



APLICACIÓN DE LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN CÁLCULO MULTIVARIABLE MEDIANTE LA CONSTRUCCIÓN DE UNA MONTAÑA RUSA FÍSICA Y VIRTUAL

APPLICATION OF SEMIOTIC REPRESENTATIONS IN MULTIVARIABLE CALCULUS THROUGH THE CONSTRUCTION OF PHYSICAL AND VIRTUAL ROLLER COASTER

Juan Carlos Ruiz Castillo¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2218-1442>

RESUMEN

Este trabajo presenta la aplicación de las representaciones semióticas en el cálculo multivariable, utilizando la construcción de una montaña rusa física y su modelado en GeoGebra como herramientas de aprendizaje. La investigación se realizó con estudiantes de ingeniería y permitió explorar cómo las ecuaciones paramétricas y las representaciones gráficas favorecen el tránsito entre lo abstracto y lo tangible. Surge así la pregunta de investigación: *¿cómo incide la aplicación de las representaciones semióticas, a través del uso de GeoGebra y la construcción física de una montaña rusa, en la comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo multivariable en estudiantes de ingeniería?* Para responderla, se plantea como objetivo general analizar cómo la aplicación de las representaciones semióticas mediante el uso de GeoGebra y la construcción física de una montaña rusa facilita la comprensión de los conceptos del cálculo multivariable en estudiantes de ingeniería. Se evidenció un interés marcado en los estudiantes, una comprensión profunda de las ecuaciones paramétricas y un uso eficaz de GeoGebra para visualizar modelos tridimensionales, lo cual promovió una mejor integración de conocimientos interdisciplinarios.

Palabras clave: cálculo multivariable, representaciones semióticas, GeoGebra, ingeniería, ecuaciones paramétricas.

ABSTRACT

This work presents the application of semiotic representations in multivariable calculus through the construction of a physical roller coaster and its modeling using GeoGebra as learning tools. The research was conducted with engineering students and explored how parametric equations and graphical representations help bridge the gap between abstract concepts and tangible understanding. The guiding research question is: *How does the application of semiotic representations—through the use of GeoGebra and the physical construction of a roller coaster—impact engineering students' understanding of fundamental multivariable calculus concepts?* To address this question, the general

¹ Catedra de Matemática Escuela de Formación de Profesores en Enseñanza Media, Universidad de San Carlos de Guatemala, Guatemala, Guatemala, código postal C. P. 01010. Correo electrónico: jcefpem@profesor.usac.edu.gt



objective is to analyze how the application of semiotic representations through the use of GeoGebra and the physical construction of a roller coaster facilitates the understanding of multivariable calculus concepts in engineering students. The study revealed significant student interest, a solid understanding of parametric equations, and effective use of GeoGebra for visualizing 3D models, promoting better interdisciplinary knowledge integration.

Keywords: multivariable calculus, semiotic representations, GeoGebra, engineering, parametric equations.

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo multivariable desempeña un papel crucial en la formación de los estudiantes de ingeniería, ya que proporciona las herramientas matemáticas necesarias para modelar y resolver problemas complejos que involucran múltiples variables. Desde el diseño de estructuras hasta la simulación de trayectorias en sistemas físicos, este campo permite conectar los conceptos teóricos con aplicaciones del mundo real, pues conlleva a una comprensión integral del entorno tridimensional. La capacidad de interpretar y manipular funciones de varias variables resulta esencial para el análisis de fenómenos físicos y la optimización de procesos en diversas disciplinas de la ingeniería.

El presente trabajo se enfoca en la aplicación del enfoque de representaciones semióticas para facilitar el aprendizaje de conceptos fundamentales del cálculo multivariable. Este enfoque, basado en la traducción y coordinación entre distintos registros de representación, permite a los estudiantes desarrollar habilidades cognitivas para transitar entre lo algebraico, gráfico y físico. Una herramienta clave para este proceso es el software GeoGebra, el cual brinda un entorno visual y manipulativo donde los estudiantes pueden experimentar y validar sus conocimientos.

Ruiz Castillo (2022) destaca que el uso de GeoGebra para modelar trayectorias tridimensionales, combinado con la construcción física de modelos, no solo promueve un aprendizaje significativo, sino que también potencia la autonomía y motivación de los estudiantes. Esta integración de tecnología y práctica física facilita la comprensión de conceptos abstractos, como las ecuaciones paramétricas, la derivada en varias variables y las trayectorias espaciales. En este contexto, el diseño y simulación de una montaña rusa representa una actividad interdisciplinaria ideal para aplicar y consolidar los conceptos del cálculo multivariable, dado que involucra conocimientos tanto matemáticos como de ingeniería y física.

2. ABORDAJE METODOLÓGICO

Elementos teóricos y conceptuales

2.1 Enfoque teórico

El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOCM) proporciona una base teórica robusta para analizar y mejorar la manera en que los estudiantes interpretan, integran y coordinan diversas representaciones semióticas en el proceso de aprendizaje. Este enfoque se centra en la interacción entre los objetos matemáticos y sus diversas representaciones, tales como expresiones algebraicas, gráficas, tabulares y representaciones físicas (Godino, Batanero

y Font, 2009). Al reconocer que las representaciones no son simples traducciones mecánicas entre registros, el enfoque ontosemiótico subraya la importancia de construir significados coherentes y estructurados.

