



# UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA PRELIMINAR PARA EL CONCEPTO DE LOGARITMO COMO NÚMERO REAL

## A PRELIMINARY GENETIC DECOMPOSITION FOR THE CONCEPT OF LOGARITHM AS A REAL NUMBER

**Kevin David Gómez Guillén<sup>1</sup>**

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0002-5415-4729>

**Fabián Wilfrido Romero Fonseca<sup>2</sup>**

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-4472-963X>

### RESUMEN

Este artículo aborda las dificultades en la comprensión del logaritmo como número real, un concepto clave en matemáticas, y propone una descomposición genética preliminar desde la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas). Mediante un enfoque cualitativo basado en el análisis teórico e histórico de la obra de John Napier, se identificaron estructuras y mecanismos mentales involucrados en su construcción. Los resultados destacan tres fases: manipulación de progresiones geométricas, desarrollo de un modelo discreto y su extensión a un modelo continuo. Esta propuesta no solo facilita la comprensión del logaritmo, sino que también proporciona herramientas pedagógicas que integran epistemología e historia, contribuyendo a una enseñanza más efectiva del concepto. Al explorar el desarrollo histórico y epistemológico de este concepto fundamental, se busca no solo comprender su esencia matemática, sino también comprender las complejidades cognitivas inherentes a su concepción.

**Palabras clave:** APOE, Logaritmo, Descomposición Genética, Historia, Epistemología.

### ABSTRACT

This article addresses the difficulties in understanding logarithms as real numbers, a key concept in mathematics, and proposes a preliminary genetic decomposition based on the APOS theory (Actions, Processes, Objects, and Schemas). Through a qualitative approach grounded in theoretical and historical analysis of John Napier's work, the study identifies the mental structures and mechanisms involved in its construction. The results highlight three phases: manipulation of geometric progressions, development of a discrete model, and its extension to a continuous model. This proposal not only facilitates the understanding of logarithms but also provides pedagogical tools that integrate

1 Instituto de Investigaciones Psicológicas, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, código postal C. P. 11501-2060. Correo electrónico: [kevin.gomezguillen@ucr.ac.cr](mailto:kevin.gomezguillen@ucr.ac.cr)

2 Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, código postal C. P. 11501-2060. Correo electrónico: [fabian.romero@ucr.ac.cr](mailto:fabian.romero@ucr.ac.cr)



epistemology and history, contributing to a more effective teaching of the concept. By exploring the al and epistemological development of this fundamental concept, the study aims to deepen the understanding of its mathematical essence and the cognitive complexities inherent in its conception.

**Keywords:** APOS, Logarithm, Genetic Descomposition, History, Epistemology.

## 1. INTRODUCCIÓN

El logaritmo es un concepto esencial en matemáticas, utilizado en diversas áreas como la física, la ingeniería y las ciencias sociales. A pesar de su importancia, su enseñanza enfrenta numerosos desafíos, especialmente en el ámbito educativo de Costa Rica. Según el Programa de Estudio de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012), el logaritmo se aborda principalmente desde su relación con las funciones matemáticas. Sin embargo, este enfoque deja de lado su comprensión como número real, limitando su significado y dificultando la construcción de aprendizajes relacionados con conceptos posteriores, como la función logarítmica.

Alguacil et al. (2016) señalan que esta problemática afecta tanto a estudiantes como a docentes. Por un lado, los estudiantes suelen enfrentar dificultades al intentar comprender el concepto de logaritmo, lo que genera confusiones y desconexiones en su aprendizaje. Por otro lado, los docentes a menudo carecen de herramientas didácticas y metodológicas adecuadas para abordar estas dificultades, lo que perpetúa la brecha conceptual. Esta situación subraya la necesidad de replantear el modo en que se enseña y se conceptualiza el logaritmo en los entornos educativos.

La desconexión entre el significado del logaritmo como número real y su aplicación en contextos cotidianos y matemáticos se ha documentado ampliamente en investigaciones previas. Estas han señalado una brecha significativa entre la introducción inicial del logaritmo como un facilitador de cálculos numéricos y su posterior tratamiento como función matemática. Ferrari y Farfán (2001) describen esta desconexión como una especie de *dislexia* en el discurso matemático escolar, evidenciando la dificultad de integrar estas perspectivas de manera coherente.

Para abordar estas limitaciones, diversos estudios han propuesto analizar el desarrollo histórico y epistemológico del logaritmo como una estrategia para enriquecer su enseñanza. Investigaciones como las de Sanabria (2016), Gacharná (2012), Costa y Sanabria (2016) y Vargas (2020) han destacado la importancia de conocer el origen y la evolución del concepto de logaritmo, ya que esto permite identificar las ideas clave que subyacen en su construcción. Además, se ha resaltado la relevancia de integrar la historia, la epistemología y el uso de tecnologías de la información en los enfoques didácticos para mejorar su comprensión (Abrate y Pochulu, 2007; Panagiotou, 2010; Rizzo, 2014; Cachuay y Pino, 2013).

En este contexto, esta investigación surge como respuesta a la necesidad de comprender mejor las estructuras y mecanismos mentales que los estudiantes emplean al construir el concepto de logaritmo como número real. Para ello, se plantea como objetivo principal diseñar una descomposición genética preliminar del logaritmo, enmarcada en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas). Este marco teórico permite analizar y estructurar las construcciones mentales asociadas al concepto, ofreciendo una base para mejorar su enseñanza y aprendizaje.

Con esta propuesta, se busca no solo identificar las dificultades inherentes a la enseñanza del logaritmo, sino también generar herramientas prácticas que permitan a los docentes

abordar estas problemáticas de manera más efectiva. La descomposición genética preliminar presentada en este estudio constituye un primer paso hacia la articulación de un enfoque didáctico más robusto, que integre elementos históricos, epistemológicos y tecnológicos en el aprendizaje del logaritmo.

## 2. REFERENTE TEÓRICO: TEORÍA APOE

Cuando la teoría APOE se refiere a estructuras mentales, alude a aquellas que son relativamente estables y que permiten al individuo interpretar y dar sentido a las situaciones en el contexto matemático (Arnon et al., 2014). Estas estructuras no son estáticas; evolucionan y se desarrollan constantemente mediante los *mecanismos mentales*. En el marco de esta teoría, las estructuras fundamentales son: *acción*, *proceso*, *objeto* y *esquema*, mientras que los mecanismos asociados incluyen la *interiorización*, *encapsulación*, *coordinación*, *reversión* y *desencapsulación* (Dubinsky et al., 2005).

La construcción de un concepto matemático comienza con las *acciones*, que son transformaciones desencadenadas por estímulos externos. Las acciones son secuenciales y explícitas, lo que significa que cada paso debe realizarse de manera ordenada y sin omisiones, ya que cada uno es fundamental para el éxito del proceso. Por ejemplo, cuando un estudiante resuelve un problema matemático siguiendo instrucciones específicas, cómo aplicar un algoritmo o realizar un cálculo, está ejecutando una acción. Según Arnon et al. (2014), estas transformaciones están condicionadas por los estímulos recibidos y, aunque pueden ser repetitivas, sientan las bases para la construcción de estructuras más complejas.

El paso de una acción a un proceso se realiza mediante el mecanismo de *interiorización*. Este mecanismo implica que el individuo asimila la acción y la lleva al plano mental, de modo que puede imaginar y controlar los pasos necesarios sin ejecutarlos físicamente (Dubinsky et al., 2005). En esta etapa, el estudiante ya no necesita estímulos externos para realizar la transformación, sino que la operación ocurre de manera mental. Por ejemplo, un estudiante que ya no necesita escribir cada paso de un cálculo para resolverlo mentalmente ha logrado interiorizar esa acción. Además, esta etapa permite reflexionar sobre los resultados obtenidos, generalizar procedimientos y trabajar con casos abstractos o generales (Arnon et al., 2014).

