Cuadernos
de Investigación y Formación en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 19 · N°. 1 · 2026
29-48
Recibido: 14/10/2025
Aprobado: 30/12/2025

Artículos de investigación

ESTUDIO DE PRÁCTICAS DE INGRESANTES UNIVERSITARIOS SOBRE FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS MEDIANTE ANÁLISIS ESTADÍSTICO IMPLICATIVO

STUDY OF UNIVERSITY STUDENTS' PRACTICES ON LINEAR AND QUADRATIC FUNCTIONS THROUGH IMPLICATIVE STATISTICAL ANALYSIS

Fabián Espinoza[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-8921-6956

Patricia Siwert[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9709-4004

Paula Bordón[3]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-8701-0196

María Elizabeth Mendoza[4]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0006-3643-0442

César Garau[5]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0001-3458-9402

[1] FaCENA (UNNE), Corrientes, Argentina. rrfespinoza@exa.unne.edu.ar

[2] FaCENA (UNNE), Corrientes, Argentina. psiwert@exa.unne.edu.ar

[3] FaCENA (UNNE), Corrientes, Argentina. paula.bordon@comunidad.unne.edu.ar

[4] FaCENA (UNNE), Corrientes, Argentina. maria.mendoza@comunidad.unne.edu.ar

[5] FaCENA (UNNE), Corrientes, Argentina. cesaradriangarau@exa.unne.edu.ar

RESUMEN

En este estudio se emplea el Análisis Estadístico Implicativo (ASI) para examinar cómo abordan situaciones-problema vinculadas con funciones lineales y cuadráticas los ingresantes a la carrera de Bioquímica de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura (UNNE). El objetivo es identificar asociaciones conceptuales y cuasi-implicaciones entre las tareas de un instrumento de indagación diseñado ad hoc, el que cuenta con seis situaciones-problemas y 17 subtareas, que son las variables dicotómicas que se analizan con las herramientas de ASI. Para ello, se realizó un análisis de similitud de tareas mediante un árbol de similaridad, seguido de un estudio de cuasi-implicaciones representadas en un grafo implicativo. El marco teórico y metodológico se inscribe en el ASI, tomándose como complemento algunas herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos, sobre todo para elaborar el análisis a priori. Entre los resultados más importantes se puede destacar que los ingresantes conocen y pueden relacionar distintos registros de representación de funciones e interpretan gráficos funcionales contextualizados.

Palabras clave: Análisis Estadístico Implicativo, árbol de similaridad, grafo implicativo, funciones lineales y cuadráticas, enfoque ontosemiótico.

ABSTRACT

This study employs Implicative Statistical Analysis (ASI) to examine how students entering the Biochemistry program at the Faculty of Exact Sciences, Natural Sciences, and Surveying (UNNE) approach problem-solving situations related to linear and quadratic functions. The primary objective is to identify conceptual associations and quasi-implications among the tasks within an *ad hoc* investigative instrument. This instrument is composed of six problem-solving situations and 17 subtasks, which serve as the dichotomous variables analyzed using ISA tools. The methodology involved a task similarity analysis conducted using a similarity tree, followed by a study of quasi-implications represented in an implicative graph. The theoretical and methodological framework is grounded in ISA, complemented by some theoretical and methodological tools from the Onto-Semiotic Approach (EOS) to mathematical knowledge and instruction, particularly for developing the *a priori* analysis. Among the most significant findings, it can be highlighted that the entering students know and can relate different registers of function representation and are able to interpret contextualized functional graphs.

Keywords: Statistical Implicative Analysis, similarity tree, implicative graph, linear and quadratic functions, onto semiotic approach.

1. INTRODUCCIÓN

Desde hace varios años, un grupo de docentes de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste, Argentina, se ha dedicado a indagar los conocimientos matemáticos de ingresantes a las distintas carreras, identificando y caracterizando diferentes obstáculos, con la intención de aportar a la problemática de desgranamiento y retraso en las trayectorias acedémicas de los estudiantes, antes distintas dificultades con asignaturas de matemática. Los resultados obtenidos se fueron constituyendo en un importante y permanente aporte al diseño y planificación de las tareas de enseñanza de los cursos de matemática del primer año de estudios, en el cual se presentan los mayores índices de desgranamiento.

En años recientes, enfocados más bien en caracterizar la comprensión alcanzada por los ingresantes sobre determinados objetos matemáticos, más allá de la sola determinación de las dificultades, errores o conflictos, el equipo ha empezado a analizar pruebas diagnósticas de conocimientos de ingresantes a la institución, utilizando Análisis Estadístico Implicativo (ASI).

Como señalan Gras y Kuntz (2009), Caputo et al (2016) y Mendoza et al (2019), este método de Estadística Multivariante permite hacer explícitas variadas relaciones conceptuales establecidas por estudiantes, con distintos niveles de intensidad relacional.

En este contexto, el presente trabajo busca comprender las relaciones entre los saberes sobre funciones lineales y cuadráticas que poseen los estudiantes, para determinar si este tema puede asumirse como un conocimiento previo o si, por el contrario, ciertos objetos y significados necesitan ser reforzados en la universidad. Se trata de una experiencia piloto para valorar el recorrido llevado a cabo y sobre todo el instrumento de indagación que se viene construyendo en el marco de un proyecto de investigación del grupo que se viene desarrollando en la UNNE entre los años 2024 y 2027. La validación ontosemiótica de la nueva versión del instrumento que se logró a partir del presente trabajo, la instrumentación final del mismo con un grupo más numeroso de estudiantes y el análisis correspondiente, conforman las tareas fundamentales que completarán la programación del proyecto.

El instrumento original fue analizado a priori con herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), precisamente, usando las nociones de configuración epistémica y función semiótica. Con la identicación y clasificación de de los objetos matemáticos primarios provenientes de este marco teórico, en términos de conocimientos, se elabora la matriz MAP (a la cual nos referiremos), el árbol de similaridad y el grafo implicativo, con herramientas del ASI.

Posteriormente se aplicó el instrumento a 25 estudiantes de Bioquímica que ingresaron en el año 2025. Los alumnos participaron voluntariamente luego de que algunos integrantes del proyecto de investigación presentaran la experiencia en las primeras clases de matemática.

