e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573

Cuadernos
de Investigación y Formación en Educación Matemática

Año 2026 Vol. 19 N°. 1

Centro de Investigación en **Matemática y Meta-Matemática**
CIMM
EDITORIAL UCR
UCR
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática
e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 19 • N°. 1 • 2026

Contenido
del Volumen 19. Número 1. Año 2026

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática
e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 19 • N°. 1 • 2026

Presentación
del Volumen 19. Número 1, Año 2026

En el Volumen 19, número 1 de 2026 se presentan ocho artículos de investigación en Educación Matemática en América Latina, que ofrecen herramientas y metodologías que buscan modernizar y humanizar la enseñanza de las matemáticas en contextos diversos, analizar estilos de aprendizaje predominantes y proponer estrategias de modelación de problemas socioambientales reales. Las personas autoras exploran innovaciones pedagógicas como el aula invertida con GeoGebra y propuestas didácticas basadas en el triángulo semántico para facilitar la comprensión de la trigonometría. Se examinan las prácticas de ingresantes universitarios sobre funciones mediante análisis estadístico y se proponen estrategias para la evaluación en entornos virtuales. Además, estudios sobre las tendencias histórico-epistemológicas regionales y el análisis didáctico de estructuras complejas como los teselados de Penrose.

Las autoras Rita Díaz-Flores y Marianella Bolaños-Barquero de Costa Rica, analizan las preferencias de aprendizaje en la carrera de Ingeniería en Sistemas en al artículo titulado: Estilos de aprendizaje dominantes en estudiantes de un curso de matemática introductoria. A través del cuestionario Index of Learning Styles, el estudio identifica que el estudiantado posee una flexibilidad notable en las dimensiones de procesamiento y comprensión. Sin embargo, se determinó un marcado predominio de los estilos sensorial y visual en las dimensiones de percepción y representación de la información. Esta caracterización descriptiva aporta insumos valiosos para comprender las tendencias cognitivas en contextos formativos vinculados al ámbito tecnológico actual.

Los autores Fabian Espinoza, Patricia Siwert, Paula Bordón, María Elizabeth Mendoza y César Garau de Argentina examinan conocimientos en ingresantes universitarios sobre funciones lineales y cuadráticas . La investigación emplea el Análisis Estadístico Implicativo (ASI) para detectar relaciones conceptuales y cuasi-implicaciones en tareas sobre funciones lineales y cuadráticas. A través de herramientas como el árbol de similaridad y grafos implicativos, se analizaron las asociaciones que los estudiantes establecen al resolver problemas. El estudio también integra el Enfoque Ontosemiótico para validar el instrumento de indagación y caracterizar la complejidad de las prácticas matemáticas desarrolladas.

Las investigadoras Estíbaliz Odilie Rojas Quesada y Seidy Sánchez Salas de Costa Rica exploran la evaluación formativa en cursos de matemática a distancia. El estudio analiza la implementación de foros, cuestionarios y videoconferencias, destacando su papel en la autorregulación y retroalimentación del aprendizaje en línea. Se identificó que, aunque se utilizan diversas estrategias evaluativas, existe un marcado desconocimiento docente sobre la finalidad pedagógica de la autoevaluación.

Priscilla M. Angulo Chaves y Javier A. Picado Bermúdez, de Costa Rica, proponen un modelo basado en el triángulo semántico para la enseñanza de las razones trigonométricas. El objetivo es analizar el sentido que estudiantes de primer año universitario atribuyen a la trigonometría mediante una intervención estructurada en cuatro lecciones específicas. La propuesta articula la estructura conceptual, los sistemas de representación y los sentidos de uso para favorecer la comprensión.

El autor Byron Andrey Solano Herrera de Costa Rica, investiga el desarrollo de la visualización espacial en geometría y álgebra lineal utilizando una metodología de Investigación Basada en Diseño en donde se implementaron cuatro módulos virtuales que integran GeoGebra con el aula invertida. Esta combinación metodológica dinamiza el aprendizaje y solventa eficazmente las dificultades tradicionales de ubicación espacial en el espacio.

Fabián W. Romero Fonseca y Luis A. López-Acosta de Costa Rica analizan las tendencias metodológicas de este campo en América Latina, en su artículo titulado: Estudios histórico-epistemológicos en Matemática Educativa. A través de un análisis bibliográfico y de contenido, identifican que Brasil es el mayor productor de este tipo de investigaciones en la región. El estudio revela una diversidad de enfoques teóricos, como la socioepistemología y la transposición didáctica, junto con una notable paridad de género. Este trabajo busca visibilizar los aportes latinoamericanos y fortalecer el vínculo entre la historia de la matemática y la práctica educativa situada.

El investigador Juan Carlos Ruiz Castillo de Guatemala, analiza didácticamente la transición de la periodicidad a la cuasiperiodicidad geométrica basado en el Enfoque Ontosemiótico (EOS), el estudio describe una experiencia con estudiantes para comprender los teselados de Penrose. Mediante tareas progresivas y el uso de materiales manipulativos y digitales, el estudiantado articuló representaciones geométricas, simbólicas y verbales. El estudio de estas estructuras promueve una formación docente interdisciplinaria que conecta la geometría moderna con la física.

Los autores Santiago Giovanetti, Susana Riquelme, Roberto Vilches e Iván Pérez Vera de Chile, estudian la modelación y sustentabilidad, realizaron un análisis de estrategias de resolución en una experiencia de modelación matemática escolar. Los resultados evidencian que la modelación matemática escolar permite resignificar conceptos abstractos al utilizarlos como herramientas para interpretar problemas reales. La articulación entre matemática y educación ambiental es fundamental para formar una ciudadanía crítica, responsable y comprometida.

Dr. William Poveda Fernández
Director de la Revista

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 19 · N°. 1 · 2026
07-27
Recibido: 15/10/2025
Aprobado: 30/12/2025

Artículos de investigación

ESTILOS DE APRENDIZAJE DOMINANTES EN ESTUDIANTES DE UN CURSO DE MATEMÁTICA INTRODUCTORIA DE LA CARRERA INGENIERÍA EN SISTEMAS DE INFORMACIÓN

DOMINANT LEARNING STYLES IN STUDENTS ENROLLED IN A UNIVERSITY MATHEMATICS COURSE IN THE INFORMATION SYSTEMS ENGINEERING PROGRAM

Rita Díaz- Flores[1]

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-7493-738X

Marianella Bolaños- Barquero[2]

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-6747-7597

RESUMEN

El objetivo de esta investigación fue identificar los estilos de aprendizaje dominantes en estudiantes de primer semestre de un curso de matemática introductoria de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información de la Universidad Nacional de Costa Rica. El estudio se basó en un diseño descriptivo con enfoque cuantitativo. La muestra estuvo conformada por 209 estudiantes, equivalente al 61.65 % de la población total del curso. El instrumento utilizado fue el cuestionario Index of Learning Styles (ILS)

[1] Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica. Correo electrónico: rita.diaz.flores@una.cr

[2] Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Heredia, Costa Rica. Correo electrónico: marianella.bolanos.barquero@una.cr

de Felder y Soloman (1992), compuesto por 44 ítems y aplicado en una traducción al español elaborada exclusivamente para fines de investigación. El cuestionario, administrado en formato digital y físico con consentimiento informado, fue analizado mediante tablas dinámicas en Microsoft Excel y SPSS. Se evidencia que la mayoría del estudiantado se ubica en categorías de equilibrio en procesamiento (63.2 %) y comprensión (56 %), lo que sugiere cierta flexibilidad en su manera de aprender. En contraste, predomina el estilo sensorial (57.9 %) en percepción y el visual (54.5 %) en representación, indicando la pertinencia de emplear recursos didácticos variados que incluyan experiencias prácticas y apoyos visuales en este tipo de cursos. Se concluye que la caracterización obtenida aporta información útil para comprender las tendencias de aprendizaje en esta población y puede servir como base para diversificar estrategias pedagógicas en contextos formativos del ámbito tecnológico.

Palabras clave: estilos de aprendizaje; educación superior; enseñanza de la matemática; aprendizaje.

ABSTRACT

The objective of this research was to identify the dominant learning styles among first-semester students enrolled in an introductory mathematics course within the Information Systems Engineering program at the National University of Costa Rica. The study was based on a descriptive design with a quantitative approach. The sample consisted of 209 students, representing 61.65% of the total course population. The instrument used was the Index of Learning Styles (ILS) questionnaire by Felder and Soloman (1992), composed of 44 items and applied in a Spanish translation developed exclusively for research purposes. The questionnaire, administered in both digital and physical formats with informed consent, was analyzed using pivot tables in Microsoft Excel and SPSS. The results show that most students fall into the balanced categories for the processing (63.2%) and understanding (56%) dimensions, suggesting a certain flexibility in their learning preferences. In contrast, the sensory style (57.9%) predominates in the perception dimension and the visual style (54.5%) in the representation dimension. These patterns indicate the relevance of employing diverse teaching resources that include practical experiences and visual aids in this type of course. It is concluded that the resulting characterization provides useful information for understanding learning trends in this population and can serve as a basis for diversifying pedagogical strategies in technology-oriented educational contexts.

Keywords: learning styles; higher education; mathematics education; teaching; learning.

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo de los contenidos de los diversos cursos universitarios del área de matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica sigue un cronograma definido; esto se puede apreciar en los diferentes programas de las cátedras, donde cada semana deben abordarse varios temas. Sin embargo, en ocasiones se dejan de lado particularidades relevantes que pueden influir en la forma en que de los estudiantes adquieren conocimientos, como el estilo de aprendizaje dominante que caracteriza a cada uno de ellos.

La tendencia moderna de centrar el proceso educativo en el estudiante ha enfatizado la necesidad de diversificar las estrategias de enseñanza y reconocer la heterogeneidad presente en los grupos universitarios (Al Ameer, 2017). Por ende, es importante que los docentes conozcan los estilos de aprendizaje del estudiantado, ya que pueden aportar información útil sobre la planificación didáctica y la adaptación de los recursos a diferentes formas de aproximarse al conocimiento (Castro y Guzmán de Castro, 2005).

Coto Jiménez (2020) menciona que, en la educación superior, los estudiantes enfrentan dificultades importantes en el área de matemática, y que el aprendizaje significativo no se promueve completamente, pues los estudios se han enfocado más en niveles básicos e intermedios del currículo. Además, si se considera que las generaciones de estudiantes cambian —cambian sus gustos, sus formas de comunicarse, entre otros—, es preciso que los profesores se actualicen y exploren aquellas estrategias que podrían favorecer el aprendizaje.

Investigaciones como la de Durán y Costaguta (2007), con estudiantes de la carrera de Licenciatura en Sistemas de Información de la Universidad Nacional de Santiago del Estero en Argentina, identificaron el estilo sensitivo, visual y global, y se determinó un equilibrio entre activo/reflexivo como estilos preferidos. En el estudio de Camana Fiallos y Torres Carrera (2018), sobre el estilo de aprendizaje dominante en estudiantes de la carrera de Tecnología en Análisis de Sistemas, del Instituto Tecnológico Superior Vicente León (Ecuador), se concluyó que el aprendizaje dominante fue activo, intuitivo, visual y secuencial.

En el trabajo realizado por Ventura et al. (2014) en estudiantes que ingresan a las carreras de Ingeniería Civil e Ingeniería Electrónica de la Universidad Nacional de Rosario en Argentina, se encontró que la mayoría se inclinó hacia las formas de aprender activa, sensorial, visual y secuencial. Por su parte, en la investigación de Coto Jiménez (2020) realizada con estudiantes de la carrera de Ingeniería Eléctrica en la Universidad de Costa Rica, los estilos de aprendizaje dominantes fueron el sensorial y el visual, con un equilibrio en activo/reflexivo y secuencial/global.

En la última década se ha cuestionado la idea de que adaptar la enseñanza a los estilos de aprendizaje mejora el rendimiento académico. La evidencia empírica no respalda la eficacia de la instrucción "congruente con el estilo", por lo que los estilos se utilizan principalmente como descriptores de tendencias cognitivas y no como bases prescriptivas de intervención pedagógica (Newton, 2015). En este sentido, su análisis resulta pertinente para comprender la diversidad del estudiantado y para orientar decisiones didácticas hacia estrategias multimodales que favorezcan el acceso al contenido.

En este marco, el presente estudio aplica el cuestionario ILS de Felder y Soloman (1992) para describir las preferencias y tendencias de aprendizaje de un grupo de estudiantes. Así, el objetivo es identificar los estilos de aprendizaje dominantes en estudiantes de primer semestre de un curso de matemática introductoria de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información de la Universidad Nacional de Costa Rica.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

2.1 Estilos de aprendizaje

De la revisión efectuada por Hernández Pina (1993) sobre la manera de estudiar el aprendizaje de los estudiantes, hay coincidencia en dos paradigmas de investigación: el cuantitativo y el cualitativo. En la perspectiva cuantitativa se distinguen dos líneas fundamentales:

- Conductista: inclinada hacia los hábitos de estudio, dando más interés a la adquisición y entrenamiento de habilidades. Se le conoce también como aprendizaje de técnicas de estudio; con acciones como resumir, tomar notas, buscar información, cómo mejorar la velocidad lectora, etc. Es aquello que el estudiantado usa y necesita en una situación de aprendizaje formal.

- Cognitiva: se destaca por identificar todas aquellas técnicas que se pueden enseñar a un estudiante para que las utilice durante su aprendizaje. Estas técnicas —llamadas estrategias de aprendizaje— son comportamientos y pensamientos del discente durante el aprendizaje, que intervienen en la modificación y regulación de la información, así como en la solución de problemas.

En lo que respecta al enfoque cualitativo, también se distinguen dos líneas dependiendo de dónde se centre el interés:

- Estilos de aprendizaje y estrategias de aprendizaje: los estilos de aprendizaje se caracterizan por ser formas específicas y estables de procesar la información; son rasgos del individuo que reflejan modos específicos de afrontar las tareas de aprendizaje. Las estrategias, por su parte, son los procedimientos al momento de abordar las diferentes tareas. En resumen, el estilo se refiere a la persona y la estrategia está en función de la tarea.
- Enfoques de aprendizaje: se sitúan dentro del paradigma del procesamiento de la información y comprenden las de por las cuales un estudiante estudia de una forma determinada. Esta línea apunta a considerar los enfoques de aprendizaje en relación con el contexto académico o las experiencias de aprendizaje (como los métodos de enseñanza).

Se puede decir, entonces, que el planteamiento cuantitativo se inclina por entrenar estrategias y el cualitativo por mejorar los procesos mentales; o sea, que este último permite a los estudiantes reflexionar sobre cómo piensan y aprenden (Hernández Pina, 1993).

De hecho, el concepto de estilo de aprendizaje es definido por diversos autores, y la mayoría concuerda en que se trata de cómo la mente procesa la información, o cómo es influenciada por las percepciones de cada individuo. Para García et al. (2015), los estilos de aprendizaje se relacionan en las aptitudes del individuo, de las cuales dispone para interactuar con la realidad de forma efectiva según sus propias características. Por su parte, Camana

Fiallos (2017) defiende que cada persona tiene su estilo de aprendizaje de acuerdo con lo que le interesa aprender. Por lo tanto, desarrolla habilidades y destrezas en el ámbito cognitivo, afectivo y fisiológico que, a su vez, definen su estilo. Según Sánchez González y Andrade Esparza (2014), los estilos de aprendizaje de cada individuo hacen referencia al proceso que inicia, asimila, trata y evalúa la información que se deriva de un contexto de aprendizaje y posibilita aprender significativamente.

Hacer posible ese aprendizaje significativo es un reto que tiene cada docente, porque no se trata solamente de transmitir conocimientos, sino que estos posean significado y utilidad para cada estudiante. Autores como Gallego Gil y Nevot Luna (2008) coinciden en que conocer cuál es el estilo de aprendizaje predilecto de cada estudiante —y en cuál se tiene déficit— ayuda a aprender con efectividad. Estos autores también expresan que los estilos de aprendizaje intervienen (entre otros elementos) en el rendimiento académico.

En este sentido, en la investigación de Angeli Santos y Ferreira Mognon (2010) se señala que, ante la problemática del rendimiento de los estudiantes de ingeniería, Felder y Silverman desarrollaron en 1988 un modelo de aprendizaje que activa los procesos de recepción y procesamiento de la información. El modelo de estos autores permite a los docentes comprender mejor los estilos de aprendizaje de sus educandos y, por ende, planificar estrategias metodológicas óptimas y eficientes para su aprendizaje, lo que posibilita disminuir la deserción en las carreras mencionadas.

Ventura et al. (2014) afirman que un modelo de estilos de aprendizaje organiza a los estudiantes según la forma en que ellos prefieren percibir, procesar, representar y comprender la información. Por su parte, Coto Jiménez (2020), indica que el modelo de Felder y Silverman (ILS) es un cuestionario con cuatro dimensiones de estilo de aprendizaje:

- activo o reflexivo (relacionado con el procesamiento),
- sensorial o intuitivo (referido a la percepción),
- visual o verbal (vinculado a la representación) y
- secuencial o global (referente a la comprensión).

A continuación, se detallan cada uno de estos estilos de aprendizaje en la Tabla 1.

Tabla 1. Dimensiones de los estilos de aprendizaje

Dimensiones	**Estilo de aprendizaje del estudiante**
Procesamiento	Activo: guarda y capta mejor la información nueva, al realizar algo dinámico con ella, como cuando trabaja con otras personas.
	Reflexivo: conserva y entiende información nueva, al razonar y pensar, o sea que aprende cuando medita, piensa y trabaja individualmente.
Percepción	Sensorial: es concreto, práctico, sigue procedimientos estructurados y memoriza hechos con facilidad.
	Intuitivo: es conceptual, innovador, teórico, trabaja bien con abstracciones y fórmulas matemáticas.
Representación	Visual: se inclina por obtener información de representaciones visuales, recuerda mejor lo que ve, por medio de diagramas de flujo, símbolos, etc.
	Verbal: prefiere obtener información en forma escrita, recuerda mejor lo que lee o escucha.
Comprensión	Secuencial: se interesa por solucionar problemas, mediante pequeños pasos lógicos.
	Global: resuelve problemas complejos a grandes pasos, porque visualiza la totalidad.

Fuente: Elaboración basada en Camana Fianos y Torres Carrera (2018, p. 5).

2.2 Estilos de aprendizaje y aprendizaje de la matemática

El rendimiento académico ha sido objeto de estudio constantemente; en particular en el área de matemática, con la clara intención de analizar qué está sucediendo y plantear sugerencias que lo mejoren. Anteriormente, se mencionó que en el rendimiento académico confluyen varios aspectos: condicionantes, elementos emocionales, etc., junto con los estilos de aprendizaje (Gallego Gil y Nevot Luna, 2008). Mosquera Albornoz y Salazar Gómez (2014) expresan que, aunque el docente de matemáticas utilice diferentes estrategias para el desarrollo de los contenidos, estos no siempre son comprendidos por todos los estudiantes, pues no todos aprenden de la misma forma.

Estos últimos autores hacen hincapié, junto a Keast (1999), en la necesidad de que los docentes de matemática consideren la forma en que sus estudiantes se apropian de las temáticas desarrolladas, con la finalidad de ajustar sus estrategias metodológicas a las diferentes formas de entender la información. Lo anterior en pro de mejorar el rendimiento académico en esta disciplina, que muchas veces resulta retadora para una cantidad considerable de educandos.

Siguiendo esta línea, García Retana (2013) considera que los niveles de éxito o fracaso al aprender matemática podrían estar ligados a la concordancia o discrepancia entre los estilos de aprender de los estudiantes y los métodos de enseñanza de los docentes; no solo a los aspectos tradicionales como la desmotivación, conocimientos previos precarios, desinterés, etc.

Sin embargo, no solo se trata de que el profesorado considere los estilos de aprendizaje de sus educandos, ya que el mismo docente tiene su propio estilo para aprender; estilo que puede utilizar con frecuencia y de forma inconsciente al desarrollar sus lecciones. Al respecto, Nevot Luna y Cuevas Cava (2009) expresan que el estilo de aprendizaje del docente influye en su forma de enseñar, de manera que concientizarse sobre este aspecto puede ayudarlo a comprender por qué enseña de esa forma y por qué el estudiantado opta por determinados estilos para adquirir conocimientos.

Por otro lado, Keast (1999) señala que la enseñanza de las matemáticas ha promovido solo los estilos reflexivo y teórico, y ha dejado de lado los estilos activo y práctico. Dunn y Dunn (1984), como se citó en Gallego Gil y Nevot Luna (2008), expresan que es probable que aquellos estudiantes que obtienen buenos resultados en matemáticas se deba a que la enseñanza de esta materia se realiza de acuerdo con sus estilos particulares de aprendizaje.

Lo anterior hace reflexionar sobre lo valioso y significativo de considerar las distintas maneras en que el estudiantado adquiere conocimientos matemáticos. En efecto, podría ser un punto de partida al desarrollar los distintos cursos universitarios, tal y como lo mencionan Mosquera Albornoz y Salazar Gómez (2014) al indicar que el aprendizaje debe partir del conocimiento de cómo aprenden los estudiantes.

Es importante señalar que varios de los planteamientos descritos provienen de modelos tradicionales, cuya eficacia ha sido objeto de debate en la literatura reciente, lo cual se aborda en el siguiente apartado.

2.3 Controversias y debates actuales sobre los estilos de aprendizaje

Melzner y Kappes (2024) destacan la popularidad de los estilos de aprendizaje, pero también señalan que no hay evidencia que respalde que, al ajustar la enseñanza al estilo de aprender preferido por el estudiante, el aprendizaje realmente mejore. El estudio de estas autoras se suma a otras investigaciones que refutan el impacto positivo de la correspondencia entre instrucción y estilo de aprendizaje en el rendimiento académico (Newton, 2015; Aslaksen y Lorás, 2018). Además de estos hallazgos, Melzner y Kappes (2024) obtuvieron evidencia de futuros docentes respecto a la prevalencia de ciertas creencias sobre las formas de aprender.

Una creencia errónea sobre el funcionamiento del cerebro, producida por una mala interpretación o cita inexacta, es conocida como neuromito. Este término fue empleado por primera vez en la década de los 80, pero recién se redefinió como "concepción errónea generada por un malentendido, una lectura o una cita erróneas de hechos científicamente establecidos (mediante la investigación del cerebro) para justificar el uso de la investigación del cerebro en la educación y otros contextos" (Howard Jones, 2014, p. 1). Lamentablemente, diversos neuromitos se han propagado en el ámbito educativo, de tal forma que pueden llevar a prácticas estériles y contraproducentes (Grasselli de Lima, 2024), por lo que se debe evitar su reproducción. Siguiendo a este autor, el área de la neurociencia ha cobrado relevancia en el ámbito educativo, porque su propósito es aportar conocimientos que sirvan de fundamento para el desarrollo de prácticas educativas; no obstante, se debe ser riguroso en cuanto a la confiabilidad de las fuentes de información.

En resumen, aunque los estilos de aprendizaje están en auge en educación superior, se reconoce la falta de evidencia que respalde su utilización y, más aún, que la adaptación de los materiales de aprendizaje al estilo de aprendizaje mejore el rendimiento académico del alumno. De ahí la importancia de tener en consideración los neuromitos y la utilización correcta y rigurosa de los hallazgos validados por la comunidad científica. En concordancia con ello, el presente estudio utiliza el ILS únicamente con fines descriptivos, y no pretende evaluar ni promover la eficacia de la enseñanza basada en estilos de aprendizaje.

2.4 Fiabilidad del Index of Learning Styles

El ILS ha sido ampliamente utilizado para caracterizar preferencias de aprendizaje en educación superior; sin embargo, la literatura reporta resultados mixtos en cuanto a su fiabilidad y estructura interna. Litzinger et al. (2007) encontraron coeficientes alfa moderados para las cuatro dimensiones (0.55–0.77). En otros estudios, como en el de Brito Orta y Espinoza Tánguma (2015), también se reportó variabilidad en la consistencia interna, con coeficientes que oscilaron entre 0.38 y 0.61 en las cuatro dimensiones.

3. METODOLOGÍA

3.1 Contexto del estudio

El estudio se realizó en un curso de matemática introductoria de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información de la Universidad Nacional de Costa Rica, durante el I semestre del 2025. Este curso, de carácter teórico–práctico, constituye la primera experiencia formal en matemática universitaria para el estudiantado, y busca desarrollar competencias lógicas, analíticas y de resolución de problemas aplicadas al campo informático. Sus contenidos abarcan temas como lógica matemática, teoría de conjuntos, funciones, progresiones e inducción matemática. La metodología combina exposición teórica, resolución de ejercicios y trabajo autónomo apoyado en recursos digitales institucionales.

Los estudios sobre estilos de aprendizaje en educación superior abarcan distintas disciplinas, incluidas algunas del ámbito tecnológico. No obstante, examinar un curso de matemática en una carrera de Ingeniería en Sistemas de Información permite observar estas preferencias en un contexto disciplinar con características formativas propias, de manera que se aporta evidencia útil para ampliar la comprensión del fenómeno en programas afines.

3.2 Diseño de la investigación y muestra

Se trata de una investigación con diseño descriptivo, con enfoque cuantitativo. La población estuvo conformada por 339 estudiantes matriculados en el curso. La muestra final estuvo integrada por 209 participantes, correspondiente a una muestra por disponibilidad (ya que participaron las personas estudiantes presentes el día de la aplicación), con una tasa de respuesta global del 61.65%.

El tamaño de la muestra permite realizar una caracterización descriptiva adecuada de las preferencias de aprendizaje del grupo participante. La aplicación del cuestionario se realizó con la previa autorización y coordinación del personal docente a cargo de cada grupo. A los estudiantes se les compartió un código QR (en formato físico) que los dirigía al formulario de Google con el cuestionario.

3.3 Instrumento

El instrumento utilizado en este estudio se basa en el ILS, desarrollado por Richard M. Felder y Barbara A. Soloman en 1992, el cual constituye una adaptación del modelo propuesto por Felder y Silverman en 1988. El ILS evalúa cuatro dimensiones opuestas del aprendizaje, descritas a continuación. *Activo / Reflexivo*: los aprendices activos comprenden mejor la información mediante discusión, aplicación o explicación a otras personas; mientras que los reflexivos requieren tiempo para analizar y procesar la información. *Sensorial / Intuitivo*: los sensoriales resuelven problemas con procedimientos bien estructurados y valoran la conexión con la vida real, en tanto que los intuitivos prefieren conceptos, abstracciones y fórmulas matemáticas, con lo que muestran innovación y creatividad. *Visual / Verbal*: los visuales recuerdan más fácilmente figuras, diagramas o videos; mientras que los verbales se benefician de explicaciones orales y escritas. *Secuencial / Global*: los secuenciales avanzan paso a paso siguiendo un orden lógico, en tanto que los globales asimilan el contenido de manera no lineal y luego logran comprenderlo en conjunto (Angeli dos Santos y Ferreira Mognon, 2010).

El cuestionario consta de 44 ítems, distribuidos en 11 ítems para cada una de las cuatro dimensiones. El resultado se interpreta de acuerdo con tres niveles de intensidad: equilibrado, moderado y fuerte. Así, puntuaciones de 1 a 3 puntos representan una intensidad equilibrada e indican un balance entre los dos estilos de aprendizaje de cada dimensión. Puntajes de 5 a 7 puntos muestran una intensidad moderada; esto es, hay una leve preferencia hacia uno de los estilos de aprendizaje de la dimensión. Y puntuaciones de 9 a 11 puntos señalan una fuerte preferencia hacia uno de los estilos de aprendizaje (Guevara Injoque, 2017).

Para este estudio se empleó una traducción al español elaborada por las investigadoras a partir de la versión original en inglés, cuyo uso no requiere licencia ni autorización especial y está disponible en el sitio oficial de sus autores (Felder y Soloman, s.f.). Esta traducción se realizó únicamente con fines académicos y para adaptarla al contexto local; por ello, y al no tratarse de una versión oficial, el cuestionario no se incluye como anexo.

La consistencia interna del cuestionario ILS se evaluó mediante el coeficiente alfa de Cronbach (usando SPSS) para cada una de las cuatro dimensiones. Los valores obtenidos fueron: procesamiento ($\alpha = 0.490$), percepción ($\alpha = 0.498$), representación ($\alpha = 0.613$) y comprensión ($\alpha = 0.427$). Estos niveles de fiabilidad se encuentran dentro de los rangos reportados en estudios previos del ILS, donde los coeficientes suelen oscilar entre 0.38 y 0.77 según la dimensión y el tipo de población (Litzinger et al., 2007; Brito Orta y Espinoza Tánguma, 2015).

Si bien los valores obtenidos indican niveles bajos a moderados de fiabilidad, estos son consistentes con estudios previos que reportan variabilidad psicométrica en el ILS. En este estudio, el instrumento se utiliza exclusivamente para caracterizar tendencias descriptivas.

3.4 Procedimiento

El cuestionario se aplicó en formato digital mediante un formulario de Google. Sin embargo, debido a problemas de conectividad, en algunos casos fue necesario aplicar el instrumento en formato físico. De estos, uno debió ser excluido, pues presentaba inconsistencias: una pregunta sin responder y otra con las dos opciones marcadas, cuando solo debía seleccionarse una.

La aplicación se llevó a cabo en las aulas de cada grupo, de forma individual. Previamente, se explicó a las personas participantes el propósito de la investigación y se solicitó su consentimiento informado, el cual fue entregado en formato físico y firmado por cada estudiante.

El proceso de aplicación se desarrolló en coordinación con el cuerpo docente del curso, asegurando que la actividad no interfiriera con las evaluaciones ni otras tareas académicas. La sesión de aplicación tuvo una duración aproximada de 20 a 25 minutos. El personal investigador permaneció presente durante todo el proceso para aclarar posibles dudas y garantizar la correcta comprensión de las instrucciones. En los casos en que se utilizó el formato físico, los datos fueron posteriormente digitalizados de manera manual para su inclusión en la base de datos general. Cada formulario fue revisado individualmente antes de proceder con el análisis estadístico. Todo el procedimiento se realizó en concordancia con los principios éticos de respeto, confidencialidad y consentimiento informado establecidos por la Universidad Nacional.

3.5 Análisis de los datos

La información recolectada fue procesada mediante los programas Microsoft Excel y SPSS. A partir de los resultados, se identificaron los perfiles individuales de estilos de aprendizaje del estudiantado y se elaboraron tablas dinámicas que permitieron obtener una visión de los estilos predominantes a nivel grupal.

Como se mencionó antes, para determinar los resultados en equilibrio dentro de cada dimensión del cuestionario, se consideró el rango de 1 a 3 puntos como indicador de balance entre ambos estilos de aprendizaje. De este modo, las personas que obtuvieron puntuaciones en dicho rango fueron clasificadas como “equilibradas”. El porcentaje de equilibrio del grupo se calculó sumando el total de estudiantes con resultados entre 1 y 3 en cada dimensión. Por otra parte, la identificación de la inclinación general del grupo hacia uno de los polos (por ejemplo, activo o reflexivo) se realizó considerando la suma de los niveles moderado (5 a 7 puntos) y fuerte (9 a 11 puntos). Así, el estilo predominante se definió por el mayor número de estudiantes que presentaron una preferencia moderada o fuerte hacia un mismo polo.

Este procedimiento permitió distinguir tanto la proporción del grupo con estilos de aprendizaje balanceados como la tendencia global hacia uno de los estilos opuestos, y ofreció una interpretación más precisa de la diversidad de perfiles presentes en la muestra.

Finalmente, los resultados fueron analizados a la luz de la literatura teórica sobre estilos de aprendizaje y educación matemática, con el propósito de contextualizar los hallazgos dentro de un marco académico más amplio y aportar insumos útiles para reflexionar sobre la planificación didáctica en contextos similares. Esto sin asumir que las preferencias de aprendizaje determinen la eficacia de estrategias particulares.

4. RESULTADOS E INTERPRETACIÓN

En este apartado, los resultados se presentan en dos niveles complementarios. En primer lugar, se muestra un análisis general mediante la Tabla 2, en la cual solo se consideran las categorías principales de cada dimensión del ILS, excluyendo los casos clasificados en equilibrio con el fin de visualizar con mayor claridad las preferencias dominantes del estudiantado. En segundo lugar, se presentan las Figuras 1 a 4, donde sí se incluyen las tres categorías (ambos estilos y equilibrio), lo que permite analizar la distribución completa de respuestas y matizar la interpretación de las tendencias observadas. Esta organización facilita comprender el comportamiento de cada dimensión y compararlo con estudios previos.

Con respecto a la Tabla 2, en la dimensión de procesamiento se observa una tendencia hacia el estilo activo (64.59 %), seguido del estilo reflexivo (35.41 %). En percepción predomina el estilo sensorial (86.60 %). En representación, la mayoría se ubica en el estilo visual (77.99 %). Finalmente, en comprensión prevalece el estilo secuencial (75.12 %).

Es importante señalar que estos porcentajes confirman una marcada orientación hacia estilos de aprendizaje prácticos y visuales. Este hallazgo puede considerarse relevante para el diseño de estrategias pedagógicas que privilegien la experimentación, la resolución de problemas y el uso de apoyos visuales como diagramas de flujo o simulaciones interactivas.

Tabla 2. Estilos de aprendizaje de los estudiantes del curso en estudio

Dimensión	**Estilo**	**n**	**%**
Procesamiento	Activo	135	64.59
	Reflexivo	74	35.41
Percepción	Sensorial	181	86.60
	Intuitivo	28	13.40
Representación	Visual	163	77.99
	Verbal	46	22.01
Comprensión	Secuencial	157	75.12
	Global	52	24.88

Nota. Solo se incluyen las categorías dominantes de cada dimensión. Los casos clasificados en equilibrio son excluidos (n=209).

Fuente: Elaboración propia.

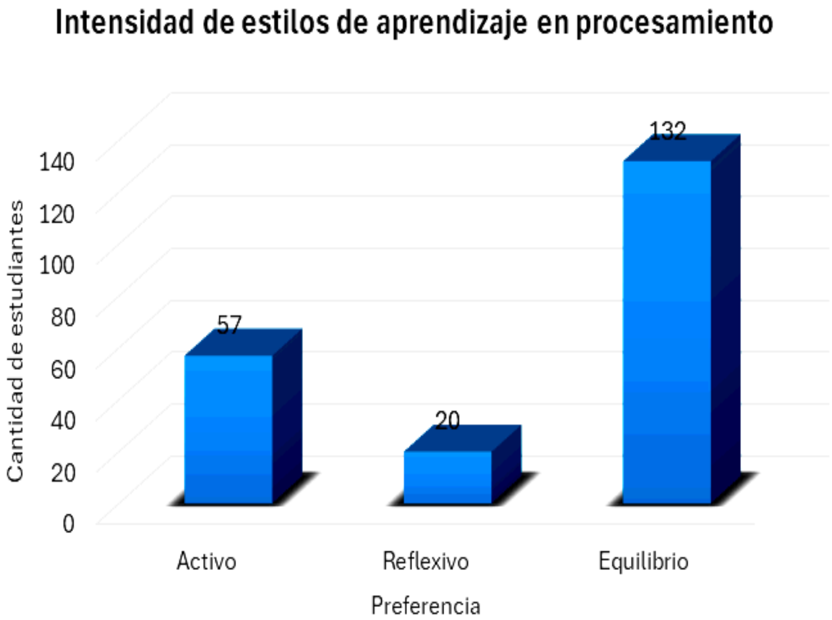
La Tabla 2 se presenta con un propósito estrictamente descriptivo; por ello, no se incluyen intervalos de confianza ni pruebas de hipótesis, en concordancia con el carácter exploratorio del estudio.

Tendencias de los estilos de aprendizaje por dimensión

Como puede observarse en la Figura 1, en la dimensión de procesamiento se observa que la mayor parte del estudiantado se concentra en la categoría de equilibrio (63.2 %). Esto indica que sus preferencias entre actuar y reflexionar no son marcadas, y muestra cierta flexibilidad frente a estos modos de aprendizaje. En segundo lugar, destaca el grupo de estudiantes con preferencia activa (27.3 %), quienes tienden a involucrarse más en experiencias prácticas y participativas. Finalmente, un porcentaje reducido se inclina hacia el estilo reflexivo (9.6 %), lo que evidencia que esta preferencia es minoritaria dentro del curso.

Ahora bien, esta distribución sugiere que, aunque la mayoría del grupo puede adaptarse ya sea al estilo reflexivo o al activo, existe una tendencia general hacia la acción y la participación. Este rasgo podría aprovecharse para implementar estrategias que fomenten el trabajo colaborativo, las dinámicas de aula invertida y proyectos educativos en general.

Figura 1. Frecuencias de la dimensión procesamiento



Nota. La figura incluye las tres categorías de la dimensión de procesamiento. Los valores corresponden a frecuencias absolutas sobre el total de participantes (n = 209).

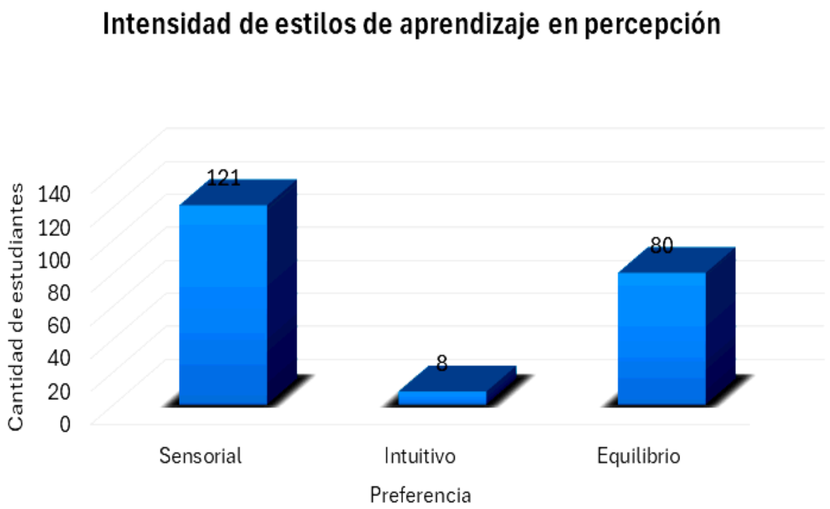
Fuente: Elaboración propia.

En esta dimensión se puede observar que hay similitud con los resultados de trabajos realizados en carreras afines. A saber, el estudio realizado por Durán y Costaguta (2007) con estudiantes de Licenciatura en Sistemas de Información, donde se identificó que el estilo de preferencia presentó un equilibrio entre activo/reflexivo, y la investigación de Camana Fiallos y Torres Carrera (2018), donde el estilo dominante en estudiantes de la carrera de Tecnología en Análisis de Sistemas fue el activo. Por su parte, en el estudio de Ventura et al. (2014), realizado con estudiantes que ingresan a las carreras de Ingeniería Civil e Ingeniería Electrónica, se encontró que la mayoría se inclinó hacia las formas de aprender activa.

Igualmente, en el trabajo realizado por Coto Jiménez (2020), con estudiantes de Ingeniería Eléctrica, el estilo de aprendizaje dominante presentó un equilibrio en activo/reflexivo.

En la dimensión de percepción (Figura 2) se evidencia una clara tendencia hacia el estilo sensorial (121; 57.9 %), lo que indica que más de la mitad del estudiantado prefiere trabajar con información concreta, práctica y basada en la experiencia. En segundo lugar, aparece el grupo en equilibrio (80; 38.3 %), que refleja una posición intermedia entre lo sensorial y lo intuitivo. Finalmente, un número reducido de estudiantes se identifica con el estilo intuitivo (8; 3.8 %), lo que muestra que la preferencia por el trabajo con abstracciones y teorías generales es minoritaria en la población de este curso.

Figura 2. Frecuencias de la dimensión percepción



Nota. La figura incluye las tres categorías de la dimensión de percepción. Los valores corresponden a frecuencias absolutas sobre el total de participantes (n = 209).

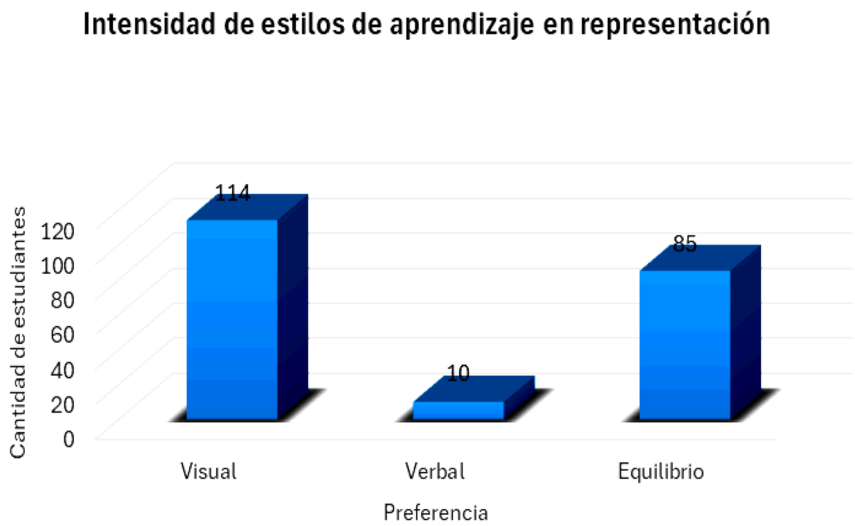
Fuente: Elaboración propia.

En la preferencia por el estilo sensorial, hay coincidencia aquí con los estudiantes de la Licenciatura en Sistemas de Información, población del estudio realizado por Durán y Costaguta (2007). Asimismo, con el trabajo realizado por Ventura et al. (2014) y Coto Jiménez (2020), con la única diferencia de que estas investigaciones fueron realizadas con estudiantes de carreras de ingeniería.

En conjunto, estos hallazgos confirman que las disciplinas técnico-científicas tienden a concentrar estudiantes con una orientación sensorial, posiblemente debido a la naturaleza aplicada de los contenidos y a la importancia del razonamiento práctico en su formación.

En la Figura 3, que muestra las frecuencias de la dimensión de representación, se aprecia una marcada preferencia por el estilo visual, con un 54.5 % de los estudiantes (114), lo que muestra que a más de la mitad del grupo le favorece la información presentada mediante imágenes, diagramas o recursos gráficos. En segundo lugar, se encuentra el grupo en equilibrio (85; 40.7 %), que refleja una tendencia intermedia entre lo visual y lo verbal. Finalmente, una minoría muy reducida manifiesta inclinación hacia el estilo verbal (10; 4.8 %), lo que evidencia que este tipo de preferencia es poco frecuente en la población estudiada.

Figura 3. Frecuencias de la dimensión representación



Nota. La figura incluye las tres categorías de la dimensión de representación. Los valores corresponden a frecuencias absolutas sobre el total de participantes (n = 209).

Fuente: Elaboración propia.

Este resultado sugiere la conveniencia de utilizar recursos visuales de apoyo (como esquemas, gráficos, simulaciones o infografías) que faciliten la comprensión de conceptos abstractos. En el contexto de la enseñanza de la matemática, la visualización puede ser un puente efectivo entre la teoría y la aplicación práctica.

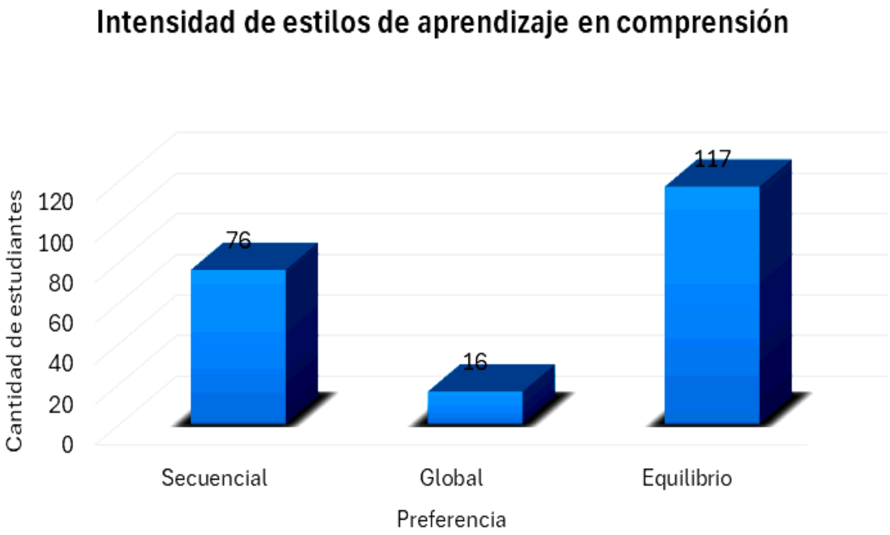
La preferencia por aprender visualmente queda reflejada no solo en este estudio, sino en varios, como los realizados por Camana Fiallos y Torres Carrera (2018), Durán y Costaguta

(2007), Ventura et al. (2014) y Coto Jiménez (2020). Lo que muestra que el estudiante recuerda mejor lo que ve u observa, ya sea por medio de representaciones, diagramas de flujo, símbolos, gráficos, entre otros recursos visuales.

Este patrón recurrente refuerza la idea de que los recursos gráficos constituyen una herramienta pedagógica fundamental en la formación de estudiantes de ingeniería y sistemas, al facilitar la organización de la información y la comprensión de procesos complejos.

Ahora bien, en la Figura 4 —referente a la dimensión de comprensión— se observa que la mayoría de los estudiantes se sitúa en la categoría de equilibrio (117; 56,0 %), lo que refleja una preferencia intermedia entre los estilos secuencial y global. En segundo lugar, se encuentra el grupo con preferencia por el estilo secuencial (76; 36.4 %), lo que muestra que una parte significativa del estudiantado tiende a organizar la información de manera ordenada y progresiva. Finalmente, una proporción menor manifiesta inclinación hacia el estilo global (16; 7.7 %), lo cual indica que este tipo de procesamiento más holístico se presenta en pocos estudiantes del curso.