Una de las bases fundamentales de este enfoque es la teoría de registros de representación de Duval (2006), la cual establece que la comprensión profunda de un concepto matemático no depende exclusivamente de su representación en un solo registro, sino de la capacidad de traducir y coordinar entre varios registros. Este proceso involucra tareas cognitivas complejas, como identificar invariantes entre representaciones y reconocer la relevancia de cada una según el contexto del problema. Guerrero Morales y Falk de Losada (2023) subrayan que esta capacidad de transición entre registros es fundamental en el cálculo multivariable, donde los estudiantes deben relacionar representaciones algebraicas de ecuaciones paramétricas con su interpretación gráfica y geométrica.

Duval (2006) destaca que el éxito en la resolución de problemas matemáticos radica en la coordinación interna entre los sistemas de representación, la cual implica no solo reconocer equivalencias entre representaciones, sino también comprender cómo estas se complementan y enriquecen mutuamente. Por ejemplo, en el contexto del cálculo multivariable, la interpretación geométrica de las ecuaciones paramétricas permite a los estudiantes visualizar trayectorias espaciales que resultarían difíciles de conceptualizar solo con expresiones algebraicas (Godino y Font, 2010).

En este sentido, herramientas tecnológicas como GeoGebra juegan un papel crucial. Este software permite una interacción directa con los objetos matemáticos mediante la manipulación de gráficas, puntos y vectores en el espacio tridimensional, lo que facilita el proceso de transición entre lo abstracto y lo concreto (Guachún Lucero y Espadero Faicán, 2021). La visualización gráfica en tiempo real permite que los estudiantes detecten errores, ajusten sus ecuaciones y comprendan mejor las implicaciones geométricas de los cálculos matemáticos. Además, GeoGebra fomenta un entorno de aprendizaje activo donde los estudiantes pueden explorar de manera autónoma y creativa (Hitt y Saboya, 2020).

El enfoque ontosemiótico también enfatiza el papel de la práctica social y colaborativa en la construcción del conocimiento matemático. La discusión en grupos permite validar y ajustar los significados asignados a las diferentes representaciones; crea un entorno donde los estudiantes construyen comprensiones compartidas (Godino, 2013). En este sentido, proyectos interdisciplinarios como la simulación de una montaña rusa facilitan la integración del conocimiento matemático, físico y computacional, al proporcionar un contexto real y desafiante que promueve la participación activa de los estudiantes (Ruiz Castillo, 2022).

En fin, el enfoque ontosemiótico –junto con la teoría de registros de representación– ofrece una guía esencial para diseñar actividades de aprendizaje donde la coordinación entre registros permita superar las dificultades inherentes al aprendizaje del cálculo multivariable. Estas actividades pueden mejorar la comprensión y retención de conceptos matemáticos complejos, especialmente cuando se apoyan en herramientas tecnológicas como GeoGebra y estrategias colaborativas.

2.2 Descripción del trabajo realizado

Este trabajo se llevó a cabo con un grupo de 12 estudiantes de ingeniería en el marco de un curso de cálculo multivariable, durante un semestre académico. El objetivo fue integrar conceptos teóricos y prácticos mediante el diseño y construcción de una montaña rusa tanto en su versión física como virtual, utilizando el software GeoGebra. En una primera etapa del

curso se desarrollaron los contenidos fundamentales del cálculo multivariable, tales como funciones de varias variables, ecuaciones paramétricas, derivadas parciales, gradiente, extremos y trayectorias en el espacio tridimensional. Una vez abordados estos temas desde el enfoque teórico, se dio paso a la implementación del proyecto como una estrategia de aplicación interdisciplinaria. La actividad se estructuró en varias fases interrelacionadas que fomentaron la colaboración entre los estudiantes y la aplicación de herramientas tecnológicas para resolver problemas reales. Cada fase permitió poner en práctica los contenidos del curso, lo que facilitó el tránsito entre los registros algebraico, gráfico y físico, conforme al marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática y la teoría de registros de representación de Duval.

Fase 1: Introducción y desarrollo de conceptos teóricos

Durante la primera etapa del proyecto se desarrollaron en clase los conceptos fundamentales del cálculo multivariable, los cuales fueron clave para la futura implementación del diseño de la montaña rusa. Participaron 12 estudiantes de ingeniería, quienes abordaron temas como funciones vectoriales, ecuaciones paramétricas, derivadas parciales, gradiente y visualización tridimensional.

Uno de los primeros tópicos fue el estudio de funciones vectoriales, que permitieron representar la posición de un objeto en el espacio tridimensional como una función del tiempo o de otro parámetro. Este conocimiento resultó fundamental para el trazado de trayectorias en el diseño de la montaña rusa. Posteriormente, se trabajó con ecuaciones paramétricas, las cuales fueron esenciales para modelar cada punto del recorrido de la estructura; especialmente en secciones como ascensos pronunciados, descensos suaves y bucles. Esto permitió representar con precisión la trayectoria del carrito.

Asimismo, se introdujeron las derivadas parciales, orientadas al análisis de velocidad y aceleración en distintas direcciones del espacio. Esto aportó una visión dinámica del movimiento y permitió a los estudiantes comprender el comportamiento del modelo en términos físicos, como los cambios de velocidad y la distribución de fuerzas. Finalmente, las representaciones tridimensionales apoyadas por software como GeoGebra facilitaron una visualización completa del recorrido, por lo que permitieron observarlo desde múltiples perspectivas antes de su construcción física.

