revisión de diseños curriculares y Núcleos de Aprendizaje Prioritarios (NAP), la consulta de libros de texto impresos y digitales, apuntes de cátedra y sitios de Internet. Además, se tomó referencia de entidades matemáticas como la Unión Matemática Argentina (UMA) y la Olimpiada Matemática Argentina (OMA), así como los sitios web de diversas universidades argentinas. El instrumento de recolección quedó conformado de la siguiente manera:

Problema N°1: *Resolver y verificar si el resultado es correcto:*

$$7. (w - 3) = 9. (w + 1) - 34$$

Problema N°2: *Resolver:*

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -123 \end{cases}$$

Problema N°3: *Tres socios forman una sociedad. El primero aporta las $\frac{2}{5}$ partes del capital; el segundo $\frac{1}{3}$ del capital y el tercero \$2.000.000. Hallar el capital social y lo que aporta cada uno.*

Problema N°4: *En un examen tipo test de 30 preguntas se obtienen 0,75 puntos por cada respuesta correcta y se restan 0,25 por cada error. Si un alumno ha sacado 10,5 puntos ¿Cuántos aciertos y cuántos errores ha cometido?*

Problema N°5: *Una gasolinera vende gasolina regular a 2,2 dólares cada galón y gasolina premium a 3 dólares el galón. Al final de un día de trabajo se vendieron 280 galones de gasolina y se recibieron un total de 680 dólares. ¿Cuántos galones de cada tipo de gasolina se vendieron?*

Es importante mencionar que se realizaron varias modificaciones y mejoras a partir del instrumento original. En principio, se pensó en agregar solo problemas extra-matemáticos, luego se advirtió la importancia de conformarlo con situaciones-problema intra y extra-matemáticos. La decisión se justifica desde la concepción que Godino (2023) establece sobre la matemática educativa y la importancia de abordar problemas vinculados con la matemática pura y aplicada; es decir, abordar problemas del mundo extra-matemático como intra-matemático: “el objetivo/motivo de la matemática educativa es el estudio de las relaciones dialécticas entre la matemática pura y aplicada, entre los procesos de creación y aplicación de los conocimientos matemáticos, en cuanto deben ser objeto de enseñanza y aprendizaje” (p. 6).

Luego, se organizaron los cinco problemas, iniciando con los más simples de resolver, para continuar con los más complejos, con el objetivo de estudiar de manera progresiva y sistemática los procesos que surjan en todos ellos. El grado de complejidad de cada problema estuvo determinado por la estructura de los objetos y procesos, estudiados con anterioridad a través de la configuración ontosemiótica epistémica (Figura 2).

Para futuras modificaciones del instrumento, se puede evaluar la posibilidad de que los cinco problemas tengan una vinculación en sus enunciados, en lugar de ser presentados como

situaciones inconexas. Además, evaluar si el problema 5 puede adaptarse a los parámetros de mediciones del contexto (litros por galones y pesos por dólares, por ejemplo).

Si bien esta versión del instrumento no está corregida en función de las apreciaciones de pares expertos, ya fue enviada para su análisis y valoración a docentes e investigadores especialistas en la temática, de Argentina y del exterior.

3.6 Configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos

Hemos elaborado una configuración ontosemiótica epistémica (ver Figura 2) por cada problema, a fin de comprender y sostener teóricamente las posibles resoluciones de los estudiantes implicados en la investigación.

La elaboración de la configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos en el EOS implica una detallada y analítica construcción de los elementos matemáticos y cognitivos involucrados en una situación específica. Este proceso se enfoca en identificar y describir tanto los objetos como los procesos matemáticos que intervienen al abordar una tarea matemática particular. La configuración ontosemiótica epistémica se convierte en un marco teórico que posibilita el análisis y comprensión de la estructura y relación entre los objetos matemáticos, los procesos y las estrategias utilizadas por los estudiantes al enfrentarse a una tarea matemática específica. Este análisis minucioso proporciona información valiosa sobre las dificultades, los conflictos semióticos potenciales y las formas de resolución que los estudiantes pueden emplear. Dicha configuración no solo representa una herramienta teórica para la presente investigación, sino que guía y ordena el análisis.

