Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 19 · N°. 1 · 2026
151-178
Recibido: 25/08/2025
Aprobado: 22/11/2025

Artículos de investigación

DE LA PERIODICIDAD AL ORDEN NO REPETITIVO: Un análisis físico-matemático de los teselados hasta los patrones de Penrose desde el Enfoque Ontosemiótico

From Periodicity to Non-Repetitive Order: A Physico-Mathematical Analysis of tessellations up to Penrose Pattems from the Ontosemiotic Approach

Juan Carlos Ruiz Castillo[1]

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2218-1442

RESUMEN

Este artículo analiza la evolución conceptual, geométrica y físico-matemática de los teselados del plano, desde los patrones periódicos clásicos hasta los complejos teselados aperiódicos de Penrose. El **objetivo** principal es comprender cómo la transición del orden periódico al cuasiperiódico puede ser abordada didácticamente desde el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), donde se integra dimensiones epistémicas, semióticas, cognitivas e institucionales. La **metodología** empleada corresponde a un estudio cualitativo de naturaleza interpretativa, centrado en una experiencia didáctica desarrollada con estudiantes de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física. Se diseñaron y analizaron tareas geométricas progresivas en torno a teselados periódicos, aperiódicos y de Penrose, mediante configuraciones didácticas reflexivas orientadas por los fundamentos del EOS. Entre los **resultados**, se destaca que los estudiantes lograron articular representaciones geométricas, simbólicas y verbales, identificar propiedades de cuasiperiodicidad y simetría no convencional, y resignificar la noción de orden en contextos no periódicos. Asimismo, se identificaron conflictos semióticos y reorganizaciones conceptuales asociadas al paso desde teselaciones convencionales a estructuras como las de Penrose. En cuanto a las **conclusiones**, se argumenta que el estudio de los teselados, especialmente los aperiódicos, permite no solo enriquecer la comprensión matemática de estructuras complejas, sino también promover procesos formativos interdisciplinarios que conectan la geometría, la física del estado sólido y la didáctica avanzada. Este

[1] Universidad de San Carlos de Guatemala, Guatemala, Guatemala. Correo electrónico: jcefpem@profesor.usac.edu.gt

enfoque ofrece una vía eficaz para formar docentes capaces de interpretar, modelar y comunicar fenómenos geométricos no estándar en la enseñanza de la matemática moderna.

Palabras clave: Teselaciones Geométricas, Cuasiperiosidad, Enfoque Ontosemitico, Didáctica de la Matemática, Cuasicristales.

ABSTRACT

This article analyzes the conceptual, geometric, and physico-mathematical evolution of planar tessellations, from classical periodic patterns to the complex aperiodic Penrose tilings. The main objective is to understand how the transition from periodic to quasiperiodic order can be addressed didactically through the Ontosemiotic Approach to mathematical knowledge and instruction (EOS), integrating epistemic, semiotic, cognitive, and institutional dimensions. The methodology employed corresponds to a qualitative, interpretative study focused on a didactic experience conducted with students from the Bachelor's Degree in the Teaching of Mathematics and Physics. Progressive geometric tasks were designed and analyzed, focusing on periodic, aperiodic, and Penrose tessellations, using reflective didactic configurations guided by EOS principles. Among the results, it is noteworthy that students were able to articulate geometric, symbolic, and verbal representations, identify properties of quasiperiodicity and non-conventional symmetry, and reconceptualize the notion of order in non-periodic contexts. Likewise, semiotic conflicts and conceptual reorganizations were identified, particularly in the transition from conventional tessellations to structures like those of Penrose. Regarding the conclusions, it is argued that the study of tessellations—especially aperiodic ones—not only enhances mathematical understanding of complex structures, but also fosters interdisciplinary educational processes that connect geometry, solid-state physics, and advanced didactics. This approach offers an effective path to prepare future educators capable of interpreting, modeling, and communicating non-standard geometric phenomena within the teaching of modern mathematics..

Keywords: Geometric Tessellations, Quasiperiodicity, Ontosemiotic Approach, Mathematics Education, Quasicrystals

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de los teselados constituye un campo de interés tanto en la matemática pura como en sus aplicaciones físicas y estéticas. Desde la antigüedad, las civilizaciones han empleado patrones de recubrimiento del plano en la creación de mosaicos, vitrales y arte ornamental, como lo evidencian las construcciones islámicas, bizantinas y romanas, donde la simetría y la repetición regular de motivos geométricos reflejan un conocimiento empírico de las transformaciones isométricas del plano (Grünbaum & Shephard, 1987).

En el ámbito matemático, los teselados periódicos han sido sistematizados a través de la teoría de grupos, particularmente los grupos de simetría del plano, también llamados grupos de mosaico, que permiten clasificar las posibles formas de recubrimiento repetitivo mediante traslaciones, rotaciones, reflexiones y deslizamientos. Esta clasificación culmina en los 17 grupos de simetría bidimensionales, los cuales han sido fundamentales no solo para la geometría euclidiana, sino también para la cristalografía y la física del estado sólido (Conway, Burgiel, & Goodman-Strauss, 2008).

No obstante, hacia finales del siglo XX, se descubrieron patrones de teselado que, sin ser periódicos, exhiben orden y simetría a gran escala. Este hallazgo fue revolucionario tanto desde el punto de vista matemático como físico. Entre ellos, destacan los teselados de Penrose, introducidos por Roger Penrose en la década de 1970, los cuales cubren el plano sin repetición traslacional, pero con propiedades cuasiperiódicas y simetría de orden cinco. Estos patrones han sido utilizados para modelar estructuras atómicas conocidas como cuasicristales, cuyo descubrimiento experimental por Dan Shechtman en 1982 desafió los paradigmas tradicionales de la cristalografía y le valió el Premio Nobel de Química en 2011 (Shechtman et al., 1984; Levine & Steinhardt, 1984).

Desde una perspectiva educativa, la enseñanza de los teselados ofrece una oportunidad única para integrar modelización geométrica, análisis simétrico y reflexión epistemológica en un entorno didáctico activo. En particular, el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), desarrollado por Godino y colaboradores, permite interpretar la evolución de los significados construidos por los estudiantes, donde se permite atender tanto a la complejidad epistémica de los objetos como a los procesos semióticos, cognitivos e institucionales que intervienen en su aprendizaje.

Este artículo se propone, entonces, analizar la evolución conceptual, geométrica y físico-matemática de los teselados del plano, desde los patrones periódicos clásicos hasta los diseños aperiódicos de Penrose, a partir de una experiencia didáctica con estudiantes de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física. Se busca mostrar cómo el EOS puede orientar procesos formativos que promuevan un pensamiento geométrico moderno, crítico e interdisciplinario, en diálogo con la historia, la física del estado sólido y la matemática contemporánea.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

1.1 Antecedentes históricos de los teselados

El concepto de *teselación* o *mosaico geométrico* —la cobertura completa de una superficie mediante figuras planas que no se superponen ni dejan espacios vacíos— ha acompañado al pensamiento humano desde tiempos ancestrales, mucho antes de ser formalizado matemáticamente. Estas configuraciones han sido estudiadas desde perspectivas tanto estéticas como estructurales en diversas culturas y épocas (Grünbaum & Shephard, 1987; Wells, 1991).En las culturas antiguas, los teselados no eran únicamente soluciones técnicas para recubrir superficies, sino también manifestaciones estéticas, simbólicas y espirituales que reflejaban una comprensión intuitiva de los principios de repetición, simetría y organización espacial.

Ejemplos notables pueden encontrarse en los mosaicos romanos del periodo helenístico y del Alto Imperio, donde se utilizaban motivos geométricos entrelazados con escenas figurativas para decorar villas, termas y templos (Ling, 1998). Asimismo, la tradición islámica desarrolló teselaciones de notable complejidad y belleza, especialmente en la Alhambra de Granada, donde se alcanzó una exhaustiva exploración de los 17 grupos de simetría del plano —mucho antes de que fueran sistematizados en el siglo XIX— a través de composiciones ornamentales basadas en polígonos regulares, estrellas y motivos entrelazados (Abas & Salman, 1995; Kaplan & Salesin, 2000).

En el mundo bizantino, los pavimentos de opus tessellatum y opus sectile combinaban mármoles de diferentes colores con disposiciones geométricas precisas, donde se revela un dominio técnico y artístico notable. De igual forma, en la arquitectura islámica de Persia, Turquía y Asia Central, se desarrollaron patrones geométricos modulados a partir de reglas de simetría rotacional, reflexión y traslación, cuya elaboración responde no solo a principios decorativos, sino también a concepciones metafísicas del orden y la unidad (Bonner, 2017).

Estas prácticas muestran que, aún en ausencia de una teoría explícita de los grupos de simetría o de los espacios métricos, las civilizaciones desarrollaron modos altamente sofisticados de comprender y representar el orden geométrico. Por ello, el recorrido histórico de los teselados constituye un testimonio profundo de la convergencia entre estética, estructura, simetría y racionalidad, se puede anticipar problemáticas que hoy son objeto de estudio en la matemática, la física del estado sólido y la teoría del diseño.

2.2 Civilizaciones antiguas: la intuición del orden

Las primeras manifestaciones de teselaciones o recubrimientos del plano emergen en las civilizaciones antiguas como el Antiguo Egipto, Mesopotamia y el mundo greco-romano, donde la simetría y la repetición de formas básicas expresaban tanto una necesidad funcional como una búsqueda de belleza. Los registros arqueológicos muestran que ya en el tercer milenio a.C., las culturas mesopotámicas utilizaban patrones geométricos para decorar templos, palacios y cerámicas, basados en arreglos de triángulos, rombos y estrellas (O'Kane, 2016). En el Antiguo Egipto, el uso de teselados en paredes, suelos y papiros revela un alto grado de planificación geométrica, con especial atención a las formas regulares y la simetría axial (Smith, 1958).