Desde el punto de vista teórico, esta fase se enmarca en el enfoque de las representaciones semióticas según Duval (2006), quien sostiene que el aprendizaje matemático profundo exige no solo operar en un registro de representación (por ejemplo, algebraico o gráfico), sino lograr la conversión significativa entre distintos registros. En este sentido, el tránsito entre representaciones algebraicas (como las ecuaciones paramétricas) y gráficas (como el recorrido simulado) es crucial para que los estudiantes construyan un significado coherente del objeto matemático en estudio.

El desarrollo de esta fase también se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOCM), el cual enfatiza la interacción entre los objetos matemáticos, los significados personales de los estudiantes y los sistemas de representación involucrados (Godino, Batanero y Font, 2007, 2009). Según este enfoque, la comprensión del conocimiento matemático emerge de la coordinación de prácticas y significados en contextos específicos; como en este caso, la aplicación del cálculo multivariable en la construcción de una montaña rusa. El diseño de actividades centradas en esta coordinación entre registros y significados

permite identificar configuraciones epistémicas y cognitivo-afectivas relevantes para la enseñanza.

Durante esta fase los docentes también incorporaron actividades guiadas para enfatizar la importancia de las representaciones semióticas en la descripción del movimiento tridimensional. Se trabajaron ejemplos específicos de trayectorias paramétricas que luego serían replicadas o adaptadas por los estudiantes en el desarrollo del proyecto. Así, esta fase sentó las bases conceptuales y cognitivas para el tránsito hacia una aplicación interdisciplinar del cálculo multivariable, donde los saberes matemáticos comenzaron a contextualizarse mediante herramientas tecnológicas y situaciones reales.

Fase 2: Modelado matemático de la trayectoria

Durante la segunda fase del proyecto, los estudiantes trabajaron colaborativamente en grupos para diseñar el modelo matemático de la trayectoria de la montaña rusa. El objetivo fue construir representaciones algebraicas precisas que capturaran el recorrido completo de la estructura, haciendo uso de ecuaciones paramétricas que describieran la posición del carrito en función de un parámetro común, generalmente el tiempo. Se modelaron diversas secciones del recorrido —subidas, bajadas, giros y bucles— utilizando funciones de varias variables, priorizando la continuidad, suavidad y plausibilidad física del movimiento.

Cada grupo propuso un conjunto de ecuaciones que posteriormente fue revisado y ajustado con base en criterios tanto matemáticos como físicos. Entre los criterios evaluados se encontraban: la continuidad de la velocidad (evitar saltos abruptos entre tramos), la suavidad de las curvas (para garantizar trayectorias diferenciables), y el respeto de las condiciones de entrada y salida de cada segmento de la montaña rusa. Este proceso implicó que los estudiantes debieran realizar razonamientos analíticos sobre las condiciones iniciales y de borde, así como verificar el comportamiento global del sistema modelado.

Desde una perspectiva teórica, esta fase supuso un avance en el tránsito entre registros semióticos, al llevar a los estudiantes desde una comprensión visual e intuitiva del recorrido hacia una representación algebraica formal mediante ecuaciones paramétricas. Según Duval (2006), este tipo de conversión entre registros —en este caso, del gráfico o verbal al algebraico— es una de las operaciones cognitivas más complejas del aprendizaje matemático, y constituye una condición necesaria para la comprensión profunda de los conceptos involucrados.

Además, el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática permite interpretar este proceso como una construcción de significado donde las prácticas matemáticas (definir ecuaciones, verificar condiciones, interpretar resultados) están mediadas por objetos semióticos que representan la trayectoria (Godino, Batanero y Font, 2007, 2009). Cada expresión algebraica constituye no solo una herramienta operativa, sino también un signo que debe ser interpretado dentro del sistema de prácticas del aula y del proyecto. Así, los estudiantes no solo manipularon fórmulas, sino que comenzaron a articular un sistema de significados matemáticos coherente con los fenómenos físicos simulados.

El hecho de que cada grupo desarrollara su propio modelo también promovió la emergencia de configuraciones epistémicas diversas, al permitir múltiples formas válidas de describir una misma trayectoria. Esto fomentó discusiones intergrupales sobre la idoneidad, equivalencia y conveniencia de diferentes modelos, y abrió oportunidades para el desarrollo del pensamiento crítico y la metacognición matemática.

Fase 3: Simulación en GeoGebra

Una vez definidas las ecuaciones paramétricas para describir el recorrido de la montaña rusa, los estudiantes emplearon el software GeoGebra 3D como herramienta tecnológica para representar gráficamente sus modelos en un entorno tridimensional. Esta simulación permitió visualizar de manera dinámica la trayectoria completa, lo que facilitó la verificación y el ajuste de las ecuaciones desarrolladas en la fase anterior. La posibilidad de manipular los parámetros en tiempo real dentro del entorno virtual promovió una interacción directa con los objetos matemáticos, y permitió a los estudiantes explorar cómo pequeños cambios en los coeficientes o funciones modificaban la geometría del recorrido.

El uso de GeoGebra se constituyó como una instancia clave de traducción entre registros semióticos, particularmente entre el registro algebraico (las ecuaciones paramétricas) y el registro gráfico (la visualización 3D). De acuerdo con Duval (2006), estas transiciones son fundamentales en el aprendizaje matemático, ya que permiten al estudiante establecer correspondencias significativas entre distintas formas de representación de un mismo objeto. En este caso, visualizar cómo la modificación de una expresión algebraica repercute en la forma de la trayectoria refuerza la comprensión funcional y geométrica de los modelos.