La aplicación del instrumento de recolección se realizó en la primera semana de junio de 2024, con cuatro estudiantes del 4° año del profesorado en Matemática y un estudiante del profesorado en Física, todos de la UNCAus. Previamente, se les explicó que se iba a realizar la aplicación de un dispositivo, en el marco de una investigación relacionada con la resolución de problemas con ecuaciones y sistemas lineales.

Se les indicó que resolvieran los problemas y dejaran registrados en la hoja los desarrollos o procedimientos matemáticos. Recibieron el instrumento con los cinco problemas, los fueron resolviendo y, conforme finalizaron, se les entregó una segunda hoja con tres preguntas por problema para que respondieran acerca de cómo lo hicieron. Las respuestas complementaron el análisis de las resoluciones y nos brindaron información acerca de los procesos desplegados en las resoluciones.

El tiempo para resolver los problemas fue de aproximadamente una hora y media, y utilizaron veinte minutos para responder las preguntas posteriores. Solo una de las estudiantes tardó más tiempo para la resolución de todos los problemas. Se elaboraron las configuraciones de prácticas, objetos y procesos personal, para cada uno de los estudiantes y de los problemas planteados en el instrumento.

4. RESULTADOS

Como resultado de la aplicación del instrumento, obtuvimos una resolución por cada estudiante. Cada uno resolvió en su mayoría los cinco problemas propuestos, a partir de lo cual se generó el análisis de los objetos y procesos matemáticos implicados. El estudiante E2 pertenece al profesorado en Física y los demás al profesorado en Matemática.

Como se advierte, el volumen del análisis general fue significativo; demandó tiempo y profundización en el estudio de las prácticas resolutorias de cada uno de los alumnos. A continuación, representamos en un cuadro las dimensiones del análisis realizado, con el objetivo de ilustrar la tarea investigativa general, que no pretende sistematizar datos cuantitativos. La marcación con “X” significa que no se encontraron evidencias del proceso que corresponde a su columna en cuestión. La marcación con “✓” significa que se encontraron evidencias del proceso en la resolución del problema y del estudiante correspondiente.

Tabla 1 – Síntesis del estudio de las configuraciones de prácticas, objetos y procesos.

		Procesos primarios						Procesos secundarios									
		Problematización	Comunicación	Definición	Enunciación	Algoritmización	Argumentación	Personalización	Institucionalización	Materialización	Idealización	Representación	Significación	Particularización	Generalización	Unitarización	Descomposición
Estudiante E ₁	Problema 1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	Problema 4	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Estudiante E ₂	Problema 1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	Problema 5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Estudiante E ₃	Problema 1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	X	✓	✓	X	X
	Problema 4	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 5	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Estudiante E ₄	Problema 1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X
	Problema 2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 4	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 5	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Estudiante E ₅	Problema 1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 4	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓
	Problema 5	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓

Fuente: Elaboración propia.

Se observa que el estudiante E_2 solo logró resolver los primeros tres problemas, ya que en los problemas 4 y 5 no hubo escritura o registro de prácticas matemáticas. En cambio, los estudiantes E_3 , E_4 y E_5 pertenecientes al profesorado en Matemática lograron realizar desarrollos resolutorios de todos los problemas. El estudiante E_1 logró realizar desarrollos resolutorios de los problemas 1, 2, 3 y 4.

A continuación, en la Figura 3 presentamos la resolución del problema 5 del estudiante E_5 . Luego, en la Tabla 2 se expone el análisis de dicha resolución, representando primero los objetos/procesos primarios y luego los objetos/procesos secundarios identificados. Se decidió incorporar el análisis/resolución del estudiante E_5 por tratarse de uno de los más completos en cuanto a las prácticas resolutorias y las descripciones realizadas en el instrumento.