Durante el periodo clásico greco-romano, el arte del mosaico alcanzó un desarrollo técnico y estético sin precedentes. En particular, el *opus tessellatum* romano se caracterizó por el uso de teselas cuadradas o poligonales dispuestas en patrones repetitivos que combinaban simetría rotacional, traslacional y reflexiva. Los frisos decorativos que adornaban templos y edificios públicos, con diseños geométricos modulados a lo largo de una dimensión, anticipaban lo que más tarde sería formalizado como los grupos de frisos o grupos de simetría unidimensionales, mientras que las composiciones de mosaico en pavimentos se relacionan con los grupos de papel tapiz (Schattschneider, 1978; Grünbaum & Shephard, 1987).

En el contexto griego, la escuela pitagórica ya concebía una relación estrecha entre la geometría, el orden cósmico y los principios de armonía matemática. Este ideal se vería plasmados siglos después en los *Elementos* de Euclides, obra fundamental donde se abordaron por primera vez los criterios para la teselación regular del plano mediante polígonos convexos. En el Libro I y especialmente en el Libro XIII, Euclides demuestra que sólo tres polígonos regulares —el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular— pueden recubrir el plano sin solapamientos ni huecos, dando origen a las llamadas teselaciones regulares (Euclides, ca. 300 a.C./1956).

Estas construcciones tempranas revelan no sólo una intuición geométrica profunda, sino también una anticipación empírica de estructuras formales que serían sistematizadas siglos más tarde mediante la teoría de grupos y la geometría del plano. Así, la teselación en las civilizaciones antiguas puede ser vista como una manifestación temprana del pensamiento estructural, donde convergen el arte, la matemática, la filosofía y la ciencia.

2.3 El esplendor islámico: el arte como álgebra visual

Uno de los hitos fundamentales en la evolución histórica de los teselados fue su esplendoroso desarrollo en el arte islámico medieval, particularmente entre los siglos VIII y XV, en regiones como Persia, Al-Ándalus, el Magreb y Asia Central. La prohibición de representar figuras humanas en el arte religioso, basada en principios teológicos del islam, favoreció una búsqueda intensa de formas abstractas, lo cual condujo al florecimiento de una rica tradición de patrones geométricos ornamentales. Esta práctica artística, profundamente arraigada en la espiritualidad islámica, transformó la geometría en un vehículo de expresión simbólica, estética y metafísica.

Los artesanos musulmanes, sin el respaldo explícito de la teoría de grupos ni de una notación algebraica formal, diseñaron complejos sistemas de recubrimiento del plano con alto grado de simetría. Utilizaron rotaciones de orden cinco, ocho y diez, transformaciones de reflexión y traslación, y composiciones que respetaban reglas estrictas de repetición y equilibrio visual. Bonner (2017) describe estos diseños como una forma de "álgebra visual", donde la intuición constructiva guiaba la creación de estructuras que, siglos después, serían objeto de estudio formal en matemáticas avanzadas.

Uno de los casos más estudiados es el conjunto de teselados encontrados en la Alhambra de Granada, donde se han identificado ejemplos de los 17 grupos de simetría del plano, lo que demuestra una comprensión empírica de las transformaciones isométricas (Abas & Salman, 1995). Además, investigaciones recientes como las de Lu y Steinhardt (2007) han demostrado que algunos patrones decorativos de los muros del santuario Darb-i-Imam en Isfahan (Irán, siglo XV) presentan formas geométricas generadas mediante subdivisión girada, una técnica que anticipa las reglas de apareamiento de los teselados de Penrose. Estos hallazgos revelan que los artistas islámicos alcanzaron configuraciones geométricas equivalentes a patrones aperiódicos cinco siglos antes de su formulación matemática.

Este logro, alcanzado mediante métodos constructivos, manipulación de plantillas y herramientas geométricas rudimentarias, da cuenta de una sofisticación matemática notable, sostenida por prácticas artesanales sistemáticas y una cosmovisión profundamente ligada al orden, la simetría y la infinitud, pilares fundamentales de la estética islámica.

2.4 Renacimiento y sistematización moderna

Durante el Renacimiento europeo, el diálogo entre arte, ciencia y matemática alcanzó una de sus cúspides intelectuales, impulsado por figuras fundamentales como Leonardo da Vinci y Albrecht Dürer. Este periodo marcó un renacer del pensamiento geométrico, con un enfoque renovado hacia la proporción, la perspectiva y la simetría. Albrecht Dürer, destacado grabador, pintor y matemático alemán, desempeñó un papel crucial en la difusión de ideas geométricas a través de su obra *Underweysung der Messung* (1525), una guía de geometría práctica que abordaba, entre otros temas, el diseño de mosaicos regulares, las construcciones con compás y regla, y el uso de transformaciones en patrones decorativos (Field, 2005; Dürer, 1525/1977).

Dürer incorporó conocimientos provenientes del mundo clásico, del arte islámico y de la geometría euclidiana, se puede sentar las bases para una comprensión racional del diseño ornamental. Sus estudios anticiparon, de manera notable, los principios que más tarde serían formalizados en la teoría de simetría. Leonardo da Vinci, por su parte, exploró patrones geométricos en sus códices y dibujos, especialmente en relación con la sección áurea, la arquitectura y los desarrollos proporcionales de figuras planas, aunque sin la sistematización que alcanzaría Dürer (Pedoe, 1988).

Sin embargo, la formalización matemática rigurosa de los teselados no se consolidó hasta el siglo XIX, con el surgimiento de la teoría de grupos como marco algebraico para describir las simetrías. Los aportes fundacionales de Évariste Galois sobre la estructura de los grupos finitos abrieron un campo que sería posteriormente aplicado a la geometría del plano. En el contexto de la cristalografía, matemáticos como Auguste Bravais, Evgraf Fedorov, Arthur Moritz Schönflies y otros desarrollaron la clasificación exhaustiva de los 17 grupos de simetría del plano (también llamados *wallpaper groups*), los cuales describen todas las posibles formas en que un patrón puede repetirse periódicamente en dos dimensiones sin dejar espacios ni superposiciones (Conway, Burgiel & Goodman-Strauss, 2008; Wells, 1991).

Esta clasificación no solo se convirtió en un pilar de la geometría euclidiana, sino que además tuvo profundas repercusiones en la física del estado sólido, al proporcionar el lenguaje formal para la descripción de estructuras cristalinas y sus propiedades de simetría. Así, la articulación entre arte, geometría y álgebra, que había germinado en el Renacimiento, encontró su sistematización definitiva en la confluencia de la matemática pura y las ciencias físicas.

2.5 Siglo XX: de la lógica a la cuasiperiodicidad

El siglo XX trajo consigo una profunda transformación en la comprensión de los patrones geométricos y su relación con la lógica formal, la computación y la física de materiales. La noción clásica de periodicidad —base de la geometría euclidiana y la cristalografía— fue progresivamente desafiada por desarrollos teóricos que revelaron la posibilidad de orden sin repetición periódica.

En 1961, el lógico y matemático Hao Wang formuló un problema fundamental en teoría de mosaicos al proponer un conjunto de fichas cuadradas con marcas en sus bordes, cuya colocación debía regirse por reglas de apareamiento local. Su objetivo era investigar si un algoritmo podía decidir la teselabilidad del plano con un conjunto dado de tales fichas (Wang, 1961). Sin embargo, en 1966, su estudiante Robert Berger demostró que existía un conjunto finito de fichas de Wang que forzaban una cobertura del plano **aperiódica**, lo que implicaba que el problema general de teselabilidad era indecidible, y se permite establecer así una sorprendente conexión entre geometría, lógica matemática y teoría de la computabilidad (Berger, 1966; Grünbaum & Shephard, 1987).

Este resultado introdujo el concepto de *forzamiento de la aperiocidad* mediante restricciones locales, donde se puede abrir el camino a nuevas concepciones del orden espacial. Inspirado por esta línea de pensamiento y por consideraciones estéticas, el físico y matemático Roger Penrose desarrolló durante la década de 1970 tres tipos de teselados aperiódicos conocidos como **P1** (cometas y dardos), **P2** (rombos de 36° y 72°) y **P3** (kites and darts en configuración kite-kite-dart), cuyas reglas de apareamiento impiden la repetición traslacional, pero generan patrones globalmente ordenados con simetría rotacional de orden cinco y propiedades cuasiperiódicas (Penrose, 1974; Penrose, 1979).

Aunque originalmente concebidos como construcciones matemáticas con una belleza geométrica intrínseca, los teselados de Penrose adquirieron posteriormente un valor físico inesperado cuando se descubrió que modelaban con gran fidelidad la estructura atómica de ciertos materiales que exhibían orden sin periodicidad. Estos patrones fueron clave en la interpretación matemática de los cuasicristales descubiertos por Dan Shechtman en 1982, se consolida así el vínculo entre teoría geométrica, lógica computacional y ciencia de materiales (Senechal, 1995).

2.6 El vínculo con la física: cuasicristales y Premio Nobel

Uno de los episodios más significativos en la conexión entre la matemática de los teselados y la física del estado sólido ocurrió en 1982, cuando el científico israelí Dan Shechtman observó experimentalmente una fase atómica metálica con simetría icosaédrica pero sin periodicidad traslacional en una aleación de aluminio y manganeso. Este descubrimiento desafió radicalmente el paradigma cristalográfico imperante, según el cual toda estructura ordenada debía ser periódica. En sus propias palabras, Shechtman fue objeto de escepticismo e incluso burlas dentro de su comunidad, ildado de “decir tonterías” por afirmar la existencia de un "cristal no periódico" (Shechtman, 2013).