El estudio de estas prácticas matemáticas se llevó a cabo a partir del análisis de un árbol de similaridad y de un grafo implicativo, elaborados con ASI, con base en el análisis a priori realizado con herramientas teóricas y metodológicas del EOS y del ASI.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

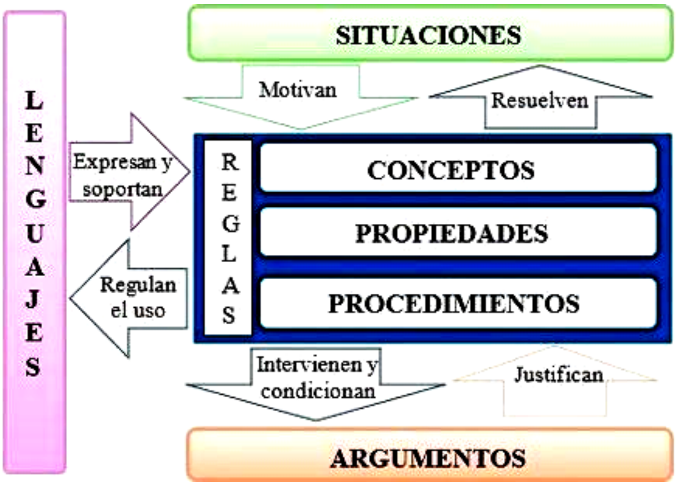
Las referencias teóricas y metodológicas adoptadas provienen del EOS y fundamentalmente del ASI.

2.1 Fundamentos teóricos y metodológicos provenientes del EOS

Más bien aplicada al análisis a priori, la referencia adoptada fue el modelo epistémico y cognitivo del EOS (Godino, Batanero y Font, 2008; 2020). En particular, se emplearon los constructos: Configuración epistémica y Función semiótica, a partir de los cuales se identificaron los objetos matemáticos primarios presentes en las resoluciones institucionales y sus relaciones.

Para un análisis más fino de la actividad matemática, el EOS incluye seis tipos de objetos matemáticos primarios, emergentes de sistemas de prácticas (Burgos y Godino, 2020): situaciones-problemas, lenguaje, procedimientos, proposiciones, conceptos y argumentaciones. Estos objetos, que están presentes en una práctica matemática, se relacionan entre sí formando configuraciones epistémicas o cognitivas (Figura 1).

Figura 1. Configuración epistémica/cognitiva



Fuente: Godino, Batanero y Font (2008)

Las configuraciones son epistémicas o instruccionales cuando son redes de objetos institucionales (extraídas de una práctica referencial institucional o experta); mientras que son cognitivas, cuando representan redes de objetos personales (actividad de los estudiantes). Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional (Godino, Batanero y Font, 2008). Estas configuraciones permiten analizar las prácticas matemáticas describiendo su complejidad ontosemiótica.

En una situación ideal y en una institución determinada, Godino (2003) sostiene que un sujeto comprende el significado de un objeto o se apropia del significado de un concepto si es capaz de reconocer los objetos matemáticos primarios y relacionarlos con otros objetos matemáticos en toda la variedad de situaciones planteadas por dicha institución.

Los distintos objetos primarios se vinculan a través de las funciones semióticas construidas entre ellos. D'Amore, Font y Godino (2007) indican que una función semiótica está dada por una correspondencia entre un antecedente (expresión, significante o representante) y un consecuente (contenido, significado, representado) que establece un sujeto, persona o institución. La correspondencia (representacional o instrumental) se constituye entre dos objetos (ostensivos o no-ostensivos), cuando uno de ellos se pone en lugar del otro, o bien, uno es usado por otro. Con esta noción, se evidencia el carácter netamente relacional de la actividad matemática y de los procesos que difunden el conocimiento matemático.

Godino (2003) llama análisis ontosemiótico de una práctica matemática a la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre ellas. Dicho análisis se constituye en la indagación sistemática de los significados (contenidos de las funciones semióticas) puestos en juego a partir de la transcripción del proceso.

2.2. Fundamentos teóricos y metodológicos provenientes del ASI

El estudio con ASI se llevó a cabo tanto para el análisis a priori del instrumento de indagación como para la exploración de las prácticas áulicas, usando como herramientas teóricas y metodológicas un árbol de similaridad y un grafo implicativo, herramientas que permitieron obtener similitudes y cuasi-implicaciones entre las 17 variables del instrumento.

ASI, fue creado por Regis Gras y colaboradores de la Asociación de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Lyon, Francia (Gras & Kuntz, 2009). El objetivo de este método es detectar las relaciones conceptuales que los estudiantes pueden establecer entre las distintas tareas de una evaluación.

Estos investigadores partieron del supuesto de que, si un alumno es capaz de resolver correctamente un problema complejo, es casi seguro que también responderá satisfactoriamente otro de menor complejidad (Regnier, 2009). A partir de esta hipótesis, ASI establece relaciones no simétricas entre variables del tipo si *a*, casi siempre *b*. Nótese que estas relaciones no son implicaciones lógicas formales, puesto que, en la lógica proposicional clásica, si *a* es verdadero (en este caso, sería si la respuesta al problema *a* es correcta), para que el condicional sea verdadero, también debe serlo el consecuente de la implicación. Como ha sido comprobado empíricamente que esto no se da taxativamente en las situaciones de evaluación de los aprendizajes, los autores han denominado a estas relaciones entre variables reglas o cuasi-implicaciones.

Así pues, Gras y Kuntz (2009) afirman que para que una regla sea admisible, es necesario minimizar el número de contraejemplos de esta. Es decir, que el número de casos en que, habiendo sido correctamente resuelta la tarea *a* del cuestionario, la respuesta a *b* no sea correcta o no se haya concretado, sea el menor posible. Para trabajar con ASI es necesario considerar los siguientes conjuntos finitos: un conjunto V que contiene las variables (dicotómicas) en estudio, puesto que asumen el valor 1, si la respuesta del estudiante es correcta, y 0, en caso contrario; y un conjunto E, también finito, formado por los sujetos que serán evaluados. Asimismo, se hace necesario definir otros dos conjuntos finitos: el primero denotado con A, formado por los sujetos de E que han respondido correctamente el problema a, y otro, B, formado por aquellos que han respondido bien el b. En la lógica tradicional, si a $\Rightarrow$ b es verdadera, debe estar A $\subset$ B. Pero, en la práctica siempre es posible encontrar uno o más contraejemplos de la implicación, por lo tanto, generalmente $A - B \neq \emptyset$. Eso, sin embargo, no significa que no pueda existir una relación de tipo causa-efecto entre los ítems a y b, relación que existe dada la naturaleza de los conocimientos que subyacen en ellos. Sean, además, X e Y dos subconjuntos de E coordinables con A y B, respectivamente, y α un número real perteneciente al (0, 1). Gras y Kuntz (2009) sostienen que la cuasi-implicación a ⇒ b es admisible a un nivel de confianza 1 - α, siempre que:

$$Pr = [card(X - Y) \leq card(A - B)] < \alpha,$$

que sigue la ley de Poisson de parámetro:

$$\lambda = \frac{card(A).card(E-B)}{card(E)}.$$

Por su parte, Spagnolo, Gras y Regnier (2009) afirman que la probabilidad de que el número de contraejemplos observados sea menor que el número de casos en que a y ¬b se observan simultáneamente, bajo la hipótesis de que a y b son independientes a priori, se puede obtener, utilizando el modelo Binomial o de Poisson. Estos autores mencionan la conveniencia de utilizar este último, puesto que, bajo ciertas condiciones, se puede aproximar a una distribución gaussiana.