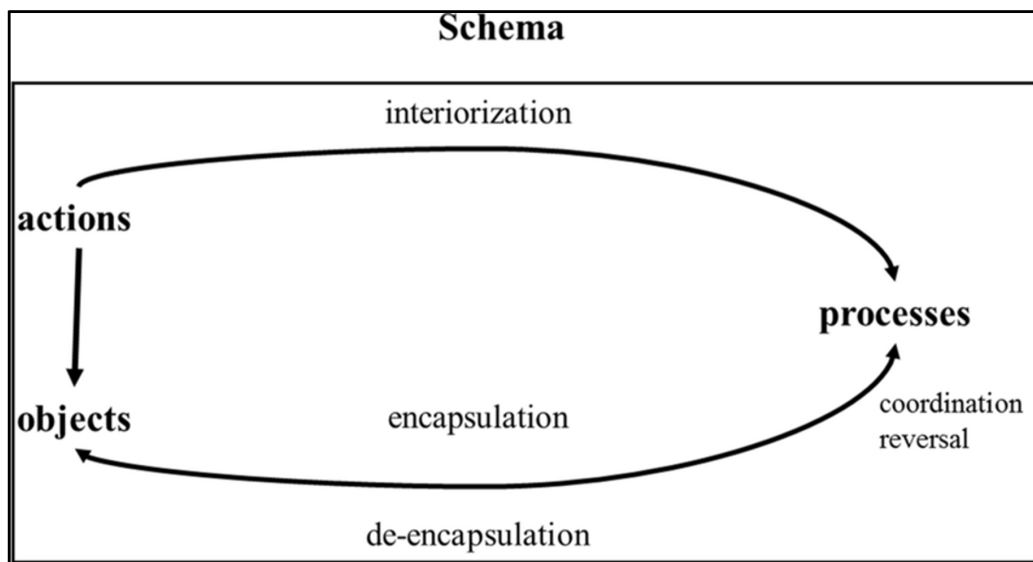
La transición de un proceso a un objeto ocurre mediante el mecanismo de *encapsulación*. Una vez que el estudiante deja de percibir los procesos como dinámicos y los concibe como estructuras estáticas, se dice que ha construido un *objeto*. Este objeto puede ser manipulado como un todo, lo que abre la posibilidad de realizar nuevas acciones sobre él. Por ejemplo, un estudiante que comprende el concepto de función no como un conjunto de puntos en un plano, sino como un objeto matemático que puede ser evaluado, transformado o combinado con otras funciones, ha logrado esta transformación. Según Dubinsky et al. (2005), la encapsulación es esencial para permitir que el individuo realice razonamientos abstractos y desarrolle conceptos más complejos.

Finalmente, el *esquema* representa el nivel más alto de organización en la teoría APOE. Un esquema es una estructura mental amplia y dinámica que integra acciones, procesos y objetos para abordar situaciones matemáticas complejas (Arnon et al., 2014). Los esquemas no son rígidos; se adaptan y evolucionan a medida que el individuo enfrenta nuevos problemas y experiencias. Según Dubinsky et al. (2005), un esquema puede describirse como un marco conceptual que permite al estudiante coordinar y organizar conocimientos previos para responder de manera eficiente a una variedad de contextos. Los esquemas desempeñan un papel

crucial en el aprendizaje matemático, ya que representan la culminación de la construcción conceptual y la base para resolver problemas complejos. Según Arnon et al. (2014), los esquemas no solo integran conocimientos, sino que también reflejan la capacidad del estudiante para relacionar conceptos aparentemente dispares, como funciones y derivadas, o progresiones aritméticas y geométricas.

Gráficamente Dubinsky (2002) resume el modelo teórico en la siguiente figura:

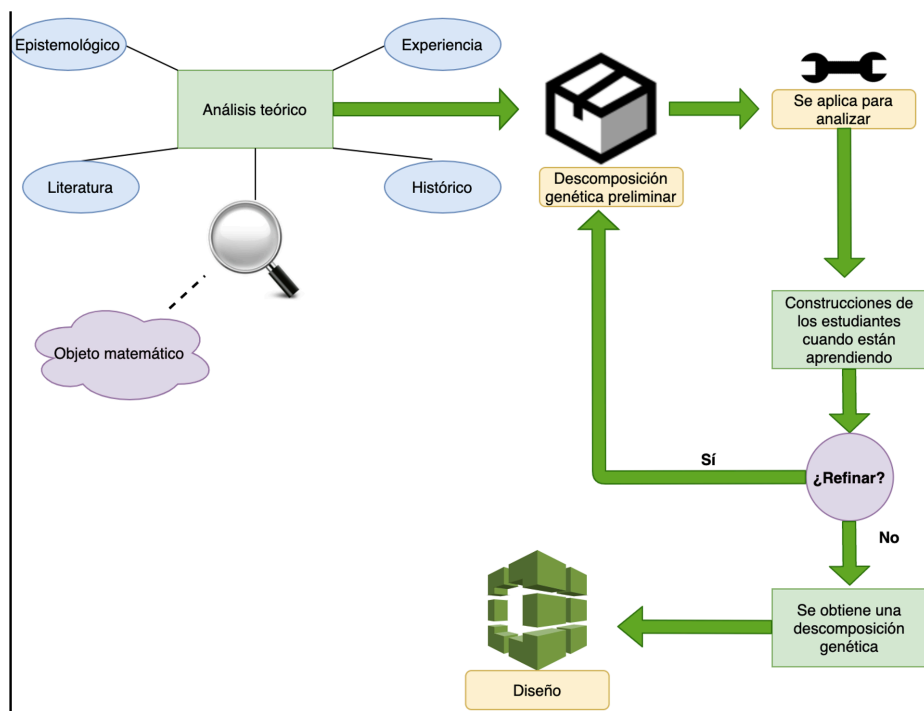
**Figura 1- Representación gráfica de la Teoría APOE.**



**Fuente:** (Dubinsky, 2002)

### 3. ABORDAJE METODOLÓGICO

Para construir una descomposición genética, la teoría APOE plantea un esquema metodológico cíclico, como se muestra en la Figura 2. Este enfoque no solo permite avanzar en el análisis de los conceptos matemáticos, sino que también facilita la revisión y refinamiento de las etapas iniciales a partir de la implementación y evaluación de resultados. Es decir, después de aplicar y analizar los datos obtenidos, es posible regresar a la descomposición genética preliminar para corregir, ajustar y volver a aplicarla. Este carácter cíclico es crucial para garantizar la validez y utilidad del modelo propuesto (Dubinsky et al., 2005).

**Figura 2- Ciclo de elaboración de la descomposición genética.**

**Fuente:** (Brenes y Gómez, 2022).

Este ciclo de investigación tiene tres componentes principales: análisis teórico; diseño e implementación de la enseñanza; y recolección y análisis de los datos.

Representa el punto inicial y más relevante de este artículo, ya que se centra en la construcción de la descomposición genética preliminar. Este análisis implica un estudio detallado del desarrollo cognitivo relacionado con el concepto de interés, en este caso, el logaritmo como número real. El análisis considera múltiples perspectivas, incluyendo libros de texto, investigaciones previas, la experiencia docente y el desarrollo histórico del concepto. Este componente proporciona una base teórica sólida para guiar las etapas posteriores del esquema metodológico (Arnon et al., 2014).

Para el segundo componente, el de diseño e implementación de la enseñanza, se utiliza la descomposición genética preliminar como una guía para desarrollar actividades y estrategias de enseñanza. Estas deben estar orientadas a promover las construcciones mentales descritas en el modelo teórico. Aunque este artículo no se centra en esta etapa, su relevancia reside en probar la eficacia del modelo diseñado mediante su aplicación en contextos educativos específicos.

En caso de que dicha descomposición genética evidencie que es una buena aproximación al concepto matemático de interés, se presenta la tercera etapa, que corresponde a la recolección y análisis de los datos, la cual tiene como propósito principal la validación de la descomposición genética y su implementación en la enseñanza. Dentro de la implementación,

generalmente los datos recolectados para dar respuesta a las siguientes interrogantes: ¿Los estudiantes aparentemente realizan las construcciones mentales que se habían descrito en la descomposición genética? ¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el concepto en cuestión? (Serrano, 2019, p.5)

Es importante enfatizar que este artículo se limita al primer componente, el análisis teórico, para proponer una descomposición genética preliminar del logaritmo como número real. Las otras dos etapas del esquema metodológico —diseño e implementación de la enseñanza, y recolección y análisis de datos— no forman parte de este trabajo. Por otra parte, en relación con el análisis teórico, aunque existen múltiples fuentes que destacan su importancia en el marco de la teoría APOE, hay una escasez de investigaciones específicas que detallan qué elementos considerar al realizar un análisis histórico-epistemológico, particularmente de una obra original. Este vacío metodológico subraya la necesidad de profundizar en los enfoques que guían este tipo de análisis (Arnon et al., 2014; Dubinsky et al., 2005).

### 3.1 Selección de la obra original

El desarrollo histórico del concepto de logaritmo ha sido fundamental para comprender su construcción como número real. Este análisis histórico-epistemológico constituye la primera etapa de la descomposición genética preliminar, en la cual se identifican los textos originales que aportaron a la construcción del logaritmo.

El interés principal de este trabajo se centra en los aportes realizados por John Napier, considerado el inventor del logaritmo. Para ello, se seleccionó como referencia principal su obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descripción de las maravillosas tablas de logaritmos), publicada por primera vez en 1614 en Edimburgo, Escocia. Este texto es ampliamente reconocido como el punto de partida para la introducción del concepto de logaritmo, y su análisis resulta esencial para comprender las bases matemáticas y epistemológicas que subyacen en este concepto.

Para el desarrollo de este trabajo, se utilizó la versión traducida al inglés por Edward Wright en 1616, titulada *A Description of the Admirable Table of Logarithms*, publicada por la editorial Renacents Books. Esta traducción fue seleccionada debido a su accesibilidad y a la fidelidad con que preserva los elementos matemáticos originales del texto en latín, facilitando el análisis desde una perspectiva histórica y pedagógica.

La selección de esta obra se realizó considerando su relevancia histórica y su impacto en el desarrollo de las matemáticas, especialmente en el contexto de los cálculos aritméticos y geométricos de su época. Su análisis bajo la perspectiva de la teoría APOE permite identificar las acciones, procesos y objetos presentes en la construcción del logaritmo como número real, así como los mecanismos mentales implicados.