Figura 4. Frecuencias de la dimensión comprensión



Nota. La figura incluye las tres categorías de la dimensión de comprensión. Los valores corresponden a frecuencias absolutas sobre el total de participantes (n = 209).

Fuente: Elaboración propia.

En esta dimensión hay coincidencia con los hallazgos del estudio de Coto (2020), donde también se evidenció un equilibrio entre los estilos secuencial y global. Este resultado sugiere que, al igual que en dicha investigación, el estudiantado combina una tendencia a organizar la información de manera lineal con la capacidad de integrar conceptos de forma global. En las investigaciones de Camana Fiallos y Torres Carrera (2018), y de Ventura et al. (2014), el estilo predominante fue el secuencial, lo que sugiere que en las carreras de perfil tecnológico e ingeniería prevalece un enfoque de aprendizaje estructurado, lógico y progresivo.

5. CONCLUSIONES

Los hallazgos de este estudio muestran que el estudiantado de la carrera de Ingeniería en Sistemas de Información de la Universidad Nacional presenta una preferencia predominante por estilos sensoriales y visuales, junto con niveles altos de equilibrio en las dimensiones activo/reflexivo y secuencial/global. Este patrón coincide con lo reportado por Coto Jiménez (2020) y por Durán y Costaguta (2007), así como con estudios realizados con poblaciones de otras carreras tecnológicas, lo que sugiere que estas tendencias son relativamente frecuentes en contextos formativos de perfil similar.

Estas coincidencias permiten situar los resultados dentro de un marco comparativo más amplio, aunque deben interpretarse con cautela, dado que los estilos de aprendizaje describen preferencias y no implican recomendaciones pedagógicas directas. En este sentido, la presencia de altos porcentajes de estudiantes en categorías de equilibrio indica flexibilidad en la forma de abordar las tareas de aprendizaje, lo cual es especialmente relevante en cursos de matemática que requieren diferentes formas de representación y razonamiento.

La información obtenida aporta una caracterización descriptiva útil para comprender la diversidad de preferencias en la población estudiada. Más que orientar la enseñanza hacia la correspondencia entre estilos e instrucción, estos resultados subrayan la importancia de emplear estrategias didácticas variadas, recursos de diferente naturaleza y oportunidades diversas de participación, en concordancia con lo que plantea la literatura actual sobre prácticas inclusivas y multimodales.

Finalmente, este estudio ofrece un insumo para continuar investigando las particularidades del aprendizaje en carreras del ámbito tecnológico, sin asumir efectos sobre el rendimiento académico. Asimismo, futuros estudios podrían analizar cómo estas preferencias se relacionan con el contexto de aprendizaje, variables afectivas u otras, así como explorar su evolución a lo largo de la carrera. También sería pertinente ampliar el análisis a otras poblaciones poco estudiadas, y examinar la estabilidad de estas tendencias frente a distintas metodologías de enseñanza en educación matemática.

6. LIMITACIONES Y ALCANCES DEL ESTUDIO

Este estudio presenta algunas limitaciones que deben considerarse al interpretar los resultados. En primer lugar, el ILS es un instrumento de autoinforme, por lo que las respuestas reflejan percepciones del estudiantado y no comportamientos observables. Además, el diseño es transversal, lo que impide analizar cambios en el tiempo o establecer relaciones causales. El estudio se centra únicamente en la caracterización de preferencias y no incluye análisis de su relación con el rendimiento académico o con la permanencia en el curso. Finalmente, se utilizó una traducción no oficial del ILS, cuya consistencia interna fue verificada únicamente para fines descriptivos.

En cuanto a sus alcances, este estudio ofrece una descripción detallada de las tendencias de aprendizaje en un curso base de matemática universitaria para estudiantes de Ingeniería en Sistemas de Información. Los resultados aportan información útil para comprender el perfil de este grupo y pueden servir como punto de partida para investigaciones futuras en contextos similares.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

RDF concibió la idea presentada. MBB desarrolló la teoría. RDF adaptó la metodología al contexto, recopiló los datos, sintetizó y extrajo los datos. Ambas autoras participaron activamente en la discusión de los resultados, revisión y aprobación del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio pertenecen a las personas autoras correspondientes, RDF y MBB, y estarán disponibles previa solicitud razonable.

7. REFERENCIAS

Al Ameer, L. F. J. (2017). Learning styles according to the model of Felder & Silverman and its relationship with mathematical self-perceived efficacy to students of the College of Education for Pure Sciences-Ibn Al-Haitham. *International Journal of Science and Research, 6*(4), 686-693. https://doi.org/10.21275/ART20172459

Angeli dos Santos, A. A. y Ferreira Mognon, J. (2010). Estilos de aprendizagem em estudantes universitários. *Boletim de Psicologia, 60*(133), 229-241. http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0006-59432010000200009&lng=pt&tlng=pt.

Aslaksen, K. y Lorás, H. (2018). The modality-specific learning style hypothesis: A mini-review. *Frontiers in Psychology, 9*, Artículo 1538. https://www.frontiersin.org/journals/psychology/articles/10.3389/fpsyg.2018.01538/full

Brito Orta, M. D. y Espinoza Tánguma, R. (2015). Evaluación de la fiabilidad del cuestionario sobre estilos de aprendizaje de Felder y Soloman en estudiantes de medicina. *Investigación en Educación Médica*, *4*(13), 28-35. Recuperado de https://www.scielo.org.mx/pdf/iem/v4n13/v4n13a6.pdf

Camana Fiallos, R. G. y Torres Carrera R. A. (2018). Descubrimiento del estilo de aprendizaje dominante de estudiantes de la carrera de Tecnología en Análisis de Sistemas. *Revista Educación*, *42*(2), 1-17. https://doi.org/10.15517/revedu.v42i2.26473

Camana Fiallos, R. G. (2017). Herramienta para detección de estilos de aprendizaje en estudiantes de educación superior. *Revista Tecnológica - ESPOL*, *30*(3). https://rte.espol.edu.ec/index.php/tecnologica/article/view/630

Castro, S. y Guzmán de Castro, B. (2005). Los estilos de aprendizaje en la enseñanza y el aprendizaje: Una propuesta para su implementación. *Revista de Investigación,* (58), 83-102. http://www.redalyc.org/pdf/3761/376140372005.pdf.

Coto Jiménez, M. (2020). Descubrimiento del estilo de aprendizaje dominante en estudiantes de Matemática Superior. *Revista educación*, *44*(1), 1-13. http://dx.doi.org/10.15517/revedu.v44i1.38571

Durán, E. y Costaguta, R. (2007). Minería de datos para descubrir estilos de aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*, *42*(2), 1-10. https://doi.org/10.35362/rie4222430

Felder, R. M., y Soloman, B. A. (s.f.). *Index of Learning Styles Questionnaire*. North Carolina State University. https://www.webtools.ncsu.edu/learningstyles/

Gallego Gil, D. J. y Nevot Luna A. (2008). Los estilos de aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista Complutense de educación*, *19*(1), 95-112. https://revistas.ucm.es/index.php/RCED/article/view/RCED0808120095A

García, A. J., Lozano Rodríguez, A. y Tamez Herrera, C. (2015). Estilos de aprendizaje y rendimiento académico en alumnos de segundo grado de secundaria. *Revista de Estilos de Aprendizaje*, *8*(15). https://doi.org/10.55777/rea.v8i15.1031

García Retana, J. A. (2013). Reflexiones sobre los estilos de aprendizaje y el aprendizaje del cálculo para ingeniería. *Actualidades Investigativas en Educación*, *13*(1), 362-390. http://www.scielo.sa.cr/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1409-47032013000100014&lng=en&tlng=es.

Grasselli de Lima, D. (2024). Desmitificando el uso de neuromitos en la educación. *Cuaderno de Pedagogía Universitaria*, *21*(42), 152-169. https://doi.org/10.29197/cpu.v21i42.611

Guevara Injoque, J. C. (2017). Identificación de los estilos de aprendizaje de los estudiantes del curso de Física General. *Anales Científicos*, *78*(1), 20-25. https://doi.org/10.21704/ac.v78i1.857

Hernández Pina, F. (1993). Concepciones en el estudio del aprendizaje de los estudiantes universitarios. *Revista de investigación educativa. RIE*, *11*(22), 117-150. http://hdl.handle.net/10201/94043

Howard Jones, P. (2014). Neuroscience and education: Myths and messages. *Nature Reviews Neuroscience, 15*(12), 817-824. https://www.researchgate.net/publication/266945518

Keast, S. (1999, 4-7 de julio). Learning styles in mathematics classrooms. En J. M. Turan y K. M. Turan, (Eds.), *Making the Difference. Proceedings of the Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia Incorporated* (pp. 291-297). MERGA 22nd Annual Conference, Adelaide, Australia.

Litzinger, T. A., Lee, S. H., Wise, J. C. y Felder, R. M. (2007). A psychometric study of the Index of Learning Styles. *Journal of Engineering Education*, *96*(4), 309-319. https://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2007.tb00941.x

Melzner, L. y Kappes, C. (2024). Testing the meshing hypothesis in prospective teachers: Are there effects of matching learning style and presentation mode on learning performance and on metacognitive aspects of learning? *Instructional Science*, *53*(3), 365-389. https://doi.org/10.1007/s11251-024-09689-1

Mosquera Albornoz, D. R. y Salazar Gómez, N. J. (2014). Estilos de aprendizaje: "pensamientos e inquietudes de los estudiantes sobre el aprendizaje de las matemáticas". *Revista de Estilos de Aprendizaje*, *7(13).* https://doi.org/10.55777/rea.v7i13.1005

Nevot Luna, A., y Cuevas Cava, M. V. (2009). Los estilos de aprendizaje y el espacio europeo de educación superior. Un paseo por el aula de matemáticas. *Revista de Estilos De Aprendizaje*, *2*(3). https://doi.org/10.55777/rea.v2i3.880

Newton, P. M. (2015). The learning styles myth is thriving in higher education. *Frontiers in psychology*, *6*, Artículo 1908. https://www.frontiersin.org/journals/psychology/articles/10.3389/fpsyg.2015.01908/full

Sánchez González, L. y Andrade Esparza, R. (2014). *Inteligencias múltiples y estilos de aprendizaje. Diagnóstico y estrategias para su potenciación*. Alfaomega.

Santaolalla Pascual, E. (2009). Matemáticas y estilos de aprendizaje. *Revista de Estilos de Aprendizaje*, *2*(4). https://doi.org/10.55777/rea.v2i4.889

Ventura, A. C., Palou, I., Széliga, C. y Angelone, L. (2014). Estilos de aprendizaje y enseñanza en ingeniería: Una propuesta de educación adaptativa para primer año. *Revista Educación en Ingeniería, 9*(18), 178-189. http://hdl.handle.net/11336/10871

Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 19 · N°. 1 · 2026
29-48
Recibido: 14/10/2025
Aprobado: 30/12/2025

Artículos de investigación

ESTUDIO DE PRÁCTICAS DE INGRESANTES UNIVERSITARIOS SOBRE FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS MEDIANTE ANÁLISIS ESTADÍSTICO IMPLICATIVO

STUDY OF UNIVERSITY STUDENTS' PRACTICES ON LINEAR AND QUADRATIC FUNCTIONS THROUGH IMPLICATIVE STATISTICAL ANALYSIS

Fabián Espinoza[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-8921-6956

Patricia Siwert[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-9709-4004

Paula Bordón[3]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-8701-0196

María Elizabeth Mendoza[4]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0006-3643-0442

César Garau[5]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0001-3458-9402

[1] FaCENA (UNNE), Corrientes, Argentina. rrfespinoza@exa.unne.edu.ar

[2] FaCENA (UNNE), Corrientes, Argentina. psiwert@exa.unne.edu.ar

[3] FaCENA (UNNE), Corrientes, Argentina. paula.bordon@comunidad.unne.edu.ar

[4] FaCENA (UNNE), Corrientes, Argentina. maria.mendoza@comunidad.unne.edu.ar

[5] FaCENA (UNNE), Corrientes, Argentina. cesaradriangarau@exa.unne.edu.ar

RESUMEN

En este estudio se emplea el Análisis Estadístico Implicativo (ASI) para examinar cómo abordan situaciones-problema vinculadas con funciones lineales y cuadráticas los ingresantes a la carrera de Bioquímica de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura (UNNE). El objetivo es identificar asociaciones conceptuales y cuasi-implicaciones entre las tareas de un instrumento de indagación diseñado ad hoc, el que cuenta con seis situaciones-problemas y 17 subtareas, que son las variables dicotómicas que se analizan con las herramientas de ASI. Para ello, se realizó un análisis de similitud de tareas mediante un árbol de similaridad, seguido de un estudio de cuasi-implicaciones representadas en un grafo implicativo. El marco teórico y metodológico se inscribe en el ASI, tomándose como complemento algunas herramientas teóricas y metodológicas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos, sobre todo para elaborar el análisis a priori. Entre los resultados más importantes se puede destacar que los ingresantes conocen y pueden relacionar distintos registros de representación de funciones e interpretan gráficos funcionales contextualizados.

Palabras clave: Análisis Estadístico Implicativo, árbol de similaridad, grafo implicativo, funciones lineales y cuadráticas, enfoque ontosemiótico.

ABSTRACT

This study employs Implicative Statistical Analysis (ASI) to examine how students entering the Biochemistry program at the Faculty of Exact Sciences, Natural Sciences, and Surveying (UNNE) approach problem-solving situations related to linear and quadratic functions. The primary objective is to identify conceptual associations and quasi-implications among the tasks within an *ad hoc* investigative instrument. This instrument is composed of six problem-solving situations and 17 subtasks, which serve as the dichotomous variables analyzed using ISA tools. The methodology involved a task similarity analysis conducted using a similarity tree, followed by a study of quasi-implications represented in an implicative graph. The theoretical and methodological framework is grounded in ISA, complemented by some theoretical and methodological tools from the Onto-Semiotic Approach (EOS) to mathematical knowledge and instruction, particularly for developing the *a priori* analysis. Among the most significant findings, it can be highlighted that the entering students know and can relate different registers of function representation and are able to interpret contextualized functional graphs.

Keywords: Statistical Implicative Analysis, similarity tree, implicative graph, linear and quadratic functions, onto semiotic approach.

1. INTRODUCCIÓN

Desde hace varios años, un grupo de docentes de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura de la Universidad Nacional del Nordeste, Argentina, se ha dedicado a indagar los conocimientos matemáticos de ingresantes a las distintas carreras, identificando y caracterizando diferentes obstáculos, con la intención de aportar a la problemática de desgranamiento y retraso en las trayectorias acedémicas de los estudiantes, antes distintas dificultades con asignaturas de matemática. Los resultados obtenidos se fueron constituyendo en un importante y permanente aporte al diseño y planificación de las tareas de enseñanza de los cursos de matemática del primer año de estudios, en el cual se presentan los mayores índices de desgranamiento.

En años recientes, enfocados más bien en caracterizar la comprensión alcanzada por los ingresantes sobre determinados objetos matemáticos, más allá de la sola determinación de las dificultades, errores o conflictos, el equipo ha empezado a analizar pruebas diagnósticas de conocimientos de ingresantes a la institución, utilizando Análisis Estadístico Implicativo (ASI).

Como señalan Gras y Kuntz (2009), Caputo et al (2016) y Mendoza et al (2019), este método de Estadística Multivariante permite hacer explícitas variadas relaciones conceptuales establecidas por estudiantes, con distintos niveles de intensidad relacional.

En este contexto, el presente trabajo busca comprender las relaciones entre los saberes sobre funciones lineales y cuadráticas que poseen los estudiantes, para determinar si este tema puede asumirse como un conocimiento previo o si, por el contrario, ciertos objetos y significados necesitan ser reforzados en la universidad. Se trata de una experiencia piloto para valorar el recorrido llevado a cabo y sobre todo el instrumento de indagación que se viene construyendo en el marco de un proyecto de investigación del grupo que se viene desarrollando en la UNNE entre los años 2024 y 2027. La validación ontosemiótica de la nueva versión del instrumento que se logró a partir del presente trabajo, la instrumentación final del mismo con un grupo más numeroso de estudiantes y el análisis correspondiente, conforman las tareas fundamentales que completarán la programación del proyecto.

El instrumento original fue analizado a priori con herramientas teóricas del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), precisamente, usando las nociones de configuración epistémica y función semiótica. Con la identicación y clasificación de de los objetos matemáticos primarios provenientes de este marco teórico, en términos de conocimientos, se elabora la matriz MAP (a la cual nos referiremos), el árbol de similaridad y el grafo implicativo, con herramientas del ASI.

Posteriormente se aplicó el instrumento a 25 estudiantes de Bioquímica que ingresaron en el año 2025. Los alumnos participaron voluntariamente luego de que algunos integrantes del proyecto de investigación presentaran la experiencia en las primeras clases de matemática.

El estudio de estas prácticas matemáticas se llevó a cabo a partir del análisis de un árbol de similaridad y de un grafo implicativo, elaborados con ASI, con base en el análisis a priori realizado con herramientas teóricas y metodológicas del EOS y del ASI.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

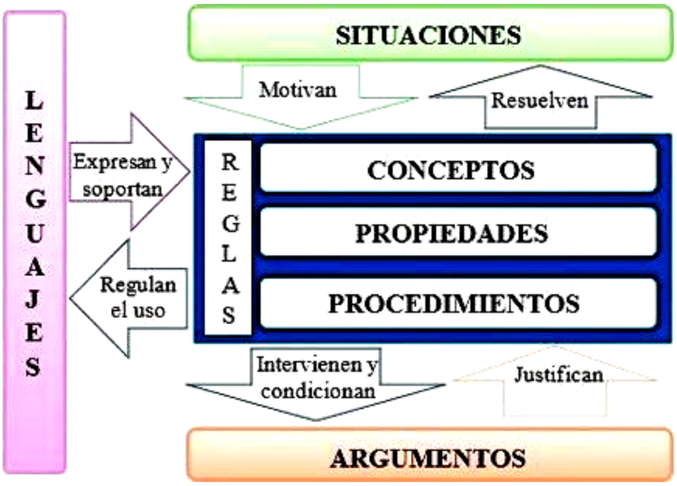
Las referencias teóricas y metodológicas adoptadas provienen del EOS y fundamentalmente del ASI.

2.1 Fundamentos teóricos y metodológicos provenientes del EOS

Más bien aplicada al análisis a priori, la referencia adoptada fue el modelo epistémico y cognitivo del EOS (Godino, Batanero y Font, 2008; 2020). En particular, se emplearon los constructos: Configuración epistémica y Función semiótica, a partir de los cuales se identificaron los objetos matemáticos primarios presentes en las resoluciones institucionales y sus relaciones.

Para un análisis más fino de la actividad matemática, el EOS incluye seis tipos de objetos matemáticos primarios, emergentes de sistemas de prácticas (Burgos y Godino, 2020): situaciones-problemas, lenguaje, procedimientos, proposiciones, conceptos y argumentaciones. Estos objetos, que están presentes en una práctica matemática, se relacionan entre sí formando configuraciones epistémicas o cognitivas (Figura 1).

Figura 1. Configuración epistémica/cognitiva



Fuente: Godino, Batanero y Font (2008)

Las configuraciones son epistémicas o instruccionales cuando son redes de objetos institucionales (extraídas de una práctica referencial institucional o experta); mientras que son cognitivas, cuando representan redes de objetos personales (actividad de los estudiantes). Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional (Godino, Batanero y Font, 2008). Estas configuraciones permiten analizar las prácticas matemáticas describiendo su complejidad ontosemiótica.

En una situación ideal y en una institución determinada, Godino (2003) sostiene que un sujeto comprende el significado de un objeto o se apropia del significado de un concepto si es capaz de reconocer los objetos matemáticos primarios y relacionarlos con otros objetos matemáticos en toda la variedad de situaciones planteadas por dicha institución.

Los distintos objetos primarios se vinculan a través de las funciones semióticas construidas entre ellos. D'Amore, Font y Godino (2007) indican que una función semiótica está dada por una correspondencia entre un antecedente (expresión, significante o representante) y un consecuente (contenido, significado, representado) que establece un sujeto, persona o institución. La correspondencia (representacional o instrumental) se constituye entre dos objetos (ostensivos o no-ostensivos), cuando uno de ellos se pone en lugar del otro, o bien, uno es usado por otro. Con esta noción, se evidencia el carácter netamente relacional de la actividad matemática y de los procesos que difunden el conocimiento matemático.

Godino (2003) llama análisis ontosemiótico de una práctica matemática a la identificación de las entidades puestas en juego y las funciones semióticas que se establecen entre ellas. Dicho análisis se constituye en la indagación sistemática de los significados (contenidos de las funciones semióticas) puestos en juego a partir de la transcripción del proceso.

2.2. Fundamentos teóricos y metodológicos provenientes del ASI

El estudio con ASI se llevó a cabo tanto para el análisis a priori del instrumento de indagación como para la exploración de las prácticas áulicas, usando como herramientas teóricas y metodológicas un árbol de similaridad y un grafo implicativo, herramientas que permitieron obtener similitudes y cuasi-implicaciones entre las 17 variables del instrumento.

ASI, fue creado por Regis Gras y colaboradores de la Asociación de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Lyon, Francia (Gras & Kuntz, 2009). El objetivo de este método es detectar las relaciones conceptuales que los estudiantes pueden establecer entre las distintas tareas de una evaluación.

Estos investigadores partieron del supuesto de que, si un alumno es capaz de resolver correctamente un problema complejo, es casi seguro que también responderá satisfactoriamente otro de menor complejidad (Regnier, 2009). A partir de esta hipótesis, ASI establece relaciones no simétricas entre variables del tipo si *a*, casi siempre *b*. Nótese que estas relaciones no son implicaciones lógicas formales, puesto que, en la lógica proposicional clásica, si *a* es verdadero (en este caso, sería si la respuesta al problema *a* es correcta), para que el condicional sea verdadero, también debe serlo el consecuente de la implicación. Como ha sido comprobado empíricamente que esto no se da taxativamente en las situaciones de evaluación de los aprendizajes, los autores han denominado a estas relaciones entre variables reglas o cuasi-implicaciones.

Así pues, Gras y Kuntz (2009) afirman que para que una regla sea admisible, es necesario minimizar el número de contraejemplos de esta. Es decir, que el número de casos en que, habiendo sido correctamente resuelta la tarea *a* del cuestionario, la respuesta a *b* no sea correcta o no se haya concretado, sea el menor posible. Para trabajar con ASI es necesario considerar los siguientes conjuntos finitos: un conjunto V que contiene las variables (dicotómicas) en estudio, puesto que asumen el valor 1, si la respuesta del estudiante es correcta, y 0, en caso contrario; y un conjunto E, también finito, formado por los sujetos que serán evaluados. Asimismo, se hace necesario definir otros dos conjuntos finitos: el primero denotado con A, formado por los sujetos de E que han respondido correctamente el problema a, y otro, B, formado por aquellos que han respondido bien el b. En la lógica tradicional, si a $\Rightarrow$ b es verdadera, debe estar A $\subset$ B. Pero, en la práctica siempre es posible encontrar uno o más contraejemplos de la implicación, por lo tanto, generalmente $A - B \neq \emptyset$. Eso, sin embargo, no significa que no pueda existir una relación de tipo causa-efecto entre los ítems a y b, relación que existe dada la naturaleza de los conocimientos que subyacen en ellos. Sean, además, X e Y dos subconjuntos de E coordinables con A y B, respectivamente, y α un número real perteneciente al (0, 1). Gras y Kuntz (2009) sostienen que la cuasi-implicación a ⇒ b es admisible a un nivel de confianza 1 - α, siempre que:

$$Pr = [card(X - Y) \leq card(A - B)] < \alpha,$$

que sigue la ley de Poisson de parámetro:

$$\lambda = \frac{card(A).card(E-B)}{card(E)}.$$

Por su parte, Spagnolo, Gras y Regnier (2009) afirman que la probabilidad de que el número de contraejemplos observados sea menor que el número de casos en que a y ¬b se observan simultáneamente, bajo la hipótesis de que a y b son independientes a priori, se puede obtener, utilizando el modelo Binomial o de Poisson. Estos autores mencionan la conveniencia de utilizar este último, puesto que, bajo ciertas condiciones, se puede aproximar a una distribución gaussiana.

Para poder determinar la existencia o no de relaciones entre los ítems de una evaluación, se definen diferentes índices que permiten establecer no sólo la existencia de relaciones entre las variables, sino también, cuán fuertes son las cuasi-implicaciones. Se define un índice denominado intensidad de la regla. Esta intensidad se determina calculando las probabilidades mencionadas, utilizando la distribución Binomial, la Hipergeométrica y, principalmente, la de Poisson puesto que, como afirman Wackerly, Mendenhall y Scheaffer (2010) bajo ciertas condiciones las dos primeras se aproximan a esta última.

Ahora bien, si el número de sujetos evaluados es superior a cien, se hace necesario minimizar no sólo el número de contraejemplos de la implicación, sino también, el de contraejemplos de su contrarrecíproca. Cuando se desea utilizar la intensidad de una regla y de su contrarrecíproca se requiere utilizar el concepto de entropía de Shannon, y esto da lugar a determinar la intensidad entrópica (Binomial, Hipergeométrica o de Poisson) que es una mejor medida que la intensidad clásica, determinada por cualquiera de las distribuciones de probabilidad mencionadas (Gras y kuntz, 2009).

Para realizar un análisis a priori de por ejemplo un instrumento que se suministrará a estudiantes, es necesario considerar un conjunto, formado por los conocimientos requeridos para resolver las tareas del instrumento, y otro conjunto constituido por las variables (dicotómicas) en estudio, es decir, las tareas del instrumento. Con estos datos se construye una matriz booleana, llamada matriz MAP, donde en la celda *ij* se consigna *1* si para responder el ítem *j* es necesario utilizar el conocimiento *i*, o *0* en caso contrario.

Una de las representaciones que utiliza el ASI es el árbol de similaridad, este permite clasificar variables agrupando aquellas con características similares, pero a diferencia de los métodos de clusters tradicionales (basados en distancias), lo hace en términos probabilísticos. El cálculo de estas probabilidades puede hacerse siguiendo las leyes de Poisson o Binomial, pero el software Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive (CHIC), realiza la aproximación de dichas leyes a la Normal, para obtener el índice de similaridad utilizado.

En el año 2015, el francés Raphael Couturier diseñó en la Escuela Superior Politécnica de Chimborazo la versión libre de CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) (Couturier, 2009), llamada R-CHIC (CHIC en el ambiente estadístico R).

R-CHIC presenta todas las cuasi-implicaciones y sus intensidades en un grafo implicativo, en el cual se muestran las cuasi-implicaciones entre los ítems mediante arcos, y su intensidad se muestra mediante colores: una intensidad del 99% se muestra en rojo, 95% en verde, 90% en azul y 85% en celeste. Cabe aclarar que las intensidades expuestas en el grafo implicativo surgen por defecto y pueden ser modificadas manualmente, en caso de que en la práctica no se obtengan dichos niveles de confianza.

Para el análisis de similaridad, R-CHIC organiza las clases de variables en un árbol de similaridad uniendo variables o grupos de variables mediante segmentos. Los "nodos significativos", marcados en rojo, indican variables o grupos con alta similaridad en ese nivel. Si en el nivel k se tiene un nodo significativo, el correspondiente índice de similaridad es mayor al de cualquier nodo significativo del nivel $h > k$ (los niveles se ordenan en forma creciente de arriba hacia abajo).

Cabe mencionar que al trabajar con cuasi-implicaciones, no siempre la ley del Silogismo hipotético, $(p \Rightarrow q \wedge q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$, es una ley de inferencia, como en la lógica proposicional clásica. Para que sí lo sea, es preciso que la intensidad de la implicación $p \Rightarrow r$ sea superior a 0.5 (GRAS y KUNTZ, 2009).

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

La investigación, de metodología cualitativa, se enmarca en un paradigma exploratorio, descriptivo e interpretativo, centrado en la indagación de los conocimientos previos de estudiantes que ingresan a la universidad.

Si bien la naturaleza del instrumento de indagación es de corte cuantitativo en su codificación, la riqueza de la interpretación de las relaciones conceptuales establecidas por los estudiantes, a partir de las herramientas metodológicas del ASI, se alinea con un enfoque cualitativo-interpretativo.

3.1 Etapas metodológicas

- Elaboración del instrumento de indagación, fundamentado en el diseño curricular nacional.

Este instrumento cuenta con 6 situaciones-problemas y 17 subtareas (variables dicotómicas). La versión completa del mismo puede consultarse en Espinoza et al (2024).

- Análisis a priori con herramientas del EOS.

Se identifican los objetos matemáticos involucrados en las prácticas institucionales y se los relaciona por medio de configuraciones epistémicas y funciones semióticas.

Se exponen aquí, a modo de ejemplo, el análisis a priori de tres situaciones.

- Complementación del análisis a priori del instrumento con elementos del ASI.

Se elabora la matriz MAP. En sus filas se nombran los conocimientos institucionales involucrados en la resolución de cada una de las situaciones del instrumento; mientras que, en sus columnas, se listan las variables o tareas del instrumento. Las distintas celdas ij se completan con 0 y 1, apuntando con “1” si el investigador considera que para la tarea “j” es necesario poner en funcionamiento el conocimiento “i”, y con “0” el caso contrario.

- A partir de esta matriz se elaboran y analizan el árbol de similaridad y el grafo implicativo de las prácticas institucionales.
- Administración del instrumento a los estudiantes y corrección de las producciones.

La experiencia se realizó con 25 estudiantes que decidieron participar espontáneamente luego de la caracterización de la práctica por parte de los investigadores y la invitación correspondiente, en una de las primeras clases de una asignatura de matemática del primer año de la carrera de Bioquímica de la FaCENA-UNNE, durante dos horas reloj.

La muestra está constituida por alumnos que cursaban Álgebra y Geometría Analítica durante el primer año y primer cuatrimestre de la carrera, en su mayoría entre 18 y 21 años, provenientes de las provincias aledañas a la institución.

Las correcciones las realizó un solo miembro del equipo de investigación con el siguiente criterio: se consideró que una tarea estuvo bien realizada cuando el estudiante la desarrolló con aproximadamente un 70% de corrección, en comparación con la resolución institucional.

- Elaboración y análisis del árbol de similaridad y del grafo implicativo de las prácticas de estudiantes.

3.2 Análisis a priori. Resolución institucional, identificación de objetos primarios y relaciones entre objetos

Se presentan aquí, a modo de ejemplo, la resolución y el análisis ontosemiótico de tres situaciones que conforman el instrumento. Es decir, se identifican los objetos matemáticos involucrados en las prácticas institucionales y las relaciones entre ellos por medio de funciones semióticas.

Figura 2. Segunda situación-problema del instrumento

Situación 2. Cuatro autos marchan por una ruta, cuya velocidad promedio es constante. Se tiene la siguiente información de cada uno de ellos:

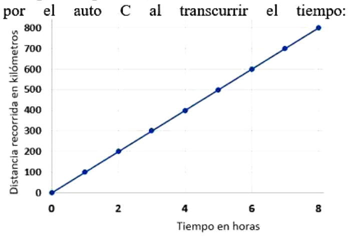
El auto A marcha a 100km por hora.

La distancia recorrida por el auto D sigue la siguiente fórmula: $y=120x$ donde y representa los kilómetros que se han recorrido y x la cantidad de horas transcurridas.

Del auto B se registraron datos en la siguiente tabla:

Hora	2	3	5
Distancia recorrida (en Km)	160	240	400

El siguiente gráfico muestra la distancia recorrida por el auto C al transcurrir el tiempo:



Explicar por qué son verdaderas las siguientes afirmaciones:

i. El auto B es más lento que el auto A.
ii. El auto A y el auto C marchan a la misma velocidad.
iii. El auto D es el más rápido de los cuatro.

Fuente: Elaboración propia

- El auto A marcha a 100km/h (lenguaje), por lo que en 1h recorre 100km (concepto), mientras que en 2h transita 200km (proposición) ya que la velocidad con la que se traslada es constante (argumento). Así, al duplicar la cantidad de tiempo, se duplica la distancia recorrida (argumento).

Según la tabla expuesta en la consigna, en 2h el auto B recorre 160 km (lenguaje). Cómo 160 es menor que 200, esto es, la distancia recorrida por el móvil B es menor que la transitada por el A, en el mismo tiempo, se concluye que el auto B es más lento que el A (procedimiento, argumento).

El auto A en 1h recorre 100km (concepto), y al duplicar, triplicar el tiempo, … también se duplicará, triplicará… la distancia recorrida (proposición, procedimiento), pues la velocidad es constante (argumento). Esto quiere decir que en 2h, 3h, 4h, …, este auto recorre 200km, 300km, 400km, … respectivamente (procedimiento, argumento) al igual que el auto C, como puede apreciarse en el gráfico cartesiano que se expone en la consigna (lenguaje, concepto). Como en tiempos iguales las distancias recorridas por estos móviles son también iguales, quiere decir que ambos marchan con la misma velocidad (argumento).

Sabemos que los autos A y C marchan a la misma velocidad: 100km/h, mientras que el auto B es más lento que ambos, por ser más lento que el auto A. Por otra parte, la distancia recorrida por el auto D está modelizada por la fórmula: $y = 120x$, donde x representa las horas transcurridas e y los kilómetros recorridos (lenguaje y concepto). Luego, en 1h, el auto D recorre 120km (120x1 = 120 (procedimiento)), una distancia mayor que la de los otros tres móviles. Como su velocidad es constante, en 2h, 3h, …, también las distancias alcanzadas por este móvil serán mayores que la de los otros (argumento); es decir, D es el auto más veloz.

Considerando que las relaciones entre el tiempo transcurrido y los kilómetros recorridos por los autos pueden ser modelizadas por medio de una función de proporcionalidad directa (concepto), otros objetos son factibles de emplearse para abordar esta situación. Así, interpretando los registros de representación de las funciones (lenguaje) o usando multiplicaciones, divisiones o regla de tres simple (procedimientos) se puede: i) reducir a la unidad obteniendo la distancia recorrida por cada uno de los móviles en 1h (concepto y procedimiento) o, ii) determinar las constantes de proporcionalidad (dividiendo espacio y tiempo) que son las velocidades de los cuatro móviles (concepto). En ambos casos, la comparación de los resultados obtenidos (procedimiento) es suficiente para determinar qué auto es más veloz, pues sus velocidades son constantes (argumento).

Algunas funciones semióticas (fs) relevantes

- fs 1, 2, 3, 4: Establecida entre el lenguaje con el que se expresa cada función (coloquial, tabular, cartesiana y a través de una fórmula) y el procedimiento (y argumento) que involucra comparar velocidades.
- fs 5: Entre el procedimiento de duplicar, triplicar, etc. la distancia recorrida cuando se duplica, triplica, etc. la cantidad de tiempo y el argumento dado por la velocidad constante.
- fs 6: Entre procedimientos de reducción a la unidad y el argumento de la velocidad constante.

Figura 3. Tercera situación-problema del instrumento

Situación 3: Un especialista visita la producción de un determinado tipo de cultivo de un campo con el fin de aumentar las ganancias relacionadas con las ventas. Por dicha visita cobra $8000 y por cada hora de trabajo cobra $3500.

a. ¿Es cierto que si trabaja durante 7 horas deberá cobrar $32.500?, ¿por qué?
b. ¿Si trabaja durante 72 horas, cuánto deberá cobrar? Explica tu respuesta.
c. ¿Cuántas horas debió trabajar si cobró $95.500?

Fuente: Elaboración propia

a. El especialista cobra \$8.000 por visita y \$3.500 por cada hora de trabajo (lenguaje), es decir, por 1h de trabajo cobra \$11.500 (proposición), pues 11.500 = 3.500+8.000 (procedimiento). Así, por 2h ganará \$15.000 ($3.500 \cdot 2 + 8.000$) (procedimiento, proposición) dado que el dinero que cobra por hora de trabajo es constante y el que cobra por la visita es fijo. Si se duplica, triplica, … la cantidad de tiempo trabajado también se duplica, triplica, … la cantidad cobrada por hora, obteniendo la ganancia total al añadir los 8.000 correspondientes a la suma fija (procedimiento, argumento). Si el especialista trabaja 7h deberá cobrar \$32.500 ($3.500 \cdot 7 + 8.000$) (procedimiento, argumento).

b. Si el experto trabajara durante 72h deberá cobrar 72 veces lo que lo haría por 1h de trabajo más la suma fija, esto es \$260.000 ($3.500 \cdot 72 + 8.000$) (procedimiento, argumento).

c. La consigna indica que \$95.500 (lenguaje) cobró el especialista por cierta cantidad de horas trabajadas más la suma fija (argumento); por lo que, \$87.500 es lo que debió cobrar sin la suma fija ($95.500 - 8000$) (procedimiento y argumento). Para calcular el número de horas trabajadas se debe buscar un número que multiplicado por 3.550 dé como resultado 87.500, el cual puede obtenerse dividiendo 87.500 por 3.500 (procedimiento, argumento). Este número es 25, e indica que el especialista trabajó 25h.

Funciones semióticas relevantes

- fs 1: Establecida entre el procedimiento de multiplicar la ganancia por el número de horas de trabajo y el modelo de proporcionalidad asociado (argumento).
- fs 2: Entre el procedimiento de multiplicar la ganancia por el número de horas de trabajo más la suma fija y el argumento dado por el modelo lineal no proporcional.
- fs 3: Entre el procedimiento de deconstrucción del procedimiento usado para conocer la ganancia y el argumento que fundamenta conocer la cantidad de horas trabajadas basado en el contexto.
- fs 4: Entre dos conceptos, el de función y el de ecuación. Más precisamente, a través de un modelo funcional se obtiene la ganancia cuando se conoce la cantidad de horas trabajadas; mientras que, si el dato es la paga, averiguar las horas trabajadas involucra el modelo de una ecuación.

Figura 4. Quinta situación-problema del instrumento

Situación 5. En la siguiente tabla están indicados algunos puntos por donde pasa la gráfica de una función cuadrática:

x	0	1	-1	2	-2
y	-3	-2	-2	1	1

Si asumimos que el dominio de esta función es un subconjunto de los números reales, ¿de qué subconjunto se trata, si al conjunto de las imágenes deben pertenecer números reales menores que 166?

Fuente: Elaboración propia

Sabiendo que 1 y -1 son opuestos (o 2 y -2) y tienen las mismas imágenes (lenguaje, concepto) se puede decir que el valor del coeficiente lineal de la función cuadrática es 0 (concepto, argumento). Además, como la imagen de 0 es -3, este número es la ordenada al origen (concepto). Luego la expresión algebraica de la función es $f(x) = x^2 - 3$ (argumento).

Resolviendo la ecuación $x^2 - 3 = 166$ se tiene que $x = 13$ o bien $x = -13$ (procedimiento). Esto quiere decir que 13 y -13 son dos elementos del dominio de la función que tienen como imagen a 166 (argumento). Como el coeficiente cuadrático es positivo, la gráfica de la función es cóncava positiva, por lo que todos los números reales comprendidos entre -13 y 13 tendrán imágenes menores que 166 (concepto, argumento). De esta manera se obtiene el subconjunto de números reales dado por el intervalo abierto (-13,13) que es el dominio de la función en las condiciones dadas (argumento).

Funciones semióticas relevantes

- fs 1: Establecida entre lenguajes: gráfico (tabla) y formal (fórmula).
- fs 2: Entre el lenguaje (gráfico) y el concepto dado por la fórmula de la función.
- fs 3: Entre los conceptos correspondientes a la fórmula de la función y a la ecuación x2-3=166.
- fs 4: Entre el problema y el procedimiento de resolución de la mencionada ecuación.

En las configuraciones epistémicas se han identificado los objetos matemáticos primarios involucrados en las prácticas desarrolladas y sus relaciones, lo que permite caracterizar la exhaustividad de la elección de las situaciones del instrumento teniendo en cuenta la propuesta de los Núcleos de Aprendizajes Prioritarios de Argentina (ME, 2011). Entre otros aspectos, quedaron en evidencia el trabajo con modelos funcionales, con distintos registros de representación de una función, el estudio de relaciones entre distintos lenguajes, entre el dominio y la imagen de una función, la diferenciación entre las funciones lineales proporcionales y no proporcionales. Emergen también aspectos de las gráficas de las funciones cuadráticas necesarios de tener en cuenta, como los de simetría, concavidad, ordenada al origen, etc.

La labor que se ha desarrollado en la identificación, diferenciación, caracterización y estudio relacional entre estos objetos nos permitió valorar la importancia de disponer de una herramienta teórica y metodológica que promueva la elaboración de prácticas matemáticas relativamente completas, como respuesta a una cuestión determinada.

3.3. Estudio de relaciones conceptuales con ASI

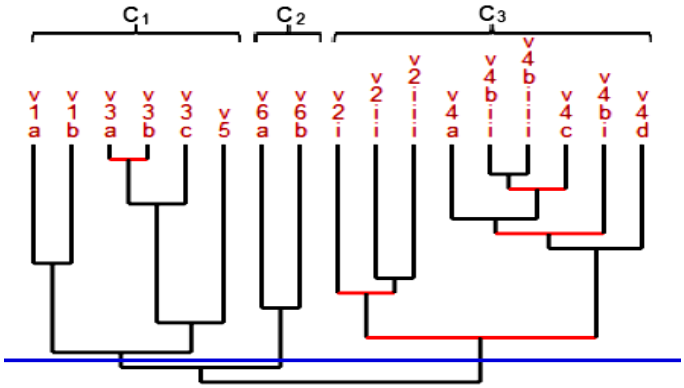
Este análisis complementa el análisis ontosemiótico elaborado precedentemente.

A partir del análisis a priori resumido en la matriz MAP, se construye y analiza dos gráficos: el árbol de similiridad y el grafo implicativo.

3.3.1 Análisis del árbol de similaridad

Los datos de la matriz MAP fueron procesados mediante R-CHIC, un paquete del programa R que implementa ASI para identificar asociaciones conceptuales en términos probabilísticos. Uno de los resultados es el siguiente árbol de similaridad que muestra las relaciones de cuasi-equivalencia entre las variables del instrumento:

Figura 5. Árbol de similaridad de la matriz MAP



Fuente: Elaboración propia a partir de datos relevados, utilizando R-CHIC

Sus vértices son: v1a, v1b, v2i, v2ii, v2iii, v3a, v3b, v3c, v4a, v4bi, v4bii, v4biii, v4c, v4d, v5, v6a y v6b. La expresión v1a, por ejemplo, se lee “variable 1a” y representa la tarea de la situación 1, ítems a, del instrumento.

En este gráfico se identifican tres clases de cuasi-equivalencia, denominadas C1, C2 y C3. Los elementos que se unen cerca de la cima poseen un nivel de similaridad más alto. A medida que se desciende, se van agrupando elementos y grupos que son progresivamente más distintos.

Las clases de similitud quedan constituidas por la homogeneidad entre las tareas.

La clase C1: Reúne tareas o variables cuya consigna no incluye fórmulas ni gráficos explícitos, pero cuya resolución requiere su construcción. Implican procesos de modelización y/o traducción entre lenguajes.

La clase C2: Reúne tareas vinculadas a funciones cuadráticas en sus formas general y factorizada. Se distingue por demandar un trabajo algebraico, con expresiones ya provistas en la consigna, y un análisis centrado en propiedades estructurales de la función.

La clase C3: Incluye tareas ligadas principalmente a la interpretación de gráficos; aunque v2i no los presenta, aparece en esta clase por compartir elementos de razonamiento y comparación con otras variables que sí lo requieren. Las variables de esta clase se vinculan con el análisis visual de información y la deducción de relaciones a partir de representaciones gráficas.

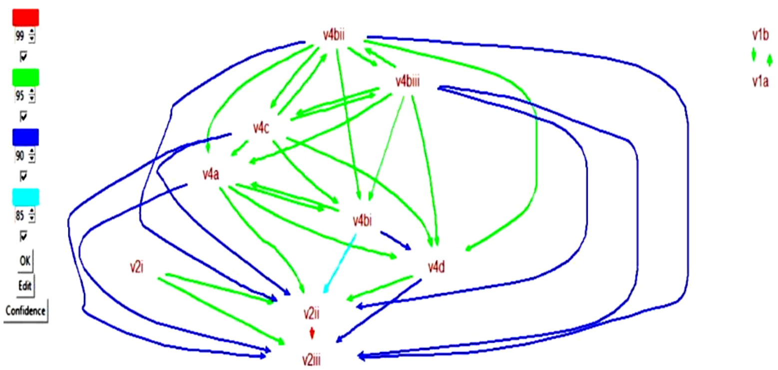
En general, los ítems de una misma situación son las variables relacionadas con mayor intensidad, mostrando que cada situación exige saberes específicos. Por ejemplo, v4d depende de la resolución de ítems previos de su grupo. A su vez, los resultados muestran que el instrumento exige la articulación simultánea de distintos lenguajes (gráfico, algebraico, tabular y verbal), lo cual refuerza la complejidad de los saberes implicados en el estudio de funciones lineales y cuadráticas.

Tal como se había apreciado en el análisis ontosemiótico llevado a cabo, este análisis de similaridad vuelve a dejar en evidencia que las tareas del instrumento no están aisladas, sino que se agrupan en torno a núcleos de saberes compartidos. Las tres clases identificadas muestran distintos modos de movilizar saberes sobre funciones: producción de representaciones a partir de información contextual, trabajo algebraico intensivo sobre expresiones cuadráticas y análisis de información gráfica o tabular.

3.3.2. Análisis del grafo implicativo

Los datos de la matriz MAP fueron procesados mediante R-CHIC, software que implementa ASI para identificar implicaciones entre variables en términos probabilísticos. Otro de los resultados obtenidos es el siguiente grafo implicativo, que muestra las relaciones de cuasi-implicación entre las variables del instrumento.