Para poder determinar la existencia o no de relaciones entre los ítems de una evaluación, se definen diferentes índices que permiten establecer no sólo la existencia de relaciones entre las variables, sino también, cuán fuertes son las cuasi-implicaciones. Se define un índice denominado intensidad de la regla. Esta intensidad se determina calculando las probabilidades mencionadas, utilizando la distribución Binomial, la Hipergeométrica y, principalmente, la de Poisson puesto que, como afirman Wackerly, Mendenhall y Scheaffer (2010) bajo ciertas condiciones las dos primeras se aproximan a esta última.

Ahora bien, si el número de sujetos evaluados es superior a cien, se hace necesario minimizar no sólo el número de contraejemplos de la implicación, sino también, el de contraejemplos de su contrarrecíproca. Cuando se desea utilizar la intensidad de una regla y de su contrarrecíproca se requiere utilizar el concepto de entropía de Shannon, y esto da lugar a determinar la intensidad entrópica (Binomial, Hipergeométrica o de Poisson) que es una mejor medida que la intensidad clásica, determinada por cualquiera de las distribuciones de probabilidad mencionadas (Gras y kuntz, 2009).

Para realizar un análisis a priori de por ejemplo un instrumento que se suministrará a estudiantes, es necesario considerar un conjunto, formado por los conocimientos requeridos para resolver las tareas del instrumento, y otro conjunto constituido por las variables (dicotómicas) en estudio, es decir, las tareas del instrumento. Con estos datos se construye una matriz booleana, llamada matriz MAP, donde en la celda *ij* se consigna *1* si para responder el ítem *j* es necesario utilizar el conocimiento *i*, o *0* en caso contrario.

Una de las representaciones que utiliza el ASI es el árbol de similaridad, este permite clasificar variables agrupando aquellas con características similares, pero a diferencia de los métodos de clusters tradicionales (basados en distancias), lo hace en términos probabilísticos. El cálculo de estas probabilidades puede hacerse siguiendo las leyes de Poisson o Binomial, pero el software Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive (CHIC), realiza la aproximación de dichas leyes a la Normal, para obtener el índice de similaridad utilizado.

En el año 2015, el francés Raphael Couturier diseñó en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo la versión libre de CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) (Couturier, 2009), llamada R-CHIC (CHIC en el ambiente estadístico R).

R-CHIC presenta todas las cuasi-implicaciones y sus intensidades en un grafo implicativo, en el cual se muestran las cuasi-implicaciones entre los ítems mediante arcos, y su intensidad se muestra mediante colores: una intensidad del 99% se muestra en rojo, 95% en verde, 90% en azul y 85% en celeste. Cabe aclarar que las intensidades expuestas en el grafo implicativo surgen por defecto y pueden ser modificadas manualmente, en caso de que en la práctica no se obtengan dichos niveles de confianza.

Para el análisis de similaridad, R-CHIC organiza las clases de variables en un árbol de similaridad uniendo variables o grupos de variables mediante segmentos. Los "nodos significativos", marcados en rojo, indican variables o grupos con alta similaridad en ese nivel. Si en el nivel k se tiene un nodo significativo, el correspondiente índice de similaridad es mayor al de cualquier nodo significativo del nivel $h > k$ (los niveles se ordenan en forma creciente de arriba hacia abajo).

Cabe mencionar que al trabajar con cuasi-implicaciones, no siempre la ley del Silogismo hipotético, $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$, es una ley de inferencia, como en la lógica proposicional clásica. Para que sí lo sea, es preciso que la intensidad de la implicación $p \Rightarrow r$ sea superior a 0.5 (GRAS y KUNTZ, 2009).

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

La investigación, de metodología cualitativa, se enmarca en un paradigma exploratorio, descriptivo e interpretativo, centrado en la indagación de los conocimientos previos de estudiantes que ingresan a la universidad.

Si bien la naturaleza del instrumento de indagación es de corte cuantitativo en su codificación, la riqueza de la interpretación de las relaciones conceptuales establecidas por los estudiantes, a partir de las herramientas metodológicas del ASI, se alinea con un enfoque cualitativo-interpretativo.

3.1 Etapas metodológicas

- Elaboración del instrumento de indagación, fundamentado en el diseño curricular nacional.

Este instrumento cuenta con 6 situaciones-problemas y 17 subtareas (variables dicotómicas). La versión completa del mismo puede consultarse en Espinoza et al (2024).

- Análisis a priori con herramientas del EOS.

Se identifican los objetos matemáticos involucrados en las prácticas institucionales y se los relaciona por medio de configuraciones epistémicas y funciones semióticas.

Se exponen aquí, a modo de ejemplo, el análisis a priori de tres situaciones.

- Complementación del análisis a priori del instrumento con elementos del ASI.

Se elabora la matriz MAP. En sus filas se nombran los conocimientos institucionales involucrados en la resolución de cada una de las situaciones del instrumento; mientras que, en sus columnas, se listan las variables o tareas del instrumento. Las distintas celdas ij se completan con 0 y 1, apuntando con "1" si el investigador considera que para la tarea "j" es necesario poner en funcionamiento el conocimiento "i", y con "0" el caso contrario.

- A partir de esta matriz se elaboran y analizan el árbol de similaridad y el grafo implicativo de las prácticas institucionales.
- Administración del instrumento a los estudiantes y corrección de las producciones.

La experiencia se realizó con 25 estudiantes que decidieron participar espontáneamente luego de la caracterización de la práctica por parte de los investigadores y la invitación correspondiente, en una de las primeras clases de una asignatura de matemática del primer año de la carrera de Bioquímica de la FaCENA-UNNE, durante dos horas reloj.