### 3.2 Construcción de cuestionamientos analíticos

Para diseñar una descomposición genética preliminar del logaritmo como número real, es necesario realizar un análisis histórico-epistemológico que permita identificar los elementos cognitivos subyacentes en su construcción. Ante la escasez de elementos metodológicos en la literatura para realizar este tipo de análisis (Arnon et al., 2014; Dubinsky et al., 2005), se formularon una serie de cuestionamientos analíticos basados en la teoría APOE, con el

propósito de reconocer en la obra original las estructuras y mecanismos mentales involucrados en la conceptualización del logaritmo.

La creación de estos cuestionamientos se fundamenta en los principios de la teoría APOE que explican cómo un concepto matemático se construye a partir de estructuras mentales progresivas y mecanismos de transformación. En este sentido, los cuestionamientos buscan evidenciar elementos clave de cada estructura y mecanismo, permitiendo una aproximación sistemática a la forma en que Napier desarrolló el concepto de logaritmo. Es así como se clasifica el análisis en las siguientes fases:

### Fase 1: Identificar acciones

Dado que una acción se caracteriza por estar ligada a estímulos externos y realizarse de manera secuencial y explícita, los cuestionamientos en esta fase se centran en determinar si en la obra de Napier el desarrollo del logaritmo depende de instrucciones concretas, procedimientos estrictos o el uso de representaciones que guíen su construcción. Además, considerando que las acciones no permiten la omisión de pasos, se busca identificar si el concepto es presentado de manera rígida o si hay indicios de flexibilidad.

- ¿Qué procedimientos o algoritmos se realizan con el concepto o problema en estudio?
- ¿Necesita estímulos externos como resultados de investigaciones realizadas previamente de forma explícita para poder trabajar con el concepto?
- Únicamente se replican los procedimientos o algoritmos?
- ¿Realiza dibujos o representaciones gráficas para entender el problema o concepto?

### Fase 2: Identificar el mecanismo de interiorización

La interiorización ocurre cuando una acción deja de depender de estímulos externos y el individuo puede ejecutarla mentalmente, omitiendo pasos explícitos sin perder precisión. Por ello, los cuestionamientos en esta fase buscan reconocer si en la obra de Napier hay evidencia de que los cálculos y justificaciones del logaritmo dejan de depender de procesos mecánicos y pasan a ser tratados de manera más flexible o conceptual. Algunas interrogantes que permiten identificar en ciertos contextos cuándo es que se da una interiorización son las siguientes:

- ¿Se cuestiona posibles cambios sobre los pasos (describe e invierte) los procedimientos o algoritmos?
- ¿Se evidencia resolución completa de un ejercicio o actividad sin necesidad de realizar todos los pasos del algoritmo?
- ¿Evidencia un dominio absoluto sobre las necesidades del problema y el camino que debe seguir para lograrlas?

### Fase 3: Identificar procesos.

Cuando una acción se interioriza, se convierte en un proceso, lo que implica que el concepto puede manipularse sin una ejecución estricta de los pasos originales y permite generalizaciones. En este sentido, los cuestionamientos se centran en identificar si Napier muestra reflexiones sobre la validez general del logaritmo, si extrae conclusiones a partir de ejemplos particulares y si deja de depender de estímulos externos en su desarrollo.

- ¿El autor generaliza resultados obtenidos a partir de los casos específicos realizados? (En caso de pensar o plantearse casos generales se dice que se encuentra en una concepción de proceso).
- ¿Qué reflexiona el autor sobre el concepto?
- ¿Acepta un resultado para una cantidad infinita de objetos, después de verificar que se cumplen para varios de ellos?
- ¿Logra prescindir de los estímulos externos para dar solución a una actividad?

### Fase 4: Identificar el mecanismo de encapsulación

La encapsulación se da cuando un proceso deja de percibirse como una serie de transformaciones dinámicas y pasa a considerarse un objeto matemático sobre el cual se pueden realizar nuevas manipulaciones. En este caso, los cuestionamientos buscan determinar si Napier trata el logaritmo como una entidad independiente y no solo como un procedimiento, permitiendo que se realicen operaciones sobre él sin necesidad de reconstruir su significado en cada caso.

- ¿El autor reflexiona sobre las acciones que se aplicaron en el Proceso viéndolo como un todo?
- ¿Cuáles son las operaciones o pasos que se aplicaron en el Proceso viéndolo como un todo?

### Fase 5: Identificar objetos

El tratamiento de un concepto como objeto implica que el individuo reconoce su aplicabilidad en distintos contextos y su relación con otros objetos matemáticos. En esta fase, los cuestionamientos buscan evidenciar si Napier establece vínculos entre el logaritmo y otros conceptos matemáticos, así como su utilidad en distintos campos del conocimiento.

- ¿Qué reflexiona el autor sobre las acciones aplicadas a los Procesos, toma conciencia del proceso como un todo? ¿Cómo traslada el concepto a otros contextos?
- ¿Cuáles resultados previos intervienen en el trabajo con el concepto en estudio?



- ¿Cuáles aplicaciones del concepto en estudio identifica en otras áreas del conocimiento y su importancia del concepto en otros campos?
- ¿Cuáles nociones propias del concepto se coordinan en el texto?

Es importante mencionar que el proceso de análisis descrito es de naturaleza cíclica, lo que implica que cada fase no es definitiva, sino que puede ser revisada y ajustada conforme se identifican nuevas relaciones en el estudio del concepto. La depuración iterativa de estas etapas permite afinar la identificación de estructuras y mecanismos, asegurando una mayor precisión en la construcción de la descomposición genética preliminar.

Por otro lado, la estructura esquema no se considera en este análisis debido a que, según la teoría APOE, un esquema es una organización compleja que coordina múltiples objetos, procesos y acciones, permitiendo al individuo operar con ellos en distintos contextos de manera flexible y automática (Arnon et al., 2014). En este estudio, el objetivo es identificar los mecanismos que subyacen en la construcción inicial del concepto de logaritmo como número real, sin evaluar su integración en esquemas de conocimiento más amplios. La inclusión del esquema requeriría un análisis posterior centrado en la aplicación del concepto en contextos educativos y su interrelación con otros conocimientos matemáticos.

## 4. RESULTADOS

El análisis realizado sigue un proceso cíclico en el que, en una primera instancia, se identificaron las acciones presentes en la obra de Napier. Posteriormente, se analizaron los procesos derivados de estas acciones, seguidos por la identificación de objetos matemáticos. A lo largo del estudio, cada estructura fue revisada y depurada, permitiendo ajustar y refinar la interpretación de los mecanismos involucrados en la construcción del logaritmo como número real.

### 4.1 Acciones

A continuación, se describen y analizan los hallazgos identificados en la obra de Napier que permiten responder a las preguntas formuladas en la metodología, con el propósito de reconocer las *acciones* fundamentales en la construcción del concepto de logaritmo como número real y su relación con otros conceptos matemáticos.

Presencia de estímulos externos ante factores previos

En cuanto al hallazgo de estímulos externos, se busca dar respuesta a la pregunta: ¿Necesita estímulos externos como resultados de investigaciones realizadas previamente de forma explícita para poder trabajar con el *concepto*? En este sentido, se destaca que Napier fue impulsado por la necesidad de simplificar cálculos aritméticos, lo cual surge como un estímulo externo derivado de la dificultad y tedio en realizar operaciones matemáticas extensas.

Además, se encontró que el desarrollo de los logaritmos estuvo influenciado por conocimientos previos, entre ellos:

- El uso de tablas trigonométricas, que proporcionaban valores numéricos para cálculos matemáticos complejos.
- Los resultados obtenidos por Michael Stifel, quien exploró relaciones entre progresiones numéricas y exponentes.

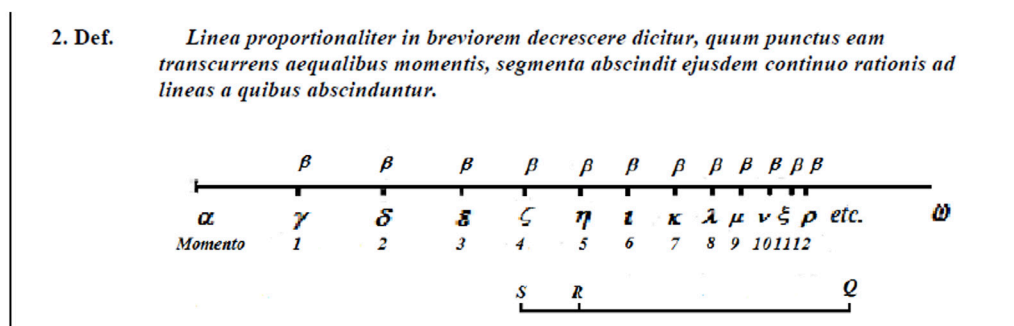
- El manejo de progresiones geométricas y aritméticas, lo que permitió a Napier establecer conexiones entre estos patrones matemáticos y la construcción de su sistema logarítmico.

Estos elementos constituyen factores externos clave que facilitaron el desarrollo de los logaritmos como números reales, demostrando que su construcción no surgió de manera aislada, sino como resultado de una necesidad contextual y una acumulación de conocimientos matemáticos previos.