Figura 6. Grafo implicativo de la matriz MAP



Fuente: Elaboración propia a partir de datos relevados, utilizando R-CHIC

Las flechas corresponden a las cuasi-implicaciones entre variables. La de color rojo es la de mayor intensidad, con un nivel de confianza del 99%, seguida por las verdes, con el 95% de confianza; las azules, de intensidad intermedia, tienen un nivel de confianza del 90%; y la de menor intensidad, la celeste, se presenta con un nivel de confianza del 85%. Por ejemplo, la cuasi-implicación v4c → v4bi (flecha verde) indica que el hecho de realizar correctamente la tarea 4c, en el 95% de los casos, implica abordar de manera pertinente la actividad 4bi.

Si bien se han analizado todas las implicaciones del grafo, a continuación, se exponen solamente algunos ejemplos:

Relaciones entre las tareas de la primera situación:

- v1a ↔ v1b (v1a → v1b y v1b → v1a): determinar que una recta pasa por el origen de coordenadas, implica saber que la misma es la gráfica de una función de proporcionalidad directa, y viceversa.

Relaciones entre las tareas de la segunda situación:

- v2i → v2ii: entender que el auto B es más lento que el A, involucra interpretar que los autos A y C marchan a la misma velocidad.
- v2i → v2iii: saber que el segundo auto es más lento que el primero, implica poder explicar que el último auto es el más rápido.
  Es necesario aclarar que las velocidades de estos 4 autos vienen dadas a través de distintos registros de representación de una función: coloquial, tabular, cartesiano y fórmula.

Relaciones entre las tareas de la cuarta situación:

- v4bii ↔ v4c: saber interpretar en el gráfico cartesiano que figura en la cuarta consigna cuál fue la distancia en la que se volvieron a encontrar los atletas, conlleva la identificación de quién ganó la carrera, y viceversa.
- v4biii → v4d: saber quién fue el atleta alcanzado en la carrera por su par, implica poder explicar la causa del fallo de la estrategia perdedora.

Relaciones entre las tareas de las situaciones 2 y 4:

- v4a → v2ii: reconocer cuál de los dos atletas empezó la carrera más rápido, involucra poder argumentar que los autos A y C marchan a la misma velocidad.
- v4d → v2ii: poder explicar por qué falló la estrategia del perdedor de la carrera, implica explicar la razón por la cual los autos A y C tienen la misma velocidad.

En general, quedan en evidencia relaciones entre conocimientos. La determinación de que una recta pasa por el origen de coordenadas (de manera gráfica o algebraica), conlleva saber que la misma es la gráfica de una función de proporcionalidad directa, y viceversa.

Además, la comprensión de las gráficas funcionales relacionadas con algún contexto real, no necesariamente lineales, favorece la interpretación de las gráficas de funciones lineales contextualizadas.

Finalmente, es necesario destacar las relaciones establecidas entre los distintos registros de representación de una función y la interpretación pertinente de los mismos.

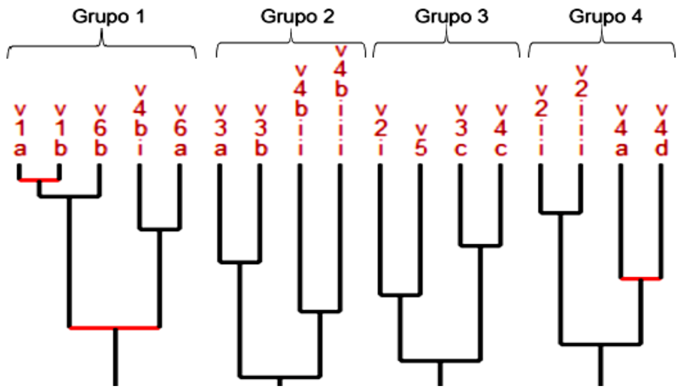
4. RESULTADOS

Se analizan aquí el árbol de similaridad y el grafo implicativo, obtenidos a partir del procesamiento de los datos de las prácticas de los estudiantes mencionados mediante R-CHIC.

4.1 Análisis del árbol de similaridad

Se identifican cuatro grupos de cuasi-equivalencia:

Figura 7. Árbol de similaridad de las prácticas de los estudiantes



Fuente: Elaboración propia a partir de datos relevados, utilizando R-CHIC

- Grupo 1: Las variables v1a, v1b y v6b poseen los niveles más altos de similaridad. Para resolver estos apartados, los estudiantes emplean conocimientos de representación gráfica de funciones, ubicando y uniendo puntos. La situación 1b es resuelta teniendo en cuenta que el gráfico de una función de proporcionalidad directa pasa por el origen. Las variables v4bi y v6a se asocian porque involucran tareas de graficación e interpretación.

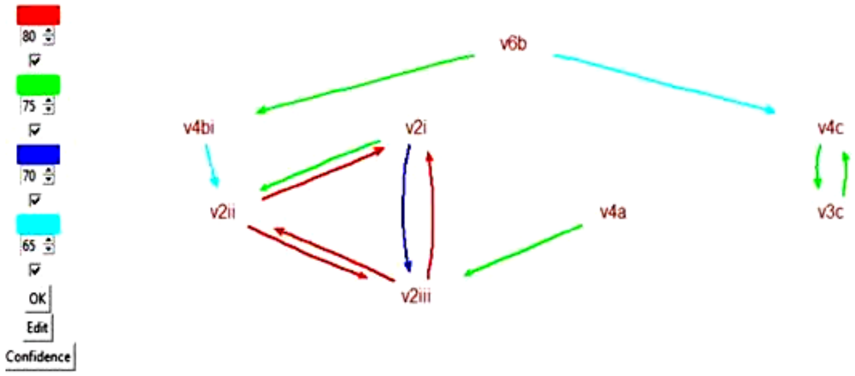
- Grupo 2: Las variables v3a y v3b aparecen relacionadas porque los estudiantes identifican, a través de un proceso de generalización, el cobro del especialista sin importar la cantidad de horas trabajadas.
  Las variables v4bii y v4biii se asocian porque implican interpretar gráficos funcionales para responder a qué distancia se encuentran dos atletas y cuál alcanzó al otro. Para esto, deben reconocer que el punto de intersección representa el tiempo y la distancia del encuentro y que el atleta B tuvo una mayor velocidad.
- Grupo 3: Los ejercicios correspondientes a las variables v2i y v5 implican la interpretación de dos tipos de registros de representación de funciones: el coloquial y el tabular.
  La asociación entre v3c y v4c puede deberse a que ambas tareas implican determinar el/los valores de la variable independiente, teniendo como dato un valor de la variable dependiente.

- Grupo 4: Las variables v2ii y v2iii están relacionadas porque los estudiantes comprenden la información de distintos registros de representación (coloquial, gráfico cartesiano y fórmula). El conocimiento de las velocidades de los móviles les permitió abordar las situaciones.
  La interpretación del gráfico cartesiano permite que los estudiantes aborden la situación, entendiendo que el atleta B recorre mayor distancia en menor tiempo al comienzo, lo que argumentaría la asociación entre las variables v4a y v4d.

4.2 Análisis del grafo implicativo

Los vértices de este son: v2i, v2ii, v2iii, v3c, v4a, v4bi, v4c, v6b. La expresión v2i, por ejemplo, se lee "variable 2i" y representa la tarea de la situación 2, ítems i, del instrumento.

Figura 8. Grafo implicativo de las prácticas de los estudiantes



Fuente: Elaboración propia a partir de datos relevados, utilizando R-CHIC

Las flechas corresponden a las cuasi-implicaciones entre variables o tareas. Las de color rojo son las de mayor intensidad, con un nivel de confianza del 80%; siguen las verdes, con un nivel de confianza del 75%; la azul, con el 70%; y las de menor intensidad, las celestes, se presentan con un nivel de confianza del 65%. Por ejemplo, la cuasi-implicación v2iii → v2i (flecha roja) indica que cuando los estudiantes realizan correctamente la tarea 2iii, en el 80% de los casos, también responden bien a la actividad 2i.

Si bien se han analizado todas las implicaciones del grafo, a continuación, se exponen solamente algunos ejemplos:

Relaciones entre las tareas de la segunda situación:

- v2ii ↔ v2iii (v2ii → v2iii y v2iii → v2ii): estar en condiciones de explicar que los autos A y C marchan a la misma velocidad, involucra argumentar correctamente que el móvil D es más rápido que todos, y viceversa.
- v2i ↔ v2ii: fundamentar que el segundo auto es más lento que el primero, implica poder explicar que el primero y el tercero marchan a la misma velocidad, y viceversa.

- v2i ↔ v2iii: poder explicar que el segundo auto es más lento que el primero, implica argumentar que D es el más rápido de todos, y viceversa.

Estas relaciones muestran que los estudiantes pueden reconocer y relacionar distintos registros de representación de funciones: coloquial, tabular, gráfico cartesiano y fórmula.

Relaciones entre tareas de la cuarta y segunda situación:

- v4a → v2iii: poder determinar qué atleta empezó la carrera más rápido, incluye argumentar acerca de que el auto D es más rápido que todos.
  En general, la interpretación de gráficos funcionales, no necesariamente lineales, involucra conocer y relacionar distintos registros de representación de funciones lineales.

Relaciones entre tareas de la cuarta y tercera situación:

- v4c ↔ v3c: reconocer qué atleta ganó la carrera, implica elaborar y saber usar un modelo lineal contextual.
  Esta relación puede deberse a que ambas tareas implican determinar el/los valores de la variable independiente, teniendo como dato un valor de la variable dependiente.

Relaciones entre tareas de la sexta y cuarta:

- v6b → v4bi: identificar los puntos donde una parábola corta al eje y, implica conocer el momento en que un atleta alcanzó a otro.
  Esta relación queda fundamentada teniendo en cuenta que las tareas involucran identificar puntos de intersección entre curvas, graficando o interpretando gráficos.

5. CONCLUSIONES

El análisis de las prácticas de los estudiantes permitió identificar clases de cuasi-equivalencia reflejadas en el árbol de similaridad, que agrupan variables según modos de razonamiento funcional compartidos.

Se evidencian patrones donde los estudiantes recurren a una estrategia común: emplean registros tabulares, verbales, simbólicos y gráficos para interpretar o construir funciones. Asimismo, pueden elaborar e interpretar modelos lineales contextualizados.

En cuanto al grafo implicativo, se puede decir que las cuasi-implicaciones entre las tareas de la situación 2 son en general las de mayor intensidad, lo que deja en evidencia que los estudiantes interpretan y relacionan distintos registros de representación de funciones lineales, en un determinado contexto.

También la interpretación de gráficos funcionales, no necesariamente lineales, lleva a conocer y relacionar distintos registros de representación de funciones lineales, en situaciones de contexto.

Asimismo, la determinación de puntos de intersección entre curvas (gráfica o algebraica), incluye poder asimilar que los encuentros o coincidencia de velocidades son puntos de intersección de gráficas.

Estos conocimientos brindan una base sólida para diseñar, implementar y evaluar intervenciones educativas más pertinentes, que se relacionen con la forma real en que los alumnos abordan y relacionan estos problemas.

Además, la identificación de los conocimientos detectados a priori no emergentes y los emergentes de las prácticas analizadas, permitió revisar la adecuación y el alcance del instrumento diseñado, en función de los intereses de la investigación. En este sentido, es necesario destacar que el instrumento original sufrió modificaciones relacionadas con el mejoramiento de la redacción de las consignas, la eliminación de tareas redundantes (que pertenecían al mismo tipo de problema o involucraban resoluciones muy similares) y el ajuste de las condiciones e hipótesis de cada una de las situaciones, incluyendo su remisión o inserción según fuera necesario.

Finalmente, se hace notar que esta investigación sienta las bases teóricas y metodológicas para aquellas otras en las que se pretendan valorar situaciones de enseñanza y evaluación, precisamente cuando se trate de realizar recortes en guias de problemas, priorizar la enseñanza de conceptos o tareas más complejas, promover una enseñanza más relacional, entre otros aspectos.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

FE dirigió la investigación y desarrolló los fundamentos teóricos y metodológicos provenientes del EOS, así como el análisis a priori con herramientas del EOS.

PS y PB elaboraron conjuntamente, junto con CG y MM, los fundamentos teóricos y metodológicos del estudio. PS y PB complementaron el análisis a priori del instrumento con elementos del ASI. CG se encargó de la administración del instrumento a los estudiantes y la corrección de las producciones. MM elaboró y analizó el árbol de similaridad y el grafo implicativo de las prácticas de los estudiantes de manera colaborativa con CG y FE.

Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron la versión final del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la persona/personas autora/s correspondiente previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen a la Universidad Nacional del Nordeste (UNNE) y a la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura (FACENA) por el apoyo institucional brindado para el desarrollo de esta investigación.

5. REFERENCIAS

Burgos, M., & Godino, J. D. (2020). Modelo ontosemiótico de referencia de la proporcionalidad. Implicaciones para la planificación curricular en primaria y secundaria. *AIEM, 18*, 1-20.

Caputo, L., Jorge, M., Espinoza, R., Porcel, E., & Romero, J. (2016). Análisis Estadístico Implicativo de los conocimientos previos sobre números reales de ingresantes a la universidad. *Cadernos do IME – Série Estatística, 42*, 30–44.

Couturier, R. (2009). CHIC: utilización y funcionalidades. En R. Gras, B. Orús & B. Pinaud (Eds.), *Nouveaux Apports Théoriques à l'Analyse Statistique Implicative et Applications* (pp. 51-64). Université Jaume I.

D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. *Paradigma, 28*(2), 49-77.

Espinoza, R. F., Bordón, P. D., Almeida, G. I., & Ayala, M. M. (2024). Análisis a priori de un instrumento de indagación sobre funciones lineales y cuadráticas: Estudio de los problemas que involucran proporcionalidad directa [Actas de congreso, pp. 147–516]. En X Jornadas Nacionales y VI Latinoamericanas de Ingreso y Permanencia en Carreras Científico-Tecnológicas. Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Santa Fe. https://rtyc.utn.edu.ar/index.php/ajea/article/view/1797/1624

Godino, J. D. (2003). *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico semiótico de la cognición e instrucción matemática*. (Manuscrito no publicado). Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10*, 7-37.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: Implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista Chilena de Educación Matemática, 12*(2), 3-15.

Gras, R., & Kuntz, P. (2009). El Análisis Estadístico Implicativo (ASI) en respuesta a problemas que le dieron origen. En R. Gras, B. Orús & B. Pinaud (Eds.), *Nouveaux Apports Théoriques à l'Analyse Statistique Implicative et Applications* (pp. 3-50). Université Jaume I.

Mendoza, M., Caputo, L., Porcel, E., & Bordón, P. (2019). Conocimientos previos sobre propiedades de operaciones con números reales de ingresantes a la universidad. Su análisis usando análisis estadístico implicativo. *Revista de la Escuela de Investigación Operativa, 27*(46), 42–53.

Ministerio de Educación de la República Argentina. (2011). *Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Ciclo Básico, Educación Secundaria*.

Regnier, J. C. (2009). Analyse Statistique Implicative. Une méthode d'analyse de données pour la recherche de causalités. En R. Gras, J. C. Régnier & F. Guillet (Eds.), *Mantes*. Cépaduès-Éditions. http://sites.univ-lyon2.fr/asi7/?page=0&lang=es

Spagnolo, F., Gras, R., & Régnier, J. C. (2009). Una medida comparativa en Didáctica de las matemáticas entre el análisis a priori y la contingencia. En R. Gras, B. Orús & B. Pinaud (Eds.), *Nouveaux Apports Théoriques à l'Analyse Statistique Implicative et Applications* (pp. 143-157). Université Jaume I.

Wackerly, D., Mendenhall, W., & Scheaffer, R. (2010). *Estadística matemática con aplicaciones*. Cengage Learning Eds.

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 19 · N°. 1 · 2026
49-71
Recibido: 28/08/2025
Aprobado: 10/12/2025

Artículos de investigación

ESTRATEGIAS DE EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE EN ENTORNOS VIRTUALES: estudio aplicado en un curso universitario de matemáticas a distancia

LEARNING EVALUATION STRATEGIES IN VIRTUAL ENVIRONMENTS: an applied study in a distance university mathematics course

Estíbaliz Odilie Rojas Quesada[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0008-8001-1223

Seidy Giselle Sánchez Salas[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0003-7225-0332

RESUMEN

Esta investigación explora las estrategias de evaluación del aprendizaje utilizadas en el entorno virtual del curso de Matemática para Computación I, desde un enfoque centrado en la evaluación formativa y la autorregulación del aprendizaje en educación a distancia.
El estudio se desarrolló bajo un enfoque descriptivo y consideró técnicas e instrumentos alineados con el marco teórico, tales como la autoevaluación, los foros académicos, los cuestionarios, las videoconferencias y las matrices de calificación. Los datos se obtuvieron de entrevistas con 13 personas tutoras y el coordinador de la asignatura, además de un cuestionario para los estudiantes.
El análisis de resultados evidencia una implementación consistente de diversas estrategias evaluativas en el entorno virtual; no obstante, se identifica como hallazgo relevante el desconocimiento por parte del profesorado sobre la finalidad pedagógica de la autoevaluación, herramienta orientada a la regulación del aprendizaje en cada unidad, la cual no está siendo aprovechada plenamente.

Palabras clave: Evaluación de los aprendizajes, Estrategias educativas, Educación a distancia, Aprendizaje en línea.

[1]Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Estatal a Distancia, San José, Costa Rica, 474-2050. erojasq@uned.ac.cr

[2]Escuela Atilia Mata Freses, Ministerio de Educación Pública, Limón, Costa Rica, 70101. seidy.sanchez.salas@mep.go.cr

ABSTRACT

This study explores the learning assessment strategies used in the virtual environment of the Mathematics for Computing I course, from an approach focused on formative assessment and the promotion of self-regulated learning in distance education.
The research was conducted using a descriptive approach and considered assessment techniques and instruments aligned with the theoretical framework, including self-assessment, academic forums, quizzes, videoconferences, and grading rubrics. Data were collected through interviews with 13 tutors and the course coordinator, as well as a questionnaire administered to students.
The analysis of results reveals a consistent implementation of various assessment strategies within the virtual learning environment. However, a relevant finding is the lack of faculty awareness regarding the pedagogical purpose of self-assessment as a tool aimed at regulating learning in each instructional unit, which is not being fully utilized.

Keywords: learning evaluation, educational strategies, distance education, online learning

1. INTRODUCCIÓN

Este artículo presenta parte de los hallazgos de una investigación realizada como tesis de la Maestría en Ciencias de la Educación con especialización en Evaluación Educativa. El proyecto titulado “Propuesta de una estrategia de evaluación de los aprendizajes en entornos virtuales”, tuvo como objetivo asegurar la validez y la confiabilidad de los instrumentos de evaluación utilizados en la asignatura Matemática para Computación I de la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales (UNED), durante el primer semestre de 2022, en el que se brindaba a las personas tutoras una herramienta sólida para verificar el dominio de contenidos y habilidades esperadas. Aunque el análisis se circunscribe a la UNED que es la Universidad Estatal a Distancia sus rasgos operativos son comunes a muchas instituciones a fines en Iberoamérica, siendo estos: docencia tutorizada, aulas virtuales estandarizadas y evaluación modular. Por ello, la estrategia propuesta resulta transferible a contextos equivalentes: modularidad de actividades, rúbricas compartidas entre grupos y micro-autoevaluaciones con retroalimentación formativa.

En la educación superior a distancia, el evaluar con garantías de validez y confiabilidad es crucial para certificar competencias, especialmente en escenarios de masividad y heterogeneidad del estudiantado. Estos contextos exigen instrumentos con criterios transparentes, descriptores de desempeño claros y uso sistemático de la retroalimentación formativa que oriente la toma de decisiones pedagógicas.

Asimismo, los ecosistemas digitales plantean retos, como la integridad académica y la equidad de acceso, que demandan combinar diagnósticos de entrada, actividades formativas recurrentes y evaluaciones auténticas que evidencien el desempeño real y favorezcan la autorregulación. En este marco, la investigación respondió a la pregunta: ¿Qué elementos de la evaluación de los aprendizajes en entornos virtuales garantizan la validez y la confiabilidad de los instrumentos aplicados al estudiantado en Matemática para Computación I? En consecuencia, el artículo se centra en identificar y describir los instrumentos utilizados y en delimitar una estrategia que facilite su uso coherente a nivel de cátedra y entre sedes.

2. MARCO TEÓRICO

En la actualidad el uso de entornos virtuales para apoyar la educación a distancia y/o virtual es un evento que se da con recurrencia, ya que cuenta con una serie de bondades que facilitan el proceso de enseñanza y aprendizaje. Aspectos como la posibilidad de ajustar horarios, evitar traslados en los participantes, posibilidad de que cada persona organice su tiempo para elaborar las asignaciones, obtener respuesta a dudas por medio de un foro o dar seguimiento al estudiantado, son algunas de las ventajas al utilizar los espacios virtuales (Rosales, 2020). Cuando se trabaja en la modalidad sincrónica, indica que el profesorado y el estudiantado desarrollan una comunicación simultánea. Por el contrario, cuando se realiza una interacción de forma asincrónica el intercambio es variable en el tiempo, ya que generalmente se emplean espacios donde se escribe un mensaje, y el receptor da respuesta posteriormente (Bejarano y Chacón, 2018).

Sin embargo, es indispensable analizar y reflexionar sobre las diferentes estrategias que se emplean para evaluar los aprendizajes en los entornos virtuales, ya que se cuenta con una variedad de herramientas que se pueden ajustar acorde a los objetivos de aprendizaje que se pretenden abarcar en una asignatura y con mira a que se están formando futuros profesionales (G. Rodríguez et al., 2011). Por ello, se debe considerar la finalidad de cada instrumento de evaluación y valorar las matrices de calificación que se emplean, las cuales deben procurar desarrollarse con un sentido objetivo, que permita al profesor evaluador realizar esta labor de una forma rigurosa.

Por ello, en los siguientes apartados se presentarán algunas técnicas e instrumentos que se pueden utilizar desde un espacio virtual. Es importante mencionar que existen muchos otros que no se van a abordar, pero se le dará énfasis a los expuestos en este escrito dado que corresponde a las técnicas que son objeto de estudio en el proceso de investigación. El objetivo es reconocer el concepto, las bondades de cada herramienta, el valorar sugerencias para su elaboración y detallar cómo estos pueden contribuir al proceso de evaluar los aprendizajes. Además, es de interés establecer el papel del estudiantado en cada uno de ellos, ya que de ello depende el proceso de aprender a aprender, a través de una participación activa, y con la particularidad de que la evaluación de los aprendizajes en la UNED se realiza en su mayoría de forma virtual.

2.1 Autoevaluación

La autoevaluación corresponde a una tipología, estrategia e inclusive a un instrumento que se emplea de muchas formas, ya que permite a cada persona evaluarse a sí misma. En este proceso el estudiantado asume un papel protagónico en el aprendizaje. Existe una autonomía que le permite: identificar su propio avance, establecer si realizó el logro de los objetivos de aprendizaje propuestos, saber si cuenta con las habilidades y destrezas que requiere, así como especificar las áreas que debe fortalecer para alcanzar las metas propuestas (Bejarano y Chacón, 2018).

De esta manera, la autoevaluación permite que se identifiquen las habilidades y debilidades por fortalecer en su desempeño académico y en la toma de decisiones sobre su proceso de aprendizaje, regular las actividades que realiza para alcanzar los objetivos de aprendizaje, valorar si debe adecuar las acciones que hace, aprender del error, ser crítico y establecer si realizó su máximo esfuerzo en una asignación. En este sentido, la autoevaluación constituye una estrategia que promueve la responsabilidad del estudiantado sobre su propio aprendizaje, al favorecer la reflexión y el análisis de las acciones o comentarios que realiza en una situación de aprendizaje, convirtiéndolo en un agente activo de su proceso evaluativo (Fernández, 2011).

Este tipo de estrategia requiere en el estudiantado un alto compromiso y ética con su propio proceso de aprendizaje, ya que de lo contrario se puede producir un efecto opuesto al deseado, en especial cuando se asigna una calificación que tiene repercusión en el promedio final de una asignatura o curso. Por ello, es imperativo que se planifiquen otras estrategias que acompañen la autoevaluación, establecer las necesidades, pasos y objetivos por alcanzar, de forma que se genere una guía del trabajo por realizar y el tiempo que se debe invertir (Fernández, 2011).

Generalmente la autoevaluación se efectúa en dos sentidos: para valorar el rendimiento y los resultados obtenidos en el aprendizaje (G. Rodríguez et al., 2011). Se puede realizar antes, durante o al final del proceso educativo, dependiendo de la finalidad para la cual se ha establecido. Además, este se puede realizar con carácter sumativo o formativo, queda a elección del equipo de especialistas a cargo de la asignatura. No obstante, sin importar el sentido o carácter con el que se desarrolle, se deben considerar algunos aspectos para su elaboración, como el aprendizaje que se espera que el estudiantado logre al finalizar el proceso educativo, así como la temática que se aborda es esta fase (Bejarano y Chacón, 2018).

Otros aspectos que debe de contemplar el profesorado son: la edad del estudiantado; establecer adecuadamente la categorización de los elementos que se van a especificar en la autoevaluación, la cual debe ser objetiva; así como el tipo de instrumento de evaluación por aplicar. Por ejemplo, algunos de los instrumentos que se puede implementar para aplicar la autoevaluación son listas de cotejo, rúbricas, escalas de Likert, contratos didácticos, cuestionarios con preguntas abiertas o cerradas, diarios de aprendizaje, cuadernos de superación de errores, conversaciones o entrevistas con el profesorado, entre otros. Además, se debe valorar la frecuencia con la cual el estudiantado se va a autoevaluar: diario, semanal, mensualmente o al final de una unidad de aprendizaje.

Sintetizando lo antes dicho, los hallazgos del curso indican que la autoevaluación favorece la autorregulación y la toma de conciencia del progreso, lo que *corrobora* resultados recientes que asocian la autoevaluación frecuente y con criterios claros con mayor motivación y, a menudo, mejor rendimiento.

No obstante, su impacto *disminuye* cuando no cuenta con reconocimiento en la calificación ni con descriptores transparentes; la literatura sugiere micro-autoevaluaciones recurrentes con retroalimentación breve y ejemplares (exemplars) para sostener el efecto (Craig y Kay, 2021; Heil y Ifenthaler, 2023; Dinç et al., 2024; Nieminen, 2025).

2.2 Foros académicos y de dudas

Los foros son espacios que generalmente se trabajan de forma asincrónica, donde se solicita al estudiantado algún tipo de intervención que involucre plantear una duda o consulta, investigar y dar respuesta a una pregunta, exponer un criterio personal en relación con un tema, entre otros (Bejarano y Chacón, 2018). Es importante especificar que los foros requieren de un seguimiento constante por parte del profesorado, sin importar el tipo de foro que se desarrolle, ya que, si el estudiantado no cuenta con experiencia en estas participaciones, es posible que no se logre alcanzar el objetivo para el cual fue establecido.

En este caso, son objeto de estudio específicamente el foro académico y el foro de dudas. El primero es de tipo pregunta y respuesta, es decir, se plantea una interrogante que debe ser respondida por el estudiantado, el cual observará las participaciones de sus pares hasta que cada persona realice su propia intervención. En este caso se espera que se muestre la construcción de ideas propias respaldadas con referencias previamente consultadas, donde se demuestre el uso de un pensamiento crítico (Bejarano y Chacón, 2018). Además, se espera un debate de ideas, ya que se deben efectuar replicas a dos de los participantes, las cuales se debe elaborar con una visión de análisis y reflexión de las ideas propuestas.

En los foros académicos se tiene la expectativa que se presente un diálogo en el cual se propicie el intercambio de ideas, pensamientos y enfoques, no hay respuestas correctas e incorrectas, pero sí se espera una participación que cuente con coherencia y relación con la temática propuesta, que demuestre conocimiento y presente argumentos lógicos (M. Rodríguez et al., 2020). La finalidad es propiciar un ambiente de aprendizaje a través de diferentes formas de interacción, es decir, donde se puede expresar por medio de palabras o imágenes el abordaje del tema por estudiar.

El segundo foro mencionado, el foro de dudas, corresponde a un sitio donde se pueden plantear dudas o consultas de cualquier índole, por lo que es indispensable en cualquier asignatura o curso que se media a través de entornos virtuales, en especial cuando se desarrolle en modalidad virtual (Bejarano y Chacón, 2018). Es recomendable que las respuestas se den en un plazo que no supere las 48 horas, dado que los planteamientos pueden contribuir a dar un seguimiento que propicie el proceso de enseñanza y aprendizaje, ya que permite el intercambio entre el personal docente-educandos, así como entre pares.

Sin importar el tipo de foro que se ejecute, estos deben contar con un mínimo de elementos para orientar su adecuado desarrollo. Entre estos se puede mencionar: un objetivo; el periodo para realizar la participación; si se realiza de forma individual o grupal; si es de carácter diagnóstico, formativo o sumativo; especificar las instrucciones donde se consideren las normas de netiqueta; preguntas generadoras; extensión mínima de cada participación; mínimo de interacciones; especificar si se debe cumplir con alguna regla para cita o referenciar las fuentes; así como exponer la importancia de cuidar la ortografía y congruencia de las ideas (Bejarano y Chacón, 2018).

A modo de síntesis, la utilidad de los foros para construir conocimiento entre pares *se corrobora* cuando existe presencia docente (modelado, preguntas de andamiaje, síntesis) y reglas claras de participación.

No obstante, en ausencia de un diseño auténtico ni acompañamiento, una parte del estudiantado percibe los foros como poco valiosos; se recomienda explicitar roles (iniciador/a, sintetizador/a, contra-argumentador/a), rúbrica breve y ventanas de respuesta de la tutoría (Xie et al., 2024; Schultz y Sandidge, 2022; Castellanos-Reyes et al., 2024).

2.3 Cuestionarios

El cuestionario corresponde a una técnica donde el estudiantado demuestra el conocimiento adquirido a través de una serie de preguntas, ya que se emplea con el objetivo de verificar el logro de los objetivos planteados en un curso o asignatura. Se puede aplicar de forma masiva por medio de los entornos virtuales y/o de manera sincrónica o asincrónica, ya que solo se requiere de una conexión estable de internet para aplicarla en un horario especifico, o bien, se habilita con un periodo más amplio de tiempo para que cada persona ingrese de acuerdo con su disponibilidad de tiempo (Bejarano y Chacón, 2018).

Para el diseño de un cuestionario se debe considerar una serie de pasos, entre ellos definir el constructo u objeto de medida, por ejemplo, los objetivos de aprendizaje que se evalúan en una asignatura. Seguidamente, se debe establecer la tabla de especificaciones, ya que es la base para desarrollar las preguntas que van a conformar el cuestionario. Una vez que se cuenta con el ejemplar, se efectúa un pilotaje para valorar correcciones o mejoras que el equipo considere pertinentes; de esta manera, finalmente se ensambla el instrumento definitivo (Bravo y Valenzuela, 2019).

Además, el desarrollo de los cuestionarios se puede aplicar de acuerdo con dos sentidos de desempeño: típico o máximo. En el caso del primero, en el desempeño típico se pretende evaluar lo que normalmente piensa, hace o cree una persona, por lo que no hay respuesta correctas o incorrectas, ya que lo que interesa es conocer el actuar natural. En el caso del segundo, el desempeño máximo se centra en pruebas de habilidades cognitivas o en la medición de conocimientos académicos, por lo que en estos casos sí interesa el puntaje obtenido o el dominio de contenidos que demuestra manejar la persona, como el caso particular de una prueba escrita (Bravo y Valenzuela, 2019).

De esta manera, al igual que en un examen, el cuestionario debe estar constituido por ítems objetivos y desarrollo, pero cuando se desarrolla de forma virtual, tiene la particularidad que puede ser alimentado por un banco de preguntas. Este último puede elaborarse con una serie de características que permitan velar porque se cumpla una serie de aspectos como la objetividad. Debido a que es el sistema quien puede proporcionar a cada estudiante un ítem diferente, donde la probabilidad de que dos estudiantes coincidan con el mismo enunciado va a depender de la cantidad de personas en la asignatura y el número de preguntas en el banco.

Adicionalmente, las plataformas virtuales permiten que el sistema autocalifique aquellas preguntas que son de respuesta breve o selección única; por el contrario, las de desarrollo deben ser valoradas por el profesorado (Bejarano y Chacón, 2018). Otra ventaja es que se puede agregar una retroalimentación general a cada una de las preguntas, por lo que el estudiantado puede reflexionar sobre el proceso efectuado y cuál es la respuesta correcta. De esta manera, el cuestionario proporciona información relacionada sobre cada estudiante y su avance en el dominio de los conocimientos.

A modo de síntesis, la percepción de claridad y utilidad de los cuestionarios *corrobora* la evidencia a favor del uso formativo (bancos aleatorios, intentos regulados y retroalimentación explicativa).

No obstante, la literatura advierte avanzar hacia tareas más *auténticas* y variedad cognitiva de ítems para evitar un foco excesivo en el recuerdo literal; se proponen también minutas metacognitivas post-intento (Heil y Ifenthaler, 2023).

2.4 Videoconferencias

Las videoconferencias corresponden a una herramienta sincrónica en la que pueden interactuar dos o más personas que necesariamente no se encuentran todas en el mismo lugar, y donde se cuenta con el apoyo de video por medio de una cámara web, un micrófono y hasta posibilidad de escribir texto (Bejarano y Chacón, 2018). En este espacio se cuenta con la posibilidad de compartir información y de forma colaborativa analizar, reflexionar o resolver problemas relacionados con una temática en específico.

Sin embargo, de acuerdo con Llano et al., (2011), existen seis diferentes formas para desarrollar la videoconferencia: transmisión de video y audio a grandes audiencias, transmisión de video y audio punto a punto, transmisión de video y audio multipuntos, transmisión de video y audio por medio de software de videoconferencia de escritorio punto a punto, y transmisión de video y audio por medio de software videoconferencia de escritorio multipunto. A partir de la clasificación propuesta por estos autores, a continuación se describen las principales características de cada modalidad, las cuales dependen de las condiciones en las que se encuentren los participantes.

Para el caso de la transmisión de video y audio a grandes audiencias, corresponde al caso cuando se tiene un grupo de personas reunidas en una sala, quienes escuchan y observan al expositor que se proyecta en una pantalla. Por su parte, la transmisión de video y audio punto a punto es cuando se tiene un grupo pequeño de personas reunidas y hay una persona conectada de forma virtual, compartiendo las ideas que se planificaron desarrollar. La transmisión de video y audio multipuntos es similar a la anterior, con la particularidad de que se tiene a más de un individuo conectado por medio de video y audio, manteniendo un grupo de forma presencial.

En cuanto a transmisión de video y audio por medio de software de videoconferencia de escritorio punto a punto, corresponde a dos personas que interactúan por medios digitales, donde cada uno se encuentra en lugares diferentes. Mientras tanto, la transmisión de video y audio por medio de software videoconferencia de escritorio multipunto es un grupo de personas que se encuentran en diferentes lugares, pero coinciden de forma digital en una sala virtual para el desarrollo de la reunión.

De esta forma, para la ejecución de una videoconferencia se deben considerar tres procesos para planificarla, donde se considere lo que se debe hacer antes, durante y después de su aplicación. Antes, se debe considerar aspectos relacionados con los preparativos; durante, se debe establecer un protocolo en el que se establezca los diferentes procedimientos que se deben realizar. Y finalmente, se debe plantear las actividades que se ejecutaran posteriormente. Una vez que se tiene claridad de lo planteado en los puntos anteriores, se puede comunicar el horario a los participantes para su desarrollo (Bejarano y Chacón, 2018).

Por lo que, entre las ventajas que tiene la videoconferencia, se puede indicar que permite la comunicación de diferentes personas sin importar la ubicación geográfica, se puede obtener un ahorro en el tiempo dado que se evitan los traslados, se puede ejecutar por medio de software que son de fácil uso, facilita la organización de las reuniones, reduce los costos, entre otros. Mientras, algunas de las desventajas se pueden mencionar falta de capacitación del personal para su uso, ausencia de un uso instrumental de las tecnologías por parte del estudiantado y/o el profesorado, entre otras (Llano et al., 2011).

A modo de síntesis, la alta valoración de las sesiones sincrónicas *corrobora* que, bien diseñadas, reducen carga cognitiva percibida para aclarar dudas y practicar en tiempo real, manteniendo niveles de aprendizaje y satisfacción comparables o superiores al asincrónico.

No obstante, la literatura *matiza* que su eficacia depende de guiones breves, sondeos y pausas para preguntas, y de su *combinación* con materiales asincrónicos estructurados (Fabriz et al., 2021; Hung et al., 2024; Martin et al., 2021).

2.5 Matrices de calificación

Las matrices de calificación son recursos que apoyan la evaluación de los aprendizajes cuando se utilizan estrategias o técnicas durante el proceso educativo. Entre los instrumentos que se pueden emplear para apoyar la calificación se pueden mencionar: listas de cotejo, escalas de calificación, matrices de valoración, entre otros; los cuales contienen criterios y una escala que generalmente se encuentran ubicados en una tabla y que permiten al estudiantado valorar su proceso de aprendizaje y al profesorado evaluar de una forma objetiva (Gómez et al., 2013).

Las listas de cotejo consisten en un listado que contiene una serie de criterios relacionados con conocimientos, habilidades o actitudes, de los cuales se especifica si se cumplen o no. Dichas listas se pueden diseñar de forma cualitativa (Sí o No, por ejemplo) y cuantitativa (1 o 0). Por lo tanto, correspondería a un método en el cual se requiere verificar si se cuenta o no con el criterio establecido, es decir, es de sencilla utilización, ya que solo debe marcar la casilla que corresponde a la situación observada, lo cual favorece la objetividad de parte del profesorado. De esta manera, para su uso es esencial que el evaluador considere utilizar una línea por indicador, especificar el logro esperado por el estudiantado y conversar con este los resultados obtenidos (Bejarano y Chacón, 2018).

Por su parte, las matrices de valoración o rúbricas se aplican con el objetivo de establecer las evidencias de aprendizaje y que deben aplicarse a lo largo del proceso educativo, las cuales tienen la particularidad de que pueden darse a conocer con antelación, se pueden emplear con carácter sumativo o formativo, son de fácil uso y no se consideran elementos adicionales (Bejarano y Chacón, 2018). Además, se debe especificar que se cuenta con varios tipos de rúbricas, las cuales se clasifican en matriz de valoración analítica, de tipo holística o global, y ponderada.

La matriz de valoración analítica tiene la particularidad de que considera por separado cada parte que compone el producto final, ya que como su nombre lo indica, espera analizar el proceso que lleva al resultado esperado. Por su parte, la matriz de tipo holística o global busca efectuar una evaluación de forma completa, por lo que considera el proceso como un todo, en esta no interesan las partes, sino el resultado final. Y para finalizar, la matriz ponderada considera el aprendizaje en una parte determinada del proceso, ya que considera las particularidades que se pudieron presentar en una sección específica (Gómez et al., 2013).

Otro instrumento de evaluación para el registro de notas son las escalas de calificación, la cual permite establecer el grado de cumplimiento de comportamiento, habilidad o actitud especifica, pero sin especificar el nivel de logro esperado, ya que las escalas que se presentan se enfocan en la frecuencia, intensidad o calidad. De esta manera, se cuenta con dos categorías de escala: la numérica y descriptiva (Gómez et al., 2013).

En el primer caso, la escala numérica, como su nombre lo especifica, se asignan valores al grado en el que el estudiantado cumple un nivel de logro. Sin embargo, la escala descriptiva es más específica, ya que permite que se presente un detalle más amplio del atributo que se espera observar en el indicador establecido, por lo que, generalmente, se utiliza para procesos de autoevaluaciones o autorregulación (Gómez et al., 2013).

A modo de síntesis, el uso de rúbricas *corrobora* mejoras en transparencia y coherencia evaluativa cuando se comparten desde el inicio y orientan la retroalimentación.

No obstante, su efecto *se debilita* si no se emplean activamente para auto/coevaluación o si los descriptores son vagos; se recomiendan *e-rúbricas* y criterios que apoyen la autorregulación (Taylor et al., 2024; Panadero et al., 2025; Radović y Seidel, 2025).

En conjunto, el marco y los hallazgos corroboran beneficios de autoevaluación, foros con presencia docente, cuestionarios formativos, videoconferencias guionadas y rúbricas explícitas; *matizan* que su efectividad depende del diseño (criterios, retroalimentación, autenticidad de tareas) y de la coherencia de uso a nivel de cátedra.

3. METODOLOGÍA

Este estudio se desarrolló en la Universidad Estatal a Distancia, específicamente en la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, durante el primer semestre del 2022. Su objetivo primordial fue dirigirse a los estudiantes inscritos en la asignatura Matemática para Computación I, así como a las personas tutoras responsables de grupos específicos en dicho curso y al encargado de la cátedra. Dado que el enfoque de la investigación es descriptivo, orientado a observar, referir y fundamentar aspectos vinculados con la mediación pedagógica, la recopilación de información proporcionada por el cuerpo docente se llevó a cabo a través de entrevistas con personas tutoras y el responsable de la cátedra (Hernández et al., 2014). Además, se utilizó un cuestionario dirigido a los estudiantes con la finalidad de explorar las subvariables: la interacción estudiante-profesor, la interacción entre estudiantes, la utilización de recursos didácticos y estrategias pedagógicas, la interacción en el entorno virtual y, finalmente, se considerará el papel del docente.

3.1 Diseño y enfoque

Se desarrolló un estudio descriptivo con triangulación de fuentes: cuestionario a estudiantes, entrevistas a las personas tutoras y a la persona encargada de cátedra, y revisión documental del entorno virtual. El abordaje fue mixto con predominio descriptivo: el componente cuantitativo, con las frecuencias y porcentajes; y el componente cualitativo, con un análisis temático de entrevistas y revisión documental.

3.2 Contexto y participantes

El estudio se realizó en la UNED, en la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales, durante el primer semestre de 2022, en la asignatura Matemática para Computación I (03068). La población estuvo compuesta por 854 estudiantes matriculados, 14 personas tutoras y 1 persona encargada de cátedra. La muestra analizada quedó conformada por 72 estudiantes (participación voluntaria), 13 personas tutoras y un encargado de la cátedra.

3.3 Estrategia de muestreo y criterios de inclusión

El muestreo fue no probabilístico, por conveniencia/voluntario, condicionado por el acceso a los canales institucionales y la disponibilidad de participación. Criterios de inclusión: estar matriculado en el curso en el periodo de estudio, desempeñarse como personas tutoras de un grupo de la asignatura o ser la persona encargada de cátedra. No se amplió el tamaño muestral por decisión editorial y del alcance del artículo.

3.4 Tasa de respuesta

- Estudiantes: 72 de 854 (8,4%).
- Personas tutoras: 13 de 14 (92,9%).
- Encargada/o de cátedra: 1 de 1 (100%).

Se eliminaron respuestas duplicadas en el cuestionario (control por nombre), manteniendo 72 casos válidos. Esto implica que, dada la tasa de respuesta del estudiantado (8,4 %), los resultados deben interpretarse como descriptivos y no inferenciales para la población total.

3.5 Técnicas e instrumentos

- Cuestionario a estudiantes: 20 ítems cerrados, escala tipo Likert: Siempre, Casi siempre, A veces, Casi nunca, Nunca.
- Estructura por eventos/indicios del cuadro operacional: mediación pedagógica (6 ítems), evaluación del aprendizaje (6 ítems), validez y confiabilidad de los instrumentos (8 ítems).
- Entrevistas semiestructuradas: 20 preguntas a personas tutoras y 14 a la persona encargada de cátedra, alineadas con los objetivos diagnósticos.
- Matriz de revisión documental del entorno virtual con 6 ejes: autoevaluación, foros académicos, cuestionarios, videoconferencias, matrices de calificación y foro de dudas.

Resumen operativo: el cuestionario a estudiantes incluyó 20 ítems cerrados tipo Likert; las entrevistas semiestructuradas se aplicaron a 13 personas tutoras y a la persona encargada de cátedra. Las técnica e instrumentos utilizados fueron elaborados por las autoras como parte de un estudio previo y validado en el marco de una investigación de posgrado (Rojas y Sánchez, 2022).

3.6 Construcción de instrumentos

Los instrumentos se derivaron del cuadro operacional (objetivos → eventos → definiciones conceptuales → indicios/indicadores), garantizando trazabilidad entre objetivos, variables y reactivos. El cuestionario fue implementado en Forms Institucional y las guías de entrevista se elaboraron con base en la literatura y en las necesidades diagnósticas de la cátedra.

3.7 Validación de contenido

La validación de los instrumentos se realizó por juicio de dos personas expertas, con formación de posgrado y experiencia en docencia universitaria y evaluación educativa. Se emitieron observaciones formales y se introdujeron ajustes de redacción, claridad y alineación con los objetivos. Se cuenta con cartas de validación y anexos de respaldo.

3.8 Procedimiento de recolección de datos

- Cuestionario: distribución a través del correo interno del campus virtual *EstudiaU* por parte de las personas tutoras y de la persona encargada de cátedra; ventana de respuesta abierta durante el periodo lectivo. Tiempo medio de respuesta: aprox. 6 min 47 s. Recabó percepciones sobre la claridad, validez y pertinencia de los instrumentos de evaluación, mientras que los foros académicos fueron analizados desde la calidad de las intervenciones, el nivel de argumentación y la articulación con los contenidos de la asignatura.
- Entrevistas: aplicación individual y/o grupal, modalidad virtual, con consentimiento informado. Las entrevistas fueron desarrolladas en formato virtual, grabadas con autorización de los participantes y posteriormente transcritas de manera literal en un documento denominado "Transcripción de entrevistas a las personas tutoras".
- Matriz de revisión documental del entorno virtual con 6 ejes: autoevaluación, foros académicos, cuestionarios, videoconferencias, matrices de calificación y foro de dudas. Esta revisión permitió identificar el tipo de actividades, su propósito formativo y el nivel de interacción que promovían.