No obstante, tras análisis estructurales y difractométricos rigurosos, sus hallazgos fueron validados y publicados en la revista *Physical Review Letters* (Shechtman et al., 1984), lo que dio origen al concepto de **cuasicristal.** Estas estructuras exhiben orden a largo alcance y difracción puntual, pero sin simetría traslacional, lo que las distingue radicalmente de los cristales convencionales. Sorprendentemente, los patrones geométricos que mejor modelan estos arreglos atómicos son los teselados no periódicos de Penrose, introducidos una década antes en el ámbito de la matemática pura (Levine & Steinhardt, 1984).

Este hallazgo no solo validó una abstracción matemática en un contexto físico real, sino que también estableció un puente epistemológico entre geometría, simetría y estructura material. En reconocimiento a su descubrimiento, Dan Shechtman recibió el **Premio Nobel de Química en 2011**, se destaca explícitamente la relación entre el orden cuasiperiódico observado y las matemáticas de Penrose (The Nobel Foundation, 2011).

El caso de los cuasicristales ilustra con fuerza cómo una idea matemática abstracta puede anticipar fenómenos naturales y transformar áreas enteras del conocimiento científico. Así, se cierra un círculo fascinante entre el arte ornamental medieval, la teoría matemática de los teselados y la física moderna de los materiales.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

3.1. Enfoque y naturaleza de la investigación

El estudio se desarrolla bajo un enfoque cualitativo de carácter interpretativo, orientado a comprender cómo los estudiantes construyen y resignifican el concepto de teselación en su transición de lo periódico a lo cuasiperiódico. Este análisis se sustenta en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, el cual reconoce el conocimiento matemático como una red de prácticas, significados y representaciones que emergen en contextos sociales, institucionales y cognitivos.

3.2. Diseño metodológico

Se aplicó un estudio de caso didáctico con estudiantes de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física. Para ello se diseñó una progresión de tareas geométricas organizadas en tres bloques:

- Teselados periódicos: construcción y análisis de patrones regulares, primero de manera manipulativa con piezas de foamy y luego en entornos digitales (GeoGebra).
- Teselados aperiódicos: introducción a fichas tipo Wang y elaboraciones manuales con foamy que permiten comprender la ruptura de la periodicidad.
- Teselados de Penrose: construcción de patrones con cometas y dardos elaborados en foamy, donde se sigue reglas de apareamiento, donde se explora propiedades de la proporción áurea y la simetría no convencional.

El diseño de estas tareas se inscribe en configuraciones didácticas reflexivas, orientadas a la interacción entre acción, representación, argumentación y validación matemática.

3.3 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

La información se recopiló mediante:

- Observación participante del docente-investigador durante las sesiones.
- Registros fotográficos de las producciones elaboradas en foamy y en GeoGebra.
- Notas de campo enfocadas en identificar conflictos semióticos y reorganizaciones conceptuales.
- Producciones escritas y verbales de los estudiantes, obtenidas en discusiones y argumentaciones colectivas.

3.4. Categorías de análisis

El análisis se estructuró en las dimensiones del EOS:

- Epistémica: atributos de los objetos matemáticos “teselado periódico”, “teselado aperiódico” y “teselado cuasiperiódico de Penrose”.
- Semiótica: procesos de tratamiento y conversión entre registros (manipulativo con foamy, visual-digital, verbal y algebraico).
- Cognitiva: reorganizaciones conceptuales frente a la introducción de simetrías no convencionales y cuasiperiodicidad.
- Institucional: articulación de significados personales construidos en la experiencia con los institucionales del currículo.
- Afectiva y kinestésica: valoración del impacto motivacional y del trabajo manual con foamy como recurso didáctico.

3.5. Procedimiento

1. Exploración inicial con teselados periódicos (foamy + GeoGebra).
2. Introducción al reto: actividades con teselados aperiódicos que generaron conflictos semióticos y nuevas reflexiones.
3. Profundización conceptual: análisis y construcción de Penrose con foamy, enfocándose en reglas de apareamiento y proporción áurea.
4. Reflexión colectiva: discusión sobre las implicaciones matemáticas, físicas (cuasicristales) y educativas de los patrones no periódicos.

3.6. Estrategia de validación

Se aplicó triangulación interna de datos, donde se contrasta observaciones, registros gráficos y discursos de los estudiantes. Esta estrategia permitió garantizar consistencia interpretativa y coherencia con los fundamentos del EOS.

Síntesis metodológica

En síntesis, la investigación:

- Es cualitativa e interpretativa, enfocada en la experiencia didáctica.
- Se basa en un diseño progresivo de tareas que avanza de lo periódico a lo cuasiperiódico.
- Utiliza foamy y recursos digitales como soportes para la construcción de significados.
- Aplica categorías de análisis propias del EOS, donde se permite atender lo epistémico, semiótico, cognitivo e institucional.
- Integra una validación mediante triangulación, se asegura rigor interpretativo.

4. RESULTADOS

4.1 Teselados periódicos: fundamentos y simetría

Los teselados periódicos son configuraciones geométricas que recubren completamente el plano euclidiano mediante la repetición exacta de una o varias figuras básicas denominadas prototiles, sin solapamientos ni huecos, siguiendo una estructura de periodicidad traslacional en dos direcciones linealmente independientes. Matemáticamente, se definen como subconjuntos del plano invariantes bajo un grupo discreto de traslaciones, es decir, existe un patrón que puede ser desplazado en múltiples direcciones del plano para cubrirlo sin alterar la disposición relativa de sus componentes (Conway, Burgiel, & Goodman-Strauss, 2008; Grünbaum & Shephard, 1987).

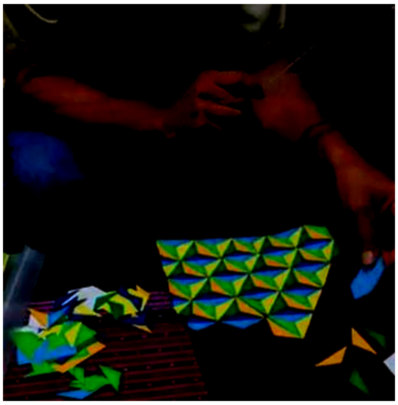
La clasificación de estos teselados se fundamenta en la teoría de grupos de simetría del plano, en particular, en los 17 grupos de simetría bidimensionales, también conocidos como grupos de simetría del plano euclidiano E^2 **o** grupos de papel tapiz (*wallpaper groups*), los cuales engloban todas las combinaciones posibles de las isometrías del plano (traslación, rotación, reflexión y deslizamiento) que permiten construir recubrimientos periódicos. Cada uno de estos grupos representa una clase de simetría distinta, identificada mediante notación de Hermann-Mauguin o notación orbifold (Conway et al., 2008).

Además de los grupos de mosaico, existen los grupos de frisos, que comprenden las siete formas posibles de generar patrones unidimensionales repetitivos. Ambos conjuntos de grupos revelan la estructura algebraica subyacente en los teselados periódicos, donde se permite vincular la geometría con el álgebra abstracta y la topología.

Desde la perspectiva de la física matemática, los teselados periódicos reflejan las simetrías espaciales de los **cristales ideales**, cuyas redes atómicas exhiben una organización periódica en el espacio. Estas simetrías están directamente relacionadas con las leyes de conservación, en particular con los teoremas de Noether, que establecen que a cada simetría continua del sistema físico corresponde una cantidad conservada (Brading & Castellani, 2003). En el caso de los sistemas cristalinos, la periodicidad se traduce en conservación del momento cristalino y regularidad en los espectros de difracción.

En la enseñanza de la geometría, los teselados periódicos permiten abordar con profundidad conceptos clave como invarianza, congruencia, simetría y estructura algebraica, donde se ofrece a los estudiantes un campo fértil para la visualización matemática, el razonamiento deductivo y la conexión con fenómenos físicos reales, como la organización estructural de materiales sólidos.

Figura 1. Actividad manual de construcción de teselados con prototiles de cartulina



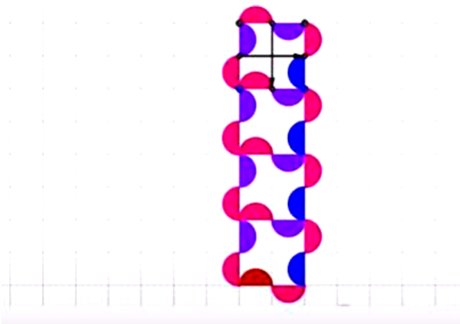
Nota. En esta imagen se documenta una experiencia didáctica en la que un estudiante manipula prototiles triangulares de papel para construir un patrón de teselado periódico sobre una superficie plana. La actividad forma parte del proceso de exploración empírica y visual de simetrías y recubrimientos del plano, desarrollada en el marco del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento matemático. Fuente: Fotografía propia tomada durante sesión práctica del curso de Geometría (2025).

En el marco de la enseñanza de los teselados, se implementó una actividad práctica en la que los estudiantes diseñaron y construyeron patrones periódicos donde se utiliza prototiles recortados en cartulina de colores (figura 1). Esta propuesta se inscribe dentro de una estrategia didáctica reflexiva, orientada desde el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, el cual reconoce la centralidad de los sistemas de prácticas y representaciones semióticas en la configuración de objetos matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007).

La actividad fue diseñada y aplicada por Ruiz Castillo, quien ha investigado previamente el impacto del EOS en la enseñanza de conceptos matemáticos complejos y su articulación con herramientas manipulativas, digitales y semióticas (Ruiz Castillo, 2022). En esta línea, se propuso una experiencia que integrara tanto la dimensión epistémica como la cognitiva y afectiva del aprendizaje matemático. La figura 1 muestra a un estudiante, haciendo manipulación físicamente fichas triangulares para componer un patrón teselado que cubre el plano sin superposiciones ni espacios vacíos. El uso de herramientas geométricas como la escuadra, así como la organización visual de los polígonos, evidencia una actividad de validación empírica de la simetría y la regularidad. Esta experiencia posibilitó el tránsito entre representaciones concretas (materiales), visuales (estructuras emergentes) y conceptuales (noción de periodicidad y simetría isométrica).