La muestra está constituida por alumnos que cursaban Álgebra y Geometría Analítica durante el primer año y primer cuatrimestre de la carrera, en su mayoría entre 18 y 21 años, provenientes de las provincias aledañas a la institución.

Las correcciones las realizó un solo miembro del equipo de investigación con el siguiente criterio: se consideró que una tarea estuvo bien realizada cuando el estudiante la desarrolló con aproximadamente un 70% de corrección, en comparación con la resolución institucional.

- Elaboración y análisis del árbol de similaridad y del grafo implicativo de las prácticas de estudiantes.

3.2 Análisis a priori. Resolución institucional, identificación de objetos primarios y relaciones entre objetos

Se presentan aquí, a modo de ejemplo, la resolución y el análisis ontosemiótico de tres situaciones que conforman el instrumento. Es decir, se identifican los objetos matemáticos involucrados en las prácticas institucionales y las relaciones entre ellos por medio de funciones semióticas.

Figura 2. Segunda situación-problema del instrumento

Situación 2. Cuatro autos marchan por una ruta, cuya velocidad promedio es constante. Se tiene la siguiente información de cada uno de ellos:

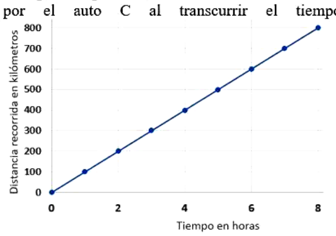
El auto A marcha a 100km por hora.

La distancia recorrida por el auto D sigue la siguiente fórmula: $y=120x$ donde y representa los kilómetros que se han recorrido y x la cantidad de horas transcurridas.

Del auto B se registraron datos en la siguiente tabla:

Hora	2	3	5
Distancia recorrida (en Km)	160	240	400

El siguiente gráfico muestra la distancia recorrida por el auto C al transcurrir el tiempo:



Explicar por qué son verdaderas las siguientes afirmaciones:

i. El auto B es más lento que el auto A.
ii. El auto A y el auto C marchan a la misma velocidad.
iii. El auto D es el más rápido de los cuatro.

Fuente: Elaboración propia

- El auto A marcha a 100km/h (lenguaje), por lo que en 1h recorre 100km (concepto), mientras que en 2h transita 200km (proposición) ya que la velocidad con la que se traslada es constante (argumento). Así, al duplicar la cantidad de tiempo, se duplica la distancia recorrida (argumento).

Según la tabla expuesta en la consigna, en 2h el auto B recorre 160 km (lenguaje). Cómo 160 es menor que 200, esto es, la distancia recorrida por el móvil B es menor que la transitada por el A, en el mismo tiempo, se concluye que el auto B es más lento que el A (procedimiento, argumento).

El auto A en 1h recorre 100km (concepto), y al duplicar, triplicar el tiempo, … también se duplicará, triplicará… la distancia recorrida (proposición, procedimiento), pues la velocidad es constante (argumento). Esto quiere decir que en 2h, 3h, 4h, …, este auto recorre 200km, 300km, 400km, … respectivamente (procedimiento, argumento) al igual que el auto C, como puede apreciarse en el gráfico cartesiano que se expone en la consigna (lenguaje, concepto). Como en tiempos iguales las distancias recorridas por estos móviles son también iguales, quiere decir que ambos marchan con la misma velocidad (argumento).

Sabemos que los autos A y C marchan a la misma velocidad: 100km/h, mientras que el auto B es más lento que ambos, por ser más lento que el auto A. Por otra parte, la distancia recorrida por el auto D está modelizada por la fórmula: $y = 120x$, donde x representa las horas transcurridas e y los kilómetros recorridos (lenguaje y concepto). Luego, en 1h, el auto D recorre 120km (120x1 = 120 (procedimiento)), una distancia mayor que la de los otros tres móviles. Como su velocidad es constante, en 2h, 3h, …, también las distancias alcanzadas por este móvil serán mayores que la de los otros (argumento); es decir, D es el auto más veloz.

Considerando que las relaciones entre el tiempo transcurrido y los kilómetros recorridos por los autos pueden ser modelizadas por medio de una función de proporcionalidad directa (concepto), otros objetos son factibles de emplearse para abordar esta situación. Así, interpretando los registros de representación de las funciones (lenguaje) o usando multiplicaciones, divisiones o regla de tres simple (procedimientos) se puede: i) reducir a la unidad obteniendo la distancia recorrida por cada uno de los móviles en 1h (concepto y procedimiento) o, ii) determinar las constantes de proporcionalidad (dividiendo espacio y tiempo) que son las velocidades de los cuatro móviles (concepto). En ambos casos, la comparación de los resultados obtenidos (procedimiento) es suficiente para determinar qué auto es más veloz, pues sus velocidades son constantes (argumento).

Algunas funciones semióticas (fs) relevantes

- fs 1, 2, 3, 4: Establecida entre el lenguaje con el que se expresa cada función (coloquial, tabular, cartesiana y a través de una fórmula) y el procedimiento (y argumento) que involucra comparar velocidades.
- fs 5: Entre el procedimiento de duplicar, triplicar, etc. la distancia recorrida cuando se duplica, triplica, etc. la cantidad de tiempo y el argumento dado por la velocidad constante.
- fs 6: Entre procedimientos de reducción a la unidad y el argumento de la velocidad constante.

Figura 3. Tercera situación-problema del instrumento

Situación 3: Un especialista visita la producción de un determinado tipo de cultivo de un campo con el fin de aumentar las ganancias relacionadas con las ventas. Por dicha visita cobra \$8000 y por cada hora de trabajo cobra \$3500. a. ¿Es cierto que si trabaja durante 7 horas deberá cobrar \$32.500?, ¿por qué? b. ¿Si trabaja durante 72 horas, cuánto deberá cobrar? Explica tu respuesta. c. ¿Cuántas horas debió trabajar si cobró \$95.500?