Figura 3 – Resolución del estudiante E_5

Problema N° 5:
Una gasolinera vende gasolina regular a 2,2 dólares cada galón y gasolina Premium a 3 dólares el galón. Al final de un día de trabajo se vendieron 280 galones de gasolina y se recibieron un total de 680 dólares. ¿Cuántos galones de cada tipo de gasolina se vendieron?

gasolina regular (x) a uso 2,2 c/galón
gasolina Premium (y) a uso 3 c/galón

$$\begin{cases} x + y = 280 & (1) \\ 2,2x + 3y = 680 & (2) \end{cases}$$

Resolvemos aplicando método de sustitución.
Despejando una variable de cada ecuación

(1) $x + y = 280$
 $y = 280 - x$

(2) $2,2x + 3y = 680$
 $3y = 680 - 2,2x$
 $y = \frac{680 - 2,2x}{3}$

Igualo ambas expresiones $y = y$

$$280 - x = \frac{680 - 2,2x}{3}$$

$$(280 - x) \cdot 3 = 680 - 2,2x$$

$$840 - 3x = 680 - 2,2x$$

$$840 - 680 = -2,2x + 3x$$

$$160 = 0,8x$$

$$160 : 0,8 = x$$

$$200 = x$$

Reemplazo en la ecuación original para encontrar la variable faltante.

$$x + y = 280$$

$$200 + y = 280$$

$$y = 280 - 200$$

$$y = 80$$

Resp: Se vendieron 200 galones de tipo gasolina regular y 80 galones de tipo gasolina Premium

1) Plante que la gasolina regular sería 'x' y la premium 'y'. Ya que la suma de ambos nos darán el total de galones de gasolina. Podemos observar por los precios Se multiplica lo que vale un galón de gasolina regular sumado por lo que vale un galón de gasolina premium, dándonos así el Total.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 2 – Configuración ontosemiótica de objetos y procesos: estudiante E₅.

Problema 5 <i>Una gasolinera vende gasolina regular a 2,2 dólares cada galón y gasolina premium a 3 dólares el galón. Al final de un día de trabajo se vendieron 280 galones de gasolina y se recibieron un total de 680 dólares. ¿Cuántos galones de cada tipo de gasolina se vendieron?</i>	
Objetos/Procesos	Estudiante E ₅
Problema/ Problematización	Se evidencia el proceso de problematización cuando el estudiante plantea un sistema lineal para modelizar el problema y resolverlo. También cuando selecciona un método de resolución, lo aplica siguiendo ciertos pasos y, por último, responde a la pregunta que plantea el problema.
Lenguajes/ Comunicación	Términos y expresiones: - Gasolina regular (x) a USD 2,2 c/galón. - Gasolina premium (x) a USD 3 c/galón. - Resolvemos aplicando método de Igualación, despejando una variable de cada ecuación. - Resuelvo algebraicamente hasta llegar al valor de la variable “x”. - Reemplazo en la ecuación original para encontrar la variable faltante. - Se vendieron 200 galones de gasolina regular y 80 galones de tipo gasolina premium. Notaciones: $\begin{cases} x + y = 280 \\ 2,2x + 3y = 680 \end{cases}$ $x + y = 280$ $y = 280 - x$ $2,2x + 3y = 680$ $y = \frac{680 - 2,2x}{3}$ $280 - x = \frac{680 - 2,2x}{3}$ $x = 200; y = 80$
Conceptos/ Definiciones	- Operaciones matemáticas básicas con números reales: adición, sustracción, multiplicación, división. - Operaciones con términos semejantes. - Propiedad uniforme. “Igualo ambas expresiones, $y = y \dots$” (ecuaciones de 1er grado con dos incógnitas). “Resolvemos aplicando el método de igualación” (sistema de ecuaciones lineales de 2x2). “Igualo ambas expresiones y resuelvo algebraicamente hasta llegar al valor de la variable” (método de Igualación). “Reemplazo en la ecuación original para encontrar la variable faltante” (procedimiento de verificación para sistemas de ecuaciones).