Desde el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (Godino, Batanero y Font, 2007, 2009), esta etapa representa una configuración epistémico-tecnológica en la que el software actúa como instrumento semiótico que media entre el conocimiento matemático formal y su interpretación visual y contextualizada. GeoGebra no solo permite representar, sino también experimentar con los objetos matemáticos, de manera que fomenta una práctica exploratoria que impulsa la construcción activa del significado. En este sentido, el entorno tecnológico no se limita a ilustrar resultados, sino que habilita nuevas formas de razonamiento y validación.

Adicionalmente, el trabajo con GeoGebra favoreció el desarrollo de habilidades metacognitivas al permitir que los estudiantes compararan sus modelos con otros grupos, identificaran inconsistencias y reflexionaran sobre las decisiones tomadas en la formulación de sus ecuaciones. La retroalimentación inmediata proporcionada por la herramienta digital fortaleció la autonomía cognitiva de los estudiantes, dado que les permitió asumir un rol más activo en el proceso de verificación y mejora de sus propuestas matemáticas.

Descripción del modelo de la montaña rusa en GeoGebra

La montaña rusa modelada en GeoGebra es un ejemplo excelente de la aplicación de múltiples conceptos de cálculo multivariable, ya que integra ecuaciones paramétricas y geometría tridimensional. Se observa que el modelo está compuesto por curvas suaves, bucles, y pendientes ascendentes y descendentes, todos representados en un sistema tridimensional (x, y, z) .

Ecuaciones paramétricas y trayectorias

El corazón del diseño radica en las ecuaciones paramétricas, que definen el movimiento del carrito de la montaña rusa en función de un parámetro t . Este parámetro controla la posición del carrito en cada instante, especificando su ubicación en los ejes x, y, z .

Ejemplo conceptual de ecuaciones paramétricas:

- $x(t) = f(t)$ describe el movimiento horizontal a lo largo del eje x .
- $y(t) = g(t)$ indica la variación en la dirección lateral.

- $z(t) = h(t)$ representa la elevación del carrito a lo largo de la trayectoria.

En el modelo de la Figura 1, las curvas suaves y los bucles implican ecuaciones que varían en función de funciones sinusoidales o polinomiales, y aseguran continuidad y suavidad en el recorrido.

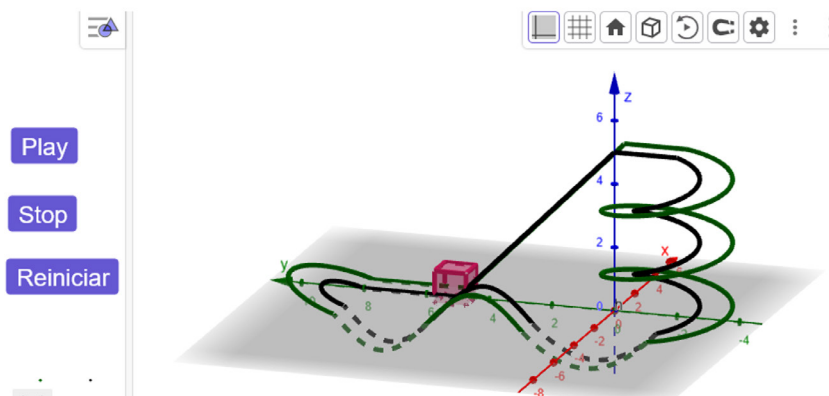
Aplicación de temas de cálculo multivariable

1. **Funciones de varias variables:** El modelo involucra funciones dependientes de múltiples variables, como el tiempo y la posición espacial. La interacción entre estas variables es clave para generar el movimiento continuo y fluido.
2. **Derivadas parciales:** Durante el diseño, las derivadas parciales permitieron analizar la velocidad del carrito en diferentes direcciones $\left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right)$, así como la aceleración resultante.
3. **Gradiente y derivadas direccionales:** El cálculo del gradiente se utilizó para determinar la dirección de mayor incremento de la altura (z), esencial para ajustar las pendientes y evitar cambios bruscos en la trayectoria.
4. **Extremos y optimización:** Se optimizó la forma de los bucles y curvas para garantizar que no existan puntos críticos donde la velocidad disminuya a cero, para evitar posibles detenciones no deseadas del carrito.
5. **Representaciones tridimensionales:** GeoGebra permitió visualizar cómo el carrito se desplaza en el espacio tridimensional, de forma que facilitó la comprensión geométrica de la trayectoria y permitió ajustes en tiempo real.
6. **Integrales múltiples:** Aunque implícitamente, se pueden calcular áreas y volúmenes bajo la curva de la montaña rusa o incluso energía potencial acumulada en las secciones más altas.

Simulación y validación

El botón de “play” visible en la interfaz de GeoGebra sugiere la simulación dinámica del movimiento del carrito. Durante la simulación los estudiantes pueden observar cómo los cambios en los parámetros afectan la trayectoria y ajustar las ecuaciones paramétricas en tiempo real (Figura 1). Esto fomenta un aprendizaje exploratorio y experimental.

Figura 1 – Representación de la montaña rusa en GeoGebra.



Fuente: Elaborado en GeoGebra.