### Dibujos o representaciones gráficas

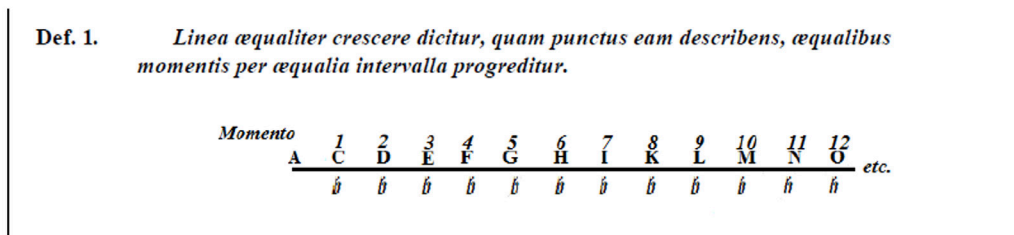
Otro aspecto fundamental en la identificación de acciones es la presencia de dibujos y representaciones gráficas utilizados por Napier para explicar la naturaleza de las progresiones geométricas y aritméticas. Las Figuras 8 y 9 muestran representaciones visuales de estas progresiones, lo que permite visualizar de manera clara las ideas fundamentales del concepto de logaritmo.

**Figura 3- Representación gráfica de progresión geométrica.**



**Fuente:** (Jiménez, 2018).

**Figura 4- Representación gráfica de progresión aritmética.**



**Fuente:** (Jiménez, 2018).

La figura 3 ilustra gráficamente la idea de una progresión geométrica, donde se observa el decrecimiento proporcional de los valores. Por otro lado, la figura 4 presenta una representación gráfica de una progresión aritmética, resaltando la constancia en el crecimiento de los

valores. Si bien las definiciones presentadas por Napier no coinciden exactamente con las contemporáneas, estas representaciones gráficas desempeñan un papel fundamental en la conceptualización del logaritmo. Mediante el uso de imágenes, Napier facilita la comprensión de la relación entre progresiones geométricas y aritméticas, mostrando cómo estos patrones pueden ser utilizados para simplificar cálculos numéricos.

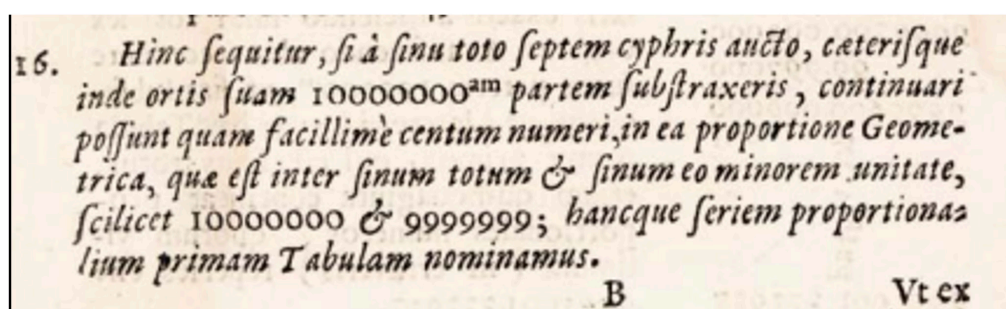
El uso de representaciones gráficas también permite analizar la influencia de la teoría matemática de la época en la construcción del concepto. La inclusión de ilustraciones en la obra de Napier sugiere que su intención no era solo presentar un nuevo sistema de cálculo, sino también ofrecer una herramienta visual para describir de manera más clara las estructuras matemáticas subyacentes. Es así, cómo estas representaciones gráficas se convierten en herramientas valiosas para entender y describir los fenómenos matemáticos y físicos relacionados con los movimientos aritméticos y geométricos.

### Procedimientos y algoritmos

En su construcción del logaritmo como número real, John Napier desarrolló un procedimiento fundamentado en el uso de progresiones geométricas, buscando específicamente que estas se ajustaran a las tablas trigonométricas de senos conocidas en su época. El autor se basa en la relación encontrada por Stifel, quien sugiere que, para multiplicar dos números de una progresión geométrica, se puede hallar el número correspondiente de la progresión geométrica que se encuentra en la posición correspondiente a la suma de los números de la progresión aritmética asociados a los factores del producto.

Napier se propone construir una progresión geométrica para la cual sus términos se acerquen a los valores de las tablas de senos. Para lograr esto, realiza diversos cálculos para determinar diversos elementos, como la razón de proporcionalidad para la progresión geométrica, asegurando que sea decreciente y con un valor inicial de . En la figura 5 se muestra el cálculo de la razón de proporcionalidad, donde se expone que, al restar su 10000000-ésima parte del radio con siete cifras, se obtiene una razón que permite la continuación geométrica entre 10000000 y 9999999.

**Figura 5- Cálculo de la razón de proporcionalidad.**



**Fuente:** Napier, 1614).

Napier decide utilizar una razón de proporcionalidad  $r = 1 - 10^{-7}$  en la construcción de la progresión geométrica, como se detalla en la figura 10. Esto se traduce en la fórmula moderna  $s_n = s_0 r^n$ , donde  $s_0$  es el primer término de la progresión y  $r$  la razón de proporcionalidad. Para referirnos a este cálculo se utilizará *Resultado 1*. Esta elección no fue arbitraria,

sino que respondió a la necesidad de garantizar una progresión suficientemente densa para aproximar valores intermedios con precisión. Sin embargo, al contrastar su modelo con las tablas trigonométricas de referencia, Napier observó que, aunque los valores iniciales muestran un ajuste cercano, la discrepancia aumenta significativamente para los valores subsiguientes, como se evidencia en las Figuras 6 y 7.

**Figura 6- Verificación del ajuste con las tablas trigonométricas.**

| <i>Prima Tabula.</i> |  |
|----------------------|--|
| 10000000.00000000    |  |
| <hr/>                |  |
| 1.00000000           |  |
| <hr/>                |  |
| 9999999.00000000     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999999              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999998.00000001     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999998              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999997.00000003     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999997              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999996.00000006     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999996              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999995.00000009     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999995              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999994.00000012     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999994              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999993.00000015     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999993              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999992.00000018     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999992              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999991.00000021     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999991              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999990.00000024     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999990              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999989.00000027     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999989              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999988.00000030     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999988              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999987.00000033     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999987              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999986.00000036     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999986              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999985.00000039     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999985              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999984.00000042     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999984              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999983.00000045     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999983              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999982.00000048     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999982              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999981.00000051     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999981              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999980.00000054     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999980              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999979.00000057     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999979              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999978.00000060     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999978              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999977.00000063     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999977              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999976.00000066     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999976              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999975.00000069     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999975              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999974.00000072     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999974              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999973.00000075     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999973              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999972.00000078     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999972              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999971.00000081     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999971              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999970.00000084     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999970              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999969.00000087     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999969              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999968.00000090     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999968              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999967.00000093     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999967              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999966.00000096     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999966              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999965.00000099     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999965              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999964.00000102     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999964              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999963.00000105     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999963              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999962.00000108     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999962              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999961.00000111     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999961              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999960.00000114     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999960              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999959.00000117     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999959              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999958.00000120     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999958              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999957.00000123     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999957              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999956.00000126     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999956              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999955.00000129     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999955              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999954.00000132     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999954              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999953.00000135     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999953              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999952.00000138     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999952              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999951.00000141     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999951              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999950.00000144     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999950              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999949.00000147     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999949              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999948.00000150     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999948              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999947.00000153     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999947              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999946.00000156     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999946              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999945.00000159     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999945              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999944.00000162     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999944              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999943.00000165     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999943              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999942.00000168     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999942              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999941.00000171     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999941              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999940.00000174     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999940              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999939.00000177     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999939              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999938.00000180     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999938              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999937.00000183     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999937              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999936.00000186     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999936              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999935.00000189     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999935              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999934.00000192     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999934              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999933.00000195     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999933              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999932.00000198     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999932              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999931.00000201     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999931              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999930.00000204     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999930              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999929.00000207     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999929              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999928.00000210     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999928              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999927.00000213     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999927              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999926.00000216     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999926              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999925.00000219     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999925              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999924.00000222     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999924              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999923.00000225     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999923              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999922.00000228     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999922              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999921.00000231     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999921              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999920.00000234     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999920              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999919.00000237     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999919              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999918.00000240     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999918              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999917.00000243     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999917              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999916.00000246     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999916              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999915.00000249     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999915              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999914.00000252     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999914              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999913.00000255     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999913              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999912.00000258     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999912              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999911.00000261     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999911              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999910.00000264     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999910              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999909.00000267     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999909              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999908.00000270     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999908              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999907.00000273     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999907              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999906.00000276     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999906              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999905.00000279     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999905              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999904.00000282     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999904              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999903.00000285     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999903              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999902.00000288     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999902              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999901.00000291     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999901              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999900.00000294     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999900              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999899.00000297     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999899              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999898.00000300     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999898              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999897.00000303     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999897              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999896.00000306     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999896              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999895.00000309     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999895              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999894.00000312     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999894              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999893.00000315     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999893              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999892.00000318     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999892              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999891.00000321     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999891              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999890.00000324     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999890              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999889.00000327     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999889              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999888.00000330     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999888              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999887.00000333     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999887              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999886.00000336     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999886              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999885.00000339     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999885              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999884.00000342     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999884              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999883.00000345     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999883              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999882.00000348     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999882              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999881.00000351     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999881              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999880.00000354     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999880              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999879.00000357     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999879              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999878.00000360     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999878              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999877.00000363     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999877              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999876.00000366     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999876              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999875.00000369     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999875              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999874.00000372     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999874              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999873.00000375     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999873              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999872.00000378     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999872              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999871.00000381     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999871              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999870.00000384     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999870              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999869.00000387     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999869              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999868.00000390     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999868              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999867.00000393     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999867              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999866.00000396     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999866              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999865.00000399     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999865              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999864.00000402     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999864              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999863.00000405     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999863              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999862.00000408     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999862              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999861.00000411     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999861              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999860.00000414     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999860              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999859.00000417     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999859              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999858.00000420     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999858              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999857.00000423     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999857              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999856.00000426     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999856              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999855.00000429     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999855              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999854.00000432     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999854              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999853.00000435     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999853              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999852.00000438     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999852              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999851.00000441     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999851              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999850.00000444     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999850              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999849.00000447     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999849              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999848.00000450     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999848              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999847.00000453     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999847              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999846.00000456     |  |
| <hr/>                |  |
| 9999846              |  |
| <hr/>                |  |
| 9999845.00000459     |  |
| <hr/>                |  |
| 999                  |  |