3.9 Plan de análisis de datos

- Cuantitativo: estadística descriptiva, de frecuencias y porcentajes. Para el informe se agrupó la escala Likert en dos categorías: S+CS y AV+CN+N; se consideró resultado positivo cuando S+CS ≥ 75 %. Todos los porcentajes del estudiantado se calculan sobre $N = 72$.

- Cualitativo: análisis temático de contenido con categorías deducidas del cuadro operacional y triangulación entre fuentes (estudiantes, personas tutoras, documentación).

3.10 Consideraciones éticas y resguardo de datos

Se obtuvieron las autorizaciones institucionales, dirección de escuela y cátedra. La participación fue voluntaria, con consentimiento informado (entrevistas) y aviso de confidencialidad (cuestionario). Los datos se trataron de forma anónima/pseudonimizada, se usaron exclusivamente con fines académicos y se almacenaron en repositorios protegidos. Se respetó el Reglamento General Estudiantil y las políticas de la UNED sobre investigación y evaluación en entornos virtuales.

Autorización institucional: Código *[CATMAT-003-2022]*, de fecha [05/05/2022]. La participación fue voluntaria, con consentimiento informado (entrevistas) y aviso de confidencialidad (cuestionario). Los datos se trataron de forma anónima/pseudonimizada, se usaron exclusivamente con fines académicos y se almacenaron en repositorios protegidos, conforme al Reglamento General Estudiantil y a las políticas de investigación de la UNED.

4. ANÁLISIS Y DISCUSIÓN DE RESULTADOS

Con base en los resultados del cuestionario (N = 72), todos los indicios superaron el umbral de positividad definido (≥ 75 % en S–CS), lo que sugiere una implementación consistente de prácticas de evaluación en el entorno virtual de la asignatura. A continuación, se contrasta cada tema con evidencia internacional reciente y se discuten implicaciones para el contexto de la UNED. Estos hallazgos coinciden con resultados previamente documentados en un estudio aplicado en el mismo contexto institucional (Rojas y Sánchez, 2022).

4.1 Autoevaluación

El 81 % del estudiantado indicó que las actividades del entorno virtual favorecen la autodisciplina, la organización del tiempo y el autoaprendizaje. La literatura reciente respalda este hallazgo: una revisión sistemática específica sobre autoevaluación en línea en educación superior que analiza estudios publicados entre los años 2011 y 2021, reporta relaciones positivas con la motivación y efectos neutrales o positivos sobre el rendimiento cuando se diseñan tareas claras y se provee retroalimentación formativa (Craig y Kay, 2021). De igual modo, un estudio de 2024 con modelado multinivel halló que la participación frecuente en recursos de autoevaluación predice mejores calificaciones en cuestionarios, proyectos finales y asignaciones de laboratorio en cursos totalmente en línea (Dinç et al., 2024). Asimismo, revisiones de evaluación en línea sitúan la autoevaluación junto con la coevaluación como modos prometedores para apoyar la autorregulación si se acompañan de criterios explícitos (Heil y Ifenthaler, 2023).

No obstante, un 19 % manifestó que esto ocurre solo a veces o casi nunca, lo que sugiere heterogeneidad en el diseño o la implementación. Para cerrar esta brecha, la evidencia propone micro-autoevaluaciones recurrentes con retroalimentación explicativa, uso de ejemplos modelo (exemplars) y criterios transparentes para favorecer el juicio evaluativo del estudiantado (Dinç et al., 2024; Heil y Ifenthaler, 2023). Además, enfoques recientes recomiendan situar la autenticidad en el centro, así como vincular la autoevaluación a tareas y productos significativos, para evitar prácticas mecánicas y potenciar el aprendizaje (Nieminen, 2025).

4.2 Foros académicos

El 76 % consideró que los foros permiten construir contenido entre participantes. La evidencia 2019–2025 subraya que el impacto de los foros depende de la participación del profesorado: una revisión sistemática concluye que la presencia, la frecuencia y, sobre todo, el tipo de intervención docente (modelado, preguntas de andamiaje, síntesis) se asocia a mejores desempeños (Xie et al., 2024). En contraste, estudios cualitativos durante la pandemia reportan que los foros pueden percibirse como repetitivos o poco auténticos si las consignas no invitan a la indagación y si no hay respuestas oportunas a las dudas (Schultz y Sandidge, 2022).

En el caso estudiado, el 24 % no percibe valor consistente en los foros. Dos acciones, alineadas con la evidencia pueden cerrar esta brecha: (a) explicitar roles (iniciador/a, sintetizador/a, contra-argumentador/a) y publicar una rúbrica breve de participación; y (b) institucionalizar "ventanas de respuesta" y síntesis periódicas por parte de la tutoría para visibilizar la presencia docente (Xie et al., 2024). Además, estudios longitudinales señalan que la presencia social tiende a disminuir con el tiempo si la interacción entre pares es baja, por lo que conviene diseñar tareas colaborativas que fomenten interacciones significativas (Castellanos-Reyes et al., 2024).

4.3 Cuestionarios en línea

El 85 % afirmó que los cuestionarios permiten evaluar los contenidos de manera clara y concreta. Una revisión sistemática reciente identifica que los cuestionarios formativos con bancos aleatorios, intentos regulados y retroalimentación explicativa apoyan la autorregulación y se asocian con mejores desempeños finales (Heil y Ifenthaler, 2023). En paralelo, se recomienda avanzar hacia evaluaciones auténticas que integren resolución de problemas, proyectos o aplicaciones contextualizadas, manteniendo estándares de fiabilidad y transparencia (Mate et al., 2021; Heil y Ifenthaler, 2023).

Para el contexto de la UNED, se sugiere: (i) diversificar los tipos de ítems (más allá de V/F); (ii) activar retroalimentación con pistas y enlaces a recursos; (iii) liberar prácticas de manera espaciada a lo largo del semestre; y (iv) añadir una breve "minuta metacognitiva" posterior a cada intento para promover reflexión estratégica. Estos principios están alineados con factores de éxito identificados en la literatura (Heil y Ifenthaler, 2023).

4.4 Videoconferencias

El 86 % señaló que las videoconferencias facilitan formular preguntas, realizar ejercicios y discutir temas con el personal docente. La evidencia comparativa más reciente sugiere que tanto la enseñanza sincrónica como la asincrónica pueden lograr altos niveles de aprendizaje y satisfacción; sin embargo, la carga cognitiva percibida suele ser menor en contextos sincrónicos, lo que favorece la resolución de dudas en tiempo real (Hung et al., 2024). A su vez, meta-análisis y estudios con grandes muestras durante y después de la pandemia muestran ventajas pequeñas, pero consistentes de lo sincrónico para apoyar la competencia percibida y la interacción (Fabriz et al., 2021; Martin et al., 2021).

Para este curso, los hallazgos avalan el uso de sesiones sincrónicas para resolución de problemas y asesoría, combinadas con materiales asincrónicos bien diseñados. Buenas prácticas incluyen: agendas con micro-demostraciones, sondeos durante la clase, pausas deliberadas para preguntas y la publicación de "hojas de errores comunes" tras cada sesión. Esta combinación equilibra carga cognitiva, apoyo a la competencia y flexibilidad temporal.

4.5 Rúbricas

El 82 % estuvo de acuerdo en que las rúbricas permiten valorar el aprendizaje. La evidencia reciente confirma que las rúbricas aumentan la transparencia y la consistencia, aunque su efecto depende de que se comprendan y utilicen activamente (Taylor et al., 2024). En paralelo, análisis de plataformas de *e-rúbricas* recomiendan fortalecer criterios y niveles, y vincular la retroalimentación a evidencias de desempeño mediante herramientas digitales (Panadero et al., 2025). Asimismo, se ha introducido y validado una rúbrica para valorar el apoyo a la autorregulación en entornos de aprendizaje con tecnología (SRL-S), que puede servir para diseñar tareas con mayor foco en planificación, monitoreo y reflexión (Radović y Seidel, 2025).

Para el caso de la UNED se recomienda: (a) compartir las rúbricas desde el inicio con ejemplos anotados; (b) utilizarlas como base para la retroalimentación docente y para la auto/coevaluación estudiantil; y (c) considerar rúbricas que integren criterios de autorregulación cuando la tarea lo amerite. Estas acciones favorecen la comprensión de expectativas y la coherencia entre sedes y personas tutoras.

En la Tabla 1, se presentan las frecuencias absolutas y relativas obtenidas a partir del cuestionario (N=75) implementada por el profesorado en el entorno virtual, con base en los datos reportados en la tesis de Rojas y Sánchez (2022).

Tabla 1. Distribución de frecuencia de la Evaluación de los aprendizajes implementada por el profesorado en el entorno virtual

Indicios/ítems	**Estudiantado**			
	Frecuencias			
	S-CS		**AV-CN-N**	
	FA	**%**	**FA**	**%**
1. ¿Los entornos virtuales en la asignatura propician el desarrollo de autodisciplina, organización del tiempo, capacidad de autoaprendizaje y motivación?	58	81	14	19

2. ¿Los foros académicos permiten construir el contenido entre los participantes?	55	76	17	24
3. ¿Los cuestionarios propician la evaluación de los contenidos de una forma clara y concreta?	61	85	11	15
4. ¿Las videoconferencias permiten formular preguntas, realizar ejercicios, discutir sobre un tema entre el personal docente y el resto de la población estudiantil?	62	86	10	14
5. ¿Las rúbricas permiten valorar el aprendizaje logrado por el estudiante?	59	82	13	18
6. ¿Qué tan rápida y eficiente es la respuesta que se da al foro de dudas por parte del personal docente?	60	83	12	17
Total (Promedio)	**59**	**82**	**13**	**18**

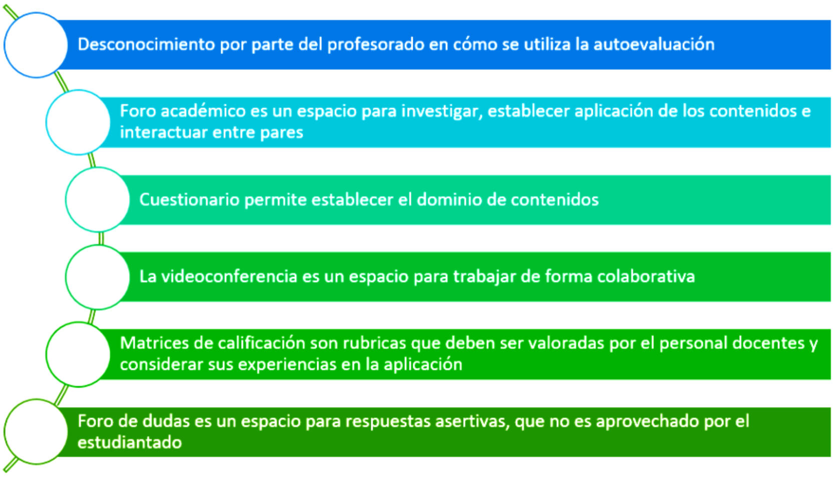
Nota: Simbología: Siempre (S); Casi Siempre (CS), A Veces (AV), Casi Nunca (CN), Nunca (N), Frecuencia Absoluta (FA), Frecuencia Relativa (FR).

Fuente: Elaboración propia

Por su parte, en la Figura 1, se presenta un resumen de los principales hallazgos obtenidos a partir de la triangulación de las entrevistas aplicadas a las personas tutoras, la matriz de revisión documental y los cuestionarios aplicados, con base en la información recopilada y sistematizada en los anexos de la tesis. En ella se evidencia la necesidad de valorar algunos de los instrumentos de evaluación del aprendizaje implementados en las asignaturas, dado que se identificaron consultas y vacíos de conocimiento por parte del profesorado en torno a la autoevaluación, las matrices de calificación y el foro de dudas.

En particular, el hallazgo sobre el desconocimiento del profesorado en el uso de la autoevaluación proviene de la pregunta 7 (¿Cuál es la finalidad de realizar autoevaluación en cada sección o unidad abordada desde el entorno virtual de la asignatura?) de la guía de entrevista, en las cuales varias personas tutoras manifestaron no tener claridad sobre el propósito ni sobre la forma de implementación de esta herramienta. Este resultado fue confirmado en la revisión documental del entorno virtual, donde se constató que la autoevaluación aparece activa en la plataforma, pero sin retroalimentación asociada ni incidencia en la calificación.

Figura 1. Principales hallazgos



Fuente: Elaboración propia

5. CONCLUSIONES

Los resultados evidencian que la participación del estudiantado en los entornos virtuales se caracteriza por una selectividad vinculada al peso evaluativo de las actividades. Las personas estudiantes tienden a priorizar aquellas tareas con mayor ponderación, mientras que, una vez alcanzada la nota mínima de aprobación, se observa una disminución en su involucramiento. Este patrón sugiere que las decisiones de diseño, especialmente la distribución de porcentajes y la secuencia temporal de las actividades, influyen directamente en la constancia de la participación y en la motivación académica a lo largo del curso.

En este contexto, las videoconferencias emergen como el espacio de mayor valor formativo y de acompañamiento. Las personas participantes las identifican como el medio más efectivo para resolver dudas en tiempo real, practicar ejercicios y fortalecer la interacción entre pares y con la tutoría. Más allá de su función evaluativa, estos encuentros sincrónicos contribuyen al sentido de pertenencia, la colaboración y la construcción de comunidad, aspectos esenciales para la permanencia estudiantil y la mejora del aprendizaje en modalidad virtual.

Los cuestionarios y las rúbricas también se perciben como instrumentos valiosos para valorar el aprendizaje. No obstante, su potencial se amplifica cuando integran retroalimentaciones explicativas, una mayor diversidad cognitiva en los ítems y criterios explícitos que orienten la mejora continua. La claridad de estos criterios no solo facilita la comprensión del proceso evaluativo, sino que también promueve la autorregulación del aprendizaje y la toma de decisiones informadas por parte del estudiantado.

En contraste, la autoevaluación continúa siendo un recurso subutilizado. Aunque se reconoce su existencia y su valor teórico, su aplicación práctica es desigual y con escaso impacto formativo. La ausencia de criterios claros, la falta de retroalimentación y el hecho de no tener incidencia en la calificación reducen su potencial para fomentar la autorreflexión y la autonomía del aprendizaje. Este hallazgo revela la necesidad de promover una cultura evaluativa que otorgue mayor sentido pedagógico a la autoevaluación, tanto en el diseño de los entornos como en la formación del personal tutor.

Por su parte, los foros académicos muestran una utilidad más heterogénea. Si bien la mayoría del estudiantado valora su aporte al intercambio de ideas y la comprensión de contenidos, una proporción relevante no percibe sistemáticamente su valor. La efectividad del foro depende de la claridad de su propósito, de la definición de roles y criterios de participación, así como de la presencia docente para orientar, sintetizar y consolidar el aprendizaje colectivo.

En conjunto, los hallazgos confirman la pertinencia de las estrategias de evaluación implementadas en el curso Matemática para Computación I y, al mismo tiempo, identifican áreas de mejora relacionadas con la coherencia del diseño evaluativo, la retroalimentación formativa y la activación de la autoevaluación como práctica regular. Todo ello reafirma que la evaluación del aprendizaje en entornos virtuales no solo debe cumplir una función calificadora, sino también formativa, reflexiva y orientadora, contribuyendo así al fortalecimiento del aprendizaje autónomo y significativo.

6. RECOMENDACIONES

A partir de los resultados obtenidos, se propone fortalecer el diseño y la ponderación de las actividades evaluativas mediante una distribución escalonada del peso a lo largo del periodo académico. Incorporar actividades de bajo riesgo con retroalimentación temprana y establecer mínimos de participación en componentes clave, como foros y prácticas guiadas, favorecerá la constancia y el compromiso del estudiantado más allá del umbral de aprobación.

Asimismo, se recomienda mantener y planificar las videoconferencias como espacios sincrónicos estratégicos para la mediación y la evaluación formativa. Estas sesiones pueden enriquecerse con guiones didácticos que incluyan micro-demostraciones, resolución guiada de ejercicios, sondeos de comprensión, pausas para preguntas y la elaboración posterior de una hoja de errores comunes que permita reforzar el aprendizaje autónomo.

En cuanto a los foros académicos, resulta pertinente redefinir su propósito pedagógico y fortalecer su estructura mediante la asignación de roles explícitos, como iniciador/a, sintetizador/a o contra-argumentador/a, y el uso de una rúbrica breve que oriente la calidad de la participación. Al cierre de cada período, la tutoría podría elaborar una síntesis de las discusiones con el fin de visibilizar su presencia y consolidar el aprendizaje colectivo.

Respecto a los cuestionarios, se sugiere potenciar su carácter formativo mediante la inclusión de ítems con diferentes niveles cognitivos, el uso de bancos de preguntas aleatorias y la incorporación de retroalimentaciones explicativas que remitan a recursos complementarios. Además, la inclusión de breves minutas metacognitivas después de cada intento puede favorecer la autorreflexión y la autogestión del aprendizaje.

La autoevaluación, por su parte, debe ser fortalecida como herramienta formativa. Se recomienda implementar micro-autoevaluaciones periódicas con criterios claros, retroalimentación inmediata y un pequeño valor ponderado, entre un 5 % y un 10 %, o bien establecer condicionantes de avance (por ejemplo, "completar para desbloquear") que legitimen su realización.

De igual modo, las rúbricas deben asumirse como auténticos contratos de aprendizaje. Publicarlas antes de la entrega de las tareas, acompañadas de ejemplos anotados, y utilizarlas tanto para la evaluación como para la retroalimentación, la autoevaluación y la coevaluación, puede garantizar mayor coherencia y transparencia. El uso de *e-rúbricas* compartidas entre grupos o sedes contribuirá a estandarizar los criterios y mejorar la equidad en la evaluación.

Finalmente, se recomienda desarrollar procesos de capacitación focalizados en evaluación formativa dirigidos a tutores y estudiantes. Los microtalleres sobre diseño y uso de autoevaluaciones, retroalimentación efectiva y lectura de rúbricas permitirán consolidar una cultura evaluativa coherente con los principios de la educación a distancia y centrada en el aprendizaje significativo.

DECLARACIONES

ERQ y SSS concibieron la idea presentada. ERQ y SSS indagaron en la teoría. ERQ y SSS adaptaron y diseñaron las estrategias y recopilaron los datos. ERQ y SSS analizaron los datos y redactaron la versión inicial del manuscrito. ERQ colaboró en la revisión crítica y estructuración del texto final. Ambas personas autoras participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo completo.

Declaración de disponibilidad de datos

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por las personas autoras correspondientes, ERQ y SSS (Estibaliz Rojas Quesada y Seidy Sánchez Salas), previa solicitud razonable.

Agradecimientos

Agradecemos a la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica y a la Cátedra de Matemática Fundamental por permitir hacer la investigación en la que participaron los docentes y estudiantes involucrados en la consigna de los datos aquí documentados. De igual manera agradecemos al Dr. Manuel Baltodano Enríquez por la dirección de este trabajo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Bejarano, A. G., y Chacón, X. (2018). *Evaluación de los aprendizajes con apoyo de recursos tecnológicos*. EUNED.

Bravo, T., y Valenzuela, S. (2019). *Desarrollo de instrumentos de evaluación: cuestionarios. Cuadernillo Técnico de Evaluación*. INEE.

Castellanos-Reyes, D., Richardson, J. C., y Maeda, Y. (2024). The evolution of social presence: A longitudinal exploration of the effect of online students' peer-interactions using social network analysis. *The Internet and Higher Education*, 61, 100939.

Craig, C. D., y Kay, R. H. (2021). *Self-assessment in online learning for higher education: A systematic review*. ICERI2021 Proceedings.

Dinç, E., Zhang, A. Y., y Millet, A. L. (2024). The importance of frequent engagement with self-assessment resources in online learning: A hierarchical linear modeling approach. *Journal of Educational Technology Systems*, 53(1), 46–62.

Fabriz, S., Mendzheritskaya, J., y Stehle, S. (2021). Impact of synchronous and asynchronous settings of online teaching and learning on students' experience during COVID-19. *Frontiers in Psychology*, 12, 733554.

Fernández, S. (2011). La autoevaluación como estrategia de aprendizaje. *Revista de Didáctica Español Lengua Extranjera*, (13), 1-15

Gómez, G., Salas, N., Valerio, C., Durán, Y., Gamboa, Y., Jiménez, L., y Umaña, C. (2013). *Consideraciones técnico-pedagógicas en la construcción de listas de cotejo, escalas de calificación y matrices de valoración para la evaluación de los aprendizajes en la Universidad Estatal a Distancia.* UNED. https://www.uned.ac.cr/dpmd/pal/images/documentos/Profesores/consideraciones-tec-pedag-inst-evaluacion.pdf

Heil, J., y Ifenthaler, D. (2023). Online assessment in higher education: A systematic review. *Online Learning*, 27(1), 187–218.

Hung, C.-T., Wu, S.-E., Chen, Y.-H., Soong, C.-Y., Chiang, C.-P. **y** Wang, W.-M. (2024). The evaluation of synchronous and asynchronous online learning: Student experience, learning outcomes, and cognitive load. *BMC Medical Education*, 24, Article 5311.

Llano, J., Ainciburu, M. C., y Juan, O. (2011). La enseñanza de español a través de videoconferencias de escritorio. integración en las diferentes modalidades de aprendizaje y desarrollo de competencias. *Cuaderno Comillas*, (2), 51-68

Martin, F., Polly, D., Jokiaho, A., y May, B. (2021). A meta-analysis on the effects of synchronous online learning on cognitive, affective, and behavioral learning outcomes. *The International Review of Research in Open and Distributed Learning*, 22(4), 205–220.

Nieminen, J. H. (2025). Placing authenticity at the heart of student self-assessment: An integrative review. *Teaching in Higher Education*, 30(3), 640–662.

Panadero, E., Fernández-Ortube, A., Krebs, R., y Roelle, J. (2025). Analysis of online rubric platforms: Advancing toward erubrics. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 50, 1–19.

Radović, S., y Seidel, N. (2025). Introduction to the SRL-S rubric for evaluation of innovative higher educational technology for self-regulated learning. *Innovative Higher Education*, 50, 1169–1202.

Rodríguez, G., Ibarra, M., y Gómez, M. (2011). e-Autoevaluación en la universidad: un reto para profesores y estudiantes. *Revista de Educación*, (356), 401-430

Rodríguez, M., Bernal, G., Pérez, V., Atencia, A., y Ramos, F. (2020). Análisis de las habilidades de pensamiento crítico en los foros académicos virtuales. *Teknos Revista Científica*, 20(2), 69-76

Rojas Quesada, E. O., y Sánchez Salas, S. G. (2022). *Propuesta de una estrategia de evaluación de los aprendizajes en entornos virtuales, que garantiza la validez y confiabilidad en los instrumentos de evaluación, que se aplican al estudiantado en el curso de Matemática para Computación I, de la Escuela de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Estatal a Distancia, durante el I semestre de 2022* [Proyecto final de graduación de maestría profesional, Universidad Latina de Costa Rica].

Rosales, M. (2020). Evaluación de aprendizajes en entornos virtuales. *Revista Educación Superior*, 19(30), 117-132

Schultz, K., y Sandidge, C. (2022). Improving online discussion boards: What do students say? *Journal of University Teaching & Learning Practice*, 19(5), Article 21.

Taylor, B., Kisby, F., y Reedy, A. (2024). Rubrics in higher education: An exploration of undergraduate students' understanding and perspectives. *Assessment & Evaluation in Higher Education*, 49(6), 799–809.

Xie, J., Adjei, M., y Correia, A.-P. (2024). The effects of instructor participation in asynchronous online discussions on student performance: A systematic review. *British Journal of Educational Technology*, 55(7), e144–e158.

Anexo 1. Extracto del cuestionario a estudiantes

A continuación, se presenta un extracto ilustrativo del cuestionario aplicado a estudiantes. El instrumento completo consta de 20 ítems tipo Likert (Siempre, Casi siempre, A veces, Casi nunca, Nunca).

Indicador / Subvariable	Ítem de ejemplo	Escala de respuesta
Interacción estudiante–profesor	El profesorado crea un ambiente favorable para el aprendizaje en actividades sincrónicas y asincrónicas.	Siempre / Casi siempre / A veces / Casi nunca / Nunca
Interacción entre estudiantes	Durante el curso se promueven actividades que requieren colaboración entre estudiantes.	Siempre / Casi siempre / A veces / Casi nunca / Nunca
Recursos didácticos	Los recursos didácticos (apuntes, videos, simuladores) apoyan de forma efectiva los contenidos del curso.	Siempre / Casi siempre / A veces / Casi nunca / Nunca
Estrategias didácticas	Las estrategias didácticas empleadas facilitan la comprensión de los temas del curso.	Siempre / Casi siempre / A veces / Casi nunca / Nunca
Interacción en el entorno virtual	La organización del entorno virtual (EstudiaU) favorece la navegación y el acceso oportuno a materiales y actividades.	Siempre / Casi siempre / A veces / Casi nunca / Nunca
Rol docente	La persona docente brinda acompañamiento activo y retroalimentación oportuna.	Siempre / Casi siempre / A veces / Casi nunca / Nunca
Autoevaluación	Las actividades de autoevaluación me ayudan a reconocer mis avances y necesidades de mejora.	Siempre / Casi siempre / A veces / Casi nunca / Nunca

Foros académicos	La participación en foros académicos promueve la discusión de los contenidos.	Siempre / Casi siempre / A veces / Casi nunca / Nunca
Cuestionarios	Los cuestionarios incluyen retroalimentación útil para mejorar mi aprendizaje.	Siempre / Casi siempre / A veces / Casi nunca / Nunca
Videoconferencias	En las videoconferencias se discuten ejercicios y problemas matemáticos del curso.	Siempre / Casi siempre / A veces / Casi nunca / Nunca
Matrices de calificación	Las matrices de calificación explicitan criterios y niveles de desempeño para las tareas.	Siempre / Casi siempre / A veces / Casi nunca / Nunca
Foros de dudas	El foro de dudas permite intercambiar ideas y atender consultas sobre contenidos y actividades.	Siempre / Casi siempre / A veces / Casi nunca / Nunca
Alineación a objetivos	Los instrumentos de evaluación están alineados con los objetivos de aprendizaje establecidos.	Siempre / Casi siempre / A veces / Casi nunca / Nunca
Condiciones de aplicación	Las condiciones de aplicación de los instrumentos son consistentes entre grupos y momentos de evaluación.	Siempre / Casi siempre / A veces / Casi nunca / Nunca
Consistencia de calificaciones	Las calificaciones obtenidas en instrumentos similares son consistentes a lo largo del curso.	Siempre / Casi siempre / A veces / Casi nunca / Nunca

Nota: el extracto refleja la estructura y categorías del instrumento; la versión completa se resguarda en el repositorio del estudio.

Anexo 2. Rúbrica de ejemplo: Participación en foro académico

Rúbrica de evaluación para la participación en foros académicos del curso. Use los descriptores para asignar el nivel alcanzado en cada criterio. Sugerencia de puntaje: 4=Excelente, 3=Satisfactorio, 2=Básico, 1=Insuficiente.

Criterio	Excelente (4)	Satisfactorio (3)	Básico (2)	Insuficiente (1)	Puntaje
Pertinencia y claridad	La intervención es totalmente pertinente al tema y está expresada con gran claridad.	Generalmente pertinente y clara, con leves ambigüedades.	Pertinencia parcial; la claridad es limitada o ambigua.	Fuera de tema o poco clara.	
Profundidad y evidencia	Integra análisis y justifica con ejemplos/ejercicios o referencias.	Presenta ideas con alguna justificación.	Ideas mayormente descriptivas, con escasa justificación.	Opiniones sin justificación ni relación con contenidos.	
Interacción y netiqueta	Responde y construye sobre aportes de pares respetando netiqueta.	Responde a pares con respeto, aunque con escasa construcción conjunta.	Interacción limitada; evidencias intermitentes de netiqueta.	No hay interacción o se incumple netiqueta.	
Oportunidad y frecuencia	Participa a tiempo y con varias intervenciones distribuidas.	Participa a tiempo con al menos una intervención sustantiva.	Participa tardíamente o con una intervención breve.	No participa o lo hace fuera de los plazos.	
Uso de fuentes y citación APA	Integra fuentes pertinentes con citación y referencias en formato APA.	Usa alguna fuente con citación parcial o con leves errores.	Referencias escasas y con errores frecuentes.	No usa fuentes o no cita.	

Puntaje sugerido: Suma de criterios (máx. 20 puntos). Mínimo de aprobación sugerido: 14/20.

Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 19 · N°. 1 · 2026
73-101
Recibido: 28/08/2025
Aprobado: 10/12/2025

Artículos de investigación

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DESDE EL MODELO DEL TRIÁNGULO SEMÁNTICO

DIDACTIC PROPOSAL FOR TEACHING TRIGONOMETRIC RATIOS BASED ON THE SEMANTIC TRIANGLE MODEL

Priscilla M. Angulo Chaves[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0008-2757-2136

Javier A. Picado Bermúdez[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0000-5412-3119

RESUMEN

Este artículo presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de las razones trigonométricas basada en el modelo del triángulo semántico del significado matemático, propuesto por Rico y Moreno (2016). El objetivo del estudio es analizar el sentido que los estudiantes atribuyen al contenido de las razones trigonométricas mediante el diseño e implementación de una intervención educativa sustentada en dicho modelo. La propuesta se desarrolló en el marco de una investigación cualitativa con enfoque interpretativo, dirigida a estudiantes de primer año de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica. A través del diseño de una intervención compuesta por cuatro lecciones, se exploró el potencial de la terna semántica que aborda la estructura conceptual, sistemas de representación, y sentidos y modos de uso, estos como eje organizador de la planificación didáctica. Los resultados evidencian que este modelo favorece una enseñanza más coherente y significativa del contenido al permitir articular distintos niveles de complejidad conceptual, diversas representaciones y aplicaciones contextualizadas. Además, se identificaron elementos emergentes que sugieren una mayor apropiación del contenido por parte del estudiantado, particularmente en el uso de representaciones

[1] Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, Costa Rica. Correo electrónico: priscilla.angulo@ucr.ac.cr

[2] Sección de Matemática, Universidad de Costa Rica, San Ramón, Costa Rica. Correo electrónico: javier.picado@ucr.ac.cr

gráficas y la argumentación conceptual. Se concluye que la terna semántica constituye una herramienta teórica y metodológica valiosa tanto para la enseñanza como para la formación docente en Matemática.

Palabras clave: Significado Matemático, Terna semántica, Razones trigonométricas, Intervención educativa.

ABSTRACT

This article presents a didactic proposal for teaching trigonometric ratios based on the semantic triangle model of mathematical meaning, as proposed by Rico and Moreno (2016). The aim of the study is to analyze the meaning that students attribute to the content of trigonometric ratios through the design and implementation of an educational intervention based on this model. The proposal was developed within the framework of a qualitative research study with an interpretative approach, targeting first-year students in the Mathematics Teaching program at the University of Costa Rica. Through the design of a four-lesson intervention, the potential of the semantic triad—conceptual structure, representation systems, and senses and modes of use—as an organizing axis for lesson planning was explored. The results show that this model supports a more coherent and meaningful approach to teaching by integrating different levels of conceptual complexity, various representations, and contextualized applications. Additionally, emergent elements were identified, suggesting a deeper appropriation of the content by students, particularly in their use of graphic representations and conceptual reasoning. It is concluded that the semantic triangle constitutes a valuable theoretical and methodological tool for both mathematics teaching and teacher education.

Keywords: Mathematical Meaning, Semantic Triangle, Trigonometric Ratios, Educational Intervention.

1. INTRODUCCIÓN

La trigonometría es una de las ramas fundamentales de la Matemática debido a que posee un alto valor conceptual, estableciendo múltiples conexiones con diversas disciplinas científicas, además de que cuenta con una amplia gama de contextos y aplicaciones, desde ciencias puras hasta diversas áreas tecnológicas y en las que se aplica, como lo son la ingeniería, arquitectura, astronomía, ciencia de la computación y geografía, entre otras. Por ello, la Trigonometría es una herramienta poderosa e indispensable en la práctica académica y profesional.

A pesar de la importancia que poseen los temas afines a la trigonometría, gran parte de este contenido se descuida por su subestimación. Esta situación es sumamente preocupante porque genera deficiencias en el desarrollo de habilidades matemáticas significativas, especialmente para los estudiantes que planean cursar carreras universitarias científicas o técnicas, las cuales requieren el uso adecuado de la disciplina (Aray et al., 2020). Por tanto, la trigonometría debe ser tratada con la seriedad e importancia que merece, pues a menudo se utilizan formas inadecuadas de abordar el tema, así como el uso incorrecto de conceptos básicos o explicaciones carentes de su verdadero significado, lo que hace que estos temas sean aún más confusos y difíciles de comprender para los estudiantes. (Martín-Fernández et al., 2016).

En esta misma línea, Fiallo-Leal (2010) señala que existen diferentes factores que afectan negativamente el proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría. Entre estos se destaca la dificultad de los estudiantes para interpretar las razones trigonométricas en función del contexto, lo que impide la aplicación significativa del conocimiento. Asimismo, se señala la escasa disposición hacia la indagación autónoma y la falta de experiencias investigativas en el aula, donde estas permitan explorar nuevas formas de entender y aplicar los conceptos trigonométricos, así como comprender su valor en la resolución de problemas reales.

Lo anterior se agrava con los modelos de enseñanza que se brindan, ya que si los estudiantes utilizan procesos memorísticos no se genera un aprendizaje significativo (Diéguez et al., 2019). Por lo tanto, Rico (2012) plantea una terna semántica que permita el correcto significado en el aula: (1) el profesor comienza considerando diferentes representaciones de un mismo contenido, (2) se analizan sus propiedades y las relaciones que establece con aquellos que pertenecen a la misma estructura y (3) examina las diferentes referencias, fenómenos, sentidos y modos de uso que están en su origen.

Sin embargo, es importante destacar como Thompson (2013) explica la importancia de prestar especial atención a las generaciones venideras, señalando que no basta con revisar lo que se ha hecho hasta ahora, sino que es urgente enfocarse en lo que aún está por construirse. En este sentido, se destaca la necesidad de formar, de manera rigurosa y reflexiva, a los futuros docentes de matemática, esto debido a que son los primeros que deben comprender profundamente el significado de los contenidos que enseñarán, propiciando que se desarrolle una comprensión genuina, crítica y funcional de los conceptos matemáticos, especialmente en áreas que históricamente han presentado grandes desafíos, como lo es la trigonometría.

Partiendo de esta situación, este estudio se desarrolló con estudiantes de primer año de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica, Sede de Occidente, quienes se encuentran en las etapas iniciales de su formación docente. Es así que la investigación se enmarca en el área de la trigonometría, con el propósito de analizar, desde un enfoque cualitativo, el sentido que estos estudiantes atribuyen al contenido de las razones trigonométricas, además, se busca establecer un precedente en el campo de la investigación educativa sobre la trigonometría en Costa Rica, especialmente en el contexto posterior a la reforma de los programas de estudio de matemática implementada en el año 2012.

2. ELEMENTOS CONCEPTUALES

El estudio adecuado de un contenido matemático permite fortalecer la enseñanza del mismo. Bajo esta perspectiva, se incorporan fundamentos teóricos que sustentan el análisis, la interpretación y explicación de los datos, para ello se desarrolló la idea planteada por Rico y Moreno (2016) y otros colaboradores que permiten enriquecer aún más la teoría que se quiere exponer. Se plantea una indagación en el significado de un contenido en la enseñanza de la matemática desde su estructura conceptual, los sistemas de representación y los sentidos y modo de uso que estos posean, además de explicar la importancia de dicho análisis del significado en la planificación curricular, y más específicamente, en las razones trigonométricas.

El uso de la terna semántica en el estudio de distintos contenidos matemáticos ha comenzado a incorporarse progresivamente desde su origen en el campo de la filosofía. Rico (2012) explica que Frege propone una noción de significado basada en tres dimensiones: el sentido que expresa, el modo de uso y el concepto o definición en sí misma. Estos tres elementos constituyen la base para la formulación de una terna semántica aplicada a la educación matemática.

Rico y Moreno (2016) proponen un triángulo semántico como herramienta para que los estudiantes puedan analizar el significado de los contenidos matemáticos a partir de tres componentes complementarios: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los sentidos y modos de uso. Este modelo busca establecer una relación coherente entre el concepto en sí, los diferentes usos que puede adquirir en distintos contextos y las diversas formas en que puede representarse. En esta línea, Fernández-Plaza et al. (2015) plantean interrogantes clave para el análisis del significado desde la perspectiva del estudiante:

> ¿sobre qué conceptos, propiedades, definiciones o relaciones los estudiantes argumentan y comunican sus ideas Matemáticas?, ¿qué signos emplean para ello?, ¿qué modos de uso se identifican en el concepto? o ¿qué situaciones o contextos enmarcan sus ideas Matemáticas o están en su origen? (p.215)

Si se logra una correcta correlación de estos tres aspectos, el estudiante tendrá la capacidad de comprender correctamente el significado del contenido matemático abordado. Cada uno de esos componentes se conforma de una serie de elementos que permiten su caracterización y estudio, tal como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Componentes del significado de un contenido matemático.

Estructura conceptual			**Sistemas de representación**	**Sentidos y modos de uso**
Ámbitos o campos				
Conceptual	*Procedimental*	*Actitudinal*		
Hechos Conceptos Estructuras	Destrezas Razonamientos Estrategias	Emociones Moralidad y normas Valores éticos	Simbólico Gráfico	Modos de uso Contextos Situaciones

Fuente: Elaboración de Angulo y Picado (2022) basada en la autoría de Rico y Moreno (2016).

En un sentido estrictamente matemático, Castro (2015) define una estructura como un "conjunto con una colección finita de operaciones y relaciones definidas dentro del conjunto" (p. 72). Sin embargo, en el contexto de la enseñanza, el término 'estructura conceptual' adquiere un significado más amplio, vinculado al análisis didáctico del contenido. Desde esta perspectiva, Angulo y Picado (2022) lo entienden como "todos aquellos aspectos formales que caracterizan y describen a un contenido matemático, los conjuntos de procedimientos, conceptos, propiedades y relaciones que se derivan" (p.21) lo que permite establecer un criterio de veracidad que acate y permita dar sentido matemático al contenido que se aborda.

Respecto a la información presentada en la tabla 1, Angulo y Picado (2022) en el análisis que elaboraron destacan que la estructura conceptual se divide en tres ámbitos o campos de estudio, los cuales están compuestos por tres niveles de complejidad. El *campo conceptual* se refiere al conjunto de ideas y vínculos que conforman el contenido matemático, de este se desglosan los hechos, los cuales se analizan a través de términos, notaciones, convenios y resultados; se tienen también los conceptos y cómo estos se relacionan entre sí; por último, las estructuras conceptuales, que emergen de las transformaciones y conexiones que pueden relacionar conceptos más complejos. Ahora bien, en cuanto al ámbito procedimental se tiene las destrezas que se utilizan para procesar los hechos, los razonamientos que procesan los conceptos, y finalmente, las estrategias que se utilizan para procesar las estructuras. Por otra parte, el campo actitudinal se refiere a las emociones, la moralidad, las normas y los valores éticos. No obstante, debido al alcance de esta investigación y sus metas, dicho campo no se emplea en este trabajo.

Esta estructura conceptual resulta fundamental para dotar de significado a los distintos contenidos matemáticos, ya que permite responder a preguntas clave como: "¿Cuáles son los conceptos que caracterizan el tema? ¿Qué procedimientos están implicados en el tema? ¿Cómo se relacionan estos conceptos entre sí? ¿Cómo se relacionan estos procedimientos entre sí? ¿Cómo se relacionan estos conceptos y estos procedimientos?" (Cañadas et al., 2016, p. 5).

Según Rico (2012) y Castro (2015) en el campo de la educación matemática, el uso de símbolos, palabras, diagramas y otras formas de representación, fundamentadas en sus propias normas, transmiten y detallan de forma propia el contenido matemático académico. Por tanto, Angulo y Picado (2022) definen los *sistemas de representación* de un contenido matemático escolar como la serie de propiedades, convenios, símbolos, gráficos, notas y otros signos pertinentes que presentan dicho concepto y lo vinculan con otros.

Es importante destacar que, para esta investigación, se toman en cuenta dos tipos de sistemas de representación: los simbólicos que incluyen símbolos alfanuméricos que operan bajo un sistema de normas preestablecido, y los gráficos que son figurativos, también operan bajo un sistema de normas de composición e interpretación.

Los sentidos y modos de uso hacen referencia a las circunstancias a las que se enfrenta el contenido matemático, las dificultades que puede solucionar y los fenómenos que estructuran (Ruiz-Hidalgo, 2016). En este estudio se toman en cuenta tres puntos de vista: los términos que constituyen la definición de un concepto y facilitan la comprensión de sus distintos sentidos, donde a veces los términos tienen un origen matemático concreto, o bien, forman parte del lenguaje diario de los alumnos; los contextos que son explicaciones de cómo las estructuras conceptuales satisfacen las demandas específicas de las matemáticas; y las situaciones se utilizan para proporcionar significado a los contenidos matemáticos, identificando contextos y usos de los distintos conceptos.

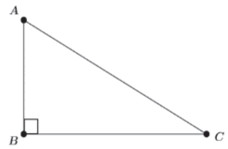
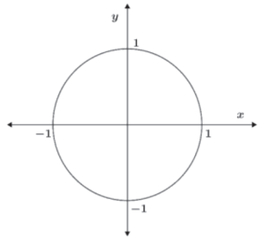
Esta terna semántica tiene un rol crucial en la elaboración del currículo, pues al tomar en cuenta estos tres elementos y sus componentes, se pueden crear vínculos entre ellos; asimismo en el profesor se genera un sentido de conciencia acerca de la relevancia de estos componentes en la comprensión del significado (Angulo y Picado, 2022). Para manipular y comprender un contenido matemático, es necesario reconocer su definición, entender sus representaciones, interpretar sus usos y, en términos generales, comprender todo lo que estos tres elementos vinculan entre sí. En otras palabras, otorgarle un significado, lo que facilita comprender y ordenar el significado de un contenido matemático desde un enfoque constructivo (Castillo-Céspedes et al., 2017).

Por lo tanto, para elaborar significados matemáticos adecuados y prácticos, los alumnos deben sugerir, desarrollar, construir y utilizar sus ideas a partir de las diversas tareas propuestas por el profesor. Desde este punto se empiezan a percibir los significados que los escolares construyen, a través de diferentes formas de expresión y uso, así como la habilidad para vincular varias estructuras y emplear diferentes procedimientos (Gómez, 2007).

En la tabla 2, se ejemplifican los tres componentes para el caso específico de las razones trigonométricas.

Tabla 2. Ejemplos sobre las razones trigonométricas en los componentes del significado

Organizador Conceptual	**Componentes**		**Ejemplos**
Estructuras Conceptuales	Conceptual	Hechos	Términos: razones, identidades, seno, coseno, tangente. Convenios: denotar $sen^2(x)$ en lugar de $(sen(x))^2$.
		Conceptos	Definición de las razones trigonométricas como la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo.
		Estructuras	El círculo trigonométrico.
	Procedimental	Destrezas	Calcular razones trigonométricas dados los lados y ángulos de un triángulo rectángulo.

		Razonamientos	Deducir identidades entre razones trigonométricas.
		Estrategias	Determinar las coordenadas de un punto en el círculo trigonométrico.
Sistemas de representación	Simbólico		Se utiliza $sen(x)$ para representar *seno de* x, $cos(x)$ para representar *coseno de* x, $tan(x)$ para representar *tangente de* x
	Gráfico		**Figura 1.** Triángulo rectángulo de vértices A, B y C.  **Figura 2.** Círculo trigonométrico centrado en el origen 
Sentidos y modos de uso	Modo de uso		Razón (como relación), Identidad (como equivalencia matemática).
	Contextos		Calcular distancias o ángulos.
	Situaciones		Personales, laborales y educativas, sociales y científicas.

Fuente: Elaboración de los autores.

3. METODOLOGÍA

Este estudio se enmarcó en un enfoque cualitativo de tipo exploratorio y descriptivo, dado que su propósito fue analizar el significado que estudiantes universitarios de primer ingreso asignan al contenido matemático de razones trigonométricas, y proponer una planificación didáctica que atienda dicha problemática. Según Hernández-Sampieri et al. (2014), las investigaciones cualitativas de tipo exploratorio-descriptivo buscan comprender los significados que los participantes atribuyen a determinados fenómenos en contextos específicos. La investigación se fundamenta en el modelo del triángulo semántico propuesto por Rico y Moreno (2016), el cual considera tres componentes para el análisis del significado de un contenido: estructura conceptual, sistemas de representación y sentidos y modos de uso.

La propuesta se desarrolló en tres fases. En la primera, se aplicó un cuestionario semántico a estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica, sede de Occidente, con el fin de identificar sus concepciones iniciales sobre las razones trigonométricas. En la segunda fase, se diseñó e implementó una intervención educativa compuesta por cuatro lecciones, donde se abordaron contenidos fundamentales de Trigonometría desde un enfoque que favorece la construcción de significado; este artículo se basa principalmente en el abordaje teórico que sustenta dicha intervención, así como en el proceso de diseño y estructuración de las lecciones que la conforman. Finalmente, en la tercera, se aplicó un segundo cuestionario que permitió evaluar posibles cambios en las concepciones del estudiantado.