Fuente: Elaboración propia

a. El especialista cobra \$8.000 por visita y \$3.500 por cada hora de trabajo (lenguaje), es decir, por 1h de trabajo cobra \$11.500 (proposición), pues 11.500 = 3.500+8.000 (procedimiento). Así, por 2h ganará \$15.000 ($3.500 \cdot 2 + 8.000$) (procedimiento, proposición) dado que el dinero que cobra por hora de trabajo es constante y el que cobra por la visita es fijo. Si se duplica, triplica, … la cantidad de tiempo trabajado también se duplica, triplica, … la cantidad cobrada por hora, obteniendo la ganancia total al añadir los 8.000 correspondientes a la suma fija (procedimiento, argumento). Si el especialista trabaja 7h deberá cobrar \$32.500 ($3.500 \cdot 7 + 8.000$) (procedimiento, argumento).

b. Si el experto trabajara durante 72h deberá cobrar 72 veces lo que lo haría por 1h de trabajo más la suma fija, esto es \$260.000 ($3.500 \cdot 72 + 8.000$) (procedimiento, argumento).

c. La consigna indica que \$95.500 (lenguaje) cobró el especialista por cierta cantidad de horas trabajadas más la suma fija (argumento); por lo que, \$87.500 es lo que debió cobrar sin la suma fija ($95.500 - 8000$) (procedimiento y argumento). Para calcular el número de horas trabajadas se debe buscar un número que multiplicado por 3.550 dé como resultado 87.500, el cual puede obtenerse dividiendo 87.500 por 3.500 (procedimiento, argumento). Este número es 25, e indica que el especialista trabajó 25h.

Funciones semióticas relevantes

- fs 1: Establecida entre el procedimiento de multiplicar la ganancia por el número de horas de trabajo y el modelo de proporcionalidad asociado (argumento).
- fs 2: Entre el procedimiento de multiplicar la ganancia por el número de horas de trabajo más la suma fija y el argumento dado por el modelo lineal no proporcional.
- fs 3: Entre el procedimiento de deconstrucción del procedimiento usado para conocer la ganancia y el argumento que fundamenta conocer la cantidad de horas trabajadas basado en el contexto.
- fs 4: Entre dos conceptos, el de función y el de ecuación. Más precisamente, a través de un modelo funcional se obtiene la ganancia cuando se conoce la cantidad de horas trabajadas; mientras que, si el dato es la paga, averiguar las horas trabajadas involucra el modelo de una ecuación.

Figura 4. Quinta situación-problema del instrumento

Situación 5. En la siguiente tabla están indicados algunos puntos por donde pasa la gráfica de una función cuadrática:

x	0	1	-1	2	-2
y	-3	-2	-2	1	1

Si asumimos que el dominio de esta función es un subconjunto de los números reales, ¿de qué subconjunto se trata, si al conjunto de las imágenes deben pertenecer números reales menores que 166?

Fuente: Elaboración propia

Sabiendo que 1 y -1 son opuestos (o 2 y -2) y tienen las mismas imágenes (lenguaje, concepto) se puede decir que el valor del coeficiente lineal de la función cuadrática es 0 (concepto, argumento). Además, como la imagen de 0 es -3, este número es la ordenada al origen (concepto). Luego la expresión algebraica de la función es $f(x) = x^2 - 3$ (argumento).

Resolviendo la ecuación $x^2 - 3 = 166$ se tiene que $x = 13$ o bien $x = -13$ (procedimiento). Esto quiere decir que 13 y -13 son dos elementos del dominio de la función que tienen como imagen a 166 (argumento). Como el coeficiente cuadrático es positivo, la gráfica de la función es cóncava positiva, por lo que todos los números reales comprendidos entre -13 y 13 tendrán imágenes menores que 166 (concepto, argumento). De esta manera se obtiene el subconjunto de números reales dado por el intervalo abierto (-13,13) que es el dominio de la función en las condiciones dadas (argumento).

Funciones semióticas relevantes

- fs 1: Establecida entre lenguajes: gráfico (tabla) y formal (fórmula).
- fs 2: Entre el lenguaje (gráfico) y el concepto dado por la fórmula de la función.
- fs 3: Entre los conceptos correspondientes a la fórmula de la función y a la ecuación x2-3=166.
- fs 4: Entre el problema y el procedimiento de resolución de la mencionada ecuación.

En las configuraciones epistémicas se han identificado los objetos matemáticos primarios involucrados en las prácticas desarrolladas y sus relaciones, lo que permite caracterizar la exhaustividad de la elección de las situaciones del instrumento teniendo en cuenta la propuesta de los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios de Argentina (ME, 2011). Entre otros aspectos, quedaron en evidencia el trabajo con modelos funcionales, con distintos registros de representación de una función, el estudio de relaciones entre distintos lenguajes, entre el dominio y la imagen de una función, la diferenciación entre las funciones lineales proporcionales y no proporcionales. Emergen también aspectos de las gráficas de las funciones cuadráticas necesarios de tener en cuenta, como los de simetría, concavidad, ordenada al origen, etc.

La labor que se ha desarrollado en la identificación, diferenciación, caracterización y estudio relacional entre estos objetos nos permitió valorar la importancia de disponer de una herramienta teórica y metodológica que promueva la elaboración de prácticas matemáticas relativamente completas, como respuesta a una cuestión determinada.

3.3. Estudio de relaciones conceptuales con ASI

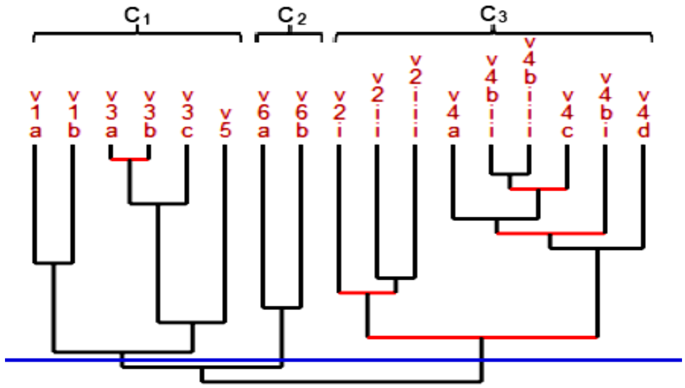
Este análisis complementa el análisis ontosemiótico elaborado precedentemente.

A partir del análisis a priori resumido en la matriz MAP, se construye y analiza dos gráficos: el árbol de similiridad y el grafo implicativo.

3.3.1 Análisis del árbol de similaridad

Los datos de la matriz MAP fueron procesados mediante R-CHIC, un paquete del programa R que implementa ASI para identificar asociaciones conceptuales en términos probabilísticos. Uno de los resultados es el siguiente árbol de similaridad que muestra las relaciones de cuasi-equivalencia entre las variables del instrumento:

Figura 5. Árbol de similaridad de la matriz MAP



Fuente: Elaboración propia a partir de datos relevados, utilizando R-CHIC

Sus vértices son: v1a, v1b, v2i, v2ii, v2iii, v3a, v3b, v3c, v4a, v4bi, v4bii, v4biii, v4c, v4d, v5, v6a y v6b. La expresión v1a, por ejemplo, se lee "variable 1a" y representa la tarea de la situación 1, ítems a, del instrumento.