Estos resultados pusieron de manifiesto las limitaciones de su construcción inicial, señalando la necesidad de introducir ajustes para alcanzar un modelo más robusto y generalizable.

## 4.2 Interiorización

La interiorización en los escritos de Napier se evidencia en su búsqueda de una progresión geométrica *densa* que se ajuste a las tablas trigonométricas. En lugar de simplemente replicar algoritmos existentes, Napier demuestra en este punto un dominio absoluto al reconocer las limitaciones de las relaciones aritméticas y geométricas convencionales, buscando realizar diversos cambios y extensiones para satisfacer sus necesidades. Napier demostró un dominio conceptual al reconocer que una razón de proporcionalidad cercana a 1 era esencial para generar una progresión geométrica con intervalos reducidos entre sus términos, facilitando así una aproximación más fina a los valores trigonométricos.

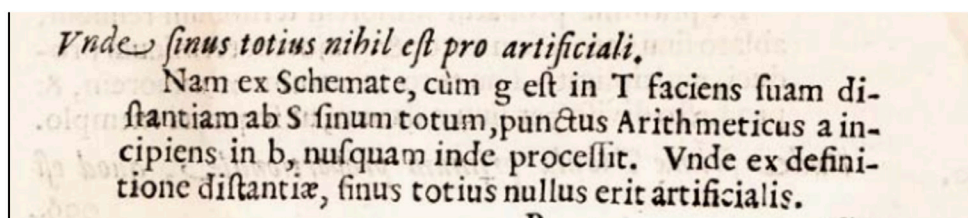
Esta comprensión no surgió de manera inmediata, sino como resultado de un proceso reflexivo en el que Napier evaluó críticamente los resultados de su modelo inicial. Al identificar las discrepancias en su ajuste a las tablas de senos, no solo cuestionó sus pasos previos, sino que utilizó estos hallazgos como base para reformular su enfoque. Este comportamiento refleja claramente el mecanismo de interiorización descrito en la teoría APOE, donde las acciones externas y repetitivas dan paso a operaciones mentales flexibles y generalizables. La capacidad de Napier para adaptar su método y buscar soluciones alternativas subraya un nivel avanzado de razonamiento matemático, en el que la comprensión del problema permitió la evolución de sus herramientas conceptuales y prácticas.

## 4.3 Procesos

### Generalización de resultados a partir de casos específicos

El análisis de la obra de Napier revela un claro proceso de generalización matemática, donde el autor trasciende los casos particulares para establecer principios más amplios. A partir de las progresiones desarrolladas en el *Resultado 1*, Napier realiza una validación sistemática de sus propiedades fundamentales. Un ejemplo paradigmático es su verificación de que el valor  $10^7$  en la progresión aritmética corresponde exactamente a 0 en la progresión geométrica, como se muestra en la Figura 8. Esta comprobación no solo sirvió como prueba de concepto, sino que le permitió establecer los cimientos teóricos de su sistema logarítmico.

**Figura 8- Verificación de la característica inicial.**



**Fuente:** (Napier, 1614).

La Figura 8, que ilustra esta verificación inicial de las características fundamentales del sistema, demuestra cómo Napier partió de casos concretos para inferir propiedades generales. Sin embargo, como se detalló en la sección de *Procedimientos y algoritmos*, el autor mostró una notable capacidad crítica al reconocer las limitaciones de precisión en su modelo, particularmente evidentes en la tabla comparativa de la Figura 7. Este reconocimiento de las discrepancias no constituye un fracaso metodológico, sino que representa una fase esencial en el proceso de generalización, donde la identificación de casos particulares problemáticos impulsa refinamientos teóricos.

Lo más significativo de este proceso es cómo Napier logró extraer principios generales a partir de estos casos específicos, tanto de confirmación como de discrepancia. Su metodología refleja un pensamiento matemático maduro, donde la generalización no se realiza mediante simple inducción, sino a través de un análisis crítico que distingue entre patrones fundamentales y artefactos del modelo particular. Esta capacidad de navegar entre lo específico y lo general, manteniendo simultáneamente el rigor conceptual y la flexibilidad para ajustar el modelo, constituye uno de los aspectos más sofisticados de su contribución al desarrollo del concepto de logaritmo.

### Reflexiones sobre resultados previos

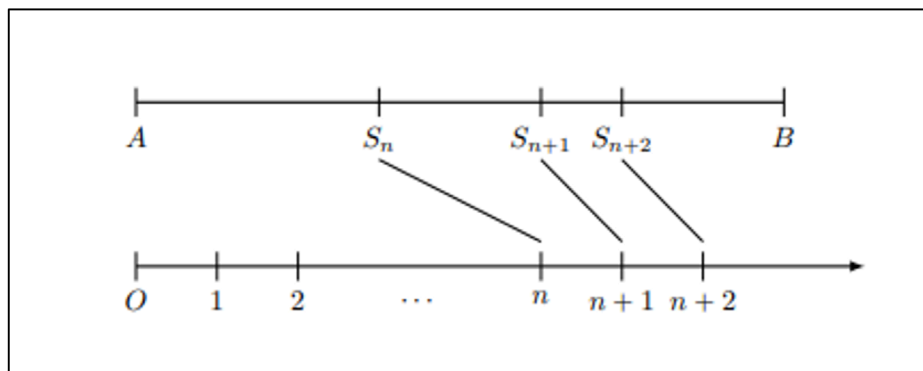
A lo largo de la construcción, Napier demuestra una reflexión profunda frente a los resultados iniciales de su primera progresión geométrica, principalmente al no considerar estos resultados como un fracaso, sino más bien como una fuente de aprendizaje que le permite mejorar. En esta línea, Jiménez (2018) subraya este proceso como un salto hacia el futuro, resaltando la capacidad de Napier para avanzar hacia ideas innovadoras en una época que precede al desarrollo de la cinemática y al surgimiento posterior de Newton. La capacidad de Napier para aprovechar sus errores como insumos para el progreso es evidente en su construcción de lo que se va a denominar *modelo discreto*.

Para el modelo discreto, Napier decide partir de la idea de progresión geométrica, de modo que, partiendo de dicha definición y los insumos recopilados en *Resultado 1*, crea una nueva progresión geométrica. Para elaborar la construcción, describe que debe considerar un segmento AB cuya longitud es  $10^7$  unidades, ahora, se debe considerar un punto arbitrario sobre el segmento AB el cual se desplaza desde A hacia B, de modo que dicho punto al desplazarse tiene las características de un movimiento geométrico.

La clave en la nueva progresión construida está en considerar cada uno de los puntos que se desplazan de A hacia B, en una correspondencia con un número natural  $n$ , de manera que cada uno de ellos pueda ser numerado y dotado de una característica basada en la definición de progresión geométrica (como se observa en la figura 9). De este modo, se puede considerar cada uno de los puntos mencionados, como  $S_n$  y su caracterización está descrita por la relación  $s_n = S_n B$ , de modo que es posible caracterizar el desplazamiento de cada punto en términos de la progresión construida previamente por Napier, ya que  $s_n$  corresponde con la progresión presentada en el *Resultado 1*.

Además, para evidenciar la relación entre la progresión geométrica y aritmética, el mismo toma una semirrecta de origen  $O$  sobre la cual avanza un punto a través de momentos o intervalos de tiempo igualmente espaciados (es decir la representación gráfica de una progresión aritmética). Así, cuando dicho punto se encuentra en un momento  $n$ , se puede establecer la relación con la posición del término  $S_n$  sobre el segmento AB. Para evidenciar geoméricamente el resultado descrito anteriormente, Jiménez (2018), presenta gráficamente el modelo, como se muestra en la figura 9.