Los participantes fueron estudiantes del curso Matemática de Ingreso, correspondiente al primer ciclo de la carrera. La intervención se llevó a cabo con uno de los grupos del curso, seleccionado por conveniencia horaria. Las lecciones se impartieron de forma virtual y sincrónica, con una duración aproximada de dos horas por sesión. Las actividades de cada clase fueron diseñadas para trabajar explícitamente los componentes del significado, mediante el uso de representaciones gráficas, razonamientos matemáticos y problemas contextualizados.

Para la elaboración de los instrumentos de recolección de datos se construyó un banco de preguntas alineadas con los componentes del triángulo semántico. Cada pregunta fue validada por expertos y categorizada según el tipo de componente predominante. Esta organización sirvió de guía tanto para el análisis del desempeño estudiantil como para el diseño de las actividades en el aula.

3.1 Intervención educativa

La intervención educativa consistió en una secuencia de cuatro clases, cada una con una duración aproximada de dos horas, impartidas de forma virtual y sincrónica. El objetivo de esta intervención fue propiciar en el estudiantado una comprensión significativa del contenido de razones trigonométricas, abordando dicho contenido desde los tres componentes del significado propuestos por Rico y Moreno (2016): estructura conceptual, sistemas de representación, y sentidos y modos de uso. La planificación de las clases se realizó de manera progresiva, estableciendo conexiones entre los temas y favoreciendo el desarrollo paulatino del pensamiento trigonométrico.

La primera clase tuvo como objetivo introducir el concepto de razón trigonométrica a partir del triángulo rectángulo. Se abordaron las seis razones fundamentales (seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante), tanto en su definición conceptual como en su representación simbólica y gráfica. Se enfatizó la relación entre los lados del triángulo y los ángulos agudos, así como la manera correcta de denotar cada razón. A lo largo de la sesión se desarrollaron ejercicios en los que el estudiantado debía calcular razones trigonométricas a partir de medidas dadas y completar tablas con sus respectivos valores. En los anexos se pueden observar las tablas que se compartieron a los estudiantes con el fin de que ellos las completaran. Al finalizar, se resolvieron tres problemas contextualizados que involucraban situaciones personales y educativas, lo que permitió aplicar las razones trigonométricas a escenarios reales y favorecer su comprensión como herramientas útiles. En esta clase se trabajó fuertemente la estructura conceptual, tanto a nivel de hechos y conceptos como de destrezas, junto con los sistemas de representación simbólicos y gráficos. Los sentidos y modos de uso se incorporaron a través de las situaciones problema presentadas.

La segunda clase estuvo orientada a introducir el círculo trigonométrico como una estructura conceptual fundamental en el estudio de la Trigonometría. La lección inició con la explicación del origen de la medida en radianes, acompañada de la conversión entre grados y radianes mediante ejemplos numéricos. Posteriormente, se definió el círculo trigonométrico y se representaron gráficamente sus elementos principales: el radio unitario, los ejes coordenados y los cuadrantes. Se explicó la forma en que las razones trigonométricas varían dependiendo del cuadrante, y se analizó el signo que asumen seno, coseno y tangente en cada uno de ellos. Se resolvieron ejercicios en los que se calculaban razones trigonométricas de ángulos expresados en radianes y se aplicaron estos conocimientos en dos problemas de carácter espacial relacionados con la ubicación de objetos. Esta clase fortaleció el componente de razonamiento dentro de la estructura conceptual y profundizó en los sistemas de representación gráficos, al tiempo que incluyó contextos de uso real que reforzaron el vínculo entre el contenido matemático y su aplicabilidad.

La tercera clase tuvo como eje central el estudio de los ángulos de referencia y su utilización para determinar el valor de razones trigonométricas en diferentes cuadrantes. En la primera parte de la clase se retomaron los problemas trabajados en la lección anterior para introducir de forma natural el concepto de ángulo de referencia. Se representaron estos ángulos en el plano cartesiano y se realizaron ejercicios con ángulos mayores a 90°, en los que el estudiantado debía: convertir a radianes, ubicar el ángulo en la circunferencia trigonométrica, determinar su ángulo de referencia y calcular el valor de seno, coseno y tangente del ángulo dado. En la segunda parte de la clase, se abordó por primera vez la identidad pitagórica y su deducción geométrica a partir de un triángulo inscrito en la circunferencia. Esta identidad se relacionó luego con otras identidades trigonométricas básicas. Las actividades permitieron trabajar estrategias y razonamientos más complejos, con un uso intensivo de representaciones gráficas y simbólicas, y se presentaron problemas en contextos laborales y científicos. En esta lección, se abordaron de manera integral los tres componentes del significado, consolidando los conocimientos previos y preparando al estudiantado para los contenidos finales.

Finalmente, la cuarta clase se dedicó al estudio y aplicación de las identidades trigonométricas de suma y resta de ángulos. Se retomaron las identidades vistas anteriormente y se introdujeron nuevas fórmulas, acompañadas de ejercicios que permitieron explorar sus usos y validar su veracidad. A lo largo de la sesión se resolvieron ejemplos en los que los estudiantes debían justificar procedimientos, establecer conexiones entre distintas razones trigonométricas y resolver expresiones mediante la aplicación de identidades. Además, se plantearon problemas aplicados que requerían integrar varias habilidades desarrolladas en las clases anteriores, como el uso de ángulos de referencia, el análisis de signos según el cuadrante y la comprensión gráfica de las razones. Esta clase enfatizó el uso de razonamientos formales y estrategias, así como la consolidación de los sistemas de representación simbólicos. También se reforzaron los sentidos y modos de uso del contenido al resolver problemas contextualizados que exigían una comprensión flexible del tema.

4. RESULTADOS

Los resultados que se presentan en este artículo se derivan del análisis de las respuestas obtenidas en los cuestionarios inicial y final, así como de las producciones escritas del estudiantado durante la intervención educativa. Este análisis permitió identificar evidencias claras sobre el sentido que los participantes atribuyen al contenido de las razones trigonométricas desde los tres componentes de la terna semántica del significado: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los sentidos y modos de uso. Dichos hallazgos se presentan de manera integrada, destacando los cambios observados antes y después de la implementación de la propuesta didáctica.

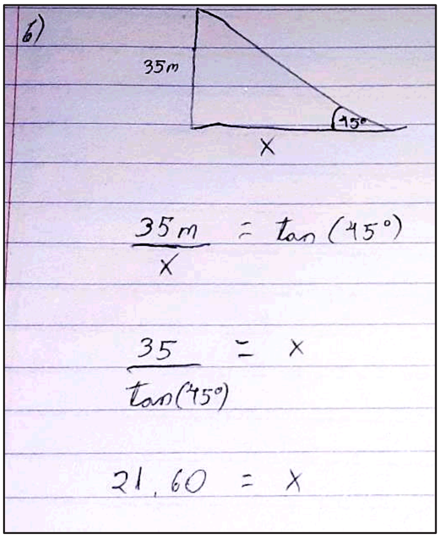
En relación con la estructura conceptual, las respuestas iniciales mostraron una comprensión limitada del contenido, principalmente de carácter operacional. La mayoría de los estudiantes definía las razones trigonométricas como una simple relación entre lados de un triángulo rectángulo, sin establecer vínculos entre los conceptos. Por ejemplo, ante la pregunta “¿Qué representa el seno de un ángulo?”, un participante respondió: “Es el lado opuesto entre la hipotenusa” (E3). Este tipo de definición revela una comprensión centrada en el procedimiento, donde el concepto se asocia con una fórmula y no con una estructura de relaciones. De acuerdo con Rico y Moreno (2016), este tipo de significado se ubica en el nivel de hechos dentro del campo conceptual, pues se limita a la repetición de términos y notaciones sin establecer conexiones entre ellos.

Tras la intervención, las respuestas reflejaron una comprensión más completa. Varios estudiantes comenzaron a establecer relaciones entre distintos objetos trigonométricos, integrando ideas del círculo unitario, los signos de las razones según el cuadrante y las identidades fundamentales. Una de las respuestas posteriores lo ejemplifica: “El seno de un ángulo se puede entender también como la coordenada y del punto sobre el círculo trigonométrico” (E7). Este tipo de enunciado muestra una transición hacia un pensamiento estructural, donde las definiciones se vinculan con otras representaciones y propiedades, evidenciando una comprensión más profunda del significado matemático (Castro, 2015; Fernández-Plaza et al., 2015).

Respecto a los sistemas de representación, las evidencias iniciales indican una preferencia marcada por el uso simbólico y numérico, con escasa referencia a lo gráfico. Muchos estudiantes resolvían las tareas recurriendo a fórmulas sin diagramas o interpretaciones visuales. Por ejemplo, una respuesta común fue "tan = opuesto/adyacente" (E1), sin justificación ni referencia al contexto geométrico. Este comportamiento es consistente con lo señalado por Fernández-Plaza et al. (2015), quienes advierten que los estudiantes suelen operar dentro de un único registro, sin establecer equivalencias entre ellos.

Posterior a la intervención educativa en donde se trabajó con representaciones simbólicas y gráficas, se observó una mayor flexibilidad. Los estudiantes comenzaron a combinar expresiones algebraicas con esquemas del círculo trigonométrico y argumentaciones en lenguaje natural. Una respuesta posterior ejemplifica este avance: "En el segundo cuadrante el seno es positivo porque el punto está sobre el eje y positivo" (E5). Este tipo de producción evidencia la articulación entre registros y la consolidación de significados que trascienden el plano procedimental (Rico y Moreno, 2016). La transición entre representaciones favoreció una comprensión más coherente del concepto y permitió vincular los aspectos geométricos con los algebraicos. En la figura 3 se observa la respuesta de un estudiante a la siguiente pregunta: Suponga que una persona observa la ventana del último piso de la biblioteca con un ángulo de elevación de 45°. Si la altura desde la base del edificio de la biblioteca hasta la ventana es de 35 m, ¿a qué distancia se encuentra la persona con respecto a la entrada de la biblioteca?

Figura 3. Respuesta dada por un estudiante donde integra representación gráfica y algebraica



Fuente: Elaboración propia a partir de una respuesta estudiantil.

En cuanto a los sentidos y modos de uso, los datos iniciales mostraron una concepción restringida del contenido, limitada a ejercicios escolares sin conexión con contextos reales. Las respuestas se centraban en calcular lados o encontrar ángulos, sin mencionar aplicaciones prácticas o interpretaciones fenomenológicas. Sin embargo, tras la intervención, surgieron evidencias de una apropiación más amplia del significado. Algunos participantes comenzaron a vincular las razones trigonométricas con situaciones cotidianas y científicas, como se aprecia en la respuesta de E2: "La tangente sirve para medir la altura de un edificio si conozco la distancia y el ángulo". Este cambio refleja un desplazamiento hacia un sentido funcional del contenido, en concordancia con lo que Rico (2012) y Ruiz-Hidalgo (2016) denominan el componente de *modos de uso* del significado matemático.

El análisis general muestra que, durante la intervención, los estudiantes transitaron desde una comprensión principalmente formal y fragmentada hacia una comprensión más integrada, donde los tres componentes de la terna semántica se conectan de manera coherente. La planificación basada en la terna permitió vincular definiciones, procedimientos, representaciones y modos de uso, generando una estructura significativa del aprendizaje. Por tanto, la evidencia obtenida respalda la pertinencia del modelo teórico de Rico y Moreno (2016) como eje organizador para la enseñanza de las razones trigonométricas en la formación inicial docente.

5. CONCLUSIONES

El diseño e implementación de una propuesta didáctica basada en la terna semántica del significado demostró ser una estrategia valiosa para abordar contenidos matemáticos de manera más comprensiva y alineada con los principios de una educación centrada en la construcción de significado. De forma específica, el tema de razones trigonométricas se benefició de una planificación que no se limitó a la exposición teórica magistral, sino que integró diversos niveles de complejidad conceptual, formas de representación y modos de uso significativos para el estudiantado. Estos hallazgos se complementan con los resultados de un análisis comparativo en el que se observaron avances cualitativos en los tres componentes del significado tras la implementación de la intervención educativa, en particular en el uso de representaciones y en la argumentación conceptual de los estudiantes.

Este enfoque permitió que cada clase se desarrollara con un propósito didáctico claro, estructurada intencionalmente en torno a los tres componentes del modelo: estructura conceptual, sistemas de representación y sentidos y modos de uso. Dicha articulación favoreció un aprendizaje más profundo, en el que los estudiantes no solo adquirieron definiciones y procedimientos, sino que también fueron expuestos a múltiples formas de pensar y aplicar los conceptos trigonométricos. La experiencia pone en evidencia que el triángulo semántico constituye una herramienta poderosa para la planificación didáctica en el aula. Este resultado se alinea con lo observado por otros autores como Mora et al., (2014) y Vilchez y Ramón (2017), quienes destacan cómo una estrategia didáctica adecuada puede fortalecer la comprensión del contenido a partir de la articulación de significados.

Además, se destaca que esta propuesta ofrece un camino para replantear la enseñanza de la trigonometría en los primeros cursos universitarios, especialmente considerando las limitaciones arrastradas desde la educación secundaria. El impacto de esta intervención también adquiere relevancia al considerar que los participantes eran estudiantes en formación docente, por lo que su experiencia con esta propuesta podría incidir en sus futuras prácticas de enseñanza. El modelo permite al docente anticipar dificultades conceptuales, seleccionar representaciones apropiadas y proponer actividades contextualizadas que favorezcan el razonamiento y la comprensión.

Adicionalmente, los materiales diseñados para esta intervención, lecciones, ejercicios y recursos teóricos representan un aporte valioso, tanto para la planificación de otros docentes como para futuras investigaciones centradas en la construcción de significado desde la terna semántica. Para que se continue el desarrollo de esta propuesta, se considera pertinente continuar explorando el uso de esta terna en otros contenidos matemáticos, tanto en la educación secundaria como universitaria, así como en niveles de complejidad mayor. Asimismo, sería valioso profundizar en el análisis de su impacto en los procesos de aprendizaje a través de investigaciones cualitativas o mixtas que permitan evidenciar con mayor claridad los cambios en las concepciones del estudiantado. Finalmente, se sugiere su incorporación en los procesos de formación inicial y continua del profesorado, donde puede servir como una herramienta teórica y metodológica para reflexionar sobre la enseñanza de los contenidos matemáticos desde una perspectiva más integral, crítica y consciente del significado que se construye en el aula.

Este trabajo no solo presenta una propuesta didáctica basada en la teoría del significado matemático, sino que también documenta un proceso riguroso de planificación que evidencia cómo esta teoría puede materializarse en acciones pedagógicas concretas. El análisis realizado permitió identificar avances en las concepciones estudiantiles y en su capacidad de representar, argumentar y aplicar las razones trigonométricas. Estos hallazgos, junto con los recursos generados, constituyen un aporte pedagógico y metodológico que puede ser replicado o adaptado para otros contextos y contenidos matemáticos.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

PAC y JPB concibieron la idea presentada, desarrollaron la teoría, adaptaron la metodología a este contexto. PAC elaboró el diseño de las lecciones y el material didáctico. JPB analizó los datos recopilados. Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por las personas autoras correspondientes, PAC y JPB previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Universidad de Costa Rica por incentivar la investigación y la formación continua de los docentes. A nuestra directora Dra. María Fernanda Vargas González, por su valioso acompañamiento, orientación y compromiso a lo largo de todo el proceso de desarrollo del Trabajo Final de Graduación.

6. REFERENCIAS

Angulo, P., y Picado, J. (2022). *Significado que manifiestan estudiantes de primer año de la carrera Enseñanza de la Matemática sobre el tema de razones trigonométricas* [Tesis licenciatura, Universidad de Costa Rica]. https://repositorio.sibdi.ucr.ac.cr/handle/123456789/20527

Aray, C., Guerrero, Y., Montenegro, L., y Navarrete, S. (2020). La superficialidad en la enseñanza de la trigonometría en el bachillerato y su incidencia en el aprendizaje del cálculo en el nivel universitario. *Rehuso, 2(5),* 62–69. https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Rehuso/article/view/1684

Cañadas, M., Gómez, P., y Pinzón, A. (2016). *Módulo 2-Análisis de contenido.* MAD 5. http://funes.uniandes.edu.co/8453/1/Ca%C3%B1adas2015Apuntes.pdf

Castillo-Céspedes, M. J., Chaverri-Hernández, J. J., Hernández-Arce, K., y Vallejos Meléndez, D. (2017). *Estudio de los significados atribuidos al Teorema de Pitágoras que manifiestan profesores de matemática en formación inicial en Costa Rica.* [Tesis de licenciatura, Universidad de Costa Rica]. http://repositorio.sibdi.ucr.ac.cr:8080/jspui/handle/123456789/6015

Castro, E. (2015). *Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros.* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. http://hdl.handle.net/10481/40316

Diéguez, A., Batista, M., y Figueroa, H. (2019). Trigonometría significativa y metacognición. *Opuntia Brava*, 11(2), 443–464. http://200.14.53.83/index.php/opuntiabrava/article/view/937

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Rico, L. (2015). Reasoning based on the concept of finite limit of a function at a point. *Enseñanza de Las Ciencias, 33*(2), 211-229. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1575

Fiallo-Leal, J. E. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las 99 Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica* [Tesis doctoral, Universitat de Valéncia]. https://www.educacion.gob.es/teseo/imprimirFicheroTesis.do?idFichero=yuWxCrIh1%20Kc%3D

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* [tesis doctoral, Universidad de Granada]. http://funes.uniandes.edu.co/444/

Hernández-Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, M. P. (2014). *Metodología de la investigación* (6.ª ed.). México: McGraw Hill Interamericana.

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de Las Ciencias, 34(3),* 51–71. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1871

Mora, M, Nieto, E, Polanía, D, Romero, M y González, M. (2014). Capítulo 6: Razones trigonométricas vistas a través de múltiples lentes. Universidad de los Andes. Disponible en: https://hdl.handle.net/1992/32137

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, 39–63. http://funes.uniandes.edu.co/1986/1/Rico_Avances.pdf

Rico, L., y Moreno, A. (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*. Pirámide. https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=660283

Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). Sentido y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 139–152). Pirámide. https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=660283

Thompson, P. W. (2013). In the absence of meaning… . In Leatham, K. (Ed.), *Vital directions for research in mathematics education* (pp. 57-93). New York, NY: Springer.

Vilchez, J., y Ramón, J. (2017). *Aprendizaje personalizado de las funciones trigonométricas en educación secundaria*. II Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe. https://cemacyc.org/index.php/ii_cemacyc/iicemacyc/paper/viewFile/99/32

7. ANEXOS

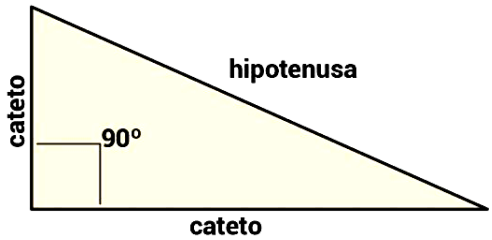
A continuación, se presenta el material elaborado para la intervención educativa. Cabe señalar que, dado que las lecciones se impartieron de forma virtual, los recursos de apoyo incluyen varias secciones sin resolver. Esta decisión respondió a la intención de que los docentes completaran la información en tiempo real durante la clase, utilizando una tableta gráfica mientras compartían pantalla, de modo que el desarrollo se construyera de manera conjunta con el estudiantado.

Clase 1: Razones trigonométricas en triángulo rectángulos

Recordemos

Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto (es decir, que mida 90°) y sus otros dos ángulos son agudos.

Los lados que conforman el ángulo recto se llaman **Catetos,** y el lado opuesto al ángulo recto se llama **Hipotenusa.**

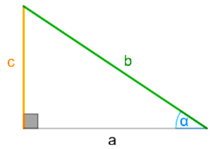
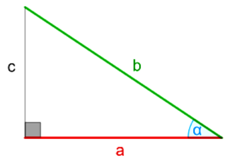
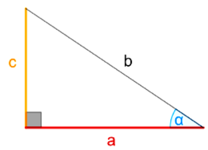


Razón trigonométrica

Una razón trigonométrica se refiera a la relación que existe entre la medida de los lados de un triángulo rectángulo con la medida de uno de sus ángulos agudos.

Existen 3 razones trigonométricas principales:

Seno, Coseno y Tangente.

Razón	Definición	Representación algebraica	Representación gráfica
Seno	$\frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	$sen(\alpha) = \frac{c}{b}$	
Coseno	$\frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$	$cos(\alpha) = \frac{a}{b}$	
Tangente	$\frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$	$tan(\alpha) = \frac{c}{a}$	

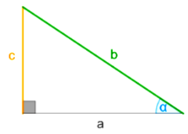
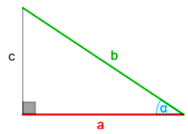
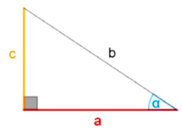
➔ Actividad en Geogebra

Cateto AB	Cateto BC	Hipotenusa AC	Medida del Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
5	3		59.04°			
6	6		45°			
3.48	2		60°			
7	2.4		71°			
6.96	4		60°			

Razones trigonométricas recíprocas

Estas razones son las recíprocas de las anteriores, corresponde respectivamente con

Cosecante, Secante y Cotangente

Razón	Definición	Representación algebraica	Representación gráfica
Cosecante	$\frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$	$csc(\alpha) = \frac{1}{sen(\alpha)} = \frac{b}{c}$	
Secante	$\frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$	$sec(\alpha) = \frac{1}{cos(\alpha)} = \frac{b}{a}$	
Cotangente	$\frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$	$cot(\alpha) = \frac{1}{tan(\alpha)} = \frac{a}{c}$	

Cateto AB	Cateto BC	Hipotenusa AC	Medida del Ángulo	Cosecante	Secante	Cotangente
5	3		59.04°			
6	6		45°			
3.48	2		60°			
7	2.4		71°			

Clase 2:Círculo Trigonométrico

Radianes

Los radianes son una unidad de medida de los ángulos. Para comprender mejor su defición veamos el siguiente vídeo:

https://www.youtube.com/watch?v=MgbKapLpgUA

Conversiones entre Grados y Radianes

Como $\mathbf{180° = \pi\, rad}$, entonces $\frac{180°}{\pi\, rad} = \mathbf{1} = \frac{\pi\, rad}{180°}$, por lo que podemos multiplicar alguna de estas razones por el ángulo que queremos convertir.

Ejemplo: Realice las converciones de los siguientes ángulos.

60°=

45°=

85°=

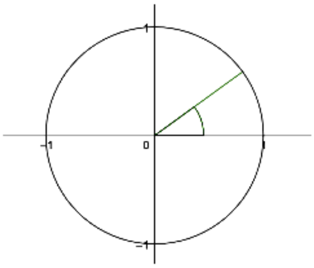
$\frac{\pi}{3} =$

$\frac{4\pi}{3} =$

<u>Problema 1:</u> Si en una naranja, cada gajo forma un ángulo de $\frac{\pi}{5}$, ¿cuántos gajos de naranja se pueden obtener?

El círculo trigonométrico

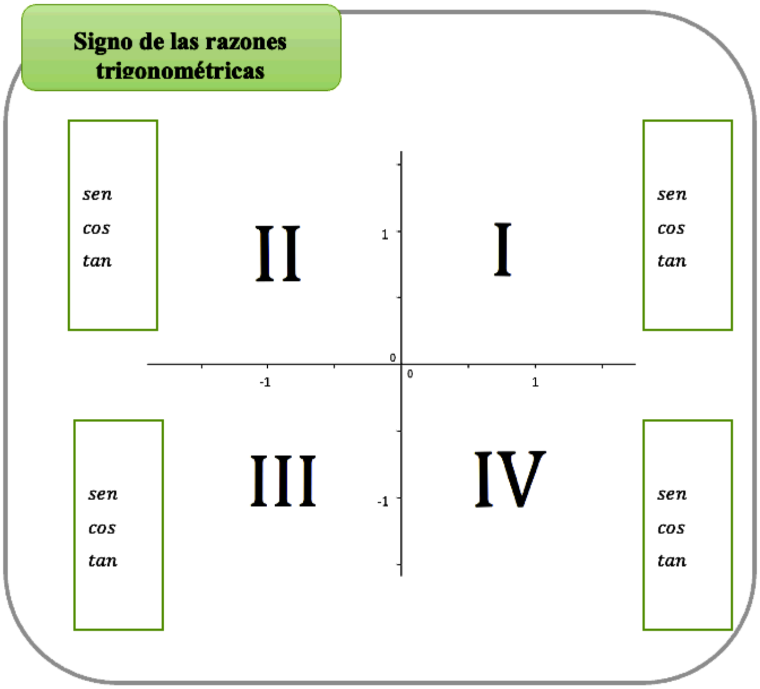
También llamado circunferencia trigonométrica o círculo unitario; es una circunferencia de radio 1 centrada en el origen del plano cartesiano. En ella, se pueden representar las razones trigonométricas.



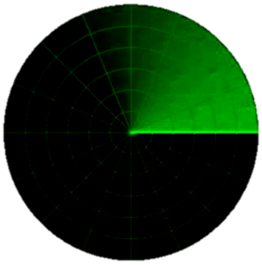
Medida del Ángulo		Seno	Coseno	Tangente
Grados	**Radianes**			
59°				
45°				
60°				
71°				
120°				
235°				
323°				

Problema 2: Utilice el círculo trigonométrico para analizar si las siguientes desigualdades son verdaderas o falsas.

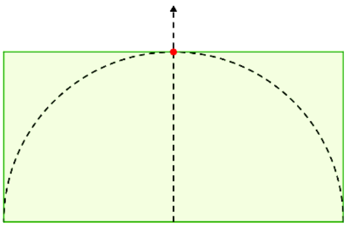
1. $\mathrm{sen}(20^{\underline{o}}) < \mathrm{sen}(70^{\underline{o}})$
2. $\cos(20^{\underline{o}}) < \cos(70^{\underline{o}})$
3. $\tan(20^{\underline{o}}) < \tan(70^{\underline{o}})$
4. $\mathrm{sen}(45^{\underline{o}}) < \mathrm{sen}(135^{\underline{o}})$



Problema 3: Imagine que está en un barco anclado en el mar. Dicho barco, como casi todos, tiene un radar. El radar ha detectado la presencia de otro barco en un punto, a un kilómetro de distancia con un ángulo de 135º. Determine la coordenada en la que se encuentra el barco detectado en el radar.



Problema 4: Esteban quiere colocar algunas plantas en su jardín. Desea que sus plantas formen una semicircunferencia sobre el terreno separas por la **misma distancia**. Para ello, hace un croquis sobre un círculo unitario donde el punto rojo se refiere a la única planta que sabe con certeza donde colocar:



Ayude a Esteban a determinar las coordenadas de las otras cuatro plantas.

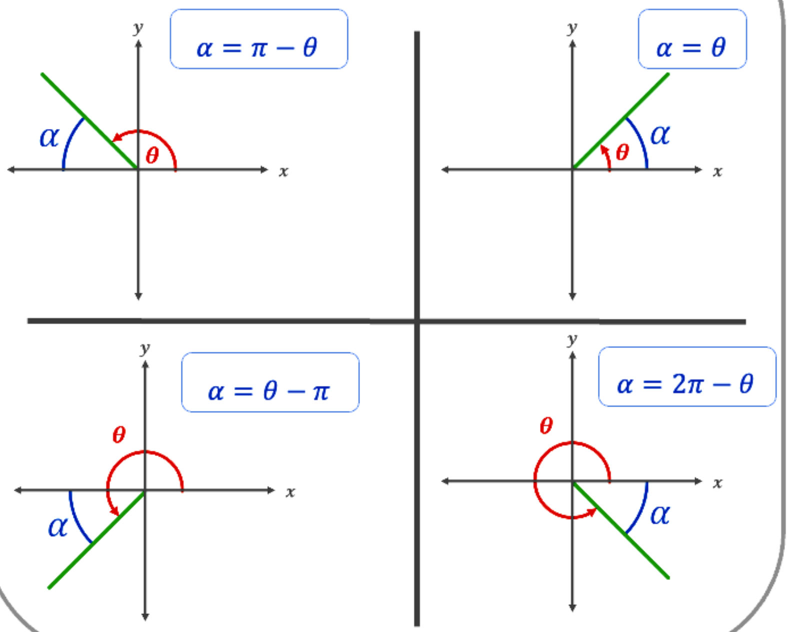
Clase 3: Ángulos de referencia

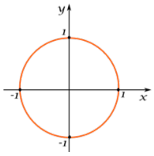
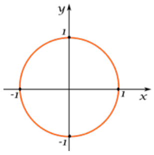
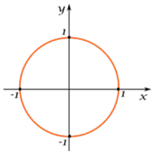
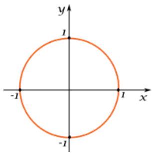
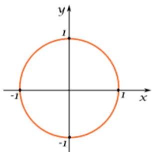
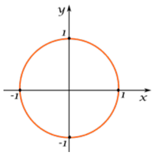
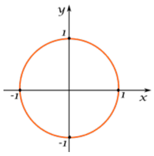
Ángulo de referencia

Un ángulo de referencia es un ángulo agudo positivo α que representa un ángulo θ de cualquier medida.

Este es el ángulo más pequeño formado entre el lado terminal de θ y el eje x.

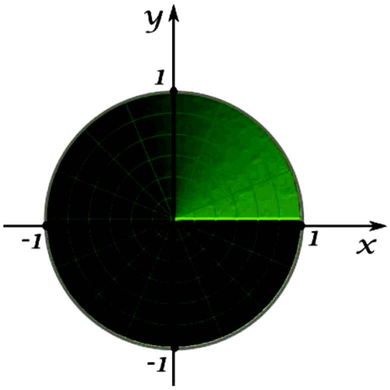
Ángulos de referencia en cada cuadrante



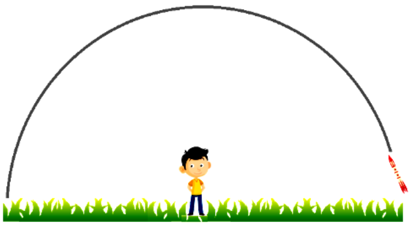
Medida del Ángulo		**Representación**	**Ángulo de referencia**	**Sen**	**Cos**	**Tan**
Grados	**Radianes**					
120°						
135°						
210°						
252°						
300°						
330°						
450°						

Algunos problemas aplicados a los ángulos de referencia

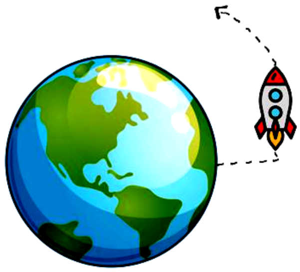
Problema 1: El radar de un barco se activa para buscar la presencia de otro navío. Después de producir un ángulo de 480º grados detecta una embarcación. Represente el ángulo en el plano cartesiano y determine la coordenada de la embarcación detectada.



Problema 2: Gabriel observa a lo lejos como un proyectil es lanzado y recorre el cielo mediante un movimiento circular sin que cambie la distancia entre Gabriel y el proyectil. El proyectil pasa por encima de Gabriel, y explota antes de llegar al suelo; él observa esa explosión con un ángulo de elevación de aproximadamente 45º. Determine el ángulo que forma el proyectil desde su salida hasta su explosión y la coordenada donde sucede.



Problema 3: Un cohete espacial sale de la base de lanzamiento y realiza un recorrido circular alrededor del planeta para poder preparar la salida de la Tropósfera. Si inicia el ascenso en la coordenada $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, determine el ángulo que produjo la trayectoria del cohete antes de su ascenso.



Identidades trigonométricas

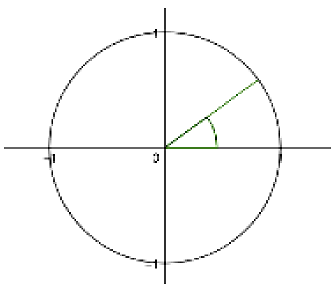
Identidades pitagóricas

Recordemos

El teorema de Pitágoras establece que en un triángulo rectángulo de catetos a y b, de hipotenusa c, se cumple que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$



$$sec^2\theta = 1 + tan^2\theta$$

$$csc^2\theta = 1 + cot^2\theta$$

Clase 4: Identidades trigonométricas

Recordemos

Identidades pitagóricas

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$sec^2\theta = 1 + tan^2\theta \qquad csc^2\theta = 1 + cot^2\theta \text{ c}$$

Algunos valores ya conocidos

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
$\frac{\pi}{2}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{\pi}{6}$			
$\frac{3\pi}{2}$			

Suma y resta de ángulos

Seno

$$sen(\alpha + \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta + sen\beta \cdot cos\alpha$$

$$sen(\alpha - \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta - sen\beta \cdot cos\alpha$$

Ejercicio: Utilice las identidades anteriores para calcular el valor de las siguientes razones.

1. $sen\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=$
2. $sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=$

Suma y resta de ángulos

Coseno

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Ejercicio: Utilice las identidades anteriores para calcular el valor de las siguientes razones.

1. $cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=$
2. $cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=$

Suma y resta de ángulos

Tangente

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

$$\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}$$

Ejercicio: Utilice las identidades anteriores para calcular el valor de las siguientes razones.

1. $tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=$
2. $tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=$

Problema:

Utilice las identidades de suma de ángulos de seno y coseno para demostrar que

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{tan\ \alpha \pm\ tan\beta}{1 \mp tan\ \alpha \cdot tan\beta}$$

Ángulo doble

$$\boldsymbol{sen(2\alpha) = 2\ sen\alpha \cdot cos\alpha}$$

$$\boldsymbol{cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sen^2\alpha}$$

Problemas:

1. Considere un ángulo α en posición estándar cuyo lado terminal se encuentra en el II cuadrante, si se sabe que el valor de $sen(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$, determine el valor de $\cos(\alpha)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.
2. Determine el valor exacto de $\tan\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ considerando que $\frac{11\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}$.
3. Compruebe que $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ y que $\cos(2\alpha) = 1 - 2sen^2\alpha$.

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática
e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 19 • N°. 1 • 2026
103-120
Recibido: 06/08/2025
Aprobado: 07/12/2025

Artículos de investigación

APLICACIÓN DE GEOGEBRA BAJO UN ENFOQUE DE AULA INVERTIDA PARA EL DESARROLLO DE LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL EN ESTUDIANTE DE GEOMETRÍA Y ÁLGEBRA LINEAL

APLICATION OF GEOGEBRA UNDER A FLIPPED CLASSROOM APPROACH FOR THE DEVELOPMENT OF SPATIAL VISUALIZATION IN STUDENTS OF GEOMETRY AND LINEAR ALGEBRA

Byron Andrey Solano Herrera[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0009-3374-8158

RESUMEN

La visualización espacial para el estudio de objetos geométricos tridimensionales puede convertirse en un obstáculo que no permite analizar la aplicación de conceptos matemáticos en el estudiantado, y que dificulta, por tanto, determinar el alcance de los objetivos de aprendizaje. Para solventar esto, se sigue una metodología de Investigación Basada en Diseño con cuatro fases de desarrollo, las cuales dieron como resultado una sistematización de la intervención didáctica mediante el desarrollo de cuatro módulos. La recolección de datos previa y posterior a la intervención destaca que se logró impulsar el enfoque de aula invertida, principalmente la implementación de videos y el trabajo colaborativo con el uso de GeoGebra. Entre los resultados más destacados las personas participantes reportaron una mejora en su visualización espacial, lo que sugiere un incremento en la capacidad de generar representaciones tridimensionales para la extracción de características y conjeturas de los objetos geométricos. Por lo tanto, se concluye que la metodología empleada dinamiza el aprendizaje y contribuye a solventar las dificultades de las personas estudiantes en materia de visualización espacial.

Palabras clave: aula invertida, visualización espacial, GeoGebra, módulos de aprendizaje, enseñanza de las matemáticas.

[1] Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, código postal 11501-2060. Correo electrónico: byron.solano@ucr.ac.cr

ABSTRACT

This study implements a didactic intervention that combines GeoGebra software with the flipped classroom model to enhance students' spatial visualization skills in the topics of lines, planes, and vector geometry. Using a four-phase Design-Based Research methodology, the intervention was structured into four modules. Pre- and post-intervention data highlights the successful adoption of the flipped classroom approach, particularly through instructional videos and collaborative tasks in GeoGebra. Participants reported improvement in spatial visualization, which suggests an increased capacity to construct three-dimensional representations, as well as extract characteristics about geometric objects and formulate conjectures. Therefore, it is concluded that the methodology employed promotes active learning and effectively addresses student challenges in spatial visualization.

Keywords: flipped classroom, spatial visualization, GeoGebra, learning modules, mathematics education.

1. INTRODUCCIÓN

A nivel de la educación superior y en la formación de personas docentes en matemática, la habilidad de visualización espacial es fundamental para el desempeño de cada profesional; en cursos avanzados las modelaciones y representaciones gráficas se realizan en dos o tres dimensiones. La asignatura Geometría y Álgebra Lineal de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica (en adelante UCR), en la cual se enmarca el presente estudio, es uno de los espacios de formación que requiere un adecuado desarrollo de la visualización y ubicación espacial.

La presente investigación busca experimentar con la implementación de una metodología de enseñanza basada en el aula invertida y el uso del software GeoGebra para los contenidos de rectas, planos y geometría vectorial, con el fin de potenciar la visualización espacial en estudiantes de Geometría y Álgebra Lineal de la UCR. Siguiendo las ideas de Monterroza (2021):

> Se hace necesario que las instituciones educativas, a través del currículo institucional con apoyo de TIC, ofrezcan a sus educandos la posibilidad de desarrollar el pensamiento espacial y que lo puedan aplicar en la vida cotidiana en cualquier área del saber de forma interdisciplinaria, además les faciliten un buen desempeño académico en su formación futura de pregrado, en especial las que tienen orientación hacia las ciencias exactas (p. 4394).

Esta línea de pensamiento se enmarca en la situación que presenta la población estudiantil, a la cual se desea aplicar la estrategia didáctica, que está basada en módulos ubicados en un entorno virtual.

Andrade y Montecino (2011) también hacen una exposición de la necesidad educativa al señalar que las personas estudiantes presentan dificultades al acudir a los objetos tridimensionales para resolver una situación problema. Según los autores, una de las causas es el factor de arraigo que tienen las personas estudiantes respecto a las representaciones gráficas previas, en una o dos dimensiones.

Lo anterior justifica la necesidad de apoyar a la persona estudiante en el paso de un pensamiento gráfico más natural y al que ha estado acostumbrado desde secundaria, a uno más analítico donde se requieren habilidades que superan el reconocimiento e interpretación. Además, para Ramírez (2021) esta problemática generaría otro tipo de inconvenientes relacionados con aplicaciones futuras de las representaciones tridimensionales, principalmente en cálculos algebraicos.

En la formación de los aprendices, la visualización se vuelve una herramienta para crear imágenes mentales que den una idea de los objetos. Castro y Castro (1997), citados en Suárez y León (2016), plantean que el pensamiento visual "está ligado a la capacidad para la formación de imágenes mentales, cuya característica es hacer posible la evocación de un objeto sin que esté presente" (p. 113). En las evaluaciones sumativas, las personas estudiantes no tendrán acceso al recurso tecnológico para construir los objetos tridimensionales; por ende, la habilidad de visualización espacial debe generar un pensamiento visual que permita acercarse mentalmente a las manipulaciones que realiza el software durante una prueba.

Dada la problemática, se plantea ¿cómo podría potenciarse el desarrollo de la visualización espacial de las personas estudiantes en los contenidos de rectas, planos y geometría vectorial del curso Geometría y Álgebra Lineal de la Universidad de Costa Rica, mediante el uso del software GeoGebra y bajo el enfoque de aula invertida?

La importancia de resolver esta necesidad educativa se fundamenta en el desarrollo de la habilidad de la visualización espacial para asignaturas posteriores y el desempeño profesional de todo aprendiz, así como en el cambio de paradigma en la metodología de enseñanza al incorporar las tecnologías digitales a los procesos de enseñanza y aprendizaje del curso Geometría y Álgebra Lineal.

Con ello, se busca solventar la necesidad que tiene la población estudiantil de mejorar sus competencias en visualización espacial, así como mitigar los problemas que el desarrollo reducido de las mismas manifiesta en asignaturas posteriores, a través del uso de GeoGebra en un enfoque de aula invertida. Rodríguez, Pérez y Ulloa (2024) afirman que esta metodología impacta positivamente en el rendimiento y motivación del estudiantado, debido a su introducción en un ambiente activo y participativo.

Junto a estos elementos, la experiencia de aula invertida con el uso de GeoGebra tiene como objetivo desarrollar cuatro módulos virtuales que utilicen el software GeoGebra bajo el enfoque de aula invertida, para mejorar la visualización espacial en rectas, planos y geometría vectorial en el estudiantado matriculado en la asignatura Geometría y Álgebra Lineal de la UCR.

2. ESTADO DE LA CUESTIÓN

Distintos trabajos de investigación y experiencias educativas han puesto en evidencia los esfuerzos que se hacen en educación superior para desarrollar la habilidad de la visualización espacial en diferentes áreas como el cálculo diferencial y el álgebra lineal.

Los profesores Marco Gutiérrez y Walter Mora del Instituto Tecnológico de Costa Rica publicaron un libro digital en la revista digital Matemática, Educación e Internet en el

2018, titulado *Vectores Rectas y Planos. Visualización interactiva.* El mismo fue un acercamiento para que las personas estudiantes pudieran interactuar con los objetos geométricos que son representados en tres dimensiones, con el objetivo de desarrollar la visualización espacial en algunos tópicos de Álgebra Lineal. Como señalan Gutiérrez y Mora (2018), la interactividad de una aplicación genera beneficios en el estudiantado al visualizar la aplicabilidad de un teorema o definición; destacando sus alcances. Además, mencionan que la visualización interactiva es un complemento al proceso de enseñanza, pero requiere la participación del profesor.

Por otro lado, Ramírez (2021) documenta una experiencia donde utiliza el software GeoGebra como recurso didáctico para visualizar distintas curvas y superficies en el espacio y sus proyecciones en los planos coordenados, esto para cubrir el contenido de integración en varias variables. Por otra parte, Del Río (2016), citado en Ramírez (2021), indica que algunos problemas para el aprendizaje de los tópicos de integración múltiple surgen por la dificultad de las personas estudiantes de realizar gráficas (en 2D y 3D) utilizando únicamente lápiz y papel, lo cual implica limitantes para la manipulación algebraica y la visualización de dichas gráficas.

Ramírez (2021) menciona, además, que se genera dificultades entre la manipulación algebraica y las interpretaciones de gráficos bidimensionales y tridimensionales, construidos con lápiz y papel. Esto respalda la importancia de resolver dicha problemática integrando tecnologías digitales, dado que el autor, entre las conclusiones que presentó de la investigación, destaca que las actividades que utilizan GeoGebra en dos y tres dimensiones favorecen los procesos de enseñanza y aprendizaje al aumentar la motivación e interés de los estudiantes.

Asimismo, a nivel internacional Andrade y Montecino (2011) desarrollaron una investigación que pretendió detectar las dificultades asociadas al uso de la visualización espacial dentro del contexto áulico chileno. Ellos detectaron que la persona estudiante presenta dificultades ante la manipulación de las representaciones en el plano de objetos geométricos tridimensionales, por eso concluyen que

> es indispensable que los estudiantes desarrollen las habilidades y competencias para dibujar e interpretar las representaciones en el plano de los cuerpos tridimensionales y, de esta manera, obtener las herramientas necesarias para comprender, visualizar y manipular las representaciones icónicas y/o gráficas de la geometría espacial (Andrade y Montecino, 2011, p. 11).

Por otro lado, Vieira (2012) realizó un estudio en el cual destaca el uso de la tecnología para dar el paso de cálculo en una variable a cálculo en varias variables donde las presentaciones son tridimensionales, con lo cual concluye que GeoGebra tiene un papel facilitador para la comprensión de propiedades restringidas en el espacio de dos dimensiones. Además, el papel de este software en el ordenador potencia la articulación de registros entre cálculo en una variable a más.

Por último, Carrascal et al. (2017) desarrollaron una investigación que utilizó el software GeoGebra para la formulación del pensamiento espacial en los tópicos de cálculo diferencial en estudiantes de ingeniería en la Universidad Francisco de Paula en Santander

Ocaña, Colombia. El objetivo de los autores fue determinar si el uso de GeoGebra contribuye al fortalecimiento del pensamiento espacial en cálculo diferencial. Entre los resultados sobresale que el pensamiento espacial de las personas estudiantes relacionadas con el aprendizaje de GeoGebra se encuentra en un nivel que les permite resolver ejercicios y orientarse en el espacio.

3. MARCO TEÓRICO

En función del objetivo señalado anteriormente, es necesario tener un marco de referencia teórico que permita un adecuado uso e interpretación de los conceptos a estudiar y las teorías de aprendizaje utilizadas.

3.1 Visualización espacial

La necesidad de estudiar la visualización espacial es mencionada por Moral et al. (2023), quienes afirman que el error de aprendizaje en distintos contenidos del área de geometría radica precisamente en la capacidad de visualización que tienen las personas estudiantes. Suárez y León (2016), basados en los trabajos de Yakimanskaya (1991), mencionan que el pensamiento espacial es una forma de actividad mental donde se crean imágenes mentales para luego manipularlas al resolver problemas prácticos y teóricos. Siguiendo los pensamientos de Hershkowitz (1990), los autores añaden que esta habilidad permite representar, transformar, generalizar, comunicar, documentar y reflexionar información sobre la visión.

Por tanto, para el presente estudio se entenderá como visualización espacial aquella competencia que tiene una persona estudiante para conectar imágenes de objetos tridimensionales con esquemas mentales previos, o para la construcción de nuevos esquemas mentales que permitan manipular esas representaciones gráficas a nivel cognitivo, con el fin de utilizar esas representaciones gráficas en los contenidos de rectas, planos y geometría vectorial.