Fase 4: Construcción física de la montaña rusa a escala

Tras la validación de las ecuaciones paramétricas mediante simulaciones en GeoGebra, los estudiantes procedieron a construir una versión física a escala de la montaña rusa. Para ello, utilizaron materiales accesibles como madera, tubos plásticos, cartón y piezas metálicas, lo que permitió materializar el modelo matemático diseñado previamente. Esta fase fue esencial para promover la conexión entre el conocimiento abstracto y su aplicación tangible, pues implicó que los estudiantes observaran y evaluaran directamente la correspondencia entre el comportamiento teórico del modelo y su desempeño físico real.

Durante el proceso constructivo surgieron diversos desafíos técnicos vinculados a la fricción, el peso de los materiales, las dimensiones físicas del prototipo y la estabilidad estructural. Estos factores obligaron a los estudiantes a ajustar sus modelos matemáticos, realizar nuevos cálculos y tomar decisiones basadas en consideraciones físicas y prácticas. Así, el modelo no fue simplemente replicado, sino que se reinterpretó y adaptó a condiciones del mundo real, lo que reforzó la comprensión interdisciplinaria del fenómeno.

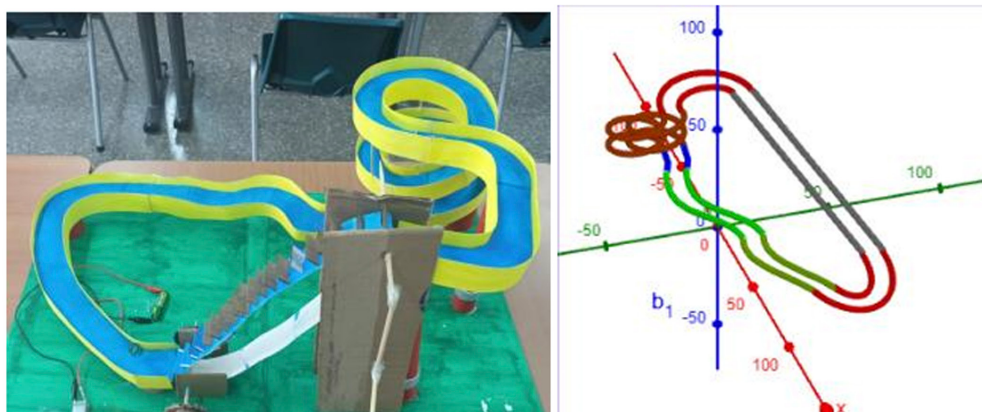
Desde una perspectiva teórica, esta fase constituye una instancia de traducción hacia el registro físico de representación, el cual Duval (2006) identifica como complementario a los registros algebraico, gráfico y tabular. Aunque menos formal, este registro es esencial para consolidar el significado de los objetos matemáticos en contextos concretos. La construcción tangible de la montaña rusa permitió a los estudiantes verificar la validez de sus representaciones anteriores, detectar inconsistencias, y ajustar parámetros para mantener la coherencia entre lo modelado y lo observado, lo cual favorece el desarrollo de una comprensión funcional y aplicada.

En el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (Godino, Batanero y Font, 2007, 2009), esta fase constituye un momento clave de práctica institucionalizada, en donde los objetos matemáticos adquieren sentido en la medida en que se integran a situaciones reales. El modelo físico no es únicamente una ilustración del contenido aprendido, sino una configuración epistémica que permite valorar la pertinencia del conocimiento matemático

al ser puesto en acción. El tránsito entre registros, más allá de una mera conversión simbólica, se convierte aquí en una práctica compleja de validación y ajuste semiótico, donde el estudiante asume un rol activo como diseñador, evaluador y recontextualizador de significados.

Además, esta etapa propició el trabajo en equipo, la resolución de problemas prácticos y la toma de decisiones colaborativas; contribuyó a la consolidación de habilidades transversales que fortalecen la formación integral del estudiante de ingeniería.

Figura 2 – Modelo físico.



Fuente: Elaboración propia de la montaña rusa construida con materiales reciclables y su construcción en GeoGebra.

Modelo físico y virtual de la montaña rusa

En la Figura 2 se presenta un modelo físico de una montaña rusa construido con materiales reciclables, junto con su correspondiente simulación digital en GeoGebra. El modelo físico incluye detalles estructurales como rieles curvados, elevaciones y descensos que simulan el recorrido de un carrito en movimiento. Los estudiantes utilizaron cartón, tubos de plástico y otros materiales reutilizables para crear una representación tangible del diseño matemático. Por otro lado, la construcción en GeoGebra permitió visualizar el modelo tridimensionalmente, con precisión en las trayectorias paramétricas y su correspondencia exacta en el espacio. Los rieles en verde y rojo representan las curvas paramétricas calculadas mediante funciones de varias variables, mientras que el entorno tridimensional facilita la observación de la dinámica del movimiento del carrito.

El proceso de diseño y construcción, tanto físico como digital, proporcionó a los estudiantes una experiencia integral de aprendizaje, dado que permitió conectar conceptos abstractos del cálculo multivariable con aplicaciones prácticas. Este enfoque también destacó la importancia de las representaciones semióticas, al traducir ecuaciones algebraicas en trayectorias físicas y visualizaciones interactivas.