**Figura 9- Modelo discreto de Napier.**

**Fuente:** (Jiménez, 2018).

### Resultados para una cantidad infinita de objetos

Napier muestra una clara disposición para aceptar resultados que abarquen una cantidad infinita de objetos, especialmente al trabajar con la densidad de la progresión en la construcción de su *modelo discreto*. Su elección de una razón de proporcionalidad cercana a uno implica un desplazamiento continuo de puntos sobre el segmento AB, permitiendo de esta manera hablar de una progresión *densa*. La relación establecida en el *modelo discreto*,  $s_n = S_n B$ , revela la aceptación de resultados para una cantidad infinita de objetos, ya que establece una conexión indefinida entre los términos de la progresión  $S_n$  y los de una progresión aritmética sin restricciones en cuanto a su alcance. Al diseñar un sistema donde los términos de la progresión geométrica pueden hacerse arbitrariamente cercanos entre sí, Napier estaba operando con lo que hoy se conoce como un conjunto *denso*, anticipándose así a conceptos que posteriormente serían formalizados en el análisis matemático.

Es particularmente revelador cómo Napier maneja el movimiento continuo de un punto a lo largo del segmento AB en su construcción geométrica. Esta representación dinámica, donde el punto puede ocupar infinitas posiciones intermedias, muestra una comprensión intuitiva pero profunda de la naturaleza infinita y continua del sistema numérico real. Su capacidad para extrapolar propiedades verificadas en casos finitos a este contexto infinito no solo evidencia su genio matemático, sino que también marca un hito en la transición entre las matemáticas discretas del Renacimiento y el cálculo infinitesimal que emergería posteriormente.

### Prescinde de estímulos externos

El desarrollo del modelo discreto por parte de Napier representa un notable ejercicio de abstracción matemática donde trasciende la dependencia de estímulos externos concretos. En esta fase de su trabajo, los conceptos matemáticos fundamentales (particularmente las progresiones aritméticas y geométricas) dejan de ser meras herramientas de cálculo para convertirse en elementos estructurales de un sistema coherente. Lo más destacable es cómo Napier logra articular estos conceptos matemáticos con principios físicos fundamentales, particularmente aquellos relacionados con el movimiento, el tiempo y el espacio, creando así un marco teórico autosuficiente.

Es esencial resaltar que el modelo discreto no surge únicamente de procesos algebraicos o construcciones geométricas, sino que se basa en un entendimiento profundo de fenómenos físicos. La construcción gira en torno a describir las relaciones entre una progresión geométrica inicial y un modelo discreto que reestructura estos conceptos en términos de definiciones matemáticas y fenómenos físicos. Esta reestructuración se expresa gráficamente para describir los fenómenos y relaciones existentes, destacando la habilidad de Napier para encapsular y combinar diferentes áreas del conocimiento en su construcción del logaritmo.

#### 4.4 Encapsulación

El verdadero genio matemático de Napier se revela en su capacidad para encapsular las complejas relaciones del modelo discreto y transformarlas en un modelo continuo unificado. Este proceso de encapsulación va más allá de la simple generalización: representa una auténtica síntesis conceptual donde las acciones y procesos anteriores se integran en una estructura coherente que puede manipularse como un todo.

Al reflexionar sobre su propio proceso constructivo, Napier logra abstraer las propiedades esenciales del sistema, prescindiendo de los detalles particulares que caracterizan las etapas iniciales. Esta capacidad de considerar el conjunto de operaciones y transformaciones como una entidad única es particularmente evidente en la transición hacia el modelo continuo, donde las relaciones discretas dan paso a una concepción fluida del logaritmo como número real.

La encapsulación se manifiesta no solo en la integración de conceptos matemáticos, sino también en la forma en que Napier articula diferentes dominios del conocimiento. Su modelo final representa una perfecta síntesis de consideraciones algebraicas, geométricas y físicas, demostrando una comprensión profunda de las interrelaciones entre estas áreas. Este logro va más allá de la mera aplicación de herramientas matemáticas, revelando un verdadero dominio en la construcción teórica y la abstracción conceptual.

##### **Reflexiona sobre las acciones que se aplicaron en el proceso**

La extensión del modelo discreto a uno continuo por parte de Napier se basa en cimientos sólidos que involucran una reflexión profunda sobre las acciones aplicadas en el proceso. En primer lugar, destaca la habilidad del autor para generalizar y extender conceptualmente su construcción, superando las ideas iniciales planteadas por Stifel. La reflexión se centra en la manipulación de números en sentido discreto y relaciones específicas, destacando la necesidad de llevar estas ideas al ámbito continuo. Lo notable es cómo Napier transformó lo que en Stifel eran meras observaciones sobre progresiones particulares en un sistema coherente y generalizable.

La articulación conceptual que Napier desarrolló durante este proceso revela un manejo de varios niveles de abstracción. No se limitó a extender mecánicamente las operaciones discretas al caso continuo, sino que construyó un nuevo marco teórico donde estas operaciones adquirieron un significado más profundo y general. Como señala Jiménez (2018), esta transición representó mucho más que una simple ampliación del dominio numérico, sino que constituyó la creación de una nueva herramienta matemática con potencial para revolucionar el cálculo numérico. Esta construcción, denominada por autores como Jiménez (2018) como un modelo continuo, representa el logro final de Napier al proporcionar una construcción del logaritmo como número real. Así, la extensión inicialmente buscada se materializa a través de la reflexión, la generalización y la articulación coherente de conceptos.



La reflexión sobre estas acciones resulta particularmente relevante para la educación matemática contemporánea, pues revela cómo el pensamiento avanzado en matemáticas implica constantes procesos de revisión, generalización y reconfiguración de ideas iniciales. El caso de Napier muestra que los conceptos matemáticos fundamentales no surgen completamente formados, sino que son el resultado de prolongados procesos de refinamiento conceptual donde las acciones iniciales son continuamente reinterpretadas a la luz de nuevas comprensiones.

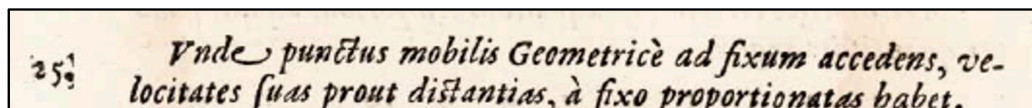
#### 4.5 Objetos

En cuanto a la identificación de objetos respecta, Napier reflexiona sobre las acciones y conceptos aplicados en el proceso, considerándolos como un conjunto integral. La búsqueda de respuestas para articular nociones alrededor de la estructura Objeto impulsa la identificación de objetos en la construcción del logaritmo como número real.

##### Operaciones o pasos que se aplicaron en el proceso viéndolo como un todo y nociones coordinadas

En este análisis, se profundiza en la reflexión del autor sobre las acciones aplicadas a los procesos, destacando la percepción del proceso en su integridad. La transición del modelo discreto al continuo se examina en detalle, siendo fundamental para comprender las propuestas de Napier. La proposición clave, presentada en la Figura 10, establece una conexión crucial entre los modelos discreto y continuo al afirmar que las velocidades son proporcionales a las distancias.

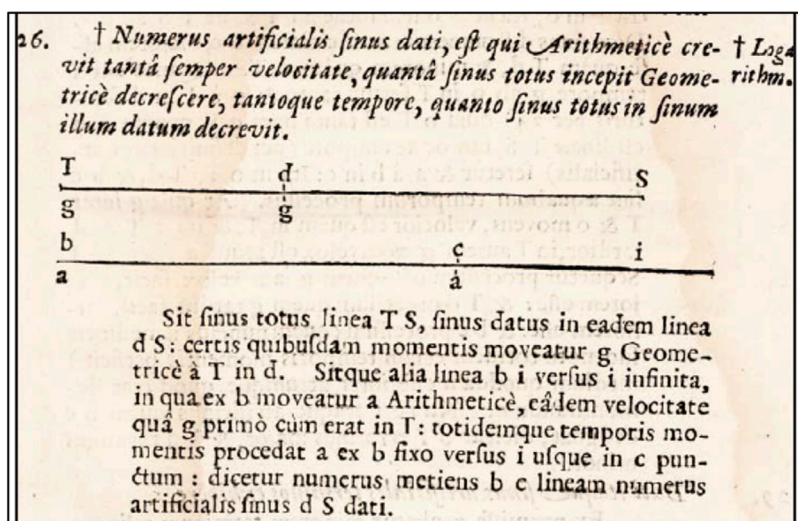
**Figura 10- Proposición que caracteriza el movimiento geométrico en términos de distancia y velocidad.**



**Fuente:** (Napier, 1614).

Por otra parte, la proposición 26 enuncia que: El logaritmo de un número dado (seno para efectos de la definición descrita), corresponde a un número que ha aumentado aritméticamente, con la misma velocidad con la cual el radio (segmento  $TS$  de longitud  $10^7$  comenzó a disminuir de manera geométrica, y que al mismo tiempo que el radio ha disminuido hasta el número (seno) en cuestión.