3.2 Aula invertida o flipped classroom

El aula invertida es un enfoque de enseñanza y aprendizaje que rompe con el paradigma tradicional y se enmarca en el paradigma emergente educativo. Sandobal et al. (2021) destacan que el aula invertida hace uso de la tecnología para que los alumnos visualicen y analicen los contenidos antes de ir al salón de clase. Esto permite que en el aula se realice más práctica, se profundice en contenidos y se promueva el aprender haciendo. Los autores añaden que el espacio de desarrollo colectivo del aula invertida (la lección presencial) se transforma en un ambiente dinámico y participativo por parte de las personas estudiantes.

Autores como Salas (2021) describen que el rol de la persona docente es el de facilitador y guía, encargado de diseñar actividades que promuevan y desarrollen habilidades. Asimismo, tiene la responsabilidad de realizar una exhaustiva planificación de las clases presenciales y no presenciales, así como ser un facilitador de retroalimentación. El aprendiz presenta un rol activo, pues es el eje del proceso educativo que aprende de manera autónoma y continua, además de trabajar en grupo e individualmente. También, las personas docentes deben tener el compromiso de consultar el material previo a la clase. El rol de la tecnología toma un papel activo cuando se hace un uso creativo, eficiente, crítico y seguro de las tecnologías digitales.

Por tanto, para la presente investigación se estima que el aula invertida —apoyada por el constructivismo— ayudará a tratar el problema de la visualización espacial en los contenidos de rectas, planos y geometría vectorial. Esto debido a que las personas estudiantes podrán hacer una indagación y manipulación exhaustiva al ritmo que consideren necesario y en ambientes en los que se sientan más cómodas, lo cual propicia el aprendizaje activo.

El constructivismo avala el uso del aula invertida y de la tecnología en el proceso de enseñanza, que caracteriza como un proceso innovador que rompe con el paradigma tradicional. Santillán (2022) afirma lo siguiente:

> La metodología flipped classroom está sustentada desde el enfoque de enseñanza centrado en el estudiante y desde los enfoques de aprendizaje: constructivista de Vygotsky, el aprendizaje situado, el aprendizaje experiencial la teoría del conflicto cognitivo de Piaget, el aprendizaje cooperativo basado en la Zona de Desarrollo Próximo de Vygotsky cuyos enfoques de enseñanza y del aprendizaje, aplicados en el desarrollo de la metodología flipped classroom en un contexto educativo, permite que los estudiantes sean el centro del proceso formativo y reciban una educación personalizada y adaptada a sus necesidades individuales (p. 2055).

Así, en el marco de la investigación se proyecta que la persona estudiante construya el conocimiento manipulando los objetos matemáticos, utilizando saberes previos y con la interacción en un ambiente social, principalmente a través del trabajo colaborativo.

3.3 Entorno virtual de aprendizaje

Se entenderá como entorno virtual de aprendizaje aquel espacio en una plataforma en el que interactúan la pedagogía y la didáctica para que la persona estudiante alcance el aprendizaje buscado. Esto con el apoyo de recursos tecnológicos externos e internos, como libros, imágenes, videos y módulos interactivos que permiten ser incrustados.

El planteamiento de la idea anterior sigue lo señalado por Onrubia (2005), citado en Pérez y Castro (2022): “un entorno virtual de aprendizaje está representado por el proceso de enseñanza y aprendizaje que se desarrolla en su interior” (p. 9). Asimismo, en los entornos virtuales de aprendizaje la persona docente “establece herramientas pedagógicas que interaccionan entre el conocimiento técnico y el pedagógico” (Pibaque y Larreal, 2023, 9267), transformando la educación tradicional a una con apoyo de la tecnología. La plataforma Mediación Virtual de la Universidad de Costa Rica será la que aloje los distintos módulos de esta investigación, ya que se pretende impulsar nuevas ideas, metodologías y formas creativas para promover el aprendizaje con el apoyo de tecnologías.

3.4 Relación de GeoGebra con la visualización espacial y aula invertida

Para Teófilo et al. (2022), GeoGebra es un software utilizado como recurso didáctico para el desarrollo de la intuición y el pensamiento geométrico, pues permite la visualización de objetos en tercera dimensión. Por su parte, García y Poveda (2022) sostienen que la cuantificación de los atributos de un objeto en el software permite analizar las variaciones de los objetos geométricos de forma instantánea, donde la persona estudiante puede deducir patrones y conjeturas.

Además, Chóez y Sárate (2020) indican que un beneficio de GeoGebra desde lo didáctico "aporta a que los estudiantes desarrollen habilidades cognitivas de orden superior, a través de la manipulación, ya que, permite la visualización, la interpretación y reflexión de las construcciones" (p. 64). Además, señalan en sus conclusiones el respaldo del aula invertida apoyada con GeoGebra, pues "según los resultados obtenidos, contribuye a la autonomía, la participación y a la evaluación como proceso positivo para el estudiante. En cuanto a las habilidades sociales, promueve el trabajo en equipo, por ende, consolida las relaciones entre compañeros" (p. 64).

4. METODOLOGÍA

Esta investigación siguió un enfoque cualitativo debido a la pregunta ¿cómo podría potenciarse el desarrollo de la visualización espacial de las personas estudiantes en los contenidos de rectas, planos y geometría vectorial del curso Geometría y Álgebra Lineal de la UCR? A partir de ello, se requirió la interacción directa de la persona investigadora con el contexto para determinar cómo el estudiantado incorpora la tecnología a su aprendizaje y qué estrategias de análisis utilizan para desarrollar la visualización espacial.

Relacionado con lo anterior, Hernández et al. (2010) mencionan que en este enfoque la indagación se realiza entre los hechos y su interpretación y viceversa; destacan que se pasa de lo particular a lo general, aplicando un proceso inductivo.

La población de la investigación fueron las 15 personas matriculadas en el curso MA0307 Geometría y Álgebra Lineal de la UCR, sede Rodrigo Facio, en la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, durante el segundo ciclo del 2024. Además, se escogió una muestra de cinco personas estudiantes bajo un muestreo por conveniencia y siguiendo una línea no probabilística, con el fin de aplicarles una entrevista de valoración al finalizar la aplicación de los módulos basados en GeoGebra. Para Hernández et al. (2010), estas muestras se conforman con los casos disponibles a los cuales hay acceso.

4.1 Diseño de investigación

Las acciones de la investigación se abordaron desde la Investigación Basada en Diseño (IBD). Para Plomp (2013), citado en Vrancken et al. (2018), la IBD es un enfoque de investigación sistemático, desarrollador y evaluador de intervenciones educativas que pretende

> dar soluciones a problemas complejos de la práctica educativa, que al mismo tiempo tiene por objetivo avanzar en el conocimiento sobre las características de estas intervenciones y sobre los procesos de diseño y desarrollo de las mismas, con el propósito de desarrollar o validar teorías (p. 782).

Para desarrollar el objetivo de investigación, la IBD permitirá construir una estrategia didáctica con el uso de GeoGebra, mediante el aula invertida, para su implementación en personas estudiantes. Esto con el fin de determinar el desarrollo de la visualización espacial sobre los contenidos de rectas, planos y geometría vectorial.

Se utilizó el modelo de fases de IBD propuesto por Guisasola et al. (2021), que utiliza un funcionamiento por medio de ciclos continuos de diseño, implementación, análisis y rediseño. Se plantean cuatro fases de acción en las cuales no se asume una teoría educativa o herramientas específicas, por lo que se da libertad a los investigadores. Las fases son las siguientes:

1. *Fundamentos teóricos que guían la investigación*. Toma la teoría y las investigaciones científicas como el primer punto de partida, pues comprender la epistemología científica es clave para estructurar la enseñanza y generar un acercamiento a una secuencia de contenidos temáticos específicos. (Guisasola et al., 2021).
2. En la presente investigación, esta fase se desarrolló previo a la intervención para conocer la problemática expuesta, haciendo una revisión bibliográfica e indagación de propuestas similares que involucran la visualización espacial, el aula invertida y el uso de las tecnologías digitales. Además, se consultaron aspectos de metodología que fueron los cimientos para establecer el accionar de los módulos y la investigación. Por último, en esta fase se desarrollaron entrevistas de diagnóstico de la habilidad de visualización espacial.
3. Diseño. En este paso se hizo una conexión entre la teoría y el diseño de la intervención educativa. Se creó un producto inicial que consistente con la teoría y con los objetivos de aprendizaje. Además, se diseñaron las actividades de la intervención, las pautas de evaluación y el material para el profesorado (Guisasola et al*.,* 2021).

   Siguiendo los objetivos planteados, esta fase contempló el diseño de la propuesta didáctica para cada módulo con el diseño y la creación de videos, actividades evaluativas y colaborativas, entre otros recursos, siguiendo una metodología de aula invertida. Cada actividad involucró el uso de un *applet* en el software GeoGebra. Con todos los recursos preparados, los cuatro módulos fueron integrados cuidadosamente en la plataforma institucional de la UCR, Mediación Virtual. Para finalizar la fase se dio una revisión exhaustiva del contenido y la secuencia pedagógica a desarrollar.
4. Implementación. Para Guisasola et al. (2021), este paso tiene como objetivo determinar cómo el diseño conducirá a un mejor aprendizaje de la persona estudiante. Se puede visualizar como un experimento de enseñanza que permite revisar conjeturas según el análisis continuo.

   Esta fase se desarrolló en cuatro días, en los que se implementaron los cuatro módulos. Las personas estudiantes revisaron y analizaron el material previo a la clase presencial, para luego trabajar en el aula y de manera colaborativa la construcción de resultados teóricos y la resolución de ejercicios. La implementación se desarrolló en laboratorios especializados con computadoras y conexión a Internet, de tal manera que tuvieron acceso a GeoGebra.
5. Evaluación y rediseño. Para esta última fase se prepararon las evaluaciones desarrollando preguntas enfocadas en el uso del aula invertida, la implementación de GeoGebra y los niveles de visualización espacial, para luego realizar cinco entrevistas de valoración sobre los módulos. En esta etapa se evaluaron la calidad de las actividades, el tiempo de implementación y el cambio hacia una nueva estrategia de

aprendizaje mediante el aula invertida, además de la adquisición de habilidades de visualización espacial.

4.2 Instrumentos de recolección

Se aplicaron dos instrumentos de recolección de información basados en la observación y la entrevista semiestructurada; estas se desarrollaron antes, durante y después de la aplicación de los módulos. Esto debido a que la investigación busca observar cómo las personas estudiantes interactúan, de manera colectiva, con la tecnología y el objeto matemático. Por tanto, cumple con elementos específicos que se pueden observar en una investigación, según lo proponen Hernández et al. (2010): el ambiente físico, el ambiente social y humano, actividades (acciones) individuales y colectivas, artefactos que utilizan, hechos relevantes y retratos humanos.

La entrevista semiestructurada es una técnica que se adapta de manera favorable a las investigaciones con enfoques cualitativos. Conforme a Hernández et al. (2010), este tipo de entrevista consiste en una reunión para conversar e intercambiar información entre el entrevistador y las personas entrevistadas. Además, permite añadir preguntas adicionales durante la ejecución de la entrevista, si el entrevistador lo considera necesario.

Las entrevistas se realizaron en dos ocasiones a cinco personas. El primer momento fue previo a la aplicación de los módulos, con el fin de conocer las falencias que el estudiantado percibe en el desarrollo de la visualización espacial y el manejo del software GeoGebra. La información obtenida en este momento es relevante para enriquecer las primeras dos fases de la IBD.

El segundo momento de aplicación de la entrevista semiestructurada tuvo el objetivo de recabar información sobre las valoraciones de la experiencia al utilizar el software GeoGebra bajo el enfoque de aula invertida. Así, se cumple con las últimas fases de la IBD: evaluación, rediseño y validación. Las mismas se agruparon en cuatro bloques (ver Figura 1) para medir el impacto de GeoGebra, el desarrollo de la visualización espacial, el impacto de las tecnologías digitales en el aprendizaje y el uso del aula invertida.

Figura 1 Agrupación de las preguntas para la entrevista de valoración

Fuente: Elaboración propia (2025).

5. RESULTADOS

A continuación, se presentan los principales resultados evidenciados en las entrevistas y observaciones tras la aplicación de la propuesta metodológica. Estos se agrupan en tres categorías: implementación del aula invertida, uso de GeoGebra, y desarrollo de la visualización espacial.

El enfoque de aula invertida como metodología de enseñanza tuvo fuertes beneficios para el estudiantado. Los entrevistados manifestaron que consultar los contenidos previos a la clase presencial les permitió asistir con mayor preparación, lo que proporciona una base de la materia y mejor comprensión de los tópicos estudiados. Además, señalaron que tuvieron más tiempo para interiorizar la materia.

Ligado a esto, el uso de videos tuvo una alta preferencia por el estudiantado; según afirmaron en las entrevistas, los videos fueron un recurso con un impacto benéfico en el aprendizaje, ya que estos permiten ser consultados más de una vez y avanzar a un ritmo individualizado. Un reflejo de esto son las altas visualizaciones que reportaron los videos en la plataforma YouTube.

También, el trabajo desarrollado en la clase presencial fue de índole colaborativo. Los entrevistados declararon que esta modalidad les permitió conocer nuevas opiniones y formas de abordar un ejercicio, por lo que la consideran una forma de innovar. Una estudiante compartió su opinión de lo observado durante el desarrollo de los cuatro módulos:

> ***Estudiante 2:*** *De hecho, a mí me gustaron porque salen un poco de lo normal de la clase digamos en la mayoría de los cursos de matemática. Y nos ayudó a verlo no solo de manera que el profesor no lo explique directamente en la pizarra, sino nosotros también construir el concepto, los teoremas y todo lo que estamos por desarrollar.*

Asimismo, GeoGebra tuvo un gran impacto en el proceso de interiorizar los contenidos estudiados y visualizar representaciones gráficas en el espacio de rectas y planos. Algunas opiniones evidencian la manifestación de este fenómeno:

> ***Estudiante 1:*** *GeoGebra, ayuda mucho porque, al menos en el caso mío, yo soy como de imaginar mucho las cosas gráficamente, entonces sí sentí que me ayudó bastante.*
>
> ***Estudiante 2:*** *GeoGebra me ayudó mucho a visualizar gráficamente todo lo que estábamos viendo. Mientras estaba viendo el video, yo misma utilizaba GeoGebra como apoyo para también ver qué era lo que estaba pasando y ver si yo misma también lo podía hacer.*
>
> ***Estudiante 4:*** *la parte de GeoGebra me sirvió mucho para visualizar la parte de planos, rectas, vectores, que eso, sinceramente, cuando lo había llevado en cursos anteriores, o inclusive cuando lo había llevado previamente en geometría, no fue tan, tan explícito como ahorita. Entonces me ayudó demasiado.*

Otros de los beneficios reportados por los entrevistados tras el uso de GeoGebra son la capacidad de visualizar las características de los objetos geométricos de rectas, planos y vectores, además de estudiar el paralelismo y perpendicularidad (ortogonalidad). Uno de los entrevistados menciona: "me ha ayudado para visualizar como esas características también y las relaciones que tienen también el punto, los vectores, las rectas, si son ortogonales también, todas esas características también se pueden visualizar a través de GeoGebra".

También, el software tuvo un uso fundamental para la interpretación de un enunciado y resultados al estudiar rectas, planos y geometría vectorial. Fue útil para comprender el abordaje hacia un ejercicio, dado que les permitió plantear un camino hacia la solución. Algunos entrevistados opinaron lo siguiente:

> ***Estudiante 1****: todavía sigo estudiando para el próximo examen, utilizo GeoGebra porque hay preguntas que no entiendo cómo entrarles, pero con GeoGebra me hago una idea.*
>
> ***Estudiante 3****: para verificación y como para darme una idea de cómo poder, tal vez, realizar el procedimiento, qué es lo que debo de hacer.*
>
> ***Estudiante 4****: a la hora de hacer las prácticas, de hecho, a veces me costaba mucho visualizar lo que decía el enunciado. Entonces lo ponía en GeoGebra para poder más o menos saber por dónde llegarle a la respuesta.*
>
> ***Estudiante 5****: hubo varios que no lograba comprender como el ejercicio, entonces nada más venía y lo ponía en GeoGebra y ya decía, ah mira, es que este punto está acá y yo lo estaba visualizando en otra posición.*

Un importante resultado son las dificultades que surgieron durante el uso de GeoGebra, principalmente al realizar el trabajo en tercera dimensión. Aunque las personas estudiantes se encontraban capacitadas en el uso del software debido a conocimientos previos, se presentaron dificultades para comprender la gestión de los objetos tridimensionales y las herramientas de GeoGebra. Según mencionan, previamente solo habían trabajado en 2D; es decir, en el plano.

Por último, el aprendizaje de los contenidos de rectas, planos y geometría vectorial se vio favorecido ante el uso de GeoGebra; este software logró que a las personas estudiantes se le facilitara la comprensión de conceptos complejos por la interacción con el objeto de estudio, según manifestaron en las entrevistas.

Además, las personas entrevistadas destacaron que las representaciones en dos dimensiones se les facilitaron; inclusive, manifestaron que las lograron realizar con lápiz y papel. Sin embargo, mencionaron dificultades para visualizar objetos en tercera dimensión, por lo que necesitaron apoyo del software GeoGebra. Esto se ve reflejado en la opinión de uno de los entrevistados:

> ***Estudiante 3:*** *Si requiero hacer la representación en R2 la podría hacer manual, la podría hacer manual y con lápiz, pero ya al momento de hacer en R3, si se me complica un poco ya hacerla tanto mentalmente como también visualizarlo en un lápiz y papel, se me complica un poco, entonces ya para partir de R3 si prefiero mejor utilizar la herramienta de GeoGebra.*

Siguiendo esta línea, solo una de las cinco personas entrevistadas manifestó que podía visualizar los objetos mentalmente, pero el software GeoGebra le facilitó el trabajo en situaciones complejas. En general, las personas entrevistadas mencionaron tener un desarrollo visual más elevado en comparación al inicio de los módulos; sin embargo, en un grado siguen dependiendo de un apoyo complementario, como lo es el software GeoGebra.

6. RESULTADOS/DISCUSIONES

El aula invertida es uno de los enfoques de aprendizaje que buscan transformar las dinámicas tradicionales de clase. Para Cóndor et al. (2023), los beneficios de este enfoque consisten en que las personas estudiantes estudien de manera independiente en sus casas, lo cual les da la oportunidad de avanzar a su propio ritmo y revisar los contenidos cuantas veces lo requieran. En el presente estudio, esto se demuestra en el uso que las personas estudiantes dieron a los videos previo a la clase presencial de cada módulo. Se concuerda con la investigación planteada por Gaviria et al. (2019), donde concluyeron que en el aula invertida "los participantes en general reaccionaron positivamente a la mediación en el desarrollo del curso con videos educativos" (p. 610).

Otro elemento para rescatar respecto a las actividades colaborativas presenciales es que las personas estudiantes lograron construir conocimientos y resolver ejercicios mediante la discusión entre pares. Siguiendo las ideas de Zavala et al. (2023), el aula invertida genera beneficios en la participación, aumento en el trabajo cooperativo e incremento en el rendimiento académico.

En general, Salas (2021) afirma que este modelo mejora el ambiente de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas al hacer uso de videos para el estudio en casa y el trabajo colaborativo mediante la resolución de problemas durante la sesión presencial, lo cual es un reflejo de la aplicación de los cuatro módulos en rectas, planos y geometría vectorial.

Además, Cedeño y Vigueras (2020) añaden que la dinámica de este enfoque —aula invertida— está dirigida hacia la motivación y el empleo de herramientas innovadoras, lo cual se destaca en los resultados, donde uno de los entrevistados expresó afinidad por la dinámica de los módulos debido a su novedad respecto a las clases tradicionales de matemática.

Seguir el enfoque de aula invertida apoyado con trabajo colaborativo durante los módulos tuvo efectos positivos, ya que en cada módulo se observó un avance graduado en el aprendizaje. Cedeño y Vigueras (2020) reflejan que el aula invertida cubre los niveles más bajos de la taxonomía de Bloom, con actividades desarrolladas fuera del salón de clases y apoyadas por la tecnología; mientras que los niveles más altos se alcanzan con el trabajo colaborativo y la guía del docente en el salón de clase.

Interpretar el resultado de un ejercicio o un enunciado con GeoGebra es una manifestación clara de lo que señalan Lucas y Aray (2023); en la calculadora gráfica de GeoGebra las personas estudiantes pueden comprobar manualmente los resultados obtenidos, lo que proporciona retroalimentación del trabajo y favorece la corrección de errores. Para Sánchez y Borja (2022), GeoGebra es una herramienta que fomenta en el alumnado un aprendizaje por descubrimiento y estimula la creación de proyectos matemáticos.

Siguiendo la misma línea, Martínez et al. (2023) rescatan el enfoque práctico y experimental de GeoGebra, que permite la construcción y manipulación visual de figuras geométricas en tiempo real. Lo anterior se liga con las herramientas que brindó el software en cada módulo para que las personas estudiantes manipularan los objetos de rectas, planos y vectores, con el fin de estudiar las características de estos.

De manera similar, Sánchez y Borja (2022) mencionan que GeoGebra facilita los procesos de abstracción para evidenciar cómo se construye una relación entre un modelo geométrico a uno algebraico, hecho que se ve plasmado en el momento en que la persona estudiante se apropia de GeoGebra para estudiar las características de vectores, rectas o planos y su representación gráfica.

El uso que se le dio a GeoGebra durante el desarrollo de los cuatro módulos facilitó el aprendizaje de la temática estudiada y generó un impacto en la interiorización de los contenidos. Lo anterior se relaciona con los pensamientos de Mendoza et al. (2024), quienes expresan que "el uso del GeoGebra para la visualización gráfica y algebraica, en la resolución de problemas, facilita el aprendizaje de la temática y hace más eficiente la comprensión de la matemática, en grupos colaborativos" (p. 30).

Con respecto a la competencia de visualización espacial apoyada por el software GeoGebra, se presenta una mejora al utilizar la representación gráfica. Este resultado positivo se asocia con lo concluido por González et al. (2021), quienes utilizaron GeoGebra como un apoyo para visualizar la relación de las representaciones algebraicas con las geométricas, uso que causó una mejora en la visualización. Esto se vincula con el objetivo planteado en la presente investigación, que buscó desarrollar la visualización espacial en rectas, planos y geometría vectorial.

Las personas participantes tuvieron facilidades al trabajar con representaciones gráficas en dos dimensiones; sin embargo, las de tres dimensiones les presentaron dificultades, por lo que requirieron apoyo de GeoGebra. Como se mencionó anteriormente, esto se refleja en el hecho de que solamente una persona manifestó tener facilidades para crear representaciones mentalmente y, aun así, necesitó corroborar ciertos ejercicios en el software. Este estudio sigue la postura que adoptan Fernández y Santacruz (2024) al concluir que existen dificultades y obstáculos en la visualización de figuras en el espacio a nivel universitario. Los autores añaden que el pensamiento visual y el aprendizaje de la geometría en 3D tienen beneficios al usar la geometría dinámica, dado que proporciona una "variedad de riqueza visual de imágenes espaciales que no se consigue en representaciones estáticas en el papel o, en algunos casos, en el espacio físico" (p. 40).

Asimismo, se vuelve a ratificar el cumplimiento del objetivo de la investigación al destacar que todas las personas entrevistadas percibieron una mejora de su visualización espacial; evidencia de que el uso de GeoGebra solventa significativamente esta necesidad educativa. Esto se traduce en una mejora para asignaturas posteriores y se relaciona con la investigación que realizó Ramírez (2021) en una población con las mismas características, pero en niveles más avanzados de la misma carrera (Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática), donde destaca que las actividades didácticas que hacen uso de GeoGebra en dos y tres dimensiones fortalecen los procesos de aprendizaje.

7. CONCLUSIONES

Esta investigación se ha desarrollado ante la necesidad de potenciar la visualización espacial en los contenidos de rectas, planos y geometría vectorial en las personas estudiantes matriculadas en la asignatura Geometría y Álgebra Lineal, con miras a que esta destreza se aplique en cursos más avanzados, como cálculo multivariado. GeoGebra fungió como un recurso de apoyo útil para la interacción del aprendiz con las representaciones gráficas, con el objetivo de lograr visualizar sus características y manipular los objetos en dos o tres dimensiones.

La implementación de los cuatro módulos ha logrado desarrollar en la persona aprendiz un aumento en el grado de la visualización espacial, permitiéndole observar características y construir conjeturas sobre ellas; sin embargo, las representaciones espaciales se limitan a un manejo visual concreto, dado que se basan únicamente en su apariencia física o visual, y no de manera abstracta. Ante esto, se observa que la aplicación de GeoGebra permite crear y manipular representaciones espaciales, con lo que se responde a la pregunta de investigación.

Se cumplió con lo planteado respecto a la estrategia de aula invertida al lograr que las personas estudiantes analizaran las temáticas a un ritmo individualizado previo a la clase presencial; no obstante, se dio una preferencia por el uso del video en comparación con los contenidos que se expusieron de manera textual en el entorno virtual. Este comportamiento se asocia con la descripción del enfoque de aula invertida y su relación con el papel activo del estudiante y la tecnología. Por otro lado, el trabajo en clase colaborativo tuvo una buena aceptación, pues permitió amplia discusión, así como la construcción conjunta del conocimiento.

Con respecto a GeoGebra, la población se sintió cómoda trabajando con las herramientas en tercera dimensión para la construcción y fácil visualización de los objetos. Además, por tener una interfaz sencilla y ser de acceso gratuito en línea, es una aplicación que el estudiantado consultó de manera recurrente durante el trabajo presencial. Se demostró que GeoGebra es una herramienta tecnológica que influye de manera positiva en el aprendizaje del estudiantado para el estudio de objetos geométricos complejos.

Como fruto de la experiencia de construcción de los recursos digitales, se encontró la limitación del tiempo en el diseño y edición de videos desarrollados por la propia persona docente, lo que se traduce en un faltante de productos digitales para consulta por parte del aprendiz. Otra barrera de ejecución de la propuesta consistió en el tiempo que se asignó entre cada módulo: de dos a tres días, lo que perjudicó al estudiantado con otras labores académicas. Lo anterior es consecuencia del horario de clases asignado para la asignatura y el cronograma institucional.

Para futuras líneas de investigación, se pretende apoyar el uso del aula invertida en asignaturas avanzadas de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática y el uso de GeoGebra en temáticas que involucren la visualización espacial. Además, queda pendiente estudiar el impacto que tiene el uso de GeoGebra y el enfoque de aula invertida en el rendimiento académico, donde se podría incluir al software como parte de las acciones que debe desarrollar el estudiantado en una evaluación sumativa.

Esta investigación ha demostrado que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática se pueden transformar en dinámicos e innovadores, y romper, así, con el paradigma tradicional. Bajo el enfoque empleado, el aprendiz toma control de su aprendizaje y lo gestiona con apoyo de la tecnología, lo que le da mayor participación en la elaboración del conocimiento. Esta propuesta es una invitación a que el personal docente se sirva de las tecnologías digitales para la implementación de nuevos enfoques emergentes en el aprendizaje de la matemática universitaria.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

BSH planteó la idea desarrollada y construyó el referente teórico y metodológico. También, ejecutó las intervenciones didácticas para luego realizar una recolección y análisis de los datos. Por último, BSH ejecutó la redacción de la investigación.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la persona autora correspondiente, BSH, previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la Escuela de Matemática, Departamento de Educación Matemática, de la Universidad de Costa Rica; y a la Maestría en Tecnología e Innovación Educativa, de la Universidad Nacional de Costa Rica por su colaboración y guía para desarrollar esta investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Andrade Molina, M. y Montecino, A. (2011, 26-30 de junio). *La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano*. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Brasil.

Carrascal Carrascal, H., Cháves Peña, J. y Cabellos Martínez, M. I. (2017). GeoGebra para el fortalecimiento del pensamiento espacial en cálculo diferencial. *Revista Ingenio UFPSO, 13*, 171-177. https://doi.org/10.22463/2011642X.2145

Cedeño Escobar, M. R. y Vigueras Moreno, J. A. (2020). Aula invertida una estrategia motivadora de enseñanza para estudiantes de educación general básica. *Revista Científica Dominio de las Ciencias, 6*(3), 878-897. http://dx.doi.org/10.23857/dc.v6i3.1323

Chóez Martínez, G. N. y Sárate Juca, J. A. (2020). *Aula invertida apoyada con GeoGebra para la enseñanza y aprendizaje del tema Triángulos, en el noveno año EGB de la Unidad Educativa Luis Cordero* [Tesis de licenciatura, Universidad Nacional de Educación]. http://repositorio.unae.edu.ec/handle/123456789/1398

Cóndor Chicaiza, M. G., Valladares Perugachi, L. J., Ulcuango Ashqui, M. T., Rovalino Robalino, M. D. y Velasco Bazantes, L. F. (2023). Los beneficios y desafíos de la implementación de la clase inversa en la educación secundaria. *GADE: Revista Científica, 3*(4), 356-369. https://revista.redgade.com/index.php/Gade/article/view/259

Fernández Mosquera, E. y Santacruz Rodríguez, M. (2024). Visualización dinámica tridimensional en actividades de lugares geométricos 3D en geometría dinámica. *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 39-45). https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-03

García Rodríguez, M. L. y Poveda Fernández, W. E. (2022). El MOOC, un entorno virtual para la resolución de problemas matemáticos. *Educación Matemática, 34*(2), 133-181. https://doi.org/10.24844/EM3402.06

Gaviria Rodríguez, D., Arango Arango, J., Valencia Arias, A. y Bran Piedrahita, L. (2019). Percepción de la estrategia aula invertida en escenarios universitarios. *RMIE Revista Mexicana de Investigación Educativa, 24*(81), 593-614.

González Hernández, N., Garcés Cecilio, W. y Grimaldy Romay, L. (2021). La visualización en la enseñanza de la matemática. Su empleo mediante el uso del GeoGebra. *Didáctica y Educación, 11*(4), 130-140.

Guisasola Aranzabal, J., Ametller, J. y Zuza, K. (2021). Investigación basada en el diseño de secuencias de enseñanza-aprendizaje: una línea de investigación emergente en Enseñanza de las Ciencias. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 18*(1), Artículo 1801. https://doi.org/10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2021.v18.i1.1801

Gutiérrez Montenegro, M. y Mora Flores, W. (2018). *Vectores, Rectas y Planos. Visualización Interactiva*. Revista digital Matemática Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, M. P. (2010). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill Education.

Lucas Avila, G. E. y Aray Andrade, C. A. (2023). GeoGebra como herramienta didáctica para el fortalecimiento del aprendizaje de secciones cónicas en bachillerato. *Revista Científica Arbitrada Multidisciplinaria Pentaciencias, 5*(5), 386-400. https://doi.org/10.59169/pentaciencias.v5i5.747

Martínez Zapata, M. E., Pérez Urruchi, A. E., Robles Medina, G. B. y Apolinario Arzube, O. O. (2023). Explorando la geometría con GeoGebra: estrategias para reforzar el aprendizaje en estudiante de niveles intermedios. *Universidad, Ciencia y Tecnología, 28*(122), 62-72. https://doi.org/10.47460/uct.v28i122.766

Mendoza Carlos, M. M., Lozano Reátegui, R. M., Asencios Tarazona, V. y Romero Cahuana, Á. A. (2024). Mediación del software GeoGebra en la aplicación de estrategias para la matematización de problemas por estudiantes de ingeniería en Perú. *Formación Universitaria, 17*(3), 21-34. http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062024000300021

Monterroza Santos, L. (2021). GeoGebra y el desarrollo del pensamiento espacial: una oportunidad de innovación en la práctica educativa. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar, 5*(4), 4388-4405. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v5i4.627

Moral Sánchez, S. N., Sánchez Compaña, M. T. y Romero Albaladejo, I. (2023). Uso de realidad virtual en Geometría para el desarrollo de habilidades espaciales. *Enseñanza de las Ciencias, 41*(1), 125-147. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5442

Pérez Pérez, R. y Castro, A. (2022). Entornos virtuales de aprendizaje en la resolución de problemas matemáticos. *Technological Innovations Journal, 1*(4), 7-20. https://doi.org/10.35622/j.ti.2022.04.001

Pibaque Tigua, D. D. y Larreal Bracho, A. J. (2023). Entornos virtuales de aprendizaje: una mirada teórica hacia el aprendizaje. *Ciencia latina revista multidisciplinar, 7*(1), 9262-9278. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i1.5048

Ramírez Santamaría, B. A. (2021). GeoGebra en 2D y 3D como recurso didáctico en un curso de integración múltiple: una experiencia de enseñanza-aprendizaje. *Revista digital Matemática, Educación e Internet, 21*(1), 1-18. https://doi.org/10.18845/rdmei.v21i1.5341

Rodríguez Jiménez, F. J., Pérez Ochoa, M. E. y Ulloa Guerra, Ó. (2024). Innovación educativa: explorando el impacto del aula invertida en el rendimiento académico de estudiantes de secundaria en matemática. *Revista Educación, 48*(1) https://doi.org/10.15517/revedu.v48i1.55892

Salas Rueda, R. A. (2021). Impacto del aula invertida en el proceso de enseñanza-aprendizaje sobre los mapas de Karnaugh. *Revista electrónica Educare, 25*(2), 1-22 https://doi.org/10.15359/ree.25-2.14

Sánchez, R. y Borja, A. (2022). Geogebra en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Científica Dominio de las Ciencias, 8*(2), 33-52 http://dx.doi.org/10.23857/dc.v8i2.2737

Sandobal Verón, V. C., Marín, B y Barrios, T. H. (2021). El aula invertida como estrategia didáctica para la generación de competencias: una revisión sistemática. *RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia, 24*(2), 285-308 https://doi.org/10.5944/ried.24.2.29027

Santillán Aguirre, J. P. (2022). Flipped Classroom: ¿Enfoque o Metodología? *Polo del conocimiento, 7*(2), 2039-2059. https://doi.org/10.23857/pc.v7i2.3695

Suárez Moya, W. A. y León Corredor, O. L. (2016). El aprendizaje de la visualización espacial en niños y en niñas. *Revista Horizontes Pedagógicos, 18*(2), 110-119 https://horizontespedagogicos.ibero.edu.co/article/view/18209

Teófilo de Sousa, R., Vieira Alves, F. R. y Ferreira de Azevedo, I. (2022). Una propuesta didáctica apoyada por GeoGebra para la enseñanza del Principio de Cavalieri. *Números, 110*, 41-60. https://sinewton.es/publicacion-numeros/articulo-3-110/

Vieira Alves, F. R. (2012). Transição interna do Cálculo: uma discussão do uso do *GeoGebra* no contexto do Cálculo a várias variáveis. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo, 1*(2), 5-19. https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/11373

Vrancken, S., Engler, A. y Müller, D. (2018). La investigación basada en diseño como sustento de ambientes de aprendizaje para el aula de matemática. En Arturo, Luis; Páges, Daniela (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 779-786). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. México.

Zavala, M. A., González, I. y Rojas, G. M. (2023). Aportes al conocimiento actual sobre el aula invertida. *Revista Espacios, 43*(9), 206-217. https://doi.org/10.48082/espacios-a23v44n09p13

Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 19 • N°. 1 • 2026
121-149
Recibido: 01/05/2025
Aprobado: 27/10/2025

Artículos de investigación

ESTUDIOS HISTÓRICO-EPISTEMOLÓGICOS EN MATEMÁTICA EDUCATIVA: tendencias metodológicas en Latinoamérica

HISTORICAL-EPISTEMOLOGICAL STUDIES IN MATHEMATICS EDUCATION: Methodological Trends in Latin America

Fabián W. Romero Fonseca[1]

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-4472-963X

Luis A. López-Acosta[2]

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2903-5413

RESUMEN

Este artículo pretende describir las tendencias metodológicas de los estudios históricos-epistemológicos realizados por investigadores adscritos a instituciones latinoamericanas, a través de un análisis bibliométrico y un análisis de contenido de artículos de revistas especializadas en Matemática Educativa. Para el análisis bibliométrico se realizó una revisión sistemática artículos de corte histórico-epistemológico, cuya autoría tuviese filiación latinoamericana; se revisaron algunos indicadores bibliométricos de los mismos y los resultados muestran que la mayoría de la investigación de este tipo, realizada entre los años 2017 y 2022, tiene su mayor producción en Brasil y que existe cierta paridad de género respecto de las autoras y autores dentro de esta línea de investigación. Por su parte el análisis de contenido de los artículos seleccionados mostró las tendencias teóricas, los tipos de preguntas de investigación, los enfoques metodológicos y algunos otros aspectos recurrentes en este tipo de estudios, lo que permitió, a partir de este análisis sistematizar un procedimiento metodológico para el análisis de una obra histórica original. Los resultados obtenidos muestran una amplia variedad de estrategias

[1] Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica. Correo electrónico: fabian.romero@ucr.ac.cr

[2] Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica. Correo electrónico: luis.lopezacosta@ucr.ac.cr

metodológicas que reflejan tanto la riqueza conceptual del campo como sus desafíos. Finalmente, a partir de los resultados, se propone un esquema metodológico para el análisis histórico-epistemológico de obras originales.

Palabras clave: Análisis de obras originales, Epistemología de la matemática, Historia de la matemática, Metodología de investigación, Matemática Educativa.

ABSTRACT

This article aims to describe the methodological trends in historical-epistemological studies conducted by researchers affiliated with Latin American institutions, through a bibliometric analysis and content analysis of articles published in journals specialized in Mathematics Education. For the bibliometric analysis, a systematic review was carried out of historical-epistemological studies authored by researchers with Latin American institutional affiliation. Several bibliometric indicators were examined, and the results show that most research of this kind, conducted between 2017 and 2022, is produced in Brazil and that there is a relative gender balance among the authors involved in this line of research. The content analysis of the selected articles revealed theoretical trends, types of research questions, methodological approaches, and other recurring aspects in these studies. Based on this analysis, a methodological procedure was systematized for analyzing an original historical work. The results show a wide variety of methodological strategies, reflecting both the conceptual richness of the field and its challenges. Finally, a methodological framework is proposed for conducting historical-epistemological analysis of original mathematical works.

Keywords: Analysis of original works, Epistemology of mathematics, History of mathematics. Research methodology, Mathematics education.

1. INTRODUCCIÓN

En las últimas décadas, la investigación histórico-epistemológica en Matemática Educativa ha ganado un lugar destacado como una vía para comprender el desarrollo del conocimiento matemático y su implicación en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Este tipo de estudios permite no solo reconstruir la evolución de conceptos y prácticas matemáticas, sino también identificar los obstáculos y rupturas conceptuales que han marcado la historia del pensamiento matemático. No obstante, pese a su creciente relevancia, persiste una limitada sistematización de los enfoques metodológicos empleados en estas investigaciones (Barbin, et. al. 2020), especialmente en el contexto latinoamericano. Esta situación dificulta tanto la articulación de marcos metodológicos sólidos como la proyección internacional del conocimiento producido en la región.

En este contexto, se propone analizar las metodologías utilizadas por investigadores adscritos a instituciones latinoamericanas en estudios de corte histórico-epistemológico. La motivación de este trabajo radica en la necesidad de hacer explícitos los procedimientos de construcción y análisis de datos empleados en estas investigaciones, de modo que se pueda valorar críticamente su coherencia interna, sus fundamentos teóricos y su potencial para incidir en la práctica educativa. A pesar de que existen clasificaciones generales sobre los usos de la historia en la enseñanza de la matemática (Clark et al., 2019; Tzanakis et al., 2000), estos enfoques tienden a centrarse en su aplicación didáctica, dejando de lado el análisis riguroso de los métodos de investigación empleados en estudios de tipo histórico-epistemológico.

Este vacío metodológico se hace aún más evidente si se considera la escasa representación de investigaciones latinoamericanas en revisiones internacionales, las cuales suelen estar circunscritas a literatura en inglés. Por ejemplo, en la revisión realizada por Clark (2019) sobre estudios históricos en matemática educativa posteriores al año 2000, apenas se identifica un trabajo latinoamericano, a pesar del evidente desarrollo del campo en la región. Esto evidencia una necesidad apremiante de visibilizar los aportes latinoamericanos, no solo en términos de resultados, sino también de propuestas metodológicas que respondan a contextos educativos y culturales específicos. Asimismo, el artículo responde al llamado de diversos autores (Picado y Rico, 2011; Barbin et al., 2020) a problematizar los fundamentos y métodos de estas investigaciones, reconociendo su diversidad y complejidad.

El objetivo principal de este estudio es analizar las tendencias metodológicas de los estudios de corte histórico-epistemológico en Matemática Educativa desarrollados –total o parcialmente– por investigadores e instituciones latinoamericanas, con el fin de sistematizar los aportes metodológicos de la región. Para ello, se llevó a cabo una investigación cualitativa, de tipo documental y exploratorio, centrada en el análisis de artículos científicos publicados en revistas especializadas en Matemática Educativa. La unidad de análisis estuvo constituida por estudios que integran explícitamente el enfoque histórico-epistemológico en el tratamiento de objetos matemáticos, seleccionados a partir de criterios de inclusión tales como el contexto institucional latinoamericano de los autores, la relevancia del objeto de estudio, y la claridad metodológica en la presentación del trabajo.

El corpus fue examinado a través de una lectura crítica y categorización inductiva de los marcos teóricos y metodológicos, técnicas de recolección y análisis de datos, y propósitos de la investigación. En términos generales, se concluye que el panorama metodológico de la investigación histórico-epistemológica en Matemática Educativa en América Latina es tan diverso como prometedor. Si bien enfrenta el reto de alcanzar mayor sistematización y visibilidad internacional, también ofrece aportes sustantivos que permiten enriquecer la comprensión del conocimiento matemático desde una perspectiva situada histórica y culturalmente. Este estudio busca así abrir un espacio de diálogo entre las comunidades investigadoras de la región, fomentar la reflexión crítica sobre los métodos utilizados, y contribuir a la consolidación de un campo de investigación que fortalezca tanto la teoría como la práctica educativa en Matemática.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

El objeto de estudio de esta investigación versa sobre los métodos de investigación histórica-epistemológica en Matemática Educativa, sobre esta base, posterior a la identificación y descarga de los artículos de investigación que constituirán como datos, se hace necesario tomar postura respecto de lo que se considerará como una investigación histórica-epistemológica dentro de la disciplina.

Mediante la revisión de antecedentes realizada, ubicamos trabajos previos que refieren a la historia y a algunos de los aportes y características de los estudios histórico-epistemológicos en la disciplina. Por ejemplo, respecto de la historia, Barbin et al. (2020) mencionan que la integración de la historia de las matemáticas en la educación matemática comenzó en la segunda mitad del siglo XIX –con matemáticos como De Morgan, Poincaré y Klein, e historiadores como Tannery y Loria–. Agregan que, al principio del siglo XX, el interés sobre los estudios históricos revivió por consecuencia de los debates sobre los fundamentos de la matemática. Y que, en las décadas posteriores, la historia se convirtió en un recurso para diversos enfoques epistemológicos, entre ellos, la epistemología histórica, la epistemología genética y la epistemología fenomenológica.

Por otro lado, en relación con su importancia, Anacona (2003) sostiene que los estudios histórico-epistemológicos juegan un papel esencial en el análisis del proceso de construcción teórica de un concepto. Subraya, además, que este análisis se realiza teniendo en cuenta el contexto particular de dicha producción teórica, es decir, "aunque los estudios se realizan fundamentalmente al interior de una teoría, estos se elaboran bajo la consideración de que el discurso matemático es una actividad de razonamiento que se suscita en un medio sociocultural específico" (pp. 32-33).

La misma autora especifica algunos de los aportes que los estudios de corte histórico-epistemológico ofrecen a la Matemática Educativa. Entre ellos incluye:

- Comprender los diversos aspectos, conceptos y demás elementos involucrados en la emergencia de los saberes matemáticos.
- Identificar las transformaciones que ha sufrido el saber hasta su llegada a la escuela (transposición didáctica), donde la presentación suele ocultar su esencia al presentarse la matemática como un ente acabado y meramente formal.
- Dar cuenta de las discusiones de carácter físico, filosófico y teológico, entre otras, que se dieron para la consolidación de los saberes matemáticos, es decir, se concibe a la matemática como una construcción social y no una mera construcción teórica alejada de la sociedad u otras disciplinas.
- Mostrar interrelaciones entre las diferentes áreas de trabajo matemático y no compartimentalizarlas como se hace hoy en día en el currículo escolar.

A estos, Clark et al. (2018) agregan que poner énfasis en la integración de cuestiones históricas y epistemológicas en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas constituye una posible forma natural de exponer las matemáticas en su proceso de constitución. Lo que puede conducir a una mejor comprensión de partes específicas de las matemáticas y a una conciencia más profunda de lo que son las matemáticas como disciplina.

Con base en estos elementos y caracterizaciones generales respecto a lo que constituye un estudio documental histórico y uno epistemológico en nuestra disciplina, definimos que –para efectos de nuestro estudio– tomaremos inicialmente a los estudios histórico-epistemológicos como aquellas investigaciones que: 1) analizan fuentes históricas –como papiros, tablillas, libros, cartas y otros–, y en dicho análisis, 2) dan cuenta de las nociones, procedimientos, problemas, prácticas, razonamientos matemáticos y otros elementos que intervinieron en el proceso de construcción, modificación y rechazo/aceptación de una noción matemática específica –objetos, procedimientos, técnicas, razonamientos, etc.–.

Esto implica que se excluirán los estudios que no realicen un análisis de fuentes históricas o que se centren exclusivamente en aspectos no epistemológicos del conocimiento matemático, por ejemplo, didácticos, pedagógicos, socioculturales, entre otros.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

Este artículo es el reporte de una investigación cualitativa de carácter exploratorio y descriptivo, con un componente aplicado de sistematización metodológica. Su objetivo es identificar y describir las tendencias metodológicas empleadas en estudios histórico-epistemológicos en Matemática Educativa realizados en América Latina, y proponer un esquema metodológico que oriente futuras investigaciones.