Procedimientos/ Algoritmización	1. Leer el problema y establecer datos e incógnitas. 2. Conformar un sistema lineal de 2×2 que modelice el problema. 3. Resolver el sistema mediante el método de igualación. 4. Realizar la verificación del conjunto solución hallado. • De 1, 2 y 3, calcular los valores de “x” e “y”, que representan la cantidad de galones de cada tipo de gasolina que se vendieron, a través del método de Igualación. De 3 y 4, evaluar el resultado obtenido, según el propio enunciado del problema.
Proposiciones/ Enunciación	• Propiedad distributiva, aplicada para obtener el valor numérico de “x”. • Propiedad reflexiva, para igualar valores como $y = y$. • Propiedad conmutativa, para hallar los valores de las incógnitas. • Propiedad transitiva, al igualar los valores de “y” de ambas ecuaciones del sistema. • Propiedad uniforme, al despejar las incógnitas del sistema de ecuaciones.
Argumentos/ Argumentación	A partir de la lectura del enunciado del problema, el estudiante advierte que puede ser expresado mediante un sistema de ecuaciones lineales de 2×2, y resuelto a través del método de igualación, donde las incógnitas representan los galones de gasolina regular y premium que se vendieron. Utiliza los conceptos, propiedades y procedimientos detallados, para hallar los valores de las incógnitas y dar respuesta al problema.
Personalización/ Institucionalización	Se advierte el proceso de institucionalización en el procedimiento de resolución del problema, por ser típico de la enseñanza en la escolaridad formal.
Materialización/ Idealización	La escritura de números, letras, notaciones, símbolos y palabras que describen los pasos a seguir en la resolución, comprende la parte material u ostensiva que evoca la relación existente entre la cantidad total de galones de gasolina y los dos tipos de gasolina disponibles para vender, que conforman los constructos (no ostensivos). La escritura de cada una de las dos ecuaciones de 1° grado con una incógnita y del sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas del problema es la parte material u ostensiva que evocan los constructos (no ostensivos) del proceso de conformación de una ecuación de primer grado con una incógnita y de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. La escritura de los precios de venta de cada tipo de gasolina y el total de dólares recibidos por una venta es la parte material u ostensiva que evocan los constructos (no ostensivos) de la relación entre la cantidad total de dinero recibido en una venta y los dos tipos de precios de cada gasolina (regular y premium).

Representación/ Significación	Las funciones semióticas entre dos elementos, uno antecedente y el otro consecuente, que se evidencian en la resolución, son: La expresión "$x + y = 280$" (antecedente), remite al contenido que establece que los 280 galones de gasolina son el resultado de la suma de los tipos de gasolina (consecuente). La expresión "$2,2x + 3y = 680$" (antecedente), remite al contenido que establece que los 680 dólares son el resultado del producto de cada tipo de gasolina por su valor por galón (consecuente). La expresión "igualó ambas expresiones: $y = y$" (antecedente), remite al contenido que establece que la igualación de ambas incógnitas de "y" implica la igualación de sus segundos miembros, con lo cual puede hallarse el valor de "x" (consecuente).
Particularización/ Generalización	Formas particularizadas: $280 = x + y$ $\$680 = \$2,2 \cdot x + \$3 \cdot y$ $\begin{cases} x + y = 280 \\ 2,2x - 3y = 680 \end{cases}$ Se pueden identificar dos formas generalizadas: la cantidad total de galones vendidos es igual a la suma de galones de gasolina regular y premium; la cantidad total de dinero recibido es resultado de la sumatoria entre las multiplicaciones de cada cantidad de galones del tipo de gasolina por su precio por galón.
Descomposición/ Unitarización	Se descompone el problema en la venta de 280 galones de gasolina (entre regular y premium), y el monto de dinero obtenido en una venta particular, de los dos tipos de gasolina. Al dar respuesta al problema, hallando los galones de cada tipo de gasolina, se advierte el proceso de unitarización que el estudiante realizó, que le permitió una comprensión reificada del problema.

Fuente: Elaboración propia.

Ahora, en la Figura 4 presentamos el desarrollo resolutorio y el análisis del problema 4, del estudiante E1, consignando únicamente los procesos secundarios. Se incluyó la resolución de dicho estudiante por ser una práctica matemática inconclusa y con errores en los argumentos matemáticos, lo que nos permite contrastar procesos con el estudiante E5.

Figura 4 – Resolución del estudiante E₁.

Problema N° 4:
 En un examen tipo test de 30 preguntas se obtienen 0,75 puntos por cada respuesta correcta y se restan 0,25 por cada error. Si un alumno ha sacado 10,5 puntos ¿Cuántos aciertos y cuántos errores ha cometido?