Fase 5: Validación y análisis de resultados

Con el modelo físico construido, se llevó a cabo una fase de validación experimental con el propósito de comparar el comportamiento del prototipo con los resultados obtenidos mediante simulación virtual. Se realizaron diversas pruebas físicas para verificar la coherencia entre las ecuaciones paramétricas, las simulaciones en GeoGebra y el recorrido real de la montaña rusa. Los estudiantes recolectaron datos empíricos relacionados con la velocidad, aceleración y fuerza centrífuga en distintos tramos del trayecto. Estos datos se contrastaron con los valores teóricos previamente calculados, lo cual permitió identificar discrepancias y realizar ajustes al modelo, tanto en el plano físico como en sus representaciones matemáticas.

Esta etapa representó una instancia fundamental de validación entre registros. Según Duval (2006), el paso del registro algebraico (las ecuaciones) al gráfico (simulación) y, finalmente, al físico (prototipo) requiere una coordinación cognitiva compleja en la que los estudiantes deben reconocer invariantes semióticas entre representaciones que no comparten la misma estructura perceptiva ni simbólica. Este tipo de contraste favorece la detección de errores, la reconstrucción de significados y el refinamiento del modelo desde una perspectiva integradora.

Desde el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (Godino, Batanero y Font, 2009), esta fase permite reconocer la existencia de configuraciones epistémicas que se modifican a medida que el conocimiento se confronta con la realidad. La práctica de verificar, ajustar y reinterpretar modelos fortalece la construcción del significado matemático, al tiempo que promueve una mayor conciencia sobre los criterios de idoneidad didáctica, epistémica y tecnológica en la resolución de problemas. En este sentido, los estudiantes no solo validaron sus modelos, sino que también desarrollaron criterios de evaluación sobre la validez, precisión y aplicabilidad de los mismos.

Esta etapa también aportó elementos significativos al desarrollo del pensamiento crítico, al incentivar la reflexión sobre el error; no como falla, sino como una oportunidad para mejorar los modelos y profundizar la comprensión de las relaciones entre lo abstracto y lo concreto. Los estudiantes evidenciaron avances en su capacidad para analizar discrepancias entre teoría y práctica, así como para justificar modificaciones con base en argumentos matemáticos y físicos.

Fase 6: Reflexión final y presentación del proyecto

Al concluir el proyecto, cada grupo de estudiantes presentó sus hallazgos a través de un informe escrito y una exposición oral, en las cuales analizaron el proceso seguido y los resultados obtenidos durante las diferentes fases de trabajo. Estas presentaciones incluyeron reflexiones sobre cómo la articulación entre las representaciones semióticas —algebraica, gráfica y física— contribuyó a una comprensión más profunda de los conceptos del cálculo multivariable, tales como las ecuaciones paramétricas, las trayectorias espaciales y las derivadas parciales. Los estudiantes también subrayaron la relevancia de la colaboración grupal y el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra en el desarrollo de sus competencias analíticas, creativas y comunicativas. Este espacio reflexivo promovió un ejercicio metacognitivo en el que se valoró no solo el producto final (la montaña rusa), sino también el proceso de aprendizaje que permitió conectar el conocimiento matemático abstracto con su aplicación tangible.

Desde el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática, esta fase representa una instancia de consolidación de significados a través de la configuración

metadiscursiva del conocimiento matemático (Godino, Batanero y Font, 2009). La reflexión guiada permite identificar prácticas epistémicas y valorar la evolución del conocimiento personal y colectivo en un proceso que transforma las experiencias individuales en comprensiones compartidas. Asimismo, el reconocimiento explícito del papel de las representaciones semióticas responde a lo planteado por Duval (2006), quien enfatiza que el aprendizaje significativo no se limita a la producción de respuestas correctas; requiere que el sujeto justifique y explique sus procedimientos en distintos registros. La posibilidad de reflexionar sobre el tránsito entre lo algebraico, gráfico y físico permitió a los estudiantes identificar sus avances cognitivos, errores corregidos y estrategias adoptadas para resolver los desafíos del proyecto.

En suma, esta última fase no solo cerró el ciclo didáctico del proyecto, sino que abrió un espacio de evaluación formativa, autorregulación y toma de conciencia sobre el valor del conocimiento matemático como herramienta para resolver problemas reales. La combinación de simulación digital, construcción física y reflexión colaborativa se constituyó como una experiencia de aprendizaje activo, interdisciplinario y significativo, coherente con los principios de una educación matemática crítica y contextualizada.

3. RESULTADOS/DISCUSIONES

A partir de esta investigación sobre la aplicación de las representaciones semióticas en cálculo multivariable mediante la construcción de una montaña rusa física y virtual, se pueden generar diversas discusiones académicas y reflexivas en torno a los resultados, las metodologías y las implicaciones teóricas y prácticas del estudio. Estas discusiones pueden abordar desde cuestiones metodológicas y tecnológicas hasta aspectos cognitivos y didácticos relacionados con el aprendizaje de las matemáticas en entornos interdisciplinarios.

Una primera línea de discusión se centra en la eficacia del enfoque ontosemiótico en el aprendizaje del cálculo multivariable. El estudio se basa en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOCM), el cual enfatiza la importancia de traducir y coordinar entre diferentes registros de representación (algebraico, gráfico, físico y tabular) para desarrollar una comprensión profunda de los conceptos matemáticos. La discusión podría abordar en qué medida la coordinación entre registros semióticos facilita la comprensión de conceptos complejos como las ecuaciones paramétricas y las derivadas parciales, si este enfoque es más efectivo para temas específicos como el análisis vectorial y la interpretación geométrica de trayectoria, o si puede aplicarse de manera general en el aprendizaje del cálculo. También podría discutirse cómo mejorar la capacidad de los estudiantes para reconocer y coordinar registros semióticos mediante herramientas digitales como GeoGebra. Este análisis permitiría profundizar en el papel de las representaciones semióticas como elemento estructurante en la enseñanza de las matemáticas, y abriría nuevas líneas de investigación sobre cómo mejorar la coordinación entre registros en el aula.