En este gráfico se identifican tres clases de cuasi-equivalencia, denominadas C1, C2 y C3. Los elementos que se unen cerca de la cima poseen un nivel de similaridad más alto. A medida que se desciende, se van agrupando elementos y grupos que son progresivamente más distintos.

Las clases de similitud quedan constituidas por la homogeneidad entre las tareas.

La clase C1: Reúne tareas o variables cuya consigna no incluye fórmulas ni gráficos explícitos, pero cuya resolución requiere su construcción. Implican procesos de modelización y/o traducción entre lenguajes.

La clase C2: Reúne tareas vinculadas a funciones cuadráticas en sus formas general y factorizada. Se distingue por demandar un trabajo algebraico, con expresiones ya provistas en la consigna, y un análisis centrado en propiedades estructurales de la función.

La clase C3: Incluye tareas ligadas principalmente a la interpretación de gráficos; aunque v2i no los presenta, aparece en esta clase por compartir elementos de razonamiento y comparación con otras variables que sí lo requieren. Las variables de esta clase se vinculan con el análisis visual de información y la deducción de relaciones a partir de representaciones gráficas.

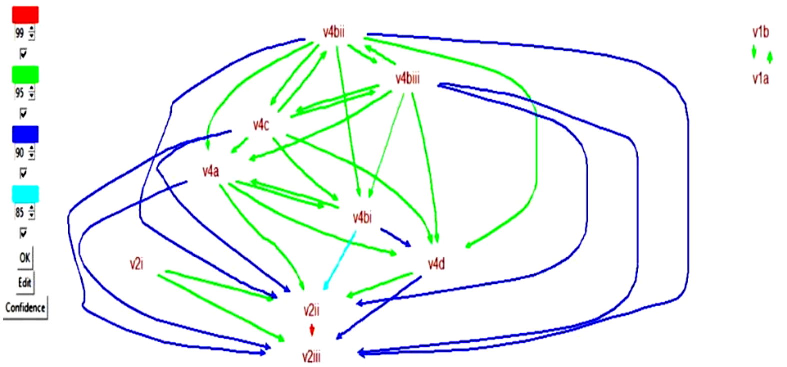
En general, los ítems de una misma situación son las variables relacionadas con mayor intensidad, mostrando que cada situación exige saberes específicos. Por ejemplo, v4d depende de la resolución de ítems previos de su grupo. A su vez, los resultados muestran que el instrumento exige la articulación simultánea de distintos lenguajes (gráfico, algebraico, tabular y verbal), lo cual refuerza la complejidad de los saberes implicados en el estudio de funciones lineales y cuadráticas.

Tal como se había apreciado en el análisis ontosemiótico llevado a cabo, este análisis de similaridad vuelve a dejar en evidencia que las tareas del instrumento no están aisladas, sino que se agrupan en torno a núcleos de saberes compartidos. Las tres clases identificadas muestran distintos modos de movilizar saberes sobre funciones: producción de representaciones a partir de información contextual, trabajo algebraico intensivo sobre expresiones cuadráticas y análisis de información gráfica o tabular.

3.3.2. Análisis del grafo implicativo

Los datos de la matriz MAP fueron procesados mediante R-CHIC, software que implementa ASI para identificar implicaciones entre variables en términos probabilísticos. Otro de los resultados obtenidos es el siguiente grafo implicativo, que muestra las relaciones de cuasi-implicación entre las variables del instrumento.

Figura 6. Grafo implicativo de la matriz MAP



Fuente: Elaboración propia a partir de datos relevados, utilizando R-CHIC

Las flechas corresponden a las cuasi-implicaciones entre variables. La de color rojo es la de mayor intensidad, con un nivel de confianza del 99%, seguida por las verdes, con el 95% de confianza; las azules, de intensidad intermedia, tienen un nivel de confianza del 90%; y la de menor intensidad, la celeste, se presenta con un nivel de confianza del 85%. Por ejemplo, la cuasi-implicación v4c → v4bi (flecha verde) indica que el hecho de realizar correctamente la tarea 4c, en el 95% de los casos, implica abordar de manera pertinente la actividad 4bi.

Si bien se han analizado todas las implicaciones del grafo, a continuación, se exponen solamente algunos ejemplos:

Relaciones entre las tareas de la primera situación:

- v1a ↔ v1b (v1a → v1b y v1b → v1a): determinar que una recta pasa por el origen de coordenadas, implica saber que la misma es la gráfica de una función de proporcionalidad directa, y viceversa.

Relaciones entre las tareas de la segunda situación:

- v2i → v2ii: entender que el auto B es más lento que el A, involucra interpretar que los autos A y C marchan a la misma velocidad.
- v2i → v2iii: saber que el segundo auto es más lento que el primero, implica poder explicar que el último auto es el más rápido.
  Es necesario aclarar que las velocidades de estos 4 autos vienen dadas a través de distintos registros de representación de una función: coloquial, tabular, cartesiano y fórmula.

Relaciones entre las tareas de la cuarta situación:

- v4bii ↔ v4c: saber interpretar en el gráfico cartesiano que figura en la cuarta consigna cuál fue la distancia en la que se volvieron a encontrar los atletas, conlleva la identificación de quién ganó la carrera, y viceversa.
- v4biii → v4d: saber quién fue el atleta alcanzado en la carrera por su par, implica poder explicar la causa del fallo de la estrategia perdedora.

Relaciones entre las tareas de las situaciones 2 y 4:

- v4a → v2ii: reconocer cuál de los dos atletas empezó la carrera más rápido, involucra poder argumentar que los autos A y C marchan a la misma velocidad.
- v4d → v2ii: poder explicar por qué falló la estrategia del perdedor de la carrera, implica explicar la razón por la cual los autos A y C tienen la misma velocidad.

En general, quedan en evidencia relaciones entre conocimientos. La determinación de que una recta pasa por el origen de coordenadas (de manera gráfica o algebraica), conlleva saber que la misma es la gráfica de una función de proporcionalidad directa, y viceversa.

Además, la comprensión de las gráficas funcionales relacionadas con algún contexto real, no necesariamente lineales, favorece la interpretación de las gráficas de funciones lineales contextualizadas.