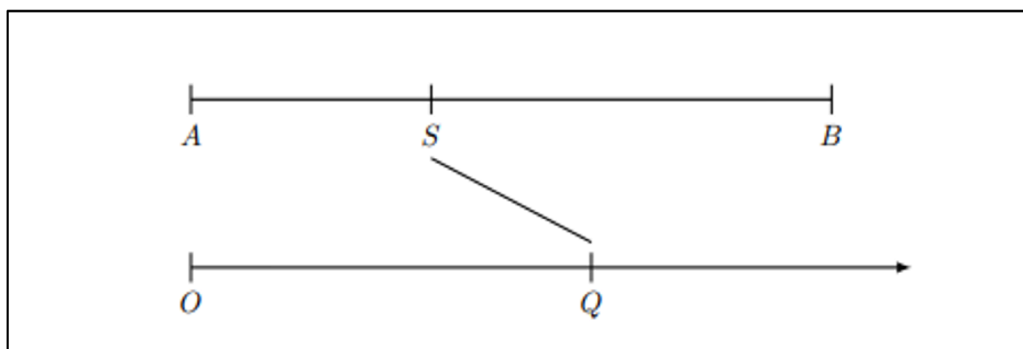
En su descripción, se detalla la construcción per se, donde menciona que  $TS$  tiene un punto,  $d$ , el cual mueve hacia abajo con velocidad decreciente (una progresión geométrica decreciente), mientras que la línea  $bi$  tiene un punto que se mueve hacia abajo con velocidad constante (y una progresión aritmética creciente) (Ver Figura 11).

**Figura 11- Definición del modelo cinemático de Napier.**

**Fuente:** (Napier, 1614).

A través de la proposición 26 de Napier (figura 11) se logra observar la coordinación de nociones y conceptos alrededor de la construcción del logaritmo como número real, ya que dicha proposición presenta la extensión del modelo discreto al modelo continuo (basado en las ideas de cinemática) y define el logaritmo como número real, pero además se puede notar que en dicha extensión existen prevalentemente las nociones coordinadas de progresiones aritméticas y geométricas relacionadas y caracterizadas (en una coordinación de nociones más) mediante fenómenos cinemáticos (movimiento, distancia y tiempo).

En la figura 12 se visualiza este modelo cinemático continuo, enfatizando la coordinación de movimientos entre un punto en una semirrecta (Q) y otro en un segmento (S). La relación entre el tiempo y la velocidad instantánea se establece con claridad.

**Figura 12- Modelo cinemático continuo.**

**Fuente:** (Jiménez, 2018).

El logaritmo, definido en la proposición 26, se revela como un elemento clave que vincula la distancia entre puntos con el tiempo transcurrido. En este contexto, se evidencia la coordinación conceptual que involucra directamente los conceptos presentados desde la cinemática y las nociones de movimiento geométrico en términos de desplazamiento, tiempo, distancia y velocidad. Este análisis exhaustivo destaca la riqueza de las ideas de Napier al explorar la interconexión de progresiones geométricas, progresiones aritméticas, cinemática y logaritmos, proporcionando una visión holística de su pensamiento matemático avanzado.

### **Aplicaciones del concepto en estudio que se identifica en otras áreas del conocimiento y la importancia del concepto en otros campos**

En la obra de Napier, se evidencia cómo el logaritmo como número real, no se limita al ámbito matemático puro, sino que se ilustra su aplicación en la resolución de cálculos prácticos. Napier no solo presenta el concepto, sino que también ejemplifica su utilidad mediante casos concretos, especialmente al construir tablas de logaritmos. El propósito fundamental de este esfuerzo va más allá de la matemática pura; Napier aspira a traspasar fronteras disciplinares. Inicialmente, la construcción del logaritmo se orienta a simplificar cálculos relacionados con arcos de circunferencias, notoriamente cuando los radios son considerablemente extensos, como ejemplificado con un radio de longitud 10000000.

En el ámbito del conocimiento, autores como Jiménez (2018) subrayan las aplicaciones iniciales del logaritmo en la astronomía y la navegación. En estas disciplinas, donde los cálculos con magnitudes significativas eran comunes, el logaritmo emergió como una herramienta esencial para agilizar procesos numéricos. Según Impellizzere de Córdoba (2021), en la época de Napier, la invención del logaritmo no solo aceleró los cálculos, sino que también se convirtió en una valiosa herramienta computacional, liberando tiempo para investigaciones más profundas en diversos campos científicos.

Aunque en la era actual los logaritmos no se utilizan de la misma manera gracias a los avances tecnológicos, su construcción como número real dejó un legado trascendental. La utilidad histórica del logaritmo persiste, y su impacto se expande más allá de las matemáticas, influyendo en la física cinemática y, posteriormente, dando origen al logaritmo como función en el análisis matemático.

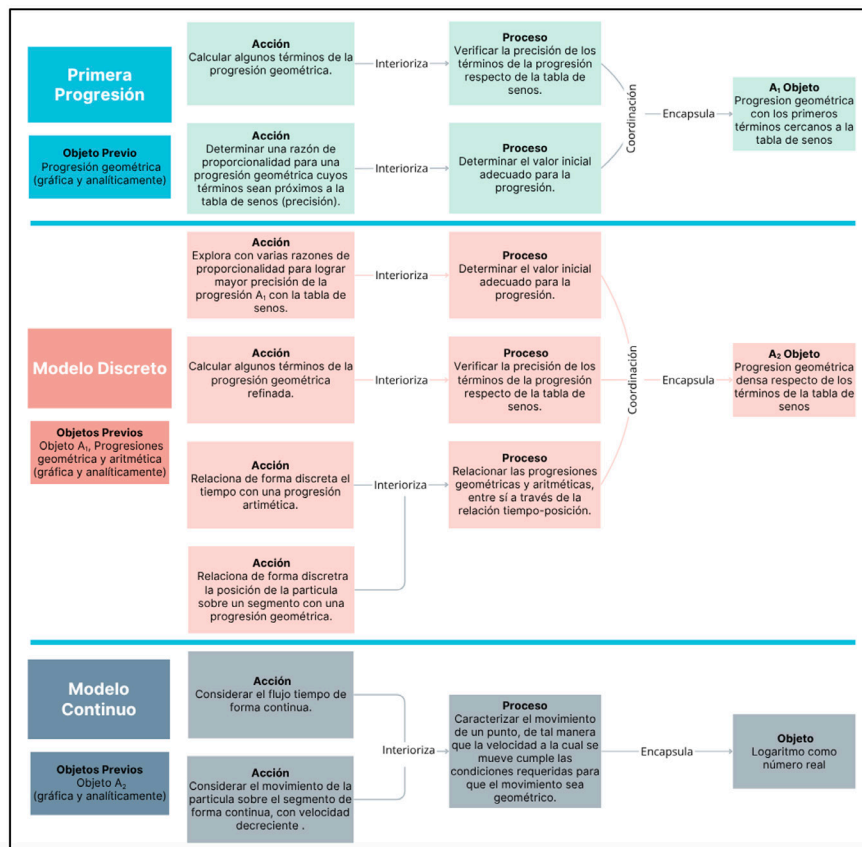
### **Descomposición genética preliminar del logaritmo como número real**

La secuencia descrita anteriormente tiene en cuenta las ideas fundamentales que organizan el significado que constituye el logaritmo como número real desde un análisis epistemológico y la vinculación existente en las progresiones geométricas, aritméticas y demás resultados discutidos anteriormente. De este modo, es importante destacar que la construcción del logaritmo como número, desde los textos originales y la visión histórica de dicha construcción, se pueden ver articulados a través de tres fases, que son las siguientes:

1. Construcción y manipulación de la primera progresión geométrica y el paso a la densidad.
2. Construcción del modelo discreto y el paso a la continuidad.
3. Construcción del modelo continuo y definición del concepto de logaritmo.

La figura 13 muestra la descomposición genética preliminar construida a partir de los resultados obtenidos.

**Figura 13- Descomposición genética preliminar del logaritmo como número real.**



**Fuente:** Construcción propia.

## 5. CONSIDERACIONES FINALES

Este estudio ha permitido reconstruir la génesis del concepto de logaritmo como número real a través de un análisis histórico-epistemológico fundamentado en la teoría APOE. Los resultados revelan un proceso de construcción cognitiva que va desde acciones concretas con progresiones numéricas hasta la formación de esquemas complejos que integran conceptos matemáticos y físicos. Este patrón de desarrollo coincide con lo documentado en investigaciones previas sobre la construcción de conceptos matemáticos avanzados, confirmando la pertinencia del marco teórico adoptado para este tipo de análisis.

Un hallazgo particularmente relevante fue identificar cómo la noción de densidad, lograda mediante el uso de una razón de proporcionalidad extremadamente cercana a 1, sirvió como un enlace conceptual entre el modelo discreto planteado inicialmente y su posterior extensión continua. Este resultado adquiere especial significado al contrastarlo con las dificultades de aprendizaje que suelen presentar los estudiantes al abordar el concepto de logaritmo,

donde frecuentemente persiste una visión puramente discreta que limita su comprensión profunda. La construcción histórica analizada anticipa estas dificultades, sugiriendo que el tratamiento didáctico actual podría beneficiarse de enfatizar esta transición conceptual.