Datos:
 Preguntas: 30 → lo denoto con C
 Puntos sacados: 10,5
 errores y aciertos: ?
 puntos por respuestas correctas: 0,75 → lo denoto con A
 puntos por cada error: 0,25 → lo denoto con B

establezco la siguiente ecuación

$$A + B = C$$

$$0,75 + 0,25 = 10,5$$

resolviendo

$$B = 30 - A$$

$$0,75 = 30 - 0,75$$

* No se seguir resolviendo

por otro lado se que

$$A + B = 30$$

$$0,75 + 0,25 = 30$$

Fuente: Evidencia de los estudiantes

El análisis de los procesos secundarios se expone en la Tabla 3.

Tabla 3 – Configuración ontosemiótica de objetos y procesos secundarios: estudiante E₁

Problema 4 En un examen tipo test de 30 preguntas se obtienen 0,75 puntos por cada respuesta correcta y se restan 0,25 por cada error. Si un alumno ha sacado 10,5 puntos ¿Cuántos aciertos y cuántos errores ha cometido?	
Procesos	Estudiante E ₁
Personalización/ Institucionalización	El estudiante E1 evidencia el proceso de institucionalización al momento de deducir los “datos” que contiene el problema y asignarle letras: “preguntas: 30; puntos sacados: 10,5; errores y aciertos: ¿?; puntos por respuestas correctas: 0,75; por cada error: 0,25.” El proceso de personalización se puede identificar al observar que supone: $10,5 = C$; $0,75 = A$ y $0,25 = B$, y modeliza mediante las ecuaciones: $A + B = C$; $A + B = 30$; $A + B = 30$.
Materialización/ Idealización	La expresión $A + B = C$ es la parte material (ostensiva) que evoca el constructo (no ostensivo) de la relación de igualdad entre los puntajes por respuestas correctas e incorrectas, y el puntaje obtenido por un estudiante en particular, a través de una ecuación de primer grado. La expresión $A + B = 30$ es la parte material (ostensiva) que evoca el constructo (no ostensivo) de la relación de igualdad entre los puntajes por respuestas correctas e incorrectas, y la cantidad total de preguntas del examen (aclaramos que no estamos analizando el valor de verdad de ambas ecuaciones sino los procesos).

Representación/ Significación	La expresión $A + B = C$ (antecedente), remite al contenido que establece que la suma de puntos correctos e incorrectos es igual a 10,5 (consecuente). Sin embargo, su significado no es el que se corresponde con la expresión. La expresión $A + B = 30$ (antecedente), remite al contenido que establece que la suma de puntos correctos e incorrectos es igual al total de preguntas (consecuente). Sin embargo, su significado no es el que corresponde al problema.
Particularización/ Generalización	La expresión $A + B = C$ expresa de manera general la relación entre puntos por respuestas correctas, por respuestas incorrectas y el total de puntos logrados por un alumno. Luego particulariza el puntaje total de dicho alumno, mediante la expresión $0,75 + 0,25 = 10,5$. De igual modo, realiza la deducción con las expresiones $B = 30$ y $0,75 + 0,25 = 30$.
Unitarización/ Descomposición	Al inicio de la resolución se advierte que el estudiante E1 analiza el problema y comienza a descomponerlo en sus partes más simples. Se observa la discriminación de datos, relaciones entre estos y algunos cálculos menores.

Fuente: Elaboración propia.

Comparando el análisis de las resoluciones escritas por los estudiantes E1 y E5, advertimos la importancia de la identificación de todos los procesos existentes, a fin de comprender los caminos resolutorios, aciertos y errores matemáticos que se presentan en una práctica matemática operativa y discursiva.

Por otra parte, señalamos la importancia de la identificación de la materialización, la particularización y la descomposición, que se presentan de modo evidente y concreto en las resoluciones, pero evocan o remiten a sus duales menos evidentes y abstractos (idealización, generalización y unitarización). Esto nos permite explicitar lo que no se observa a simple vista en la práctica matemática de un estudiante; es decir, la materialización, la particularización y la descomposición son los medios materiales concretos para analizar y profundizar procesos abstractos como la idealización, la generalización y la unitarización.

5. CONSIDERACIONES FINALES

Se ha realizado un análisis para identificar y caracterizar, desde el EOS, los procesos matemáticos primarios y secundarios de estudiantes de los profesorados en Matemática y Física de la UNCAus, en la resolución de problemas algebraicos.

Se diseñó y se aplicó el instrumento de recolección de información y, posteriormente se analizaron las prácticas matemáticas mediante la herramienta configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos por cada estudiante y por cada problema.