Desde la dimensión epistémica, la actividad propició una reconstrucción funcional del objeto "teselado periódico", desglosado en atributos como la cobertura total, la regularidad espacial y la generación por traslación. Cognitivamente, se identificaron avances en la articulación de propiedades geométricas con lenguaje técnico, lo cual facilitó procesos de institucionalización progresiva. Semióticamente, se observaron procesos de tratamiento (reorganización dentro del mismo registro visual) y conversión (paso al registro verbal y simbólico), lo cual concuerda con lo señalado por Duval (2006) sobre la importancia de operar entre registros para consolidar la comprensión conceptual. Estas actividades con materiales manipulativos, además de estimular el pensamiento espacial y el razonamiento geométrico, permitieron integrar dimensiones afectivas y kinestésicas en la experiencia matemática, y así favorecer un aprendizaje activo, situado y significativo.

Figura 2. Teselado periódico generado en software de geometría dinámica



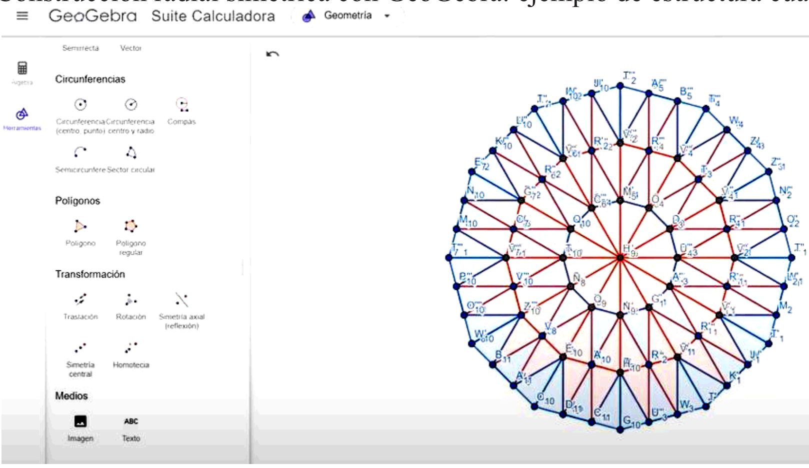
Nota. Ejemplo de patrón periódico generado digitalmente en un entorno de geometría dinámica. El diseño presenta una simetría traslacional vertical basada en un módulo repetitivo, y evidencia el uso de transformaciones isométricas básicas. Actividad realizada con estudiantes de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física. Fuente: Elaboración propia con GeoGebra (2025).

En el marco de la enseñanza de los teselados, se implementó una actividad práctica en la que los estudiantes diseñaron y construyeron patrones periódicos donde se utiliza prototiles recortados en cartulina de colores (véase figura 1). Esta propuesta se inscribe dentro de una estrategia didáctica reflexiva, orientada desde el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, el cual reconoce la centralidad de los sistemas de prácticas y representaciones semióticas en la configuración de objetos matemáticos (Godino, Batanero & Font, 2007; Ruiz Castillo, 2025).

La figura 2 muestra a un estudiante donde manipula físicamente fichas triangulares para componer un patrón teselado que cubre el plano sin superposiciones ni espacios vacíos. El uso de herramientas geométricas como la escuadra, así como la organización visual de los polígonos, evidencia una actividad de validación empírica de la simetría y la regularidad. Esta experiencia posibilitó el tránsito entre representaciones concretas (materiales), visuales (estructuras emergentes) y conceptuales (noción de periodicidad y simetría isométrica).

Desde la dimensión epistémica, la actividad propició una reconstrucción funcional del objeto "teselado periódico", desglosado en atributos como la cobertura total, la regularidad espacial y la generación por traslación. Cognitivamente, se identificaron avances en la articulación de propiedades geométricas con lenguaje técnico, lo cual facilitó procesos de institucionalización progresiva. Semióticamente, se observaron procesos de tratamiento (reorganización dentro del mismo registro visual) y conversión (paso al registro verbal y simbólico), lo cual concuerda con lo señalado por Duval (2006) sobre la importancia de operar entre registros para consolidar la comprensión conceptual. Tal como se ha documentado en experiencias anteriores (Ruiz Castillo, 2025b), estas actividades con materiales manipulativos, además de estimular el pensamiento espacial y el razonamiento geométrico, permitieron integrar dimensiones afectivas y kinestésicas en la experiencia matemática, donde se favorece un aprendizaje activo, situado y significativo.

Figura 3. Construcción radial simétrica con GeoGebra: ejemplo de estructura cuasiperiódica



Nota. Representación elaborada en GeoGebra con base en transformaciones de rotación y simetría radial, en la que se evidencia una disposición ordenada de triángulos y polígonos sobre una malla circular. Esta construcción fue realizada como parte de una actividad didáctica orientada a explorar propiedades de cuasiperiodicidad y simetría no convencional en patrones tipo Penrose.
Fuente: Elaboración propia con GeoGebra (2025).

En el marco de un laboratorio didáctico orientado por el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, se desarrolló una experiencia de exploración estructural mediante la herramienta GeoGebra. En la figura 3 se observa una configuración circular construida con polígonos, radios y cuerdas simétricamente organizadas, donde emergen patrones concéntricos que permiten identificar simetrías radiales de orden elevado.

Esta representación fue diseñada por estudiantes de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física como parte de una actividad de modelización geométrica, cuyo propósito fue reconocer la interacción entre rotaciones, simetría central y axial, y su implicación en la generación de patrones armónicos. La figura 3 evidencia una disposición dodecagonal (aparente) y subdivisiones que posibilitan interpretaciones desde la geometría euclidiana y la teoría de grupos.

Desde la dimensión epistémica, el objeto matemático "estructura con simetría rotacional" se desglosa en atributos como: invariancia bajo rotaciones, repetición angular y continuidad radial. Cognitivamente, se promovió el tránsito entre el registro visual (GeoGebra), el registro simbólico (nomenclatura angular y notación algebraica de simetrías) y el registro discursivo (justificaciones geométricas en lenguaje natural), en concordancia con la teoría de registros de representación de Duval (2006). Semióticamente, la actividad permitió procesos de tratamiento (reorganización del registro geométrico para identificar subestructuras simétricas) y conversión (vinculación de elementos visuales con propiedades algebraicas y narrativas). Esta experiencia favoreció la interiorización de la noción de simetría no solo como propiedad estática, sino como resultado de una acción transformadora sobre el plano, donde se dota de sentido los conceptos de rotación, congruencia y equivalencia geométrica, como ha sido argumentado en investigaciones previas sobre el uso del EOS en contextos de enseñanza universitaria (Ruiz Castillo, 2025).

4.3 Teselados Aperiódicos: Ruptura del Orden Repetitivo

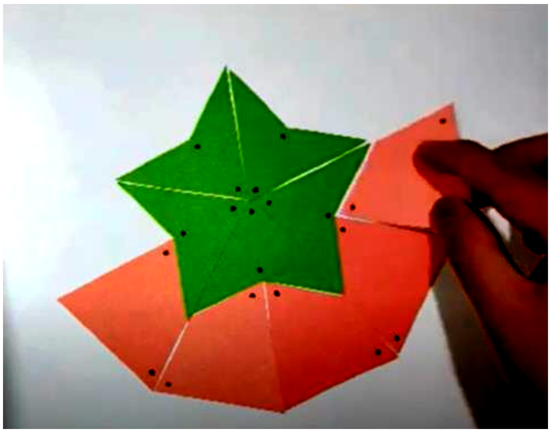
A diferencia de los teselados periódicos, los teselados aperiódicos son patrones que cubren completamente el plano sin dejar espacios ni superposiciones, pero que carecen de simetría traslacional. Esto significa que, aunque presentan una estructura globalmente ordenada, no existe un patrón finito que pueda repetirse por traslación para generar toda la teselación. Esta ruptura de la periodicidad representa un cambio paradigmático tanto en geometría como en física, ya que permite la existencia de orden sin repetición, una característica fundamental en los cuasicristales.

Uno de los desarrollos más significativos en la teoría de los teselados aperiódicos fue la introducción de los conjuntos de Wang, propuestos por Hao Wang en 1961. Estos consisten en fichas cuadradas con marcas de colores o símbolos en los bordes, cuya colocación debe obedecer reglas de coincidencia entre bordes adyacentes. Sorprendentemente, Robert Berger (1966) demostró que existe un conjunto finito de fichas de Wang que puede teselar el plano, pero únicamente de forma no periódica, para poder establecer así la existencia de un conjunto de prototiles aperiódicos (Berger, 1966). Este descubrimiento también mostró una conexión profunda entre la geometría y la teoría de la computabilidad, ya que probó que el problema de decidir si un conjunto arbitrario de fichas de Wang puede teselar el plano es indecidible.

Desde el punto de vista físico, los teselados aperiódicos proporcionan modelos adecuados para describir sistemas desordenados con orden local, en los que las simetrías globales están rotas, pero persisten regularidades estructurales. Este tipo de orden es característico en los cuasicristales, materiales descubiertos experimentalmente por Shechtman et al. (1984), que presentan patrones de difracción con simetrías no compatibles con la periodicidad (como simetrías pentagonales), lo que demuestra que pueden tener orden a largo alcance sin ser periódicos.

Los teselados aperiódicos, por tanto, abren un campo intermedio entre el caos y la regularidad, dando lugar a formalizar modelos que desafían la dicotomía clásica entre lo ordenado y lo aleatorio. Además, en el ámbito educativo, estos patrones estimulan el pensamiento lógico, la percepción geométrica avanzada y la comprensión de estructuras no convencionales, donde es una excelente antesala conceptual para la introducción de los **teselados de Penrose**, cuya cuasiperiodicidad representa el caso más elegante y conocido de teselación aperiódica con simetría rotacional de orden cinco.