Finalmente, es necesario destacar las relaciones establecidas entre los distintos registros de representación de una función y la interpretación pertinente de los mismos.

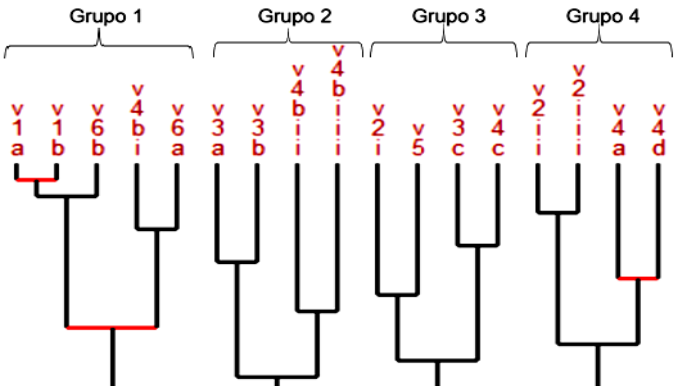
4. RESULTADOS

Se analizan aquí el árbol de similaridad y el grafo implicativo, obtenidos a partir del procesamiento de los datos de las prácticas de los estudiantes mencionados mediante R-CHIC.

4.1 Análisis del árbol de similaridad

Se identifican cuatro grupos de cuasi-equivalencia:

Figura 7. Árbol de similaridad de las prácticas de los estudiantes



Fuente: Elaboración propia a partir de datos relevados, utilizando R-CHIC

- Grupo 1: Las variables v1a, v1b y v6b poseen los niveles más altos de similaridad. Para resolver estos apartados, los estudiantes emplean conocimientos de representación gráfica de funciones, ubicando y uniendo puntos. La situación 1b es resuelta teniendo en cuenta que el gráfico de una función de proporcionalidad directa pasa por el origen. Las variables v4bi y v6a se asocian porque involucran tareas de graficación e interpretación.

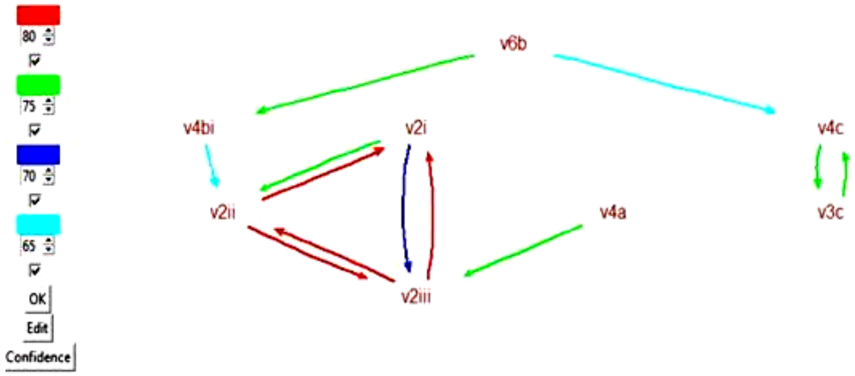
- Grupo 2: Las variables v3a y v3b aparecen relacionadas porque los estudiantes identifican, a través de un proceso de generalización, el cobro del especialista sin importar la cantidad de horas trabajadas.
  Las variables v4bii y v4biii se asocian porque implican interpretar gráficos funcionales para responder a qué distancia se encuentran dos atletas y cuál alcanzó al otro. Para esto, deben reconocer que el punto de intersección representa el tiempo y la distancia del encuentro y que el atleta B tuvo una mayor velocidad.
- Grupo 3: Los ejercicios correspondientes a las variables v2i y v5 implican la interpretación de dos tipos de registros de representación de funciones: el coloquial y el tabular.
  La asociación entre v3c y v4c puede deberse a que ambas tareas implican determinar el/los valores de la variable independiente, teniendo como dato un valor de la variable dependiente.

- Grupo 4: Las variables v2ii y v2iii están relacionadas porque los estudiantes comprenden la información de distintos registros de representación (coloquial, gráfico cartesiano y fórmula). El conocimiento de las velocidades de los móviles les permitió abordar las situaciones.
  La interpretación del gráfico cartesiano permite que los estudiantes aborden la situación, entendiendo que el atleta B recorre mayor distancia en menor tiempo al comienzo, lo que argumentaría la asociación entre las variables v4a y v4d.

4.2 Análisis del grafo implicativo

Los vértices de este son: v2i, v2ii, v2iii, v3c, v4a, v4bi, v4c, v6b. La expresión v2i, por ejemplo, se lee "variable 2i" y representa la tarea de la situación 2, ítems i, del instrumento.

Figura 8. Grafo implicativo de las prácticas de los estudiantes



Fuente: Elaboración propia a partir de datos relevados, utilizando R-CHIC

Las flechas corresponden a las cuasi-implicaciones entre variables o tareas. Las de color rojo son las de mayor intensidad, con un nivel de confianza del 80%; siguen las verdes, con un nivel de confianza del 75%; la azul, con el 70%; y las de menor intensidad, las celestes, se presentan con un nivel de confianza del 65%. Por ejemplo, la cuasi-implicación v2iii → v2i (flecha roja) indica que cuando los estudiantes realizan correctamente la tarea 2iii, en el 80% de los casos, también responden bien a la actividad 2i.

Si bien se han analizado todas las implicaciones del grafo, a continuación, se exponen solamente algunos ejemplos:

Relaciones entre las tareas de la segunda situación:

- v2ii ↔ v2iii (v2ii → v2iii y v2iii → v2ii): estar en condiciones de explicar que los autos A y C marchan a la misma velocidad, involucra argumentar correctamente que el móvil D es más rápido que todos, y viceversa.
- v2i ↔ v2ii: fundamentar que el segundo auto es más lento que el primero, implica poder explicar que el primero y el tercero marchan a la misma velocidad, y viceversa.

- v2i ↔ v2iii: poder explicar que el segundo auto es más lento que el primero, implica argumentar que D es el más rápido de todos, y viceversa.

Estas relaciones muestran que los estudiantes pueden reconocer y relacionar distintos registros de representación de funciones: coloquial, tabular, gráfico cartesiano y fórmula.

Relaciones entre tareas de la cuarta y segunda situación:

- v4a → v2iii: poder determinar qué atleta empezó la carrera más rápido, incluye argumentar acerca de que el auto D es más rápido que todos.
  En general, la interpretación de gráficos funcionales, no necesariamente lineales, involucra conocer y relacionar distintos registros de representación de funciones lineales.