Se decidió el enfoque cualitativo debido a la intención de interpretar la producción latinoamericana relativa a los estudios histórico-epistemológicos, identificar patrones comunes y reflexionar sobre la estructuración metodológica. El carácter exploratorio responde a la falta de sistematización en este tipo de estudios, mientras que el componente descriptivo se centra en documentar y organizar los elementos metodológicos más frecuentes. A ello se suma un componente aplicado, que consiste en la elaboración de un esquema metodológico basado en los hallazgos obtenidos.

La estrategia metodológica combina el análisis bibliométrico y el análisis de contenido. El primero permite observar tendencias generales de producción, autores e instituciones, mientras que el segundo proporciona una comprensión más profunda de las corrientes metodológicas en los estudios revisados.

3.1 Fases de la investigación

El trabajo se desarrolló en seis fases, cuya articulación metodológica busca ofrecer un panorama integral y riguroso del estado actual de la investigación histórico-epistemológica en el ámbito latinoamericano de la Matemática Educativa.

Fase 1: Selección de Revistas

Se identificaron las revistas especializadas en Matemática Educativa y afines en las cuales se podrían encontrar los artículos de interés para esta investigación. Para esto se utilizaron los siguientes criterios:

1. Lista de las 10 revistas más mencionadas en el estudio de opinión con expertos llevado a cabo por Andrade et al. (2020).
2. Lista de las 10 mejores revistas iberoamericanas de educación matemática, de acuerdo con el estudio de Andrade et al. (2020).
3. Lista de las 10 revistas mejor posicionadas según el ranking 20 de citación de las revistas que publican sobre Matemática Educativa (Williams y Leatham, 2017).

4. Revistas por recomendación de expertos: se tenía la intención de agregar estas revistas recomendadas, que pudieron haberse escapado a la metodología utilizada por los autores al momento de construir los listados de los tres criterios iniciales.

Fase 2: Selección inicial de artículos

Luego de la selección de las revistas a considerar se hizo una selección inicial de los artículos publicados en las mismas mediante los buscadores de las revistas y/o las bases de datos en que estuvieran indexadas, utilizando los siguientes filtros y palabras clave:

1. Periodo de publicación: 2017 a la fecha (noviembre del 2022).
2. Palabras clave en español: historia, epistemología, método histórico, investigación histórica, obra original.
3. Palabras clave en inglés: history, epistemology, historical method, historical research, original source.
4. Palabras clave en portugués: história, epistemologia, método histórico, pesquisa histórica, fonte original.
5. Juanto a las palabras clave, se añadieron —utilizando operadores booleanos— los países de Latinoamérica: Argentina, Bolivia, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, Cuba, Ecuador, El Salvador, Guatemala, Haití, Honduras, México, Nicaragua, Paraguay, Panamá, Perú, Puerto Rico, República Dominicana, Uruguay y Venezuela.

Fase 3: Depuración de la base de datos

Teniendo los artículos descargados se inició la depuración para construir la base de datos que se utilizó para el análisis bibliométrico. Para esto cada artículo fue revisado, de forma disjunta, por dos investigadores, atendiendo los siguientes aspectos:

1. Aspectos técnicos:
    a. Verificar nombre del archivo (código alfanumérico para su identificación en la base de datos), ubicación en la base de datos y título del artículo.
    b. Verificar que al menos uno de los autores del artículo está adscrito a una institución o centro de investigación latinoamericano.
    c. Verificar que el archivo no sea de un artículo duplicado.
2. Aspectos temáticos:
    a. Revisión inicial del título, resumen y palabras claves del artículo, para identificar si este cumplía con la caracterización asumida en esta investigación para los estudios histórico-epistemológicos en Matemática Educativa.
    b. Si en la revisión inicial no se localizó evidencia concluyente del cumplimiento de la caracterización, se verificaron también —aunque de manera más superficial— las conclusiones y descripciones teórico-metodológicas del estudio.
    c. Llenado de la tabla de revisión inicial —una para cada investigador—, donde se indicó el código del artículo, el veredicto de si se consideró como un estudio adecuado para la presente investigación (aceptado, rechazado, en duda) y la razón en caso de ser rechazado.

Luego de la revisión individual por parte de los investigadores, para el análisis bibliométrico, se mantuvieron los estudios que fueron aceptados por los dos investigadores revisores. Aquellos artículos en los que hubo disparidad en el veredicto o que se encontraban en duda fueron revisados en conjunto por los investigadores para su eventual aceptación o rechazo.

Fase 4: Análisis bibliométrico

Se consideraron un conjunto de indicadores bibliométricos pertinentes a los objetivos del estudio para realizar una descripción de las investigaciones aceptadas. Lo anterior permitió realizar una descripción de los indicadores bibliométricos de las investigaciones de corte histórico-epistemológico realizadas por personas investigadoras con filiación latinoamericana en el periodo del 2017 al 2022 (noviembre).

Fase 5: Análisis de contenido.

Una vez definido el corpus definitivo, los artículos seleccionados fueron analizados en profundidad mediante la construcción de fichas descriptivas y un análisis de contenido cualitativo. Esta fase consistió en:

1. Elaboración de fichas: Cada ficha sintetizó los elementos clave de los artículos, como el problema de investigación, objetivos, referentes teóricos, métodos utilizados, resultados y conclusiones.
2. Análisis de contenido: Se aplicó un análisis cualitativo para identificar patrones, categorías y tendencias metodológicas en los estudios histórico-epistemológicos. El análisis se centró en aspectos como:
    a. Enfoques teóricos predominantes (v.g., epistemología histórica, transposición didáctica, epistemología genética).
    b. Métodos utilizados (v.g., análisis de fuentes históricas, ingeniería didáctica).
    c. Preguntas y problemas comunes de investigación.

Fase 6: Sistematización de un esquema metodológico.

La última fase tuvo como objetivo sintetizar los hallazgos en un esquema metodológico que sirviera como guía para futuras investigaciones histórico-epistemológicas. Esta fase incluyó:

1. Síntesis de tendencias identificadas: A partir del análisis de contenido, se sistematizaron los elementos comunes de las metodologías empleadas, destacando buenas prácticas y enfoques innovadores.
2. Diseño del esquema metodológico: Se estructuraron fases y pasos específicos para llevar a cabo investigaciones histórico-epistemológicas, incluyendo la búsqueda de fuentes históricas, el análisis crítico y la aplicación didáctica.

3.2 Técnicas de recolección de la información

El proceso de recolección de información en esta investigación integró las siguientes técnicas de recolección de la información. Estas técnicas se aplicaron de manera secuencial y estratégica para garantizar la validez y representatividad del corpus de estudio.

Consulta a expertos

En la etapa inicial, se consultó a expertos en Matemática Educativa e investigación histórico-epistemológica con el objetivo de orientar y delimitar la selección de los artículos que resultaban más relevantes para el análisis. El objetivo de la consulta fue identificar revistas clave donde se pudiera encontrar estudios de tipo histórico-epistemológico en cuya autoría estuviese involucradas personas con filiación latinoamericana. Además, se solicitaron sugerencias sobre investigadores destacados que pudiesen ampliar dichas recomendaciones. La consulta a expertos se realizó mediante el correo electrónico. El criterio para incluir alguna revista en la selección inicial fue que esta fuera recomendara por al menos dos de los expertos consultados.

Búsqueda en bases de datos

Esta técnica implica identificar y recopilar información relevante sobre publicaciones científicas mediante el uso de palabras clave, operadores booleanos (como AND, OR, NOT) y filtros específicos en las bases de datos de las propias revistas, así como aquellas bases de datos académicas donde las revistas estuvieran indizadas. Este proceso comenzó definiendo con precisión los términos clave asociados, asegurando su correspondencia con sinónimos, variantes lingüísticas y términos específicos del campo. Luego, se diseñaron estrategias de búsqueda que combinen estas palabras clave con operadores lógicos, y se aplican filtros por años y países. El objetivo fue extraer un conjunto representativo de documentos relevantes para su posterior análisis, garantizando la reproducibilidad y validez de la metodología empleada.

Validación por consenso

Esta técnica consiste en obtener la aprobación o acuerdo de un grupo de expertos respecto a la validez de un instrumento de investigación, modelo teórico o interpretación de resultados. Este procedimiento implica seleccionar expertos con conocimientos sólidos en el tema, quienes evalúan el objeto de estudio de manera individual o en conjunto. A menudo, se utilizan herramientas como encuestas, matrices de valoración o discusiones grupales para recopilar sus opiniones. El consenso se alcanza cuando hay una convergencia significativa en las valoraciones de los expertos, lo cual refuerza la credibilidad y robustez del enfoque investigativo, reduciendo sesgos individuales y asegurando que las conclusiones o propuestas estén respaldadas por una perspectiva colectiva y especializada.

Indicadores bibliométricos

La técnica de recolección de información mediante el uso de indicadores bibliométricos se centra en obtener métricas que permitan evaluar el impacto y la productividad de las publicaciones científicas. En esta investigación los indicadores bibliométricos de interés son: título del artículo, nombre de la revista, año de publicación, autor, filiación, país, número de coautores de filiación latina y no latina, país de los coautores. Pues lo que se pretende es hacer una descripción general de los artículos seleccionados a través de estos indicadores.

Análisis de fichas de datos

El fichaje de datos consiste en registrar, de manera sistemática, la información clave de los artículos seleccionados. Esto se realiza mediante la creación de fichas que organizan la información específica de cada artículo, en particular se extrajo de cada uno de estos la siguiente información: título, autores, revista, problema de investigación, objetivo, descripción del referente teórico, descripción del método y síntesis de resultados. Estas fichas de datos se analizaron para identificar patrones, prácticas y características distintivas de las metodologías empleadas. Este análisis se centra en desentrañar cómo los autores abordan el problema de investigación y qué herramientas utilizan para interpretar fuentes histórico-epistemológicas. También incluye la identificación de los principios teóricos subyacentes y los pasos descritos para llevar a cabo el análisis.

La Tabla 1 muestra la relación entre las fases del proceso metodológico y las técnicas de recolección de información:

Tabla 1. Relación las fases del proceso metodológico y las técnicas de recolección de información

Fases del proceso metodológico	Técnicas de recolección de información
Fase 1. Selección de revistas	Consulta a expertos
Fase 2. Selección inicial de artículos	Búsquedas en bases de datos
Fase 3. Depuración de la base de datos	Validación por consenso
Fase 4. Análisis bibliométrico	Indicadores bibliométricos
Fase 5. Análisis de Contenido	Análisis de fichas de datos
Fase 6. Sistematización del esquema metodológico	

Fuente: Elaborada por los autores.

4. RESULTADOS

Los resultados de la investigación se presentan de acuerdo con las fases del proceso metodológico diseñado. Esta estructura permite mostrar de forma ordenada y coherente tanto el procedimiento seguido como los hallazgos obtenidos en cada etapa.

4.1 Fases 1, 2 y 3: Selección de Revistas, selección inicial de artículos y depuración de la base de datos

A partir de los criterios de selección inicial de revistas (puntos 1, 2 y 3 de la fase 1) se obtuvo un total de 22 de estas para considerar en la búsqueda de artículos. Para asegurar que no se estuviese excluyendo alguna donde hubiese publicaciones de estudios histórico-epistemológicos en Matemática Educativa se realizó la consulta descrita de manera previa a expertos. Se consultó, inicialmente, a 12 personas investigadoras y a partir de sus recomendaciones, la lista ascendió a 23 personas consultadas. Además, de las revistas recomendadas por las personas expertas, se adicionaron a la lista inicial aquellas que tuviesen al menos 2 recomendaciones, lo que incrementó el número de estas de 22 a 29.

Luego se realizó la selección de artículos siguiendo el procedimiento descrito en la fase 2. En la Tabla 2 se enlistan las revistas incluidas en nuestra búsqueda, así como la cantidad de resultados obtenidos en cada una de ellas, a través de los criterios de búsqueda –palabras clave, periodo de búsqueda, etc.– definidos para ello. Además, se realizó una revisión para borrar los archivos duplicados y colocar el nombre al documento de la siguiente forma: Acrónimo de la revista-Año de publicación-número consecutivo, por ejemplo, el nombre *AS-2019-15* indica que ese artículo fue descargado de la revista Acta Scientiae (AS), que fue publicado en el año 2019 y que es el artículo número 15 de todos los descargados para esa revista.

Tabla 2. Cantidad de artículos descargados por revista

No.	Nombre de la Revista	Número de artículos	Observaciones
1	Mathematics Education Bulletin – BOLEMA	4	
2	Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa – RELIME	-	La revista estuvo fuera de línea (en su página principal y las bases de datos) en el momento de la búsqueda.
3	Educación Matemática – EM	0	
4	Revista Latinoamericana de Etnomatemática – RLE	3	
5	Revista de Educação Matemática – ZETETIKÉ	107	
6	Revista Iberoamericana de Educación Matemática – UNIÓN	12	
7	Revista de Investigação em Educação Matemática – QUADRANTE	1	
8	Educação Matemática Pesquisa – EMP	5	
9	Revista de Didáctica de las Matemáticas – UNO	-	La organización de la página no permite hacer búsquedas con operadores booleanos.
10	Revista de Didáctica de las Matemáticas – NÚMEROS	-	La organización de la página no permite hacer búsquedas con operadores booleanos.
11	Acta Scientiae – AS	54	
12	Avances de Investigación en Educación Matemática – AIEM	0	

13	Educational Studies in Mathematics – ESM	1	
14	Journal for Research in Mathematics Education – JRME	-	La organización de la página no permite hacer búsquedas con operadores booleanos.
15	Journal of Mathematical Behavior – JMB	10	
16	For the Learning of Mathematics – FLM	-	La organización de la página no permite hacer búsquedas con operadores booleanos.
17	Mathematical Thinking and Learning – MTL	1	
18	Journal of Mathematics Teacher Education – JMTE	10	
19	ZDM Mathematics Education	7	
20	Mathematics Education Research Journal – MERJ	5	
21	International Journal of Math Education in Science and Technology – IJMEST	10	
22	School Science and Mathematics – SSM	-	La organización de la página no permite hacer búsquedas con operadores booleanos.
23	Paradigma. Revista del Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma – CIEP	0	
24	Revista Brasileira de História da Matemática- RBHM	-	La organización de la página no permite hacer búsquedas con operadores booleanos.
25	Revista de História da Educação Matemática - HISTEMAT	47	
26	Quipu – Revista Latinoamericana de Historia de la Ciencia y la Tecnología – México	0	
27	Mathesis: revista de divulgación e información en filosofía e historia de las matemáticas - UNAM	-	La organización de la página no permite hacer búsquedas con operadores booleanos.
28	Journal of Research in Mathematics Education - REDIMAT	13	
29	Enseñanza de las Ciencias – EC	15	
	TOTAL DE ARTÍCULOS	**305**	

Fuente: Elaborada por los autores.

Como muestra la Tabla 2, algunas revistas seleccionadas en la primera fase fueron descartadas durante la segunda fase del proceso, esto debido a que la organización de su página web no permitía realizar búsquedas con operadores booleanos, o no hubo acceso a las mismas a través de su página web o de alguna base de datos suscrita por la Universidad de Costa Rica al momento de realizar las búsquedas (noviembre 2022).

Teniendo los artículos descargados se inició la depuración de la lista para construir la base de datos que se utilizaría para los análisis bibliométricos y de contenido. Para esto se consideraron los aspectos descritos en la fase 3 del procedimiento metodológico. A partir de esto, se completó una tabla de revisión inicial donde se colocó el código del artículo, el veredicto de si se considera como un estudio adecuado para la presente investigación (aceptado, rechazado) y la razón en caso de ser rechazado. Después de la revisión, solamente 9 artículos cumplieron con los aspectos definidos. A saber: AS-2020-22, BOLEMA-2020-02, BOLEMA-2021-04, EMP-2019-01, EMP-2022-05, HISTEMAT-2020-34, HISTEMAT-2021-37, IJMEST-2020-05 y ZETETIKÉ-2018-037.

4.2 Fase 4: Análisis Bibliométrico

En esta investigación los indicadores bibliométricos de interés son: título del artículo, nombre de la revista, año de publicación, autor, filiación, país, número de coautores de filiación latina y no latina, y país de los coautores. Seguidamente se presenta la descripción de los hallazgos para las nueve revistas seleccionadas.

En la Tabla 3 se muestran las revistas en las que fueron publicados los artículos, el año de publicación, la institución de filiación latina de los autores y los países respectivos.

Tabla 3. Revista, año de publicación, institución de filiación y país, para los artículos seleccionados.

Nombre de la Revista	Año	Institución de filiación de los autores	País
Acta Scientiae	2020	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará	Brasil
Bolema – Mathematics Education Bulletin	2020	Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul	Brasil
	2021	Universidad Externado de Colombia	Colombia
Educação Matemática Pesquisa	2019	Universidade Federal da Bahia Pontifícia Universidade Católica de São Paulo	Brasil
	2022	Universidade do Estado do Pará	Brasil
HISTEMAT – Revista de História da Educação Matemática	2020	Universidad Autónoma de Guerrero	México
	2021	Universidade Estadual do Ceará	Brasil
International Journal of Math Education in Science and Technology	2020	Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN Instituto Tecnológico de Mérida	México
ZETETIKÉ – Revista de Educação Matemática	2018	Universidade Federal de Santa Catarina	Brasil

Fuente: Elaborada por los autores.

De los 9 artículos, 2 artículos son de autor único y 7 en coautoría; de los cuales, 5 poseen 3 autores y 2 poseen 2 autores; además, sólo 1 se realiza en colaboración con investigadores de filiación no latina. La Tabla 4 resume el número de personas autoras por país.

Tabla 4. Número de personas autoras por país de filiación

País de filiación	Mujeres	Hombres	Total
Brasil	9	6	15
Colombia	-	1	1
México	2	2	4
TOTAL	11	9	20

Fuente: Elaborada por los autores.

A partir de los datos recolectados, no se observan diferencias respecto al género entre las personas dedicadas a realizar estudios de corte histórico-epistemológico, pues hay similar número de hombres y mujeres en autoría. Respecto a la coautoría de los 5 artículos con 3 autores, 3 muestran mayoría de mujeres; los 2 artículos con 2 autores son de autoría femenina; los 2 artículos de autor único, uno fue escrito por una mujer y el otro por un hombre.

Por otra parte, se puede notar que la mayor parte de la investigación histórica-epistemológica latinoamericana, realizada entre 2017 y 2022, se produjo en Brasil, siendo un país que tiene una gran tradición respecto del uso de la historia en Matemática Educativa.

4.3 Fase 5: Análisis de contenido

A partir de las fichas de datos (el ANEXO 1 muestra una síntesis de estas) construidas para los artículos, se identificaron las tendencias teóricas predominantes, los tipos de preguntas de investigación que se plantean y otros elementos metodológicos destacados.

Tendencias teóricas:

- Epistemología de Bachelard (artículo EMP-2022-05): Predomina el análisis de obstáculos epistemológicos y rupturas en el desarrollo histórico de conceptos matemáticos, como la teoría vectorial. Se enfoca en la interacción entre la historia del conocimiento y el espíritu científico.
- Socioepistemología (IJMEST-2020-05): Resalta el contexto social y cultural en la construcción del conocimiento matemático, explorando cómo conceptos (como las series de Fourier) emergen desde una perspectiva situada.
- Transposición didáctica (HISTEMAT-2020-34 y AS-2020-22): Este enfoque considera cómo el conocimiento académico se transforma en contenido escolar, analizando cambios epistemológicos y didácticos en diferentes periodos históricos.
- Enfoque Ontosemiótico (EOS) (BOLEMA-2021-04): Destaca la construcción del significado matemático desde las prácticas institucionalizadas, conectando objetos matemáticos con sus usos históricos.

- Epistemología genética (BOLEMA-2020-02): Explora el desarrollo del conocimiento desde una perspectiva constructivista, vinculando la evolución histórica del análisis matemático con el aprendizaje humano.
- Relación entre historia y enseñanza (ZETETIKÉ-2018-037 y HISTEMAT-2021-37): Propone una conexión entre el análisis histórico y la enseñanza, enfatizando el potencial didáctico de artefactos matemáticos históricos (por ejemplo, la regla de carpintero).

Tipos de preguntas de investigación:

- Preguntas orientadas a la identificación de obstáculos epistemológicos: ¿Qué obstáculos epistemológicos han dificultado el desarrollo de un concepto matemático (v.g., límites, integrales, vectores)?
- Preguntas sobre la relevancia histórica y cultural de conceptos: ¿Qué significados sociales y culturales subyacen en el desarrollo y enseñanza de ciertos conceptos matemáticos?
- Preguntas sobre la relación entre historia y aprendizaje: ¿Cómo el análisis histórico puede facilitar la enseñanza y el aprendizaje de conceptos complejos (v.g., métodos iterativos, series, análisis matemático)?
- Preguntas sobre la articulación didáctica: ¿Cómo transformar elementos históricos en recursos didácticos efectivos para el aula?

Enfoques metodológicos:

- Análisis histórico-epistemológico: Aparece en artículos como el EMP-2022-05, IJMEST-2020-05 y EMP-2019-01. Implica estudiar las etapas históricas de desarrollo de un concepto, sus rupturas epistemológicas y su influencia en el aprendizaje.
- Historiografía: Utilizada en artículos como el ZETETIKÉ-2018-037 y HISTEMAT-2021-37. Este enfoque cualitativo documental explora fuentes primarias y secundarias para reconstruir la historia del conocimiento matemático.
- Ingeniería didáctica: En AS-2020-22 y EMP-2019-01, este enfoque combina análisis epistemológico, experimentación y validación para transformar conocimientos históricos en secuencias didácticas.
- Método histórico de Ruiz Berrio (HISTEMAT-2020-34): Organiza la investigación en fases heurísticas, críticas, hermenéuticas y expositivas.

Uno de los elementos más notables que comparten los estudios analizados es la organización del desarrollo del conocimiento matemático según una dimensión temporal claramente definida. Es común que las investigaciones dividan la historia en periodos —por ejemplo, precientífico, científico y contemporáneo— con el fin de comprender cómo evolucionan los conceptos, métodos y teorías a lo largo del tiempo. Esta periodización permite no solo trazar una línea de desarrollo histórico, sino también identificar rupturas conceptuales y momentos clave en los que se transforman las prácticas matemáticas.

Otro aspecto ampliamente recurrente es la relación entre obstáculos epistemológicos y avances en el conocimiento. Muchos de los estudios adoptan como marco la epistemología bachelardiana, lo que les permite interpretar el progreso matemático no como una acumulación lineal de verdades, sino como un proceso marcado por conflictos, errores, rupturas y superaciones. La identificación y análisis de estos obstáculos —como concepciones erróneas, modelos limitados o ideas arraigadas— resultan fundamentales para explicar el dinamismo del pensamiento matemático y su constante reconstrucción.

Asimismo, destaca la presencia de un enfoque interdisciplinario en varios trabajos. Las investigaciones no se limitan al análisis matemático aislado, sino que integran dimensiones culturales, científicas, técnicas e incluso artísticas en su aproximación. Por ejemplo, en el artículo ZETETIKÉ-2018-037 se examinan tratados históricos en los que las matemáticas y el dibujo técnico se entrelazan para representar fortificaciones, lo que evidencia cómo las prácticas matemáticas históricas respondían a necesidades concretas del mundo físico y sociopolítico de su época.

Además, un número significativo de trabajos incluye el diseño de propuestas didácticas derivadas del análisis histórico-epistemológico. Estas investigaciones no se quedan en el plano teórico, sino que buscan proyectar sus hallazgos hacia el aula mediante la elaboración de secuencias didácticas, tareas o recursos didácticos que permitan a los estudiantes apropiarse del conocimiento matemático desde una perspectiva histórica. Ejemplos de este tipo se encuentran en los artículos HISTEMAT-2021-37 y AS-2020-22, donde se propone la incorporación de contenidos históricos (v.g., secuencias numéricas, métodos iterativos) en la formación inicial de docentes.

Por otra parte, al revisar el conjunto de estudios, se observa una tendencia consistente al combinar el análisis histórico con marcos teóricos contemporáneos en Educación Matemática. En particular, se recurre con frecuencia a enfoques como la Socioepistemología, el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento (EOS), la Teoría de Situaciones Didácticas y la Transposición Didáctica. Esta hibridación metodológica enriquece los análisis, ya que permite conectar la reconstrucción histórica del conocimiento con la comprensión de su uso, transmisión y enseñanza en contextos actuales.

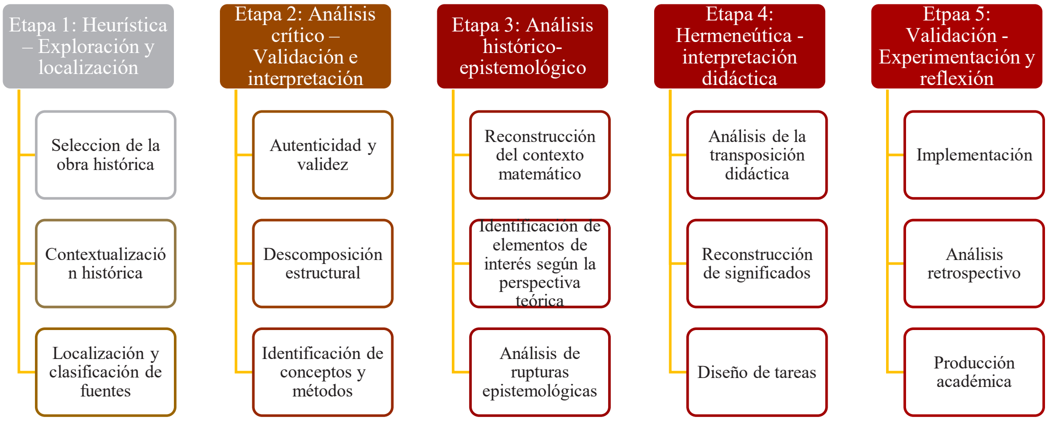
No obstante, aunque la mayoría de los estudios se inscriben claramente dentro de un enfoque cualitativo, algunos de ellos señalan la necesidad de incorporar validaciones empíricas más sistemáticas. Este señalamiento suele hacerse cuando se proponen aplicaciones didácticas basadas en análisis históricos, ya que en muchos casos no se implementan ni se evalúan formalmente en contextos escolares reales. Como se menciona en el artículo BOLEMA-2020-02, resulta crucial avanzar hacia investigaciones que no solo analicen históricamente los conceptos, sino que también exploren su viabilidad y eficacia pedagógica mediante diseños experimentales o estudios de caso en el aula.

En síntesis, los estudios revisados muestran un panorama rico y diverso en cuanto a enfoques, métodos y propósitos. Al mismo tiempo, revelan áreas de oportunidad para profundizar en la validación empírica de las propuestas y fortalecer el vínculo entre la investigación histórico-epistemológica y la práctica educativa concreta.

4.4 Fase 6. Sistematización del esquema metodológico

A partir de los elementos identificados en la fase anterior y de las fichas de datos, se pudo sistematizar un procedimiento estructurado en etapas para analizar una obra histórica original desde una perspectiva histórico-epistemológica. Esta metodología integra elementos comunes en los estudios analizados y es aplicable para reconstruir y analizar obras matemáticas históricas con fines didácticos.

Figura 1. Esquema metodológico para el análisis de obras históricas originales



Fuente: Elaborada por los autores.

El esquema metodológico propuesto (Figura 1) se desarrolla en cinco etapas interrelacionadas, que guían el análisis histórico-epistemológico de una obra matemática desde su selección inicial hasta su potencial aplicación en contextos educativos. Este enfoque integra herramientas del análisis histórico, epistemológico y didáctico, con el propósito de comprender la evolución del conocimiento matemático y explorar su transposición al ámbito escolar.

Etapa 1: Heurística – Exploración y localización

Esta primera etapa constituye el punto de partida del proceso metodológico y tiene como propósito establecer los fundamentos históricos y documentales sobre los cuales se desarrollará el análisis. Se compone de tres momentos clave:

1. **Selección de la obra histórica:** En esta fase, el investigador identifica una obra matemática original que sea significativa en el desarrollo de un concepto o práctica matemática. La relevancia puede estar dada por el impacto que tuvo en su época, por el tipo de problemas que aborda, por su novedad teórica o metodológica, o por su potencial didáctico. La elección debe justificarse desde criterios epistemológicos, didácticos e históricos.
2. **Contextualización histórica:** Una vez seleccionada la obra, se analiza el contexto histórico, social y cultural en el cual fue producida. Esto implica investigar:
    a. El entorno institucional del autor (v.g., universidades, academias).
    b. Las condiciones científicas de la época (problemas abiertos, debates, corrientes filosóficas).
    c. Los usos y funciones sociales de la matemática en ese momento.

Este análisis permite situar la obra en una etapa del desarrollo de la matemática (v.g., precientífica, fundacional, axiomatizada, aplicada).

3. **Localización y clasificación de fuentes:** Se realiza una búsqueda y recopilación de:
    a. Fuentes primarias: el texto producido en su lengua de origen o traducciones reconocidas.
    b. Fuentes secundarias: estudios históricos, análisis críticos, notas editoriales, biografías del autor, entre otros.

    Las fuentes se clasifican según su tipo (documental, analítica, biográfica) y se evalúa su relevancia y confiabilidad para apoyar el análisis.

Etapa 2: Análisis crítico – Validación e interpretación

Esta etapa está orientada a examinar la obra desde un punto de vista interno, técnico y filológico, con el fin de comprender su estructura, intencionalidad y contenido matemático. Se debe de considerar:

4. **Autenticidad y validez del documento:** Se verifica la integridad del texto y su autenticidad. Esto incluye:
    a. Confirmar la autoría, fecha y lugar de publicación.
    b. Comparar distintas ediciones o traducciones.
    c. Analizar posibles alteraciones, abreviaciones o anotaciones posteriores que afecten la interpretación.
5. **Descomposición estructural del texto:** Se identifica la organización general del documento: capítulos, secciones, ejemplos, diagramas. Esta estructura ofrece pistas sobre el orden lógico y didáctico propuesto por el autor y permite distinguir las ideas centrales de las secundarias.
6. **Identificación de conceptos y métodos:** Se realiza un análisis minucioso de los contenidos matemáticos:
    a. ¿Qué definiciones aparecen? ¿Cómo se introducen los teoremas y sus demostraciones?
    b. ¿Qué tipo de razonamiento predomina (v.g. numérico, geométrico, algebraico, analítico, entre otros)?
    c. ¿Qué técnicas o algoritmos se aplican?

    Esta revisión permite reconstruir el núcleo conceptual del texto y entender su lógica interna.

Etapa 3: Análisis histórico-epistemológico

En esta etapa se despliega la dimensión epistemológica del estudio, orientada a interpretar el papel de la obra en el desarrollo del conocimiento matemático.

7. **Reconstrucción del contexto matemático:** Se examina la situación del campo matemático en el momento en que se produce la obra:
    a. ¿Qué problemas estaban siendo debatidos?
    b. ¿Qué teorías dominaban el discurso matemático?
    c. ¿Qué obras influyeron en la del autor?

    Esta reconstrucción permite entender los propósitos epistemológicos de la obra y las decisiones metodológicas tomadas por su autor.

8. **Identificación de los elementos de interés teórico:** Los aspectos a considerar dependerán del referente teórico de la investigación. Por ejemplo, si para la investigación es de interés identificar obstáculos epistemológicos, se identifican las tensiones o dificultades que la obra revela o enfrenta:
    a. ¿Qué nociones previas dificultaban la comprensión del nuevo concepto?
    b. ¿Qué malentendidos o intuiciones limitadas intentó superar el autor?
    c. ¿Qué resistencias encontró su propuesta (teóricas, culturales, pedagógicas)?

    El análisis desde el referente teórico aporta elementos clave para comprender la evolución conceptual, cognitiva y/o cultural de los saberes matemáticos.
9. **Análisis de rupturas epistemológicas:** Se evalúa si la obra introduce una transformación relevante en el discurso matemático:
    a. ¿Abre un nuevo campo de estudio?
    b. ¿Reformula un concepto previo?
    c. ¿Propone un nuevo lenguaje matemático?

    Estas rupturas pueden ser explícitas o implícitas y pueden relacionarse con el desarrollo del espíritu científico en sentido bachelardiano.

Etapa 4: Hermenéutica – Interpretación didáctica

Esta etapa permite tender un puente entre el análisis histórico-epistemológico y la práctica educativa, considerando la posibilidad de transformar los hallazgos en recursos para la enseñanza.

10. **Análisis de la transposición didáctica:** Se analiza cómo los conceptos identificados en la obra pueden ser transformados en contenido escolar:
    a. ¿Qué aspectos del concepto se pueden enseñar y en qué nivel?
    b. ¿Qué adaptaciones requiere su lenguaje o notación?
    c. ¿Cómo se puede mantener la riqueza epistemológica sin perder claridad didáctica?
11. **Reconstrucción de significados matemáticos:** Se descompone el concepto en sus componentes esenciales:
    a. Objeto (¿qué es?), procesos (¿cómo se construye?), propiedades (¿qué lo caracteriza?).
    b. Se exploran analogías útiles, vínculos con otros conceptos y situaciones problema que permitan resignificar el conocimiento desde una perspectiva histórica.
12. **Diseño de tareas:** A partir de lo anterior, se diseñan tareas que:
    a. Promuevan la reflexión histórica y conceptual.
    b. Recuperen el problema original que dio origen al concepto, siempre que sea pertinente, o una analogía adecuada.
    c. Inviten a la construcción progresiva del saber por parte del estudiante.

    Estas actividades pueden formar parte de secuencias didácticas, unidades de aprendizaje o situaciones problema. Su estructura y propósito dependen del referente teórico que guía la investigación.

Etapa 5: Validación – Experimentación y reflexión

La última etapa busca cerrar el proceso mediante la puesta en práctica, evaluación y comunicación de los resultados.

13. **Implementación:** Se implementan las tareas diseñadas en contextos reales o controlados de enseñanza (aula, seminario, taller) para observar aspectos como:
    a. Cómo los estudiantes interpretan los conceptos desde la perspectiva histórica.
    b. Qué dificultades emergen.
    c. Qué aprendizajes se promueven.

    Lo que se observa depende del propósito de la investigación y de sus intereses teóricos.
14. **Análisis retrospectivo:** A partir de la experiencia, se evalúa el impacto de la propuesta:
    a. ¿Se lograron los objetivos didácticos?
    b. ¿Qué aspectos funcionaron y cuáles requieren ajustes?
    c. ¿Qué comprensiones o resignificaciones fueron evidenciadas por los estudiantes?

    El fin es robustecer la construcción teórica realizada para la investigación como fundamentación de las tareas diseñadas.
15. **Producción académica y divulgación:** Finalmente, se sistematizan los hallazgos y reflexiones en documentos de distinto tipo:
    a. Informes, artículos, ponencias, materiales didácticos.
    b. Recomendaciones para otros docentes o investigadores interesados en integrar el enfoque histórico-epistemológico en la enseñanza de la matemática.

Con lo anterior, se ha expuesto una propuesta metodológica sistematizada para el análisis histórico-epistemológico de obras matemáticas originales. Esta propuesta se organiza en cinco etapas —heurística, análisis crítico, análisis histórico-epistemológico, interpretación pedagógica y validación— y busca servir como una guía estructurada para desarrollar investigaciones que, desde una perspectiva histórico-epistemológica, profundicen en la génesis, evolución y resignificación didáctica de conceptos matemáticos

El esquema metodológico presentado se construyó a partir del análisis de las tendencias metodológicas observadas en un corpus de investigaciones latinoamericanas, lo que garantiza su relevancia contextual y su coherencia con prácticas investigativas consolidadas en la disciplina. A través de su estructuración en fases y pasos concretos, el esquema permite abordar, de forma articulada, tanto la dimensión epistemológica como la didáctica del conocimiento matemático, favoreciendo así su aplicación en procesos de enseñanza y aprendizaje más críticos y contextualizados.

En síntesis, el resultado de investigación abordado no solo presenta una herramienta metodológica útil para futuras investigaciones histórico-epistemológicas en Matemática Educativa, sino que también abre la posibilidad de evaluar, adaptar y enriquecer dicha herramienta en función de distintos objetos de estudio, niveles educativos y marcos teóricos.

5. REFLEXIONES FINALES

La presente investigación tuvo como propósito analizar las tendencias metodológicas de los estudios de corte histórico-epistemológico en Matemática Educativa desarrollados –total o parcialmente– por investigadores e instituciones latinoamericanas, con el fin de sistematizar los aportes metodológicos de la región en este campo. Para ello, se abordaron seis fases de manera progresiva, integrando técnicas de recolección y análisis documental, bibliométrico y de contenido, que permitieron avanzar desde una revisión sistemática de la producción académica hasta la elaboración de una propuesta de esquema metodológico para el análisis histórico-epistemológico de obras originales.

Como resultado de las primeras fases del estudio y, reconociendo lo limitado en el número del corpus, este evidenció una actividad investigativa creciente y con características particulares en cuanto a enfoques teóricos (como la socioepistemología, la epistemología bachelardiana y la transposición didáctica), objetos de estudio y tratamientos metodológicos, al igual que la presencia de grupos consolidados en ciertos países.

Estas características representan una producción que permite evidenciar un pluralismo epistemológico propio de la región que avanza hacia una descolonización de los saberes (De Sousa, 2010), en tanto reflejan construcciones que atienden a contextos específicos –normalmente periféricos– que permiten construir nuevas realidades y objetos de estudio en beneficio de la educación matemática en América Latina (Rivas, 2020).

Dentro de las carencias identificadas, como producto del análisis de contenido de tipo cualitativo, se encuentran la escasa explicitación metodológica y la débil integración entre lo epistemológico y lo pedagógico en algunos casos. Estos hallazgos refuerzan lo relatado en otros trabajos a nivel internacional en cuanto a la falta de criterios y estructuras metodológicas explícitas para la realización de este tipo de estudios, lo cual se ha vuelto una necesidad en este campo (Barbin et al., 2020). Por ello se considera que este trabajo aporta, dirigiéndose hacia esta necesidad, haciendo una sistematización de distintos trabajos para proponer un esquema metodológico.

A su vez, la escasa implementación empírica de las propuestas didácticas derivadas del análisis histórico-epistemológico limitan la posibilidad de valorar plenamente su impacto en la enseñanza de las matemáticas. Por lo tanto, de este último hecho se desprende la necesidad de la formulación de más estudios aplicados en contextos reales de aula, en los que se muestren cómo los elementos derivados de estas investigaciones favorecen el aprendizaje de las matemáticas con el objetivo de evaluar la viabilidad y la eficacia didáctica de estas aproximaciones.

Finalmente, se elaboró una propuesta de esquema metodológico sistematizado para guiar investigaciones de corte histórico-epistemológico centradas en el análisis de obras matemáticas originales. Este esquema se organiza en cinco etapas: heurística, análisis crítico, análisis histórico-epistemológico, interpretación didáctica y validación. Con este, la intención fue buscar una articulación entre las dimensiones histórica, epistemológica y didáctica del conocimiento matemático.

Cada una de las etapas se encuentra interrelacionada y, por lo tanto, se complementan para propiciar el tránsito desde la identificación y contextualización de una obra matemática original hasta su posible aplicación en el aula. La etapa heurística atiende y produce los fundamentos documentales e históricos iniciales necesarios para contextualizar la obra matemática en tiempo, espacio y su rol cultural e histórico en el desarrollo del conocimiento matemático; la etapa de análisis crítico garantiza la autenticidad de la obra, así como su descomposición conceptual para el análisis minucioso de los elementos de interés asociados al objeto de estudio de la investigación; la etapa histórico epistemológica conlleva la profundización de la contextualización de la obra, así como de las concepciones, obstáculos, procesos y significados más relevantes asociadas a los objetos matemáticos de interés y el objeto de estudio; la etapa hermenéutica alude a la identificación de elementos transpositivos de los hallazgos para la formulación de recursos didácticos; y por último, la etapa de validación se centra en el análisis retrospectivo con la intención de reflexionar sobre la pertinencia didáctica de las propuestas generadas. De este modo se considera que esta estructura puede constituirse como una herramienta valiosa para investigadores y formadores de docentes interesados en vincular la historia de la matemática con las prácticas de aula.

A continuación, se presenta de manera puntual y, con base en las limitaciones y virtudes de este trabajo, algunas sugerencias y recomendaciones para ampliar el alcance de los estudios histórico-epistemológicos y el uso del esquema metodológico propuesto.

5.1 Recomendaciones

A partir de los hallazgos obtenidos en esta investigación, y en coherencia con el objetivo planteado y las conclusiones alcanzadas, se formula a continuación una serie de recomendaciones para la continuidad del trabajo investigativo en el campo de los estudios histórico-epistemológicos en Matemática Educativa, así como se presentan algunas implicaciones teóricas, metodológicas y didácticas derivadas de los resultados:

Recomendaciones para futuras investigaciones

- Ampliar y diversificar el corpus de estudio: Se recomienda realizar nuevas búsquedas bibliográficas que consideren un rango temporal más amplio, así como otras fuentes documentales (tesis de posgrado, informes técnicos, actas de congresos), que podrían no haber sido indexadas en las bases de datos utilizadas. Esto permitirá fortalecer la validez del esquema metodológico propuesto y enriquecer la caracterización de tendencias regionales.
- Profundizar en estudios de validación empírica del esquema: Es necesario que futuras investigaciones tomen el esquema metodológico sistematizado aquí propuesto como base para diseñar y ejecutar análisis histórico-epistemológicos completos, con especial énfasis en todas las etapas, incluida la experimentación didáctica y la evaluación del impacto en contextos reales de enseñanza.
- Fortalecer la formación metodológica en el campo: Se recomienda incorporar la discusión sobre metodologías de análisis histórico-epistemológico en programas de formación de investigadores en Matemática Educativa, con el fin de mejorar la calidad y coherencia de los trabajos desarrollados en esta línea.

- Fomentar redes de colaboración regional: Se sugiere promover iniciativas de colaboración entre investigadores latinoamericanos que trabajen en esta línea, a fin de compartir marcos teóricos, estrategias metodológicas y materiales didácticos basados en análisis históricos.

Implicaciones teóricas

La sistematización de tendencias metodológicas muestra que los estudios histórico-epistemológicos no responden a un único enfoque, sino que pueden articular diversas perspectivas teóricas. Esto invita a una reflexión sobre la complementariedad de marcos epistemológicos como la socioepistemología, la epistemología bachelardiana, el enfoque ontosemiótico, entre otros, y su contribución al entendimiento del saber matemático como una construcción situada histórica y culturalmente.

Implicaciones metodológicas

El esquema propuesto ofrece una estructura flexible pero orientadora para quienes se inician en el análisis histórico-epistemológico de obras matemáticas. La flexibilidad radica en el hecho de que las decisiones metodológicas, asociadas a cada etapa y parte del esquema, dependerán del objeto de estudio, los enfoques teóricos y metódicos de análisis asociados para cada investigación. La intención con descomponer el proceso en etapas claras es facilitar, tanto la planificación como la sistematización del trabajo investigativo, favoreciendo su replicabilidad y evaluación crítica.

Así mismo, el ejercicio de aplicación evidenció que la reconstrucción histórica no puede ser desvinculada de su contexto epistémico y social, lo que implica que cualquier metodología en este campo debe contemplar fuentes múltiples, herramientas interpretativas y criterios de validez que trasciendan la mera cronología de eventos.

Implicaciones didácticas

La vinculación entre análisis histórico-epistemológico y diseño didáctico sugiere un potencial significativo para enriquecer la enseñanza de la matemática. Incorporar en el aula elementos de la historia de los conceptos matemáticos, sus usos sociales y las controversias que los moldearon, puede favorecer una comprensión más profunda, crítica y significativa por parte del estudiantado.

Este enfoque también permite resignificar el rol docente como mediador entre la matemática formalizada y su génesis histórica, promoviendo prácticas de enseñanza que reconozcan la matemática como una construcción humana situada, y no como un cuerpo cerrado y ahistórico de verdades absolutas.

No obstante, la incorporación de lo histórico requiere reflexiones didácticas robustas pues lo histórico no puede ser normativo en lo escolar cada vez que no todas las condiciones históricas pueden ser replicadas o simuladas en el aula (Radford, 2002).

Estas recomendaciones e implicaciones refuerzan el valor de la investigación histórico-epistemológica en el ámbito de la Matemática Educativa, no solo como una línea teórica, sino también como un recurso metodológico y pedagógico que puede contribuir a transformar las prácticas de enseñanza y la formación docente en la región.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

FRF concibió la idea presentada, desarrolló la teoría, construyó la metodología y recopiló los datos. FRF y LLA analizaron los datos y participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por los autores FRF y LLA, previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Un profundo agradecimiento al M. en C. Melvin Cruz Amaya y al Dr. Gerardo Cruz Márquez por su valiosa colaboración durante las fases iniciales de esta investigación. Sus aportes conceptuales y metodológicos fueron fundamentales para la delimitación del problema y el diseño del enfoque de estudio.

Asimismo, agradezco al Instituto de Investigación en Educación de la Universidad de Costa Rica por haber acogido y respaldado institucionalmente este proyecto bajo el código 724-C2-040, brindando el espacio académico y los recursos necesarios para su desarrollo.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Anacona, M. (2003). La historia de las matemáticas en la educación matemática. *Revista Ema, 8*(1), 30-46.