Figura 4. Construcción geométrica de un patrón tipo Penrose con prototiles empíricos



Nota. Representación manipulativa de un patrón cuasiperiódico con teselado de Penrose, donde usa piezas tipo cometa y dardo, con marcas de coincidencia (reglas de apareamiento). Esta figura fue elaborada manualmente por estudiantes en el marco de una actividad didáctica en la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física. Fuente: Elaboración propia (2025).

La figura 4 presenta una actividad didáctica desarrollada en el marco de un laboratorio experimental de geometría, en la cual los estudiantes construyen teselados no regulares a partir de figuras recortadas en cartulina de colores. En este caso particular, se observa un patrón estrellado generado mediante la yuxtaposición de pentágonos isósceles que, al ensamblarse, configuran una estrella verde de cinco puntas. Esta construcción se continúa mediante la adición de figuras rosadas que completan el espacio sin superposiciones ni huecos evidentes, lo cual sugiere un principio de recubrimiento parcial orientado hacia estructuras aperiódicas o casi periódicas.

La manipulación física de los elementos geométricos permite al estudiante validar empíricamente las propiedades angulares necesarias para el acoplamiento perfecto, así como explorar la continuidad espacial del patrón. El uso de puntos de referencia marcados en los vértices facilita una comparación visual y sistemática de ángulos, aristas y simetrías involucradas.

Desde una perspectiva epistémica, se evidencia la construcción funcional del objeto matemático "teselado estrellado por pentágonos isósceles", que puede descomponerse en propiedades como: (a) simetría rotacional local de orden cinco, (b) congruencia de lados para la continuidad del patrón y (c) posibilidad de extensión radial sin pérdida de regularidad local. Cognitivamente, esta experiencia permite el tránsito entre los registros concretos y visuales, donde se permite promover el desarrollo del pensamiento geométrico y la anticipación de configuraciones espaciales. Semióticamente, se producen procesos de tratamiento al reorganizar las piezas dentro del mismo registro visual, así como conversiones hacia registros verbales y simbólicos, mediante la argumentación de propiedades y la identificación de invariantes.

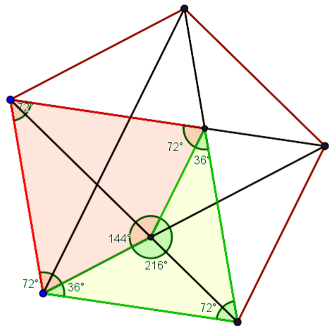
Esta propuesta, articulada desde el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento matemático, ha sido utilizada como estrategia de mediación entre la intuición espacial y la formalización conceptual (Ruiz Castillo, 2025c), donde genera oportunidades para que los estudiantes desarrollen estructuras de pensamiento geométrico a partir de la acción, la observación y la sistematización de patrones constructivos.

4.2 Teselados de Penrose: Geometría y Física Cuasiperiódica

Los teselados de Penrose constituyen uno de los ejemplos más paradigmáticos y elegantes de estructuras aperiódicas con orden geométrico no trivial. Introducidos por Roger Penrose en la década de 1970, estos patrones desafiaron la noción clásica de periodicidad como condición necesaria para la regularidad estructural. Sus configuraciones permiten cubrir el plano completamente, sin solapamientos ni huecos, pero sin admitir ninguna traslación que preserve la estructura global. A pesar de esta restricción, exhiben una forma de orden cuasiperiódico, caracterizada por la aparición recurrente de motivos finitos en disposiciones no repetitivas, pero con simetrías de largo alcance.

Penrose propuso diferentes versiones de sus teselados, conocidos comúnmente como P1, P2 y P3. En el caso del modelo **P1**, se utilizan cometas (*kites*) y dardos (*darts*) con reglas específicas de apareamiento que restringen su colocación, de forma que se evita la periodicidad. En la versión **P2**, se emplean dos tipos de rombos (angosto y ancho) cuyas diagonales están en proporciones áureas, y en **P3** se utilizan polígonos con segmentos curvos que permiten una mayor continuidad visual. En todos los casos, las reglas de coincidencia (matching rules) impiden una colocación arbitraria de las piezas, donde se forza una estructura cuasiperiódica global a partir de restricciones locales.

Figura 5. Pentágono donde se puede observar patrones del P2



Nota. La figura 5 muestra una construcción geométrica realizada en GeoGebra, basada en polígonos regulares y subdivisiones angulares características de los teselados de Penrose. En la imagen se representan triángulos y pentágonos unidos mediante ángulos de 36°, 72°, 108° y 144°, los cuales son fundamentales en la simetría no periódica que caracteriza a dichos teselados. Este diseño constituye un punto de partida para analizar la estructura matemática subyacente en los mosaicos aperiódicos y su potencial aplicación en contextos educativos y de investigación en física matemática.

Figura 6. Soles y cometas P2

Nota: La figura 6 presenta dos construcciones geométricas elaboradas con materiales didácticos en foamy, unidas mediante broches metálicos que permiten la movilidad de sus partes. La primera figura, en color rosa, corresponde a un decágono regular formado por la disposición de diez triángulos isósceles congruentes. La segunda figura, en color amarillo, representa una estrella pentagonal o pentagrama, construida igualmente a partir de triángulos isósceles que se articulan en un vértice común.

Estas construcciones permiten visualizar propiedades geométricas relacionadas con la simetría radial y la división angular del círculo en fracciones de 36° y 72°, las cuales son fundamentales en el estudio de polígonos regulares, estrellas pitagóricas y en los teselados no periódicos como los de Penrose. Asimismo, constituyen un recurso didáctico útil para la enseñanza de la geometría en contextos escolares, pues favorecen la manipulación, la exploración de invariantes y la comprensión de conceptos de ángulos, congruencia y simetría.

Figura 6. Media cometa

Figura: Generación 0 o Axioma en la primera figura y generación 1 en la segunda

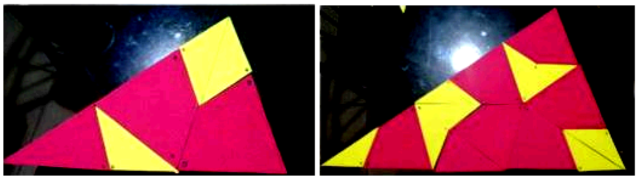


Figura: Generación 2 en la primera figura y generación 3 en la segunda

Nota. La secuencia de imágenes ilustra el proceso de construcción iterativa de la figura de media cometa, utilizada en los teselados de Penrose. En la primera figura (arriba a la izquierda) se observa la generación 0 o axioma, representada por un triángulo isósceles de color rojo. En la segunda (arriba a la derecha) aparece la generación 1, en la que se introduce un triángulo amarillo más pequeño, donde se mantiene la proporción áurea característica de este tipo de subdivisiones.

En la parte inferior, la tercera figura (abajo a la izquierda) muestra la generación 2, donde la figura inicial comienza a descomponerse en configuraciones más complejas, donde se incorpora varios triángulos amarillos que generan nuevas relaciones angulares. Finalmente, en la cuarta imagen (abajo a la derecha) se observa la generación 3, en la que la composición adquiere mayor riqueza estructural y simétrica, acercándose al patrón aperiódico de los teselados de Penrose. Este proceso evidencia cómo, a partir de un axioma simple, la aplicación de reglas de sustitución geométrica permite construir configuraciones crecientemente complejas, vinculadas al estudio de los sistemas dinámicos, la geometría no periódica y la proporción áurea. Además, constituye un recurso didáctico para la enseñanza de la recursividad y la autosimilitud, conceptos esenciales tanto en matemáticas puras como en física matemática.

Figura 7. Media flecha

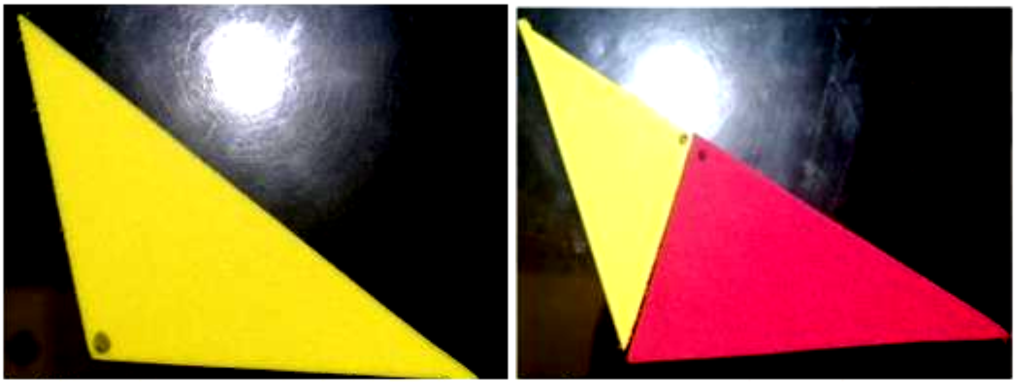


Figura: Generación 0 o Axioma en la primera figura y generación 1 en la segunda

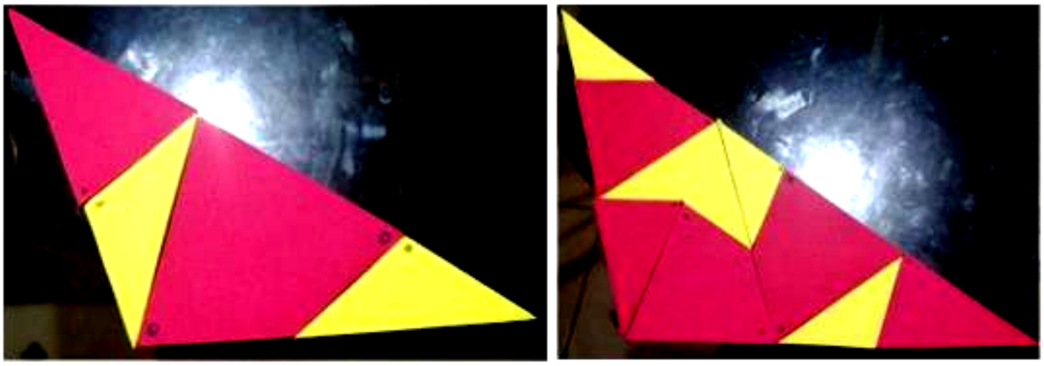


Figura: Generación 2 en la primera figura y generación 3 en la segunda

Nota. Las imágenes presentan el proceso de construcción por generaciones de la figura dardo utilizada en los teselados de Penrose. En la primera parte (arriba), se observa el axioma o generación 0 (triángulo amarillo isósceles) y la generación 1, en la cual se añade un triángulo rojo que respeta las proporciones establecidas por la razón áurea.