Relaciones entre tareas de la cuarta y tercera situación:

- v4c ↔ v3c: reconocer qué atleta ganó la carrera, implica elaborar y saber usar un modelo lineal contextual.
  Esta relación puede deberse a que ambas tareas implican determinar el/los valores de la variable independiente, teniendo como dato un valor de la variable dependiente.

Relaciones entre tareas de la sexta y cuarta:

- v6b → v4bi: identificar los puntos donde una parábola corta al eje y, implica conocer el momento en que un atleta alcanzó a otro.
  Esta relación queda fundamentada teniendo en cuenta que las tareas involucran identificar puntos de intersección entre curvas, graficando o interpretando gráficos.

5. CONCLUSIONES

El análisis de las prácticas de los estudiantes permitió identificar clases de cuasi-equivalencia reflejadas en el árbol de similaridad, que agrupan variables según modos de razonamiento funcional compartidos.

Se evidencian patrones donde los estudiantes recurren a una estrategia común: emplean registros tabulares, verbales, simbólicos y gráficos para interpretar o construir funciones. Asimismo, pueden elaborar e interpretar modelos lineales contextualizados.

En cuanto al grafo implicativo, se puede decir que las cuasi-implicaciones entre las tareas de la situación 2 son en general las de mayor intensidad, lo que deja en evidencia que los estudiantes interpretan y relacionan distintos registros de representación de funciones lineales, en un determinado contexto.

También la interpretación de gráficos funcionales, no necesariamente lineales, lleva a conocer y relacionar distintos registros de representación de funciones lineales, en situaciones de contexto.

Asimismo, la determinación de puntos de intersección entre curvas (gráfica o algebraica), incluye poder asimilar que los encuentros o coincidencia de velocidades son puntos de intersección de gráficas.

Estos conocimientos brindan una base sólida para diseñar, implementar y evaluar intervenciones educativas más pertinentes, que se relacionen con la forma real en que los alumnos abordan y relacionan estos problemas.

Además, la identificación de los conocimientos detectados a priori no emergentes y los emergentes de las prácticas analizadas, permitió revisar la adecuación y el alcance del instrumento diseñado, en función de los intereses de la investigación. En este sentido, es necesario destacar que el instrumento original sufrió modificaciones relacionadas con el mejoramiento de la redacción de las consignas, la eliminación de tareas redundantes (que pertenecían al mismo tipo de problema o involucraban resoluciones muy similares) y el ajuste de las condiciones e hipótesis de cada una de las situaciones, incluyendo su remisión o inserción según fuera necesario.

Finalmente, se hace notar que esta investigación sienta las bases teóricas y metodológicas para aquellas otras en las que se pretendan valorar situaciones de enseñanza y evaluación, precisamente cuando se trate de realizar recortes en guias de problemas, priorizar la enseñanza de conceptos o tareas más complejas, promover una enseñanza más relacional, entre otros aspectos.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

FE dirigió la investigación y desarrolló los fundamentos teóricos y metodológicos provenientes del EOS, así como el análisis a priori con herramientas del EOS.

PS y PB elaboraron conjuntamente, junto con CG y MM, los fundamentos teóricos y metodológicos del estudio. PS y PB complementaron el análisis a priori del instrumento con elementos del ASI. CG se encargó de la administración del instrumento a los estudiantes y la corrección de las producciones. MM elaboró y analizó el árbol de similaridad y el grafo implicativo de las prácticas de los estudiantes de manera colaborativa con CG y FE.

Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron la versión final del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la persona/personas autora/s correspondiente previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE) y a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura (FACENA) por el apoyo institucional brindado para el desarrollo de esta investigación.

5. REFERENCIAS

Burgos, M., & Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *AIEM, 18*, 1-20.

Caputo, L., Jorge, M., Espinoza, R., Porcel, E., & Romero, J. (2016). Análisis Estadístico Implicativo de los conocimientos previos sobre números reales de ingresantes a la universidad. *Cadernos do IME – Série Estatística, 42*, 30–44.

Couturier, R. (2009). CHIC: utilización y funcionalidades. En R. Gras, B. Orús & B. Pinaud (Eds.), *Nouveaux Apports Théoriques à l'Analyse Statistique Implicative et Applications* (pp. 51-64). Université Jaume I.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma, 28*(2), 49-77.

Espinoza, R. F., Bordón, P. D., Almeida, G. I., & Ayala, M. M. (2024). Análisis a priori de un instrumento de indagación sobre funciones lineales y cuadráticas: Estudio de los problemas que involucran proporcionalidad directa [Actas de congreso, pp. 147–516]. En X Jornadas Nacionales y VI Latinoamericanas de Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas. Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Santa Fe. https://rtyc.utn.edu.ar/index.php/ajea/article/view/1797/1624

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática*. (Manuscrito no publicado). Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10*, 7-37.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(2), 3-15.

Gras, R., & Kuntz, P. (2009). El Análisis Estadístico Implicativo (ASI) en respuesta a problemas que le dieron origen. En R. Gras, B. Orús & B. Pinaud (Eds.), *Nouveaux Apports Théoriques à l'Analyse Statistique Implicative et Applications* (pp. 3-50). Université Jaume I.

Mendoza, M., Caputo, L., Porcel, E., & Bordón, P. (2019). Conocimientos previos sobre propiedades de operaciones con números reales de ingresantes a la universidad. Su análisis usando análisis estadístico implicativo. *Revista de la Escuela de Investigación Operativa, 27*(46), 42–53.

Ministerio de Educación de la República Argentina. (2011). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Ciclo Básico, Educación Secundaria*.

Regnier, J. C. (2009). Analyse Statistique Implicative. Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités. En R. Gras, J. C. Régnier & F. Guillet (Eds.), *Mantes*. Cépaduès-Éditions. http://sites.univ-lyon2.fr/asi7/?page=0&lang=es

Spagnolo, F., Gras, R., & Régnier, J. C. (2009). Una medida comparativa en Didáctica de las matemáticas entre el análisis a priori y la contingencia. En R. Gras, B. Orús & B. Pinaud (Eds.), *Nouveaux Apports Théoriques à l'Analyse Statistique Implicative et Applications* (pp. 143-157). Université Jaume I.

Wackerly, D., Mendenhall, W., & Scheaffer, R. (2010). *Estadística matemática con aplicaciones*. Cengage Learning Eds.