Una segunda discusión relevante es la relación entre teoría y práctica en la enseñanza del cálculo multivariable. La investigación integra de manera innovadora la teoría matemática con una aplicación práctica mediante la construcción de una montaña rusa, lo que permite cuestionar qué tan efectivo es el aprendizaje basado en proyectos para mejorar la comprensión de conceptos abstractos como las ecuaciones paramétricas y las derivadas parciales. También podría analizarse cómo influye la manipulación física de una estructura real en la comprensión de las propiedades matemáticas de las trayectorias y las curvas en el espacio tridimensional, y hasta qué punto la práctica experimental mejora la capacidad de los estudiantes para interpretar y resolver problemas complejos en cálculo multivariable. Esta discusión permitiría

explorar cómo podría integrarse el aprendizaje basado en proyectos en el currículo general de cálculo multivariable para maximizar la comprensión teórica y práctica de los estudiantes.

El papel de las herramientas tecnológicas en el aprendizaje matemático representa otra línea de discusión. El uso de GeoGebra como herramienta de simulación y análisis gráfico fue un elemento clave en el éxito de la investigación. En este sentido, podría analizarse la influencia del uso de herramientas tecnológicas en la capacidad de los estudiantes para visualizar y analizar trayectorias complejas en el espacio tridimensional. Asimismo, se podría estudiar si GeoGebra es una herramienta suficientemente robusta para modelar situaciones físicas complejas, o si sería necesario incorporar software más especializado como MATLAB o Mathematica. También podría discutirse cómo afecta la interacción en tiempo real con un modelo gráfico tridimensional a la comprensión de las relaciones entre las ecuaciones paramétricas y su interpretación geométrica, así como cuáles diferencias se observan entre los resultados obtenidos mediante simulación en GeoGebra y los resultados experimentales obtenidos en el modelo físico. Esta discusión permitiría evaluar el papel de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas y explorar nuevas herramientas que podrían mejorar aún más el proceso de aprendizaje mediante simulación y modelado tridimensional.

Es importante reflexionar sobre los desafíos y limitaciones encontrados durante el desarrollo del proyecto, lo que podría llevar a una mejora tanto en la metodología como en la implementación futura de proyectos similares. Las discusiones en esta área podrían incluir cuáles fueron las principales dificultades que enfrentaron los estudiantes al diseñar y construir la montaña rusa, cómo se podrían ajustar las ecuaciones paramétricas para mejorar la estabilidad y el rendimiento del modelo físico, y cómo se podría mejorar la precisión de la simulación en GeoGebra para reflejar con mayor exactitud las condiciones físicas del modelo real. Además, podría analizarse qué factores externos (fricción, peso del material, errores de construcción) afectaron los resultados y cómo podrían controlarse en futuras investigaciones. Asimismo, hay espacio para plantear mejoras respecto a la retroalimentación y guía durante el proceso de diseño y construcción, para que la identificación y corrección de errores por parte de los estudiantes sea más eficiente. Esta discusión permitiría explorar nuevas estrategias para reducir las discrepancias entre los modelos teóricos y las implementaciones prácticas en futuros proyectos educativos.

El impacto en la motivación y la participación de los estudiantes constituye otra área de discusión importante. El proyecto se diseñó para promover un aprendizaje activo y participativo mediante la combinación de modelado matemático, simulación tecnológica y construcción física. La discusión podría abordar hasta qué punto la combinación de herramientas tecnológicas y actividades físicas mejora la motivación de los estudiantes para estudiar cálculo multivariable, qué diferencias en el nivel de participación se observaron entre las fases de modelado matemático, simulación y construcción física, y de qué manera influyó el trabajo colaborativo en la motivación y el rendimiento de los estudiantes. También podría explorarse cómo este enfoque integrador podría aplicarse en otros contextos académicos para mejorar la motivación y el compromiso de los estudiantes con las matemáticas. Esta línea de discusión abriría nuevas oportunidades para desarrollar metodologías activas y colaborativas que mejoren la motivación y la implicación de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.

La transferencia de conocimientos y habilidades es otro aspecto clave de esta investigación. Un punto de discusión podría ser cómo influyó el proyecto en la capacidad de los estudiantes para aplicar conceptos de cálculo multivariable en otros problemas técnicos y de ingeniería, qué habilidades adquiridas durante el proyecto (como la resolución de problemas y el trabajo en equipo) pueden trasladarse a otros contextos profesionales y académicos, y de qué manera este enfoque podría replicarse o adaptarse en otras áreas de las matemáticas y la

ingeniería. También podría explorarse cómo influyó el desarrollo de la montaña rusa en la capacidad de los estudiantes para identificar y resolver problemas complejos mediante el análisis matemático. Esta discusión permitiría explorar el impacto a largo plazo de este enfoque metodológico en el desarrollo profesional y académico de los estudiantes.