En la segunda parte (abajo), la figura de la izquierda muestra la generación 2, donde la descomposición comienza a evidenciar un patrón repetitivo con triángulos amarillos y rojos en disposición alterna. La figura de la derecha corresponde a la generación 3, donde se conforma un entramado más complejo y armónico, que empieza a reflejar la estructura aperiódica propia de los teselados de Penrose. Este procedimiento ilustra cómo, a través de reglas de sustitución recursivas, es posible pasar de un axioma elemental a configuraciones de creciente complejidad que mantienen invariantes geométricos. La secuencia no solo revela la autosimilitud fractal del patrón, sino también la importancia de la proporción áurea y de la descomposición angular en múltiplos de 36° y 72°. Además, constituye un recurso didáctico valioso para la enseñanza de geometría, recursividad y simetría no periódica, con aplicaciones tanto en matemáticas como en física matemática y teoría de sistemas dinámicos.

Figura 8. Estrellas

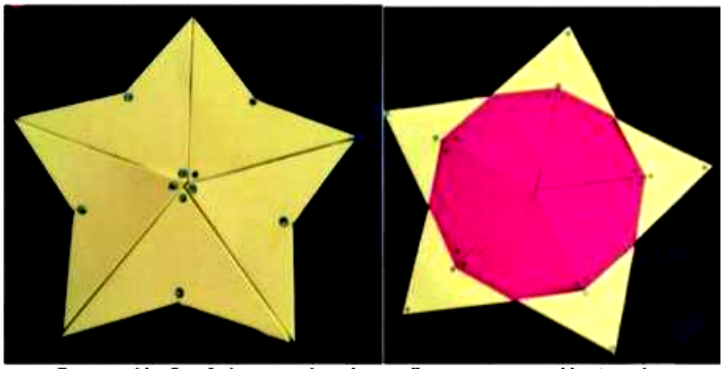


Figura: Generación 0 o Axioma en la primera figura y generación 1 en la segunda

Figura: Generación 2 en la primera figura y generación 3 en la segunda

Nota. La secuencia de imágenes representa el proceso de construcción iterativa de la estrella pentagonal como parte de los teselados de Penrose. En la primera parte (arriba), la figura de la izquierda corresponde a la generación 0 o axioma, donde se observa una estrella amarilla de cinco puntas construida a partir de triángulos isósceles congruentes. A la derecha aparece la generación 1, en la cual se introduce un decágono regular de color rosa en el interior de la estrella, donde se mantiene la simetría pentagonal y así poder evidenciar la relación con la proporción áurea.

En la segunda parte (abajo), la figura de la izquierda muestra la generación 2, en la que la estructura se amplía con nuevas subdivisiones en colores amarillo y rosa, donde se forma un entramado estelar más complejo. La figura de la derecha corresponde a la generación 3, donde el patrón alcanza un mayor nivel de complejidad y armonía, donde se destaca la aparición de estructuras concéntricas que refuerzan la simetría radial de orden cinco. Este proceso evidencia la recursividad geométrica y la autosimilitud propias de los teselados aperiódicos. A partir de un axioma simple (estrella inicial), se generan configuraciones cada vez más elaboradas que reflejan la riqueza matemática de la geometría no periódica. Además, estas construcciones constituyen un recurso didáctico valioso para la enseñanza de conceptos de simetría, fractalidad y proporción áurea, así como para la exploración de aplicaciones en matemáticas puras, física matemática y teoría de sistemas dinámicos.

Figura 9. Sol

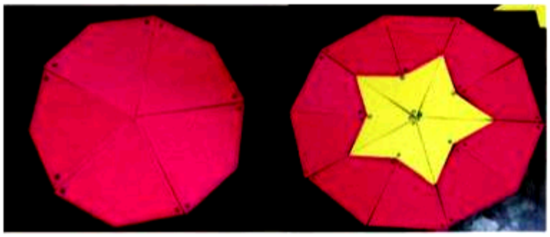


Figura: Generación 0 o Axioma en la primera figura y generación 1 en la segunda

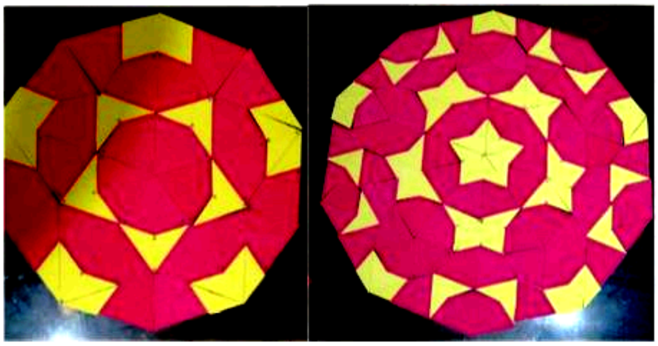


Figura: Generación 2 en la primera figura y generación 3 en la segunda

Nota. Las imágenes muestran el proceso de generación progresiva de un patrón derivado del decágono regular, utilizado como axioma en la construcción de teselados de Penrose. En la parte superior, la figura de la izquierda corresponde a la generación 0 o axioma, representada por un decágono rosa construido con triángulos isósceles congruentes. La figura de la derecha muestra la generación 1, donde se incorpora una estrella amarilla de diez puntas inscrita en el interior del decágono, donde se destaca la simetría de orden diez y la relación con la razón áurea en las proporciones de los lados.

En la parte inferior, la figura de la izquierda representa la generación 2, en la que aparecen subdivisiones adicionales con triángulos amarillos y rosas, donde se configura un patrón radial más complejo. Finalmente, la figura de la derecha corresponde a la generación 3, donde el diseño alcanza una mayor densidad estructural, y así se puede mostrar estrellas concéntricas y simetrías rotacionales que evocan la dinámica de los teselados no periódicos de Penrose. Este proceso ilustra cómo, a partir de un axioma elemental, la aplicación de reglas de sustitución recursiva permite obtener configuraciones crecientemente complejas, donde se conserva invariantes geométricas como la simetría y la proporción áurea. Además, constituye un recurso didáctico de gran valor para el estudio de la geometría de polígonos regulares, la recursividad y los sistemas dinámicos, con aplicaciones tanto en matemáticas puras como en física matemática.

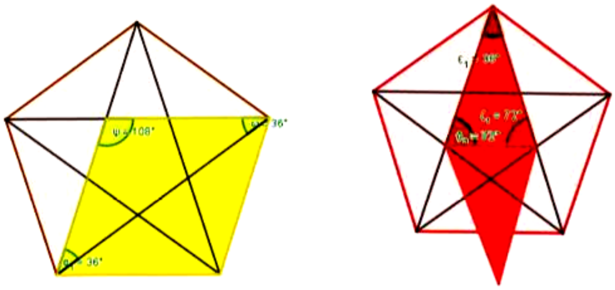
Una propiedad notable de los teselados de Penrose es su simetría de orden cinco, la cual no es compatible con la periodicidad euclidiana del plano. Esta característica los hace especialmente aptos para modelar cuasicristales, estructuras descubiertas empíricamente por

Dan Shechtman en 1982, cuya organización atómica muestra patrones de difracción con picos agudos —propios de estructuras ordenadas—, pero sin periodicidad traslacional (Shechtman et al., 1984). El estudio teórico previo de Penrose proporcionó así una base geométrica sólida para interpretar este fenómeno físico, donde permite demostrar que el orden cuasiperiódico no es una anomalía, sino una alternativa estructural viable a la periodicidad cristalina clásica (Levine & Steinhardt, 1984).

Desde la perspectiva de la física matemática, los teselados de Penrose han sido estudiados mediante herramientas de teoría de grupos, álgebra conmutativa, teoría de Galois y análisis armónico, dada su relación con el grupo de simetría icosaédrica y con sistemas dinámicos no lineales. Además, en términos pedagógicos, ofrecen un campo fértil para explorar conexiones entre geometría, número áureo, fractales, invariancia y transformaciones no convencionales, lo cual potencia una formación matemática transversal e interdisciplinar.

El uso de estos patrones en la enseñanza permite además desarrollar competencias semióticas superiores: el estudiante transita entre representaciones visuales, simbólicas y estructurales, y construye significados que articulan la intuición geométrica con el formalismo matemático y las aplicaciones físicas contemporáneas.

Figura 10. Representación del P3



Nota. Las imágenes presentan la descomposición geométrica de un pentágono regular, se puede evidenciar las bases de las figuras denominadas cometa y dardo, fundamentales en los teselados de Penrose.

En la figura de la izquierda se observa un pentágono en el que se han trazado sus diagonales, donde se destaca en amarillo un triángulo isósceles con ángulos de 36°, 36° y 108°. Esta construcción permite evidenciar cómo el pentágono regular se relaciona con la razón áurea a través de sus subdivisiones angulares y proporcionales.