Respecto a los problemas que integran el instrumento, estos son típicos de la enseñanza en la escolaridad formal. Si bien algunos contienen parámetros o datos menos comunes, su resolución no requiere de prácticas matemáticas complejas. Se observó que los pasos desarrollados por los cinco estudiantes, en su mayoría, reflejan la institucionalización (prácticas matemáticas institucionales) de las resoluciones, es decir, se advierte la intervención escolar en dichos procedimientos.

Por un lado, los procesos primarios se presentaron en casi la totalidad de las prácticas matemáticas de los estudiantes. Esto puede explicarse a partir de que son los procesos más comunes y conocidos por los alumnos; en general, su uso es muy frecuente en la enseñanza. Los procesos de comunicación, enunciación y algoritmización aparecieron más que otros. El proceso de argumentación no se evidenció significativamente, lo que sugiere que existen dificultades para desarrollar argumentos matemáticos válidos.

El proceso de comunicación destacó como el más utilizado por los alumnos, específicamente a través de notaciones matemáticas, dado que mediante este lenguaje desarrollaron la mayoría de las prácticas matemáticas. En ciertas ocasiones, usaron términos y expresiones lingüísticas para justificar o indicar ciertas prácticas matemáticas.

Por otro lado, se observaron procesos secundarios que se presentaron de un modo más frecuente y evidente. Por ejemplo, la dualidad particularización-generalización se presentó en todas las prácticas matemáticas. Los estudiantes identificaron patrones sobre la base de ciertos indicios particulares observados en los problemas. A su vez, aplicaron a casos específicos determinados patrones matemáticos para desarrollar las resoluciones.

La dualidad idealización-materialización también estuvo presente en todos aquellos estudiantes que desarrollaron procedimientos o resolvieron exitosamente el problema. Los objetos ostensivos permitieron a los estudiantes interactuar directamente con el objeto matemático, lo que facilitó su comprensión mediante la percepción sensorial: números, letras, notaciones, símbolos y palabras que describen los pasos realizados, las ecuaciones y los sistemas, etc. Los objetos no ostensivos se hicieron evidentes al observar las resoluciones y la relación entre los objetos ostensivos y sus resoluciones exitosas. Esto representa los constructos o creaciones discursivas de los estudiantes, que no son perceptibles por sí mismos y se consideran ideales o mentales, implementados para lograr dichas resoluciones.

El proceso de institucionalización estuvo presente en todos los procedimientos matemáticos de los alumnos. El tipo de resolución en estos casos es típico de desarrollos enseñados y aprendidos durante la educación formal. Esto puede entenderse al considerar que todos los estudiantes se encontraban cursando el 4º año de los profesorados en Matemática y Física, sujetos a formas de prácticas matemáticas compartidas y provenientes de las comunidades a las que pertenecen. El proceso de personalización casi no se presentó; no hubo evidencias de desarrollos resolutorios donde alguno de los alumnos aporte propuestas particulares, creativas o no convencionales.

Uno de los aportes significativos del presente trabajo es la consideración del estudio de los procesos matemáticos, a fin de conocerlos, identificarlos y caracterizarlos en profundidad, con el objetivo de mejorar las prácticas matemáticas de los estudiantes. Otra contribución importante del abordaje de procesos concretos como la materialización, la particularización y la descomposición, que evocan o remiten a sus duales (idealización, generalización y unitarización), es que su análisis permite estudiar las prácticas de resolución de los alumnos. Esto nos ayuda a comprender y mejorar las prácticas de enseñanza de la resolución de problemas algebraicos.

Por último, la presente investigación nos permitió profundizar en la identificación, análisis e interpretación de procesos en las prácticas matemáticas de los estudiantes. Para ello, fue fundamental la triangulación de la información, analizar las resoluciones, interpretarlas a través de las referencias teóricas, y volver a identificar los objetos y procesos matemáticos. Contrastando los resultados con el marco teórico, advertimos que la propuesta del análisis de procesos del EOS es significativo y se presenta como una herramienta valiosa para estudiarlos en la práctica diaria.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

Este artículo forma parte de una tesis doctoral (Doctorado en Educación – Universidad Nacional del Nordeste) que se encuentra en desarrollo. Los resultados representan la aplicación realizada como pruebas piloto para evaluar y mejorar el instrumento de recolección.