Las implicaciones pedagógicas y metodológicas constituyen una última línea de discusión clave. El enfoque utilizado en esta investigación presenta importantes implicaciones para la enseñanza de las matemáticas en general. La discusión podría centrarse en cómo podría incorporarse este enfoque metodológico en el currículo de cálculo multivariable para maximizar el aprendizaje, de qué manera el uso de herramientas tecnológicas y modelos físicos puede facilitar el aprendizaje de otros conceptos matemáticos complejos y qué ajustes serían necesarios para replicar este proyecto en otros niveles educativos o en otros contextos culturales. También podría discutirse de qué manera este enfoque se podría combinar con otros métodos pedagógicos para crear un modelo de enseñanza más efectivo y significativo. Esta discusión abriría la puerta a nuevas investigaciones sobre la enseñanza de las matemáticas, mediante enfoques basados en proyectos, tecnología y construcción práctica.

Las discusiones generadas a partir de esta investigación ofrecen una oportunidad para profundizar en la relación entre teoría y práctica en la enseñanza del cálculo multivariable. Además, plantean nuevos desafíos y oportunidades para integrar la tecnología, la experimentación física y el análisis matemático en un proceso de aprendizaje más significativo e interdisciplinario.

4. CONCLUSIONES

El desarrollo del proyecto de la montaña rusa permitió evidenciar una serie de beneficios significativos en el proceso de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería. Uno de los hallazgos más relevantes fue el alto nivel de interés y motivación demostrado por los participantes, quienes se involucraron activamente en cada fase del proyecto, desde la modelación teórica hasta la construcción física y validación experimental. Esta participación activa facilitó una comprensión profunda y sostenible de conceptos clave del cálculo multivariable, como las ecuaciones paramétricas, derivadas y trayectorias tridimensionales.

Un aspecto destacado fue la mejora significativa en la capacidad de los estudiantes para traducir entre diferentes representaciones semióticas (algebraicas, gráficas y físicas). Esta habilidad, esencial en el aprendizaje matemático, se logró gracias a la coordinación de actividades colaborativas y al uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra, que permitieron a los estudiantes visualizar en tiempo real los efectos de sus decisiones matemáticas y ajustar sus modelos según las necesidades del proyecto.

La integración interdisciplinar también resultó clave. Al combinar conocimientos de matemáticas, física y tecnología, los estudiantes desarrollaron una comprensión más holística y aplicable de los conceptos teóricos. Esta experiencia interdisciplinaria no solo mejoró su capacidad de resolver problemas complejos, sino que también fomentó el desarrollo de habilidades blandas, como el trabajo en equipo y la comunicación efectiva al presentar y defender sus resultados.

El uso de GeoGebra se consolidó como una herramienta clave para la visualización y experimentación con modelos complejos. Su capacidad para ofrecer representaciones interactivas permitió que los estudiantes conectaran de manera directa las ecuaciones matemáticas con su interpretación gráfica y física, por lo que contribuyó a su comprensión conceptual y sus habilidades para realizar ajustes iterativos en los modelos. Además, se observó cómo el

entorno de aprendizaje tecnológico aumentó la autonomía de los estudiantes, quienes asumieron un papel más activo y crítico en su proceso de aprendizaje.

De cara a futuros trabajos, se recomienda la incorporación de más herramientas tecnológicas, como simuladores avanzados y aplicaciones de realidad aumentada, que puedan complementar el proceso de visualización y análisis. También sería beneficioso explorar proyectos interdisciplinarios adicionales que promuevan la aplicación de conceptos matemáticos en contextos reales e incentiven, así, el aprendizaje basado en la experimentación. La colaboración entre estudiantes de diferentes disciplinas podría enriquecer aún más el proceso, debido a la integración de nuevas perspectivas y enfoques.

El proyecto de la montaña rusa no solo logró sus objetivos de aprendizaje matemático, sino que también estableció un modelo efectivo de cómo las representaciones semióticas, el trabajo colaborativo y el uso de la tecnología pueden combinarse para generar un aprendizaje profundo y significativo en el ámbito de la ingeniería y otras ciencias aplicadas.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

Se declara lo que cada persona de la autoría desarrolló en el trabajo. Cada persona se abrevia con la inicial del nombre, iniciales de apellidos. Por ejemplo:

RFS y CPC concibieron la idea presentada. RFS desarrolló la teoría. RFS y CPC adaptaron la metodología a este contexto, crearon los modelos, realizaron las actividades y recopilaron los datos. RFS analizó los datos. Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por el autor, JCR (Juan Carlos Ruiz), previa solicitud razonable.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168. <https://skat.ihmc.us/rid=1JM80JJ72-G9RGZN-2CG/La%20habilidad%20para%20cambiar%20el%20registro%20de%20representaci%C3%B3n.pdf>
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Universidad de Granada*. https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- Guachún Lucero, P. y Espadero Faicán, G. (2021). El software GeoGebra como recurso para la enseñanza de vectores: Una experiencia didáctica. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, 16(37), 46-60. <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/53/52>
- Guerrero Morales, L. y Falk de Losada, M. (2023). Una mirada a la teoría de representaciones semióticas de Duval desde el pensamiento manifestado por participantes en las olimpiadas colombianas de matemáticas. *South Florida Journal of Development*, 4(3), 1433-1453. <https://doi.org/10.46932/sfjdv4n3-030>
- Ruiz Castillo, J. C. (2022). La aplicación de herramientas digitales con el enfoque ontosemiótico y su influencia en el aprendizaje de funciones exponenciales y logarítmicas. *Revista Científica del SEP*, 5(1), 15-22. <https://revistasep.usac.edu.gt/index.php/RevistaSEP/article/view/92>