En la figura de la derecha se ilustra otra subdivisión del pentágono, en la que aparecen triángulos isósceles con ángulos de 36°, 72° y 72°. Al colorear una de estas configuraciones en rojo, se forma la figura dardo, que junto con la cometa constituye la base del teselado no periódico de Penrose. Estas representaciones permiten comprender la transición desde polígonos regulares a configuraciones más complejas mediante la descomposición en triángulos áureos. Además, ofrecen un recurso didáctico valioso para el estudio de la geometría euclidiana, la simetría y la proporción áurea, así como para la exploración de aplicaciones en teselaciones, sistemas dinámicos y física matemática.

4.3. Implicaciones didácticas y epistemológicas desde el Enfoque Ontosemiótico

La enseñanza de los teselados periódicos, aperiódicos y de Penrose se llevó a cabo con estudiantes de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física, donde se aplica como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, desarrollado por Juan D. Godino y colaboradores (Godino, Batanero & Font, 2007; Font, Godino & Gallardo, 2013). Este enfoque sostiene que el conocimiento matemático no se reduce a objetos abstractos independientes del sujeto, sino que emerge como una red de prácticas, significados y representaciones inscritas en contextos sociales, cognitivos y semióticos.

Desde esta perspectiva, los teselados fueron analizados no únicamente como configuraciones geométricas, sino como objetos epistémicos complejos, cuya apropiación exige comprender la articulación entre su génesis histórica, sus propiedades formales y su funcionalidad representacional. Así, el EOS permitió una reconstrucción didáctica rigurosa de estos objetos matemáticos, dando lugar a identificar no solo su estructura lógica, sino los sistemas de prácticas institucionales y personales que les dan sentido dentro del aula.

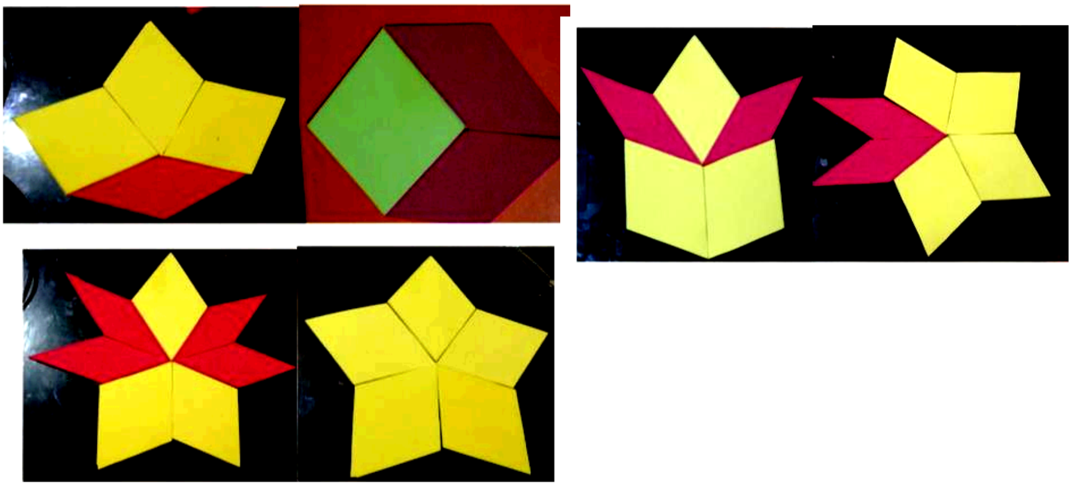
En el plano pragmático, se configuró un sistema de prácticas matemáticas en torno a tareas de análisis, clasificación, construcción y comparación de patrones teselados, guiado por criterios semióticos como la invariancia, la simetría, la cobertura sin solapamientos y las reglas de apareamiento. Estas prácticas fueron mediadas por registros de representación variados —geométrico, simbólico, verbal y dinámico (por medio de simulaciones digitales)— que permitieron a los estudiantes desarrollar procesos de conversión y tratamiento entre representaciones (Duval, 2006), condición fundamental para la comprensión profunda de los conceptos geométricos involucrados.

Desde el plano cognitivo, se observaron procesos de reorganización conceptual especialmente relevantes al introducir los teselados aperiódicos y, en particular, los de Penrose. Su carácter cuasiperiódico desafió las intuiciones geométricas previas de los estudiantes, basadas en simetrías convencionales, y propició la emergencia de conflictos semióticos (Godino & Batanero, 1994) que fueron abordados a través de configuraciones didácticas reflexivas, dando lugar a la construcción de nuevos significados compartidos y se promueva la argumentación matemática, el uso de contraejemplos y la validación formal.

En el plano institucional, esta experiencia permitió analizar cómo se articulan los significados personales construidos por los estudiantes con los significados institucionales propuestos por el currículum, y cómo el docente actúa como mediador entre estos sistemas de prácticas. Se hizo énfasis en la formación de futuros docentes capaces de interpretar situaciones matemáticas no estándar, de integrar saberes geométricos con saberes didácticos, y de reflexionar sobre su propia actividad como sujetos de conocimiento matemático.

En suma, esta experiencia reafirma el potencial del Enfoque Ontosemiótico para interpretar, diseñar e intervenir en procesos de enseñanza-aprendizaje complejos desde una mirada epistemológica, cognitiva, semiótica e institucional. Al trabajar con teselados desde una lógica de progresión conceptual —de lo periódico a lo aperiódico— se favoreció una comprensión más rica, crítica y articulada de la geometría como disciplina viva, conectada con la física contemporánea y con las prácticas educativas reflexivas.

Figura 11. Representación del P3



Nota. Las imágenes muestran diferentes configuraciones obtenidas con la disposición de losetas tipo cometa y dardo (P3 de Penrose) construidas en material didáctico (foamy). En la primera serie (arriba), la figura de la izquierda presenta una disposición de cinco cometas amarillas que conforman una estrella pentagonal incompleta, con un dardo rojo en la base. La figura de la derecha muestra un rombo verde inscrito dentro de un pentágono formado por losetas rojas, donde se permite ilustrar la relación entre las formas básicas del teselado.

En la segunda serie (abajo), la figura de la izquierda evidencia una estrella con alternancia de cometas amarillas y dardos rojos, mientras que la figura de la derecha representa una estrella amarilla de cinco puntas ensamblada únicamente con cometas. En la tercera serie (última fila), la figura de la izquierda muestra una composición en la que dos dardos rojos se integran con cometas amarillas donde se forma un diseño semejante a una flor, mientras que la figura de la derecha presenta una configuración en la que dardos y cometas se entrelazan para producir una estructura estelar abierta.

Estas construcciones representan ejemplos del teselado P3 de Penrose, caracterizado por la combinación no periódica de cometas y dardos bajo reglas de ensamblaje que garantizan la no repetición traslacional y la presencia de simetrías locales de orden cinco. Además, estas representaciones físicas facilitan la comprensión de la geometría aperiódica, la simetría pentagonal y la relación con la proporción áurea, constituyendo un recurso pedagógico para la enseñanza de teselaciones y de la matemática vinculada con la cristalografía cuasi-periódica.

4.4 Resultados de los estudiantes

La experiencia de trabajo con teselaciones no solo permitió que los estudiantes ejercitaran habilidades de construcción geométrica, sino que además abrió un espacio para la reflexión epistemológica y didáctica sobre el papel de la matemática en la comprensión del mundo. Desde el punto de vista educativo-matemático, los resultados se pueden interpretar como una manifestación de cómo la geometría, a menudo reducida a un conjunto de definiciones y teoremas abstractos, cobra sentido cuando se inserta en contextos de exploración y creación.

Uno de los aportes más relevantes observados fue la activación del pensamiento geométrico en distintos niveles de abstracción. Los estudiantes transitaron de un nivel figural, en el cual reconocían visualmente patrones de mosaicos, a un nivel conceptual, donde analizaron las condiciones angulares y de simetría que permiten la repetición en el plano. Esta transición ilustra el desarrollo de lo que Duval (1999) denomina *coordinación de registros semióticos*, ya que los estudiantes lograron pasar de la representación gráfica a la expresión simbólica y verbal de las propiedades geométricas.

Asimismo, la experiencia mostró la importancia de la argumentación matemática en un ambiente educativo. Los estudiantes no se conformaron con elaborar mosaicos visualmente atractivos; buscaron justificar por qué ciertas figuras cubren el plano y otras no, donde se ejercita así la dimensión deductiva propia de la matemática. Este aspecto resulta fundamental en la formación docente, pues coloca a los futuros maestros en la posición de constructores de conocimiento, antes que simples transmisores de fórmulas.

En el caso particular de los teselados aperiódicos de Penrose, la dificultad inicial fue superada gracias al trabajo colaborativo y la mediación docente, lo que evidencia que la construcción colectiva del conocimiento desempeña un papel decisivo en la comprensión de ideas complejas. Desde la perspectiva educativa, este hallazgo demuestra que los temas avanzados de la matemática pueden ser abordados exitosamente en el aula si se plantean como problemas abiertos que despierten curiosidad y permitan múltiples caminos de exploración.

Por otra parte, la actividad generó un enlace interdisciplinario que enriquece la visión educativa de la matemática. Varios estudiantes asociaron las teselaciones con el arte islámico y mesoamericano, se reconoce que la matemática se entrelaza con la cultura y la historia. Este reconocimiento rompe con la visión reduccionista de la matemática como disciplina aislada y la muestra como un lenguaje de diálogo entre la ciencia, el arte y la sociedad. En términos didácticos, esta transversalidad constituye un recurso valioso para promover la motivación y el sentido de pertenencia de los estudiantes hacia la matemática.