RFE encuadró teóricamente el trabajo y orientó sobre los pasos generales a seguir para lograr los objetivos. PAW realizó la selección de los problemas, el trabajo de campo, el análisis y sistematización de los datos. RFE y PAW realizaron la configuración ontosemiótica de objetos y procesos, el recorte del marco teórico y el establecimiento de objetivos y la definición del problema de investigación. Los autores participaron en la discusión de los resultados y revisión del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos completos que respaldan la investigación se encuentran disponibles, previa solicitud razonable, a través de los correos electrónicos señalados en el artículo.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a las autoridades de la UNCAus, por habernos permitido realizar el trabajo de campo y utilizar sus instalaciones. Agradecemos a los estudiantes que han participado desinteresadamente en la investigación.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aké Tec, L. P. (2014). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros de formación*. [Tesis doctoral. Universidad de Granada]. https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Lilia_Ake_tesis.pdf
- Bell, P. (2004). On the theoretical breadth of design-based research in Education. *Educational Psychologist*, 4(39), 243-253. https://doi.org/10.1207/s15326985ep3904_6
- Brown, A. L. (1992). Design experiments: theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *Journal of the Learning Sciences*, 2(2), 141-178. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0202_2
- Burgos, M., Bueno, S., Pérez, O., & Godino, JD (2021). Complejidad ontosemiótica de la integral definida. *Revista de Investigación en Educación Matemática*, 10 (1), 4-40. <https://doi.org/10.17583/redimat.2021.6778>
- DBRC (The Design Based Research Collective) (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, 32(1), 5-8. <https://doi.org/10.3102/0013189X032001005>
- De Benito Crosetti, B. y Salinas Ibáñez, J. M. (2016). La investigación basada en diseño en Tecnología Educativa. *RIITE Revista Interuniversitaria de Investigación en Tecnología Educativa*, 0, 44-59. DOI: <http://dx.doi.org/10.6018/riite/2016/260631>.
- Dirección Nacional de Evaluación, Información y Estadística Educativa (2022). *Informe Nacional de Indicadores Educativos: situación y evolución del derecho a la educación en Argentina*. Ministerio de Educación de la Nación.
- Espinoza, F. (2020). Herramientas de análisis didáctico de un proceso de estudio enmarcadas en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Urania. Revista de divulgación cultural sobre la*

- formación docente en matemática*, (7), 29-37. <https://sites.google.com/view/revista-urania/p%C3%A1gina-principal?authuser=0>
- Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 33-52. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9123-7>
- Font, V. M. y Rubio, N. V. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Universidad de Jaén <http://hdl.handle.net/10481/45154>
- Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática, *Infancia y Aprendizaje*, 33 (1), 89-105. <http://10.1174/021037010790317243>.
- Gallo, S., Etchegaray, S., y Markiewicz, M. E. (2017). Análisis ontosemiótico de un problema que promueve la puesta en funcionamiento del razonamiento conjetural. *Yupana. Revista de Educación Matemática de la UNL*, 11, 38-57. <https://doi.org/10.14409/yy.v0i11.8841>
- Godino, J. D. (2022). “Emergencia, estado actual y perspectiva del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, 2 (2), Artículo e202201. <https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.25>
- Godino, J. D. (2023). Enfoque ontosemiótico de la filosofía de la matemática educativa. *Revista Paradigma Edição Temática: EOS. Questões e Métodos*, 7-33.
- Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. Editorial Aula Magna. McGraw-Hill Interamericana de España, S. L.
- Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista chilena de educación matemática*, 12(2), 47-59. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25>
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., Baptista Lucio, P. (2006). “*Metodología de la investigación (4ª ed.)*”. McGraw-Hill.
- Kelly, A. E., Lesh, R. A., y Baek, J. Y. (2008). *Handbook of design research methods in education* (pp. 511-534). Routledge.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 29(1), 75-88.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2002). “*Normas y estándares para la evaluación*”. Grupo Editorial Iberoamérica S. A. de C. V.
- Quintero Saavedra, A.C. (2016). Reseña crítica de “El paradigma cualitativo en la investigación socio-educativa”. *Infancias Imágenes*, 15.