La fase final de encapsulación, donde se integran conceptos matemáticos abstractos con principios físicos concretos, constituye otro aspecto destacable de los resultados. Este proceso no solo valida hallazgos previos sobre la importancia de los contextos interdisciplinarios para la comprensión matemática, sino que además plantea interrogantes significativos sobre cómo podrían replicarse estas conexiones en el aula. La capacidad de Napier para articular dominios que parecen alejados sugiere que la enseñanza actual del logaritmo podría enriquecerse incorporando explícitamente estas relaciones conceptuales.

Sin embargo, en el análisis se enfrentaron limitaciones importantes, particularmente en la reconstrucción de los procesos heurísticos que llevaron a llevó a Napier a dar ese salto al futuro como lo llamaron historiadores como Boyer y alcanzar el modelo continuo. Esta brecha entre el registro histórico y la inferencia cognitiva plantea algunos desafíos metodológicos fundamentales para este tipo de investigaciones.

Como resultado del análisis fue posible presentar una descomposición genética que conjetura la naturaleza de las estructuras cognitivas y del razonamiento descrito por el autor en las obras originales mediante diferentes formas de conocer los elementos matemáticos y considerando los mecanismos de construcción del conocimiento. De esta manera y como ya se ha indicado, la descomposición genética presentada se articula a través de tres fases:

- Construcción y manipulación de la primera progresión geométrica y el paso a la densidad.
- Construcción del modelo discreto y el paso a la continuidad.
- Construcción del modelo continuo y definición del concepto de logaritmo.

La descomposición genética del concepto de logaritmo como número real se apoya en la epistemología del concepto y en los resultados de las investigaciones previas sobre los procesos mentales necesarios para comprenderlo que se han obtenido a través de diversas investigaciones en educación matemática. La descomposición genética del objeto logaritmo como número se describe a través de los mecanismos de construcción: interiorización, coordinación y encapsulación. Se reflexiona para ello sobre los vínculos con otras nociones matemáticas; progresión geométrica, progresión aritmética y conceptos de cinemática.

Desde la perspectiva educativa, los resultados obtenidos tienen implicaciones concretas para la enseñanza del logaritmo. La secuencia identificada en la descomposición genética sugiere la necesidad de reexaminar la progresión didáctica tradicional, privilegiando un desarrollo más natural del concepto que considere el trabajo con progresiones, enfatice las transiciones entre representaciones y recupere las conexiones interdisciplinarias. Esto requeriría no solo ajustes curriculares, sino también una formación docente que enfatice la comprensión profunda de estas estructuras conceptuales. Cabe destacar que, esta propuesta de descomposición genética, es solamente un camino de los posibles a plantear; con ella se pretende analizar las construcciones mentales que tienen que hacer los alumnos para construir este concepto teniendo en cuenta tanto la epistemología del concepto como los resultados de investigaciones centradas en la comprensión de los alumnos.

En conclusión, este estudio busca trascender el mero análisis histórico al establecer conexiones significativas entre la construcción epistemológica del logaritmo. Los resultados no

solo validan la utilidad del marco APOE para este tipo de investigaciones, sino que además abren nuevas líneas de indagación tanto teóricas como aplicadas. Particularmente, resulta relevante la posibilidad de desarrollar materiales didácticos que, inspirándose en el desarrollo histórico, faciliten a los estudiantes la construcción de una comprensión más profunda y conectada de este concepto fundamental en matemáticas.

## DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

Todos los autores participaron activamente en la concepción de la idea presentada, el desarrollo de la teoría, la adaptación de la metodología, el análisis de las obras originales, la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo.

## AGRADECIMIENTOS

Agradecemos sinceramente al Lic. Edwin Brenes Cambronero por su valiosa colaboración durante el desarrollo de este estudio.

En memoria de Christian Víctor Contreras, cuya pasión y compromiso acompañaron los inicios de esta investigación. Su huella permanece en este trabajo.

## 6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrate, R., y Pochulu, M. (2007, Junio). Ideas para la clase de logaritmos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (10), 77-94. Recuperado de [http://www.fisem.org/www/union/revistas/2007/10/Union\\_010\\_011.pdf](http://www.fisem.org/www/union/revistas/2007/10/Union_010_011.pdf)
- Alguacil, M., Boqué, M. y Pañellas, M. (2016). Dificultades en conceptos matemáticos básicos de los estudiantes para maestros. *INFAD*, 419-129.
- Annon, L., Cottrill, J., Dubinsky, E., Okaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). APOS Theory. *Springer*.
- Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (1991). A history of mathematics. New York: Wiley. [https://books.google.co.cr/books/about/Historia\\_de\\_la\\_matem%C3%A1tica.html?id=MWbUwAEACAAJ&source=kp\\_book\\_description&redir\\_esc=y](https://books.google.co.cr/books/about/Historia_de_la_matem%C3%A1tica.html?id=MWbUwAEACAAJ&source=kp_book_description&redir_esc=y)
- Brenes, E. & Gómez, K. (2022). Análisis histórico epistemológico del logaritmo como número real desde la teoría APOE. *Universidad de Costa Rica*.
- Cachuay, Y., y Pino, Z. (2013). Aprendizaje de funciones exponenciales y logarítmicas utilizando el software educativo Derive en estudiantes de quinto de Secundaria-Huancayo. *Universidad Nacional del Centro del Perú*. <http://repositorio.uncp.edu.pe/bitstream/handle/UNCP/2540/Cachuay%20Bonifacio-%20Jorge%20Pino.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Costa, A. y Sanabria, M. (2016). Una propuesta didáctica para el estudio del concepto logaritmo en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico. *Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de la Plata*. [https://www.researchgate.net/publication/309240251\\_UNA\\_PROPUESTA\\_DIDACTICA\\_PARA\\_EL\\_ESTUDIO\\_DEL\\_CONCEPTO\\_LOGARITMO\\_EN\\_EL\\_MARCO\\_DE\\_LA\\_TEORIA\\_ANTROPOLOGICA\\_DE\\_LO\\_DIDACTICO](https://www.researchgate.net/publication/309240251_UNA_PROPUESTA_DIDACTICA_PARA_EL_ESTUDIO_DEL_CONCEPTO_LOGARITMO_EN_EL_MARCO_DE_LA_TEORIA_ANTROPOLOGICA_DE_LO_DIDACTICO)
- Dubinsky, E. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–126). Springer Netherlands. [https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1\\_7](https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7)



- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M., & Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 335–359. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-2531-z>
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M., & Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 253–266. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-0473-0>
- Dubinsky, E., Weller, K., Stenger, K. y Vidakovic, D. (2008). Infinite iterative processes: The Tennis Ball Problem. *European Journal of Pure and Applied Mathematics* 1 (1), 99 – 121.
- Farfán, R., y Ferrari, M. (2001). Una visión socio epistemológica. Estudio de la función logaritmo. <http://funes.uniandes.edu.co/6323/>
- Gacharná, O. (2012). Algunas consideraciones didácticas sobre el concepto de logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades en la educación básica y media. *Universidad Nacional de Colombia*.
- Impellizere de Córdoba, S. B. (2021). La invención de los logaritmos. *Revista De Educación Matemática*, 18(1). Recuperado a partir de <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10853>
- Jiménez, D. (2018). Descubrimiento Neperiano de los logaritmos. UNEXPO. [https://www.academia.edu/37228900/Descubrimiento\\_neperiano\\_de\\_los\\_logaritmos](https://www.academia.edu/37228900/Descubrimiento_neperiano_de_los_logaritmos)
- MEP. (2012). Programa de Estudios de Matemáticas. San José: *Ministerio de Educación Pública*.
- Napier, J. (1616). *A Description of the Admirable Table of Logarithms* (E. Wright, Trans.). Renacents Books. (Original work published 1614).
- Panagiotou, E.N. (2011). Using History to Teach Mathematics: The Case of Logarithms. *Sci & Educ* 20, 1–35. <https://doi.org/10.1007/s11191-010-9276-5>
- Rizzo, K. (2014). El desafío de enseñar Funciones Exponenciales y Logarítmicas con tecnología. Implementación del modelo 1 a 1. Congreso Iberoamericano de ciencia, tecnología, innovación y educación. Buenos Aires, Argentina. [www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/425.pdf](http://www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/425.pdf)
- Sanabria, D. (2016). El concepto de logaritmo: una revisión histórica, bibliográfica y una propuesta didáctica en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *UNCPBA*. <https://www.ridaa.unicen.edu.ar/xmlui/bitstream/handle/123456789/599/Tesis%20Final%20Sanabria%2C%20Daniela%20.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Serrano, H. (2019). Construcción del concepto de función desde la Teoría APOE: La coordinación entre representaciones como apoyo. *XV CIAEM-IACME*.
- Vargas Hernández, J. . (2020). Una revisión de la literatura en enseñanza y aprendizaje de los logaritmos (2000 – 2013): historia y epistemología. *Revista Boletín Redipe*, 9(8), 52–82. <https://doi.org/10.36260/rbr.v9i8.1041>