Finalmente, los resultados obtenidos permiten destacar que la experiencia con teselaciones potenció tres dimensiones educativas clave:

1. **La dimensión cognitiva**, al favorecer el razonamiento abstracto y la deducción lógica.
2. **La dimensión semiótica**, al exigir la traducción entre registros visuales, verbales y simbólicos.
3. **La dimensión formativa**, al fortalecer la visión de la matemática como una disciplina cultural y científica, viva y en constante diálogo con otros campos.

En conclusión, la profundización de estos resultados evidencia que las teselaciones, más allá de ser un recurso geométrico, se constituyen en una estrategia didáctica poderosa para el desarrollo del pensamiento matemático, la creatividad y la apreciación cultural de las matemáticas. Esta experiencia muestra que, cuando se integran actividades de exploración, argumentación y conexión interdisciplinaria, la enseñanza de la geometría se transforma en un proceso significativo y humanizante, capaz de formar docentes con visión crítica, rigurosa y sensible a la riqueza de la matemática en contextos educativos y sociales.

5. CONCLUSIONES

El recorrido investigativo en torno a las teselaciones ha permitido constatar que estas configuraciones geométricas no solo poseen un atractivo estético y una profunda riqueza matemática, sino que además constituyen un recurso pedagógico de primer orden en la formación de competencias matemáticas escolares y en la preparación de futuros docentes. La experiencia demostró que el estudio de patrones, simetrías y estructuras aperiódicas abre un campo fértil para que los estudiantes desarrollen habilidades de razonamiento lógico, abstracción, argumentación formal y capacidad de conjeturar, aspectos que resultan esenciales para una enseñanza de la matemática con sentido y trascendencia.

En el plano educativo, las teselaciones ofrecen un escenario privilegiado para articular la teoría matemática con su dimensión cultural e histórica. Desde los mosaicos islámicos hasta los aportes de Penrose y Shechtman, se evidencia cómo las configuraciones geométricas trascienden los límites de lo puramente matemático para integrarse a la historia del arte, la física de los materiales y la exploración científica contemporánea. Este diálogo interdisciplinar otorga a la enseñanza un carácter más integral, en el que los estudiantes reconocen que la matemática no es una disciplina aislada, sino un lenguaje universal que se entrelaza con múltiples formas de conocimiento y expresión.

Asimismo, la investigación reveló que el uso de las teselaciones como recurso didáctico potencia la visualización matemática y facilita el tránsito entre representaciones semióticas diversas —gráficas, simbólicas, geométricas y algebraicas—, lo cual fortalece la comprensión profunda de los conceptos y evita que el aprendizaje quede limitado a la memorización mecánica de procedimientos. Se constató, además, que el trabajo con teselaciones fomenta la autonomía intelectual y la creatividad, al situar al estudiante en un rol activo de explorador, constructor y comunicador de ideas matemáticas.

En la formación de docentes, este tipo de experiencias cobra especial relevancia: al apropiarse de un recurso con tanto potencial explicativo y motivador, los futuros educadores adquieren no solo herramientas metodológicas, sino también una visión renovada de la matemática como disciplina viva, dinámica y vinculada con la cultura. De este modo, la investigación refuerza la necesidad de integrar propuestas innovadoras que promuevan en los docentes en formación la capacidad de diseñar ambientes de aprendizaje significativos, sensibles a la diversidad de sus estudiantes y orientados a la construcción de un pensamiento matemático crítico.

El estudio de las teselaciones trasciende la esfera del descubrimiento geométrico para consolidarse como una estrategia educativa-matemática de alto valor formativo. Más allá de la belleza de sus patrones, las teselaciones permiten ejercitar el razonamiento abstracto, tender puentes entre disciplinas, despertar el interés por la investigación y formar sujetos capaces de comprender la matemática como un lenguaje universal que armoniza el orden, la creatividad y la capacidad humana de dar sentido al mundo. La presente investigación, por tanto, reafirma que el desafío de la educación matemática contemporánea no es únicamente transmitir conocimientos, sino ofrecer experiencias formativas que logren transformar la manera en que los estudiantes se apropian, resignifican y proyectan la matemática en su vida académica, cultural y social.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

JRC desarrolló todo, con la participación de los alumnos de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física, en la asignatura de Didáctica de la Geometría y trigonometría.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Se debe colocar un texto similar al siguiente: Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la JRC previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco profundamente a la Universidad de San Carlos de Guatemala y, en particular, a la Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media (EFPEM), por haber brindado el espacio académico, los recursos institucionales y las condiciones formativas necesarias para la realización de esta investigación en el marco de las prácticas académicas del curso de Didáctica de la Geometría y la Trigonometría. Su respaldo continuo constituye un pilar fundamental para el desarrollo del pensamiento crítico, la innovación pedagógica y el fortalecimiento de la formación docente en Guatemala.

De igual manera, expreso mi más sincero reconocimiento a los estudiantes de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física, quienes participaron activamente en las experiencias didácticas propuestas. Su entusiasmo, compromiso y disposición al diálogo fueron decisivos para alcanzar los objetivos planteados en este estudio. Cada aporte, reflexión y construcción colectiva de conocimiento fortaleció el sentido formativo e investigativo de esta propuesta.

Asimismo, deseo rendir un especial homenaje y manifestar mi admiración al **MSc. Luis Enrique Solórzano**, quien ha sido para mí no solo un formador riguroso y generoso, sino también un mentor inspirador. Su guía intelectual, su sensibilidad didáctica y su profunda vocación académica han dejado una huella indeleble en mi trayectoria profesional. Le admiro

y aprecio sinceramente por todo lo compartido, enseñado y sembrado en mí como educador e investigador.

5. REFERENCIAS

Abas, S. J., & Salman, A. S. (1995). *Symmetries of Islamic geometric patterns*. World Scientific.

Berger, R. (1966). The undecidability of the domino problem. *Memoirs of the American Mathematical Society*, (66). https://doi.org/10.1090/memo/0066

Bonner, J. (2017). *Islamic geometric patterns: Their historical development and traditional methods of construction*. Springer.

Brading, K., & Castellani, E. (Eds.). (2003). *Symmetries in physics: Philosophical reflections*. Cambridge University Press. https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0301097

Conway, J. H., Burgiel, H., & Goodman-Strauss, C. (2008). *The symmetries of things*. A K Peters.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Dürer, A. (1977). *Underweysung der Messung* (1525). (Edición facsímil). Dover Publications.

Euclides. (1956). *Los Elementos* (J. L. Heiberg, Ed. y trad.) (Obra original escrita ca. 300 a.C.). Dover Publications.

Field, J. V. (2005). *The invention of infinity: Mathematics and art in the Renaissance*. Oxford University Press.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The onto-semiotic approach. *For the Learning of Mathematics*, 33(1), 14–19. https://flm-journal.org/Articles/33C1FD9A6C1F30FB73D19A5BC9963D.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). *Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos*. Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

Grünbaum, B., & Shephard, G. C. (1987). *Tilings and patterns*. W. H. Freeman.

Kaplan, C. S., & Salesin, D. H. (2000). Islamic star patterns in absolute geometry. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 23(2), 97–119.

Levine, D., & Steinhardt, P. J. (1984). Quasicrystals: A new class of ordered structures. *Physical Review Letters*, 53(26), 2477–2480. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.53.2477

Ling, R. (1998). *Ancient mosaics*. Princeton University Press.

Lu, P. J., & Steinhardt, P. J. (2007). Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval Islamic architecture. *Science*, 315(5815), 1106–1110. https://doi.org/10.1126/science.1135491

Méndez, E. (2022). El pensamiento visual como clave en la comprensión de estructuras geométricas. *Revista Científica del SEP*, 5(1), 29–36.

O'Kane, B. (2016). *The treasures of Islamic art in the museums of Cairo*. The American University in Cairo Press.

Pedoe, D. (1988). *Geometry and the visual arts*. Dover Publications.

Penrose, R. (1974). The role of aesthetics in pure and applied mathematical research. *Bulletin of the Institute of Mathematics and Its Applications*, 10, 266–271.

Penrose, R. (1979). Pentaplexity: A class of non-periodic tilings of the plane. *Mathematical Intelligencer*, 2(1), 32–37.

Ruiz Castillo, J. C. (2025). *Aplicación del Enfoque Ontosemiótico y la incidencia en el estudio de la conjetura de Collatz desde las ciencias de la complejidad* (Tesis doctoral). Universidad de San Carlos de Guatemala. https://biblos.usac.edu.gt/api/filesystem/v1/files/fe3d0ff7-8d1d-4772-818d-8af0336b1308

Ruiz Castillo, J. C. (2025b). El Grupo Diédrico como Objeto Epistémico y Semiótico: Implementación del Enfoque Ontosemiótico en Contextos de Formación Docente. *Ibero Ciencias - Revista Científica y Académica*, 4(2), 107–133. https://doi.org/10.63371/ic.v4.n2.a58

Ruiz Castillo, J. C. (2025c). Aplicación de las representaciones semióticas en cálculo multivariable mediante la construcción de una montaña rusa física y virtual. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 18(2). https://doi.org/10.15517/5shh5h27

Schattschneider, D. (1978). Tiling the plane with congruent pentagons. *Mathematics Magazine*, 51(1), 29–44.

Shechtman, D., Blech, I., Gratias, D., & Cahn, J. W. (1984). Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Physical Review Letters*, 53(20), 1951–1953. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.53.1951

Shechtman, D. (2013). *The discovery of quasicrystals: A personal perspective*. World Scientific.

Smith, C. (1958). The geometrical patterns of the Alhambra. *Leonardo*, 1(2), 99–105.

The Nobel Foundation. (2011). *The Nobel Prize in Chemistry 2011 – Press Release*. https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/2011/press-release/

Wang, H. (1961). Proving theorems by pattern recognition II. *Bell System Technical Journal*, 40(1), 1–41.

Wells, D. (1991). *The Penguin dictionary of curious and interesting geometry*. Penguin Books.