Andrade, M., Montecino, A. y Sánchez, M. (2020). Beyond quality metrics: defying journal rankings as the philosopher's stone of mathematics education research. *Educational Studies in Mathematics, 103*, 359-374. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09932-9

Barbin, É., Guillemette, D., y Tzanakis, C. (2020). History of Mathematics and Education. In: Lerman, S. (Ed.) *Encyclopedia of Mathematics Education*. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_69

Clark, K. (2019). History and pedagogy of mathematics in mathematics education: History of the field, the potential of current examples, and directions for the future. En *Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (No. 2). Freudenthal Group; Freudenthal Institute; ERME.

Clark, K. M., Hoff Kjeldsen, T., Schorcht, S. y Tzanakis, C. (2018). Introduction: Integrating History and Epistemology of Mathematics in Mathematics Education. En Clark, K., Kjeldsen, T., Schorcht, S., Tzanakis, C. (eds) Mathematics, Education and History (pp. 1-23). ICME-13 Monographs. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-

319-73924-3_1

Clark, K. M., Hoff Kjeldsen, T., Schorcht, S. y Tzanakis, C. (2019). History of Mathematics in Mathematics Education – An Overview. Mathematica *Didactica, 42*(1), 3–28. https://doi.org/10.18716/ojs/md/2019.1374

De Sousa, B. (2010). *Descolonizar el saber, reinventar el poder*. Ediciones Trilce.

Picado, M. y Rico, L. (2011). La selección de textos en una investigación histórica en Educación Matemática. *Revista de Educación Matemática Épsilon, 28*(77), 99-112.

Radford, L. (2002). The historical origins of algebraic thinking. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell, y R. Lins, *Perspectives on School Algebra* (pp. 13-63). Kluwer.

Rivas, I. (2020). La investigación educativa: del rol forense a la transformación social. *Márgenes, Revista de Educación de la Universidad de Málaga*, 1 (1), 3-22. http://dx.doi.org/10.24310/mgnmar.v1i1.7413

Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sá, C., Isoda, M., Lit, C., Niss, M., Pitombeira, J., Rodríguez, M. y Siu, M. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: An analytic survey. En J. Fauvel y J. van Maanen (Eds.), *History in mathematics education: The ICMI study* (pp. 201-240). New ICMI Study Series.

Williams, S. R. y Leatham, K. R. (2017). Journal Quality in Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education JRME, 48*(4), 369-396. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.48.4.0369.

ANEXO 1: SÍNTESIS DE LAS FICHAS DE DATOS

A continuación, se presenta una síntesis, para cada artículo, de los aspectos que consideramos importantes para el análisis de contenido y que provienen de las fichas de datos; a saber, los enfoques teóricos predominantes, los métodos utilizados, y las preguntas de investigación abordadas.

EMP-2022-05: *A construção do conhecimento matemático vetorial à luz do desenvolvimento do espírito científico e dos obstáculos epistemológicos de Bachelard*

- Tendencia teórica: Epistemología de Bachelard.
    - Rupturas epistemológicas y obstáculos en el desarrollo del conocimiento matemático.
    - Interacción entre espíritu científico y construcción histórica del conocimiento.
- Pregunta de investigación: ¿Cómo surgió la presencia y ruptura de los obstáculos epistemológicos en la historia de los vectores?

- Metodología:
    - Estudio histórico-epistemológico basado en tres periodos:
        - Precientífico: Matemáticos como Aristóteles y Newton.
        - Científico: Desarrollo de teorías vectoriales (v.g., Grassmann, Hamilton).
        - Nuevo espíritu científico: Axiomatización de la teoría vectorial.
    - Análisis de obstáculos epistemológicos en cada periodo.
- Aspectos destacados:
    - Identificación de obstáculos epistemológicos como generalizaciones erróneas y concepciones incuestionables.
    - Ruptura y resurgimiento constante de obstáculos epistemológicos.

IJMEST-2020-05: *An alternative to broaden the school-promoted meanings of mathematics in electrical sciences from socioepistemology*

- Tendencia teórica: Socioepistemología.
    - Estudio sistémico de dimensiones del conocimiento matemático: epistemológica, cognitiva, didáctica y sociocultural.
    - Introducción del concepto de "ingenio matemático".

- Preguntas de investigación:
    - ¿Cuál es la relación entre la propagación del calor y la electricidad en estado estacionario?
    - ¿Qué nociones sociales constituyen el estado estacionario en ingeniería eléctrica?
- Metodología:
    - Historización: análisis histórico-epistemológico del concepto de estado estacionario.
    - Uso de la ingeniería didáctica como enfoque metodológico.
- Aspectos destacados:
    - Revalorización del conocimiento matemático en contextos situados (v.g., fenómenos eléctricos).
    - Uso de analogías dinámicas para formalizar conocimientos matemáticos.

HISTEMAT-2020-34: *Análisis histórico en la constitución del conocimiento matemático: métodos iterativos*.

- Tendencia teórica: Transposición didáctica (Chevallard).
    - Análisis del tránsito del conocimiento científico al conocimiento enseñable.
- Pregunta de investigación: ¿Qué conocimientos predominaban entre matemáticos históricos en relación con métodos iterativos?
- Metodología:
    - Método histórico de Ruiz Berrio, estructurado en fases:
        - Heurística: Localización y clasificación de documentos históricos.
        - Crítica: Determinación de autenticidad e interpretación.
        - Hermenéutica: Enfoque histórico-pedagógico.
        - Exposición: Presentación de hallazgos.
    - Periodización histórica (S. XVII-S. XX) vinculada al desarrollo de métodos iterativos.
- Aspectos destacados:
    - Vinculación del análisis histórico con la conceptualización en el aula.
    - Identificación de transformaciones de lo lineal a lo no lineal y lo finito a lo infinito.

BOLEMA-2021-04: *Epistemología de la integral como fundamento del cálculo integral*

- Tendencia teórica: Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento e Instrucción Matemática (EOS).
    - Análisis de prácticas matemáticas, configuraciones epistémicas y conflictos semióticos.
- Pregunta de investigación: ¿Cómo se construyeron los significados teóricos de la integral desde una perspectiva histórica?
- Metodología:
    - Investigación cualitativa basada en la historiografía matemática.
    - Análisis de fuentes primarias y configuraciones epistémicas.
    - Estudio de tres periodos:
        - Origen: Tangencia estática y geométrica.
        - Evolución: Ruptura conceptual y uso de límites.
        - Fundamentación: Rigor teórico y generalización.

- Aspectos destacados:
    - Identificación de conflictos semióticos en cada periodo histórico.
    - Recomendación de replantear la enseñanza desde la complejidad epistémica.

BOLEMA-2020-02: *História da Análise Matemática e Desenvolvimento Cognitivo*

- Tendencia teórica: Epistemología genética.
    - Relación entre evolución histórica del análisis matemático y desarrollo cognitivo.
- Pregunta de investigación: ¿Cómo se estructura históricamente el conocimiento del análisis real?
- Metodología:
    - Investigación teórica y bibliográfica sobre etapas históricas del análisis.
    - Relación entre historia de las matemáticas y aprendizaje individual.
- Aspectos destacados:
    - Importancia de la verificación empírica para validar conexiones entre historia y aprendizaje.
    - Enfoque en el tránsito de conocimientos simples a complejos.

ZETETIKÉ-2018-037: *O estrangeiro aprendera a falar a língua do imperador... A lógica do traçado*

- Tendencia teórica: Historiografía educativa.
    - Conexión entre prácticas sociales y contenidos matemáticos.
- Pregunta de investigación: ¿Qué conocimientos de dibujo y matemáticas posibilitaron la representación de espacios?
- Metodología:
    - Análisis documental cualitativo de tratados históricos.
- Aspectos destacados:
    - El dibujo como construcción activa de significado.
    - Relación entre conocimiento y poder en el ámbito educativo.

HISTEMAT-2021-37: *Possibilidades para o ensino de frações a partir da régua de carpinteiro contida no tratado A Booke Named Tectonicon*

- Tendencia teórica: Historiografía actualizada.
    - Articulación entre historia y enseñanza para humanizar el conocimiento matemático.
- Pregunta de investigación: ¿Qué recursos históricos pueden integrarse a la enseñanza de fracciones?
- Metodología:
    - Metodología documental cualitativa.
- Aspectos destacados:
    - Potencial didáctico de textos históricos para la formación docente.
    - Promoción de la autonomía del profesor al comprender procesos históricos.

AS-2020-22: *Uma Engenharia Didática no Processo de Investigação da Generalização da Sequência de Padovan*

- Tendencia teórica:
    - Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau).
    - Transposición didáctica (Chevallard).
- Pregunta de investigación: ¿Cómo transformar la secuencia de Padovan en un contenido didáctico?
- Metodología:
    - Ingeniería didáctica en cuatro etapas:
        - Análisis preliminar.
        - Análisis a priori.
        - Experimentación.
        - Análisis a posteriori.
- Aspectos destacados:
    - Éxito en la generalización de Padovan como contenido a enseñar.
    - Vinculación del proceso epistemológico con el aprendizaje estudiantil.

EMP-2019-01: *Une enquête épistémologique sur les conceptions des futurs professeurs de mathématiques sur les obstacles sur la notion de limites*

- Tendencia teórica: Teoría Antropológica de lo Didáctico.
  - Análisis de prácticas relacionadas con el concepto de límite.
- Pregunta de investigación: ¿Cómo abordar los obstáculos epistemológicos en la enseñanza del límite?
- Metodología:
  - Ingeniería didáctica en tres etapas:
    - análisis a priori
    - experimentación
    - análisis a posteriori.
- Aspectos destacados:
  - Necesidad de profundizar en la definición formal del límite.
  - Importancia de capacitar a futuros docentes para superar obstáculos epistemológicos.

Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 19 · N°. 1 · 2026
151-178
Recibido: 25/08/2025
Aprobado: 22/11/2025

Artículos de investigación

DE LA PERIODICIDAD AL ORDEN NO REPETITIVO: Un análisis físico-matemático de los teselados hasta los patrones de Penrose desde el Enfoque Ontosemiótico

From Periodicity to Non-Repetitive Order: A Physico-Mathematical Analysis of tessellations up to Penrose Pattems from the Ontosemiotic Approach

Juan Carlos Ruiz Castillo[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-2218-1442

RESUMEN

Este artículo analiza la evolución conceptual, geométrica y físico-matemática de los teselados del plano, desde los patrones periódicos clásicos hasta los complejos teselados aperiódicos de Penrose. El **objetivo** principal es comprender cómo la transición del orden periódico al cuasiperiódico puede ser abordada didácticamente desde el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), donde se integra dimensiones epistémicas, semióticas, cognitivas e institucionales. La **metodología** empleada corresponde a un estudio cualitativo de naturaleza interpretativa, centrado en una experiencia didáctica desarrollada con estudiantes de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física. Se diseñaron y analizaron tareas geométricas progresivas en torno a teselados periódicos, aperiódicos y de Penrose, mediante configuraciones didácticas reflexivas orientadas por los fundamentos del EOS. Entre los **resultados**, se destaca que los estudiantes lograron articular representaciones geométricas, simbólicas y verbales, identificar propiedades de cuasiperiodicidad y simetría no convencional, y resignificar la noción de orden en contextos no periódicos. Asimismo, se identificaron conflictos semióticos y reorganizaciones conceptuales asociadas al paso desde teselaciones convencionales a estructuras como las de Penrose. En cuanto a las **conclusiones**, se argumenta que el estudio de los teselados, especialmente los aperiódicos, permite no solo enriquecer la comprensión matemática de estructuras complejas, sino también promover procesos formativos interdisciplinarios que conectan la geometría, la física del estado sólido y la didáctica avanzada. Este

[1] Universidad de San Carlos de Guatemala, Guatemala, Guatemala. Correo electrónico: jcefpem@profesor.usac.edu.gt

enfoque ofrece una vía eficaz para formar docentes capaces de interpretar, modelar y comunicar fenómenos geométricos no estándar en la enseñanza de la matemática moderna.

Palabras clave: Teselaciones Geométricas, Cuasiperiosidad, Enfoque Ontosemitico, Didáctica de la Matemática, Cuasicristales.

ABSTRACT

This article analyzes the conceptual, geometric, and physico-mathematical evolution of planar tessellations, from classical periodic patterns to the complex aperiodic Penrose tilings. The main objective is to understand how the transition from periodic to quasiperiodic order can be addressed didactically through the Ontosemiotic Approach to mathematical knowledge and instruction (EOS), integrating epistemic, semiotic, cognitive, and institutional dimensions. The methodology employed corresponds to a qualitative, interpretative study focused on a didactic experience conducted with students from the Bachelor's Degree in the Teaching of Mathematics and Physics. Progressive geometric tasks were designed and analyzed, focusing on periodic, aperiodic, and Penrose tessellations, using reflective didactic configurations guided by EOS principles. Among the results, it is noteworthy that students were able to articulate geometric, symbolic, and verbal representations, identify properties of quasiperiodicity and non-conventional symmetry, and reconceptualize the notion of order in non-periodic contexts. Likewise, semiotic conflicts and conceptual reorganizations were identified, particularly in the transition from conventional tessellations to structures like those of Penrose. Regarding the conclusions, it is argued that the study of tessellations—especially aperiodic ones—not only enhances mathematical understanding of complex structures, but also fosters interdisciplinary educational processes that connect geometry, solid-state physics, and advanced didactics. This approach offers an effective path to prepare future educators capable of interpreting, modeling, and communicating non-standard geometric phenomena within the teaching of modern mathematics..

Keywords: Geometric Tessellations, Quasiperiodicity, Ontosemiotic Approach, Mathematics Education, Quasicrystals

1. INTRODUCCIÓN

El estudio de los teselados constituye un campo de interés tanto en la matemática pura como en sus aplicaciones físicas y estéticas. Desde la antigüedad, las civilizaciones han empleado patrones de recubrimiento del plano en la creación de mosaicos, vitrales y arte ornamental, como lo evidencian las construcciones islámicas, bizantinas y romanas, donde la simetría y la repetición regular de motivos geométricos reflejan un conocimiento empírico de las transformaciones isométricas del plano (Grünbaum & Shephard, 1987).

En el ámbito matemático, los teselados periódicos han sido sistematizados a través de la teoría de grupos, particularmente los grupos de simetría del plano, también llamados grupos de mosaico, que permiten clasificar las posibles formas de recubrimiento repetitivo mediante traslaciones, rotaciones, reflexiones y deslizamientos. Esta clasificación culmina en los 17 grupos de simetría bidimensionales, los cuales han sido fundamentales no solo para la geometría euclidiana, sino también para la cristalografía y la física del estado sólido (Conway, Burgiel, & Goodman-Strauss, 2008).

No obstante, hacia finales del siglo XX, se descubrieron patrones de teselado que, sin ser periódicos, exhiben orden y simetría a gran escala. Este hallazgo fue revolucionario tanto desde el punto de vista matemático como físico. Entre ellos, destacan los teselados de Penrose, introducidos por Roger Penrose en la década de 1970, los cuales cubren el plano sin repetición traslacional, pero con propiedades cuasiperiódicas y simetría de orden cinco. Estos patrones han sido utilizados para modelar estructuras atómicas conocidas como cuasicristales, cuyo descubrimiento experimental por Dan Shechtman en 1982 desafió los paradigmas tradicionales de la cristalografía y le valió el Premio Nobel de Química en 2011 (Shechtman et al., 1984; Levine & Steinhardt, 1984).

Desde una perspectiva educativa, la enseñanza de los teselados ofrece una oportunidad única para integrar modelización geométrica, análisis simétrico y reflexión epistemológica en un entorno didáctico activo. En particular, el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS), desarrollado por Godino y colaboradores, permite interpretar la evolución de los significados construidos por los estudiantes, donde se permite atender tanto a la complejidad epistémica de los objetos como a los procesos semióticos, cognitivos e institucionales que intervienen en su aprendizaje.

Este artículo se propone, entonces, analizar la evolución conceptual, geométrica y físico-matemática de los teselados del plano, desde los patrones periódicos clásicos hasta los diseños aperiódicos de Penrose, a partir de una experiencia didáctica con estudiantes de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física. Se busca mostrar cómo el EOS puede orientar procesos formativos que promuevan un pensamiento geométrico moderno, crítico e interdisciplinario, en diálogo con la historia, la física del estado sólido y la matemática contemporánea.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

1.1 Antecedentes históricos de los teselados

El concepto de *teselación* o *mosaico geométrico* —la cobertura completa de una superficie mediante figuras planas que no se superponen ni dejan espacios vacíos— ha acompañado al pensamiento humano desde tiempos ancestrales, mucho antes de ser formalizado matemáticamente. Estas configuraciones han sido estudiadas desde perspectivas tanto estéticas como estructurales en diversas culturas y épocas (Grünbaum & Shephard, 1987; Wells, 1991).En las culturas antiguas, los teselados no eran únicamente soluciones técnicas para recubrir superficies, sino también manifestaciones estéticas, simbólicas y espirituales que reflejaban una comprensión intuitiva de los principios de repetición, simetría y organización espacial.

Ejemplos notables pueden encontrarse en los mosaicos romanos del periodo helenístico y del Alto Imperio, donde se utilizaban motivos geométricos entrelazados con escenas figurativas para decorar villas, termas y templos (Ling, 1998). Asimismo, la tradición islámica desarrolló teselaciones de notable complejidad y belleza, especialmente en la Alhambra de Granada, donde se alcanzó una exhaustiva exploración de los 17 grupos de simetría del plano —mucho antes de que fueran sistematizados en el siglo XIX— a través de composiciones ornamentales basadas en polígonos regulares, estrellas y motivos entrelazados (Abas & Salman, 1995; Kaplan & Salesin, 2000).

En el mundo bizantino, los pavimentos de opus tessellatum y opus sectile combinaban mármoles de diferentes colores con disposiciones geométricas precisas, donde se revela un dominio técnico y artístico notable. De igual forma, en la arquitectura islámica de Persia, Turquía y Asia Central, se desarrollaron patrones geométricos modulados a partir de reglas de simetría rotacional, reflexión y traslación, cuya elaboración responde no solo a principios decorativos, sino también a concepciones metafísicas del orden y la unidad (Bonner, 2017).

Estas prácticas muestran que, aún en ausencia de una teoría explícita de los grupos de simetría o de los espacios métricos, las civilizaciones desarrollaron modos altamente sofisticados de comprender y representar el orden geométrico. Por ello, el recorrido histórico de los teselados constituye un testimonio profundo de la convergencia entre estética, estructura, simetría y racionalidad, se puede anticipar problemáticas que hoy son objeto de estudio en la matemática, la física del estado sólido y la teoría del diseño.

2.2 Civilizaciones antiguas: la intuición del orden

Las primeras manifestaciones de teselaciones o recubrimientos del plano emergen en las civilizaciones antiguas como el Antiguo Egipto, Mesopotamia y el mundo greco-romano, donde la simetría y la repetición de formas básicas expresaban tanto una necesidad funcional como una búsqueda de belleza. Los registros arqueológicos muestran que ya en el tercer milenio a.C., las culturas mesopotámicas utilizaban patrones geométricos para decorar templos, palacios y cerámicas, basados en arreglos de triángulos, rombos y estrellas (O'Kane, 2016). En el Antiguo Egipto, el uso de teselados en paredes, suelos y papiros revela un alto grado de planificación geométrica, con especial atención a las formas regulares y la simetría axial (Smith, 1958).

Durante el periodo clásico greco-romano, el arte del mosaico alcanzó un desarrollo técnico y estético sin precedentes. En particular, el *opus tessellatum* romano se caracterizó por el uso de teselas cuadradas o poligonales dispuestas en patrones repetitivos que combinaban simetría rotacional, traslacional y reflexiva. Los frisos decorativos que adornaban templos y edificios públicos, con diseños geométricos modulados a lo largo de una dimensión, anticipaban lo que más tarde sería formalizado como los grupos de frisos o grupos de simetría unidimensionales, mientras que las composiciones de mosaico en pavimentos se relacionan con los grupos de papel tapiz (Schattschneider, 1978; Grünbaum & Shephard, 1987).

En el contexto griego, la escuela pitagórica ya concebía una relación estrecha entre la geometría, el orden cósmico y los principios de armonía matemática. Este ideal se vería plasmados siglos después en los *Elementos* de Euclides, obra fundamental donde se abordaron por primera vez los criterios para la teselación regular del plano mediante polígonos convexos. En el Libro I y especialmente en el Libro XIII, Euclides demuestra que sólo tres polígonos regulares —el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular— pueden recubrir el plano sin solapamientos ni huecos, dando origen a las llamadas teselaciones regulares (Euclides, ca. 300 a.C./1956).

Estas construcciones tempranas revelan no sólo una intuición geométrica profunda, sino también una anticipación empírica de estructuras formales que serían sistematizadas siglos más tarde mediante la teoría de grupos y la geometría del plano. Así, la teselación en las civilizaciones antiguas puede ser vista como una manifestación temprana del pensamiento estructural, donde convergen el arte, la matemática, la filosofía y la ciencia.

2.3 El esplendor islámico: el arte como álgebra visual

Uno de los hitos fundamentales en la evolución histórica de los teselados fue su esplendoroso desarrollo en el arte islámico medieval, particularmente entre los siglos VIII y XV, en regiones como Persia, Al-Ándalus, el Magreb y Asia Central. La prohibición de representar figuras humanas en el arte religioso, basada en principios teológicos del islam, favoreció una búsqueda intensa de formas abstractas, lo cual condujo al florecimiento de una rica tradición de patrones geométricos ornamentales. Esta práctica artística, profundamente arraigada en la espiritualidad islámica, transformó la geometría en un vehículo de expresión simbólica, estética y metafísica.

Los artesanos musulmanes, sin el respaldo explícito de la teoría de grupos ni de una notación algebraica formal, diseñaron complejos sistemas de recubrimiento del plano con alto grado de simetría. Utilizaron rotaciones de orden cinco, ocho y diez, transformaciones de reflexión y traslación, y composiciones que respetaban reglas estrictas de repetición y equilibrio visual. Bonner (2017) describe estos diseños como una forma de "álgebra visual", donde la intuición constructiva guiaba la creación de estructuras que, siglos después, serían objeto de estudio formal en matemáticas avanzadas.

Uno de los casos más estudiados es el conjunto de teselados encontrados en la Alhambra de Granada, donde se han identificado ejemplos de los 17 grupos de simetría del plano, lo que demuestra una comprensión empírica de las transformaciones isométricas (Abas & Salman, 1995). Además, investigaciones recientes como las de Lu y Steinhardt (2007) han demostrado que algunos patrones decorativos de los muros del santuario Darb-i-Imam en Isfahan (Irán, siglo XV) presentan formas geométricas generadas mediante subdivisión girada, una técnica que anticipa las reglas de apareamiento de los teselados de Penrose. Estos hallazgos revelan que los artistas islámicos alcanzaron configuraciones geométricas equivalentes a patrones aperiódicos cinco siglos antes de su formulación matemática.

Este logro, alcanzado mediante métodos constructivos, manipulación de plantillas y herramientas geométricas rudimentarias, da cuenta de una sofisticación matemática notable, sostenida por prácticas artesanales sistemáticas y una cosmovisión profundamente ligada al orden, la simetría y la infinitud, pilares fundamentales de la estética islámica.

2.4 Renacimiento y sistematización moderna

Durante el Renacimiento europeo, el diálogo entre arte, ciencia y matemática alcanzó una de sus cúspides intelectuales, impulsado por figuras fundamentales como Leonardo da Vinci y Albrecht Dürer. Este periodo marcó un renacer del pensamiento geométrico, con un enfoque renovado hacia la proporción, la perspectiva y la simetría. Albrecht Dürer, destacado grabador, pintor y matemático alemán, desempeñó un papel crucial en la difusión de ideas geométricas a través de su obra *Underweysung der Messung* (1525), una guía de geometría práctica que abordaba, entre otros temas, el diseño de mosaicos regulares, las construcciones con compás y regla, y el uso de transformaciones en patrones decorativos (Field, 2005; Dürer, 1525/1977).

Dürer incorporó conocimientos provenientes del mundo clásico, del arte islámico y de la geometría euclidiana, se puede sentar las bases para una comprensión racional del diseño ornamental. Sus estudios anticiparon, de manera notable, los principios que más tarde serían formalizados en la teoría de simetría. Leonardo da Vinci, por su parte, exploró patrones geométricos en sus códices y dibujos, especialmente en relación con la sección áurea, la arquitectura y los desarrollos proporcionales de figuras planas, aunque sin la sistematización que alcanzaría Dürer (Pedoe, 1988).

Sin embargo, la formalización matemática rigurosa de los teselados no se consolidó hasta el siglo XIX, con el surgimiento de la teoría de grupos como marco algebraico para describir las simetrías. Los aportes fundacionales de Évariste Galois sobre la estructura de los grupos finitos abrieron un campo que sería posteriormente aplicado a la geometría del plano. En el contexto de la cristalografía, matemáticos como Auguste Bravais, Evgraf Fedorov, Arthur Moritz Schönflies y otros desarrollaron la clasificación exhaustiva de los 17 grupos de simetría del plano (también llamados *wallpaper groups*), los cuales describen todas las posibles formas en que un patrón puede repetirse periódicamente en dos dimensiones sin dejar espacios ni superposiciones (Conway, Burgiel & Goodman-Strauss, 2008; Wells, 1991).

Esta clasificación no solo se convirtió en un pilar de la geometría euclidiana, sino que además tuvo profundas repercusiones en la física del estado sólido, al proporcionar el lenguaje formal para la descripción de estructuras cristalinas y sus propiedades de simetría. Así, la articulación entre arte, geometría y álgebra, que había germinado en el Renacimiento, encontró su sistematización definitiva en la confluencia de la matemática pura y las ciencias físicas.

2.5 Siglo XX: de la lógica a la cuasiperiodicidad

El siglo XX trajo consigo una profunda transformación en la comprensión de los patrones geométricos y su relación con la lógica formal, la computación y la física de materiales. La noción clásica de periodicidad —base de la geometría euclidiana y la cristalografía— fue progresivamente desafiada por desarrollos teóricos que revelaron la posibilidad de orden sin repetición periódica.

En 1961, el lógico y matemático Hao Wang formuló un problema fundamental en teoría de mosaicos al proponer un conjunto de fichas cuadradas con marcas en sus bordes, cuya colocación debía regirse por reglas de apareamiento local. Su objetivo era investigar si un algoritmo podía decidir la teselabilidad del plano con un conjunto dado de tales fichas (Wang, 1961). Sin embargo, en 1966, su estudiante Robert Berger demostró que existía un conjunto finito de fichas de Wang que forzaban una cobertura del plano **aperiódica**, lo que implicaba que el problema general de teselabilidad era indecidible, y se permite establecer así una sorprendente conexión entre geometría, lógica matemática y teoría de la computabilidad (Berger, 1966; Grünbaum & Shephard, 1987).

Este resultado introdujo el concepto de *forzamiento de la aperiocidad* mediante restricciones locales, donde se puede abrir el camino a nuevas concepciones del orden espacial. Inspirado por esta línea de pensamiento y por consideraciones estéticas, el físico y matemático Roger Penrose desarrolló durante la década de 1970 tres tipos de teselados aperiódicos conocidos como **P1** (cometas y dardos), **P2** (rombos de 36° y 72°) y **P3** (kites and darts en configuración kite-kite-dart), cuyas reglas de apareamiento impiden la repetición traslacional, pero generan patrones globalmente ordenados con simetría rotacional de orden cinco y propiedades cuasiperiódicas (Penrose, 1974; Penrose, 1979).

Aunque originalmente concebidos como construcciones matemáticas con una belleza geométrica intrínseca, los teselados de Penrose adquirieron posteriormente un valor físico inesperado cuando se descubrió que modelaban con gran fidelidad la estructura atómica de ciertos materiales que exhibían orden sin periodicidad. Estos patrones fueron clave en la interpretación matemática de los cuasicristales descubiertos por Dan Shechtman en 1982, se consolida así el vínculo entre teoría geométrica, lógica computacional y ciencia de materiales (Senechal, 1995).

2.6 El vínculo con la física: cuasicristales y Premio Nobel

Uno de los episodios más significativos en la conexión entre la matemática de los teselados y la física del estado sólido ocurrió en 1982, cuando el científico israelí Dan Shechtman observó experimentalmente una fase atómica metálica con simetría icosaédrica pero sin periodicidad traslacional en una aleación de aluminio y manganeso. Este descubrimiento desafió radicalmente el paradigma cristalográfico imperante, según el cual toda estructura ordenada debía ser periódica. En sus propias palabras, Shechtman fue objeto de escepticismo e incluso burlas dentro de su comunidad, ildado de “decir tonterías” por afirmar la existencia de un "cristal no periódico" (Shechtman, 2013).

No obstante, tras análisis estructurales y difractométricos rigurosos, sus hallazgos fueron validados y publicados en la revista *Physical Review Letters* (Shechtman et al., 1984), lo que dio origen al concepto de **cuasicristal.** Estas estructuras exhiben orden a largo alcance y difracción puntual, pero sin simetría traslacional, lo que las distingue radicalmente de los cristales convencionales. Sorprendentemente, los patrones geométricos que mejor modelan estos arreglos atómicos son los teselados no periódicos de Penrose, introducidos una década antes en el ámbito de la matemática pura (Levine & Steinhardt, 1984).

Este hallazgo no solo validó una abstracción matemática en un contexto físico real, sino que también estableció un puente epistemológico entre geometría, simetría y estructura material. En reconocimiento a su descubrimiento, Dan Shechtman recibió el **Premio Nobel de Química en 2011**, se destaca explícitamente la relación entre el orden cuasiperiódico observado y las matemáticas de Penrose (The Nobel Foundation, 2011).

El caso de los cuasicristales ilustra con fuerza cómo una idea matemática abstracta puede anticipar fenómenos naturales y transformar áreas enteras del conocimiento científico. Así, se cierra un círculo fascinante entre el arte ornamental medieval, la teoría matemática de los teselados y la física moderna de los materiales.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

3.1. Enfoque y naturaleza de la investigación

El estudio se desarrolla bajo un enfoque cualitativo de carácter interpretativo, orientado a comprender cómo los estudiantes construyen y resignifican el concepto de teselación en su transición de lo periódico a lo cuasiperiódico. Este análisis se sustenta en el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, el cual reconoce el conocimiento matemático como una red de prácticas, significados y representaciones que emergen en contextos sociales, institucionales y cognitivos.

3.2. Diseño metodológico

Se aplicó un estudio de caso didáctico con estudiantes de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física. Para ello se diseñó una progresión de tareas geométricas organizadas en tres bloques:

- Teselados periódicos: construcción y análisis de patrones regulares, primero de manera manipulativa con piezas de foamy y luego en entornos digitales (GeoGebra).
- Teselados aperiódicos: introducción a fichas tipo Wang y elaboraciones manuales con foamy que permiten comprender la ruptura de la periodicidad.
- Teselados de Penrose: construcción de patrones con cometas y dardos elaborados en foamy, donde se sigue reglas de apareamiento, donde se explora propiedades de la proporción áurea y la simetría no convencional.

El diseño de estas tareas se inscribe en configuraciones didácticas reflexivas, orientadas a la interacción entre acción, representación, argumentación y validación matemática.

3.3 Técnicas e instrumentos de recolección de datos

La información se recopiló mediante:

- Observación participante del docente-investigador durante las sesiones.
- Registros fotográficos de las producciones elaboradas en foamy y en GeoGebra.
- Notas de campo enfocadas en identificar conflictos semióticos y reorganizaciones conceptuales.
- Producciones escritas y verbales de los estudiantes, obtenidas en discusiones y argumentaciones colectivas.

3.4. Categorías de análisis

El análisis se estructuró en las dimensiones del EOS:

- Epistémica: atributos de los objetos matemáticos “teselado periódico”, “teselado aperiódico” y “teselado cuasiperiódico de Penrose”.
- Semiótica: procesos de tratamiento y conversión entre registros (manipulativo con foamy, visual-digital, verbal y algebraico).
- Cognitiva: reorganizaciones conceptuales frente a la introducción de simetrías no convencionales y cuasiperiodicidad.
- Institucional: articulación de significados personales construidos en la experiencia con los institucionales del currículo.
- Afectiva y kinestésica: valoración del impacto motivacional y del trabajo manual con foamy como recurso didáctico.

3.5. Procedimiento

1. Exploración inicial con teselados periódicos (foamy + GeoGebra).
2. Introducción al reto: actividades con teselados aperiódicos que generaron conflictos semióticos y nuevas reflexiones.
3. Profundización conceptual: análisis y construcción de Penrose con foamy, enfocándose en reglas de apareamiento y proporción áurea.
4. Reflexión colectiva: discusión sobre las implicaciones matemáticas, físicas (cuasicristales) y educativas de los patrones no periódicos.

3.6. Estrategia de validación

Se aplicó triangulación interna de datos, donde se contrasta observaciones, registros gráficos y discursos de los estudiantes. Esta estrategia permitió garantizar consistencia interpretativa y coherencia con los fundamentos del EOS.

Síntesis metodológica

En síntesis, la investigación:

- Es cualitativa e interpretativa, enfocada en la experiencia didáctica.
- Se basa en un diseño progresivo de tareas que avanza de lo periódico a lo cuasiperiódico.
- Utiliza foamy y recursos digitales como soportes para la construcción de significados.
- Aplica categorías de análisis propias del EOS, donde se permite atender lo epistémico, semiótico, cognitivo e institucional.
- Integra una validación mediante triangulación, se asegura rigor interpretativo.

4. RESULTADOS

4.1 Teselados periódicos: fundamentos y simetría

Los teselados periódicos son configuraciones geométricas que recubren completamente el plano euclidiano mediante la repetición exacta de una o varias figuras básicas denominadas prototiles, sin solapamientos ni huecos, siguiendo una estructura de periodicidad traslacional en dos direcciones linealmente independientes. Matemáticamente, se definen como subconjuntos del plano invariantes bajo un grupo discreto de traslaciones, es decir, existe un patrón que puede ser desplazado en múltiples direcciones del plano para cubrirlo sin alterar la disposición relativa de sus componentes (Conway, Burgiel, & Goodman-Strauss, 2008; Grünbaum & Shephard, 1987).

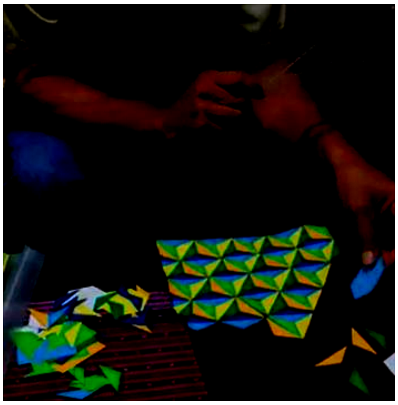
La clasificación de estos teselados se fundamenta en la teoría de grupos de simetría del plano, en particular, en los 17 grupos de simetría bidimensionales, también conocidos como grupos de simetría del plano euclidiano E^2 **o** grupos de papel tapiz (*wallpaper groups*), los cuales engloban todas las combinaciones posibles de las isometrías del plano (traslación, rotación, reflexión y deslizamiento) que permiten construir recubrimientos periódicos. Cada uno de estos grupos representa una clase de simetría distinta, identificada mediante notación de Hermann-Mauguin o notación orbifold (Conway et al., 2008).

Además de los grupos de mosaico, existen los grupos de frisos, que comprenden las siete formas posibles de generar patrones unidimensionales repetitivos. Ambos conjuntos de grupos revelan la estructura algebraica subyacente en los teselados periódicos, donde se permite vincular la geometría con el álgebra abstracta y la topología.

Desde la perspectiva de la física matemática, los teselados periódicos reflejan las simetrías espaciales de los **cristales ideales**, cuyas redes atómicas exhiben una organización periódica en el espacio. Estas simetrías están directamente relacionadas con las leyes de conservación, en particular con los teoremas de Noether, que establecen que a cada simetría continua del sistema físico corresponde una cantidad conservada (Brading & Castellani, 2003). En el caso de los sistemas cristalinos, la periodicidad se traduce en conservación del momento cristalino y regularidad en los espectros de difracción.

En la enseñanza de la geometría, los teselados periódicos permiten abordar con profundidad conceptos clave como invarianza, congruencia, simetría y estructura algebraica, donde se ofrece a los estudiantes un campo fértil para la visualización matemática, el razonamiento deductivo y la conexión con fenómenos físicos reales, como la organización estructural de materiales sólidos.

Figura 1. Actividad manual de construcción de teselados con prototiles de cartulina



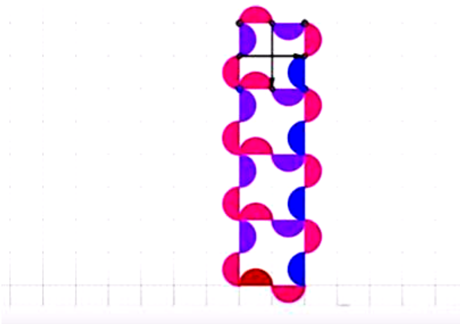
Nota. En esta imagen se documenta una experiencia didáctica en la que un estudiante manipula prototiles triangulares de papel para construir un patrón de teselado periódico sobre una superficie plana. La actividad forma parte del proceso de exploración empírica y visual de simetrías y recubrimientos del plano, desarrollada en el marco del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento matemático. Fuente: Fotografía propia tomada durante sesión práctica del curso de Geometría (2025).

En el marco de la enseñanza de los teselados, se implementó una actividad práctica en la que los estudiantes diseñaron y construyeron patrones periódicos donde se utiliza prototiles recortados en cartulina de colores (figura 1). Esta propuesta se inscribe dentro de una estrategia didáctica reflexiva, orientada desde el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, el cual reconoce la centralidad de los sistemas de prácticas y representaciones semióticas en la configuración de objetos matemáticos (Godino, Batanero y Font, 2007).

La actividad fue diseñada y aplicada por Ruiz Castillo, quien ha investigado previamente el impacto del EOS en la enseñanza de conceptos matemáticos complejos y su articulación con herramientas manipulativas, digitales y semióticas (Ruiz Castillo, 2022). En esta línea, se propuso una experiencia que integrara tanto la dimensión epistémica como la cognitiva y afectiva del aprendizaje matemático. La figura 1 muestra a un estudiante, haciendo manipulación físicamente fichas triangulares para componer un patrón teselado que cubre el plano sin superposiciones ni espacios vacíos. El uso de herramientas geométricas como la escuadra, así como la organización visual de los polígonos, evidencia una actividad de validación empírica de la simetría y la regularidad. Esta experiencia posibilitó el tránsito entre representaciones concretas (materiales), visuales (estructuras emergentes) y conceptuales (noción de periodicidad y simetría isométrica).

Desde la dimensión epistémica, la actividad propició una reconstrucción funcional del objeto "teselado periódico", desglosado en atributos como la cobertura total, la regularidad espacial y la generación por traslación. Cognitivamente, se identificaron avances en la articulación de propiedades geométricas con lenguaje técnico, lo cual facilitó procesos de institucionalización progresiva. Semióticamente, se observaron procesos de tratamiento (reorganización dentro del mismo registro visual) y conversión (paso al registro verbal y simbólico), lo cual concuerda con lo señalado por Duval (2006) sobre la importancia de operar entre registros para consolidar la comprensión conceptual. Estas actividades con materiales manipulativos, además de estimular el pensamiento espacial y el razonamiento geométrico, permitieron integrar dimensiones afectivas y kinestésicas en la experiencia matemática, y así favorecer un aprendizaje activo, situado y significativo.

Figura 2. Teselado periódico generado en software de geometría dinámica



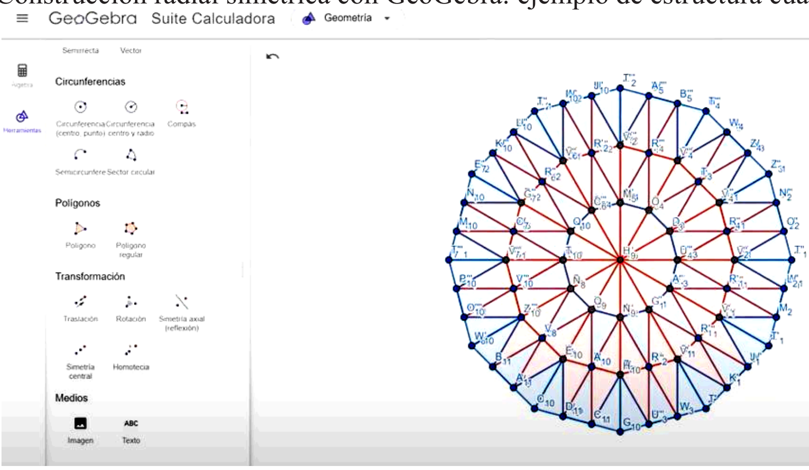
Nota. Ejemplo de patrón periódico generado digitalmente en un entorno de geometría dinámica. El diseño presenta una simetría traslacional vertical basada en un módulo repetitivo, y evidencia el uso de transformaciones isométricas básicas. Actividad realizada con estudiantes de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física. Fuente: Elaboración propia con GeoGebra (2025).

En el marco de la enseñanza de los teselados, se implementó una actividad práctica en la que los estudiantes diseñaron y construyeron patrones periódicos donde se utiliza prototiles recortados en cartulina de colores (véase figura 1). Esta propuesta se inscribe dentro de una estrategia didáctica reflexiva, orientada desde el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, el cual reconoce la centralidad de los sistemas de prácticas y representaciones semióticas en la configuración de objetos matemáticos (Godino, Batanero & Font, 2007; Ruiz Castillo, 2025).

La figura 2 muestra a un estudiante donde manipula físicamente fichas triangulares para componer un patrón teselado que cubre el plano sin superposiciones ni espacios vacíos. El uso de herramientas geométricas como la escuadra, así como la organización visual de los polígonos, evidencia una actividad de validación empírica de la simetría y la regularidad. Esta experiencia posibilitó el tránsito entre representaciones concretas (materiales), visuales (estructuras emergentes) y conceptuales (noción de periodicidad y simetría isométrica).

Desde la dimensión epistémica, la actividad propició una reconstrucción funcional del objeto “teselado periódico”, desglosado en atributos como la cobertura total, la regularidad espacial y la generación por traslación. Cognitivamente, se identificaron avances en la articulación de propiedades geométricas con lenguaje técnico, lo cual facilitó procesos de institucionalización progresiva. Semióticamente, se observaron procesos de tratamiento (reorganización dentro del mismo registro visual) y conversión (paso al registro verbal y simbólico), lo cual concuerda con lo señalado por Duval (2006) sobre la importancia de operar entre registros para consolidar la comprensión conceptual. Tal como se ha documentado en experiencias anteriores (Ruiz Castillo, 2025b), estas actividades con materiales manipulativos, además de estimular el pensamiento espacial y el razonamiento geométrico, permitieron integrar dimensiones afectivas y kinestésicas en la experiencia matemática, donde se favorece un aprendizaje activo, situado y significativo.

Figura 3. Construcción radial simétrica con GeoGebra: ejemplo de estructura cuasiperiódica



Nota. Representación elaborada en GeoGebra con base en transformaciones de rotación y simetría radial, en la que se evidencia una disposición ordenada de triángulos y polígonos sobre una malla circular. Esta construcción fue realizada como parte de una actividad didáctica orientada a explorar propiedades de cuasiperiodicidad y simetría no convencional en patrones tipo Penrose.
Fuente: Elaboración propia con GeoGebra (2025).

En el marco de un laboratorio didáctico orientado por el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, se desarrolló una experiencia de exploración estructural mediante la herramienta GeoGebra. En la figura 3 se observa una configuración circular construida con polígonos, radios y cuerdas simétricamente organizadas, donde emergen patrones concéntricos que permiten identificar simetrías radiales de orden elevado.

Esta representación fue diseñada por estudiantes de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física como parte de una actividad de modelización geométrica, cuyo propósito fue reconocer la interacción entre rotaciones, simetría central y axial, y su implicación en la generación de patrones armónicos. La figura 3 evidencia una disposición dodecagonal (aparente) y subdivisiones que posibilitan interpretaciones desde la geometría euclidiana y la teoría de grupos.

Desde la dimensión epistémica, el objeto matemático "estructura con simetría rotacional" se desglosa en atributos como: invariancia bajo rotaciones, repetición angular y continuidad radial. Cognitivamente, se promovió el tránsito entre el registro visual (GeoGebra), el registro simbólico (nomenclatura angular y notación algebraica de simetrías) y el registro discursivo (justificaciones geométricas en lenguaje natural), en concordancia con la teoría de registros de representación de Duval (2006). Semióticamente, la actividad permitió procesos de tratamiento (reorganización del registro geométrico para identificar subestructuras simétricas) y conversión (vinculación de elementos visuales con propiedades algebraicas y narrativas). Esta experiencia favoreció la interiorización de la noción de simetría no solo como propiedad estática, sino como resultado de una acción transformadora sobre el plano, donde se dota de sentido los conceptos de rotación, congruencia y equivalencia geométrica, como ha sido argumentado en investigaciones previas sobre el uso del EOS en contextos de enseñanza universitaria (Ruiz Castillo, 2025).

4.3 Teselados Aperiódicos: Ruptura del Orden Repetitivo

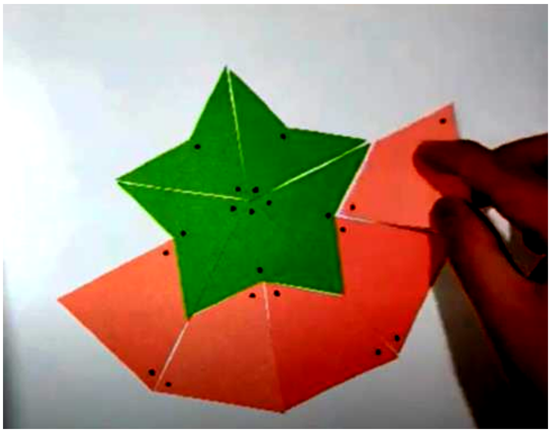
A diferencia de los teselados periódicos, los teselados aperiódicos son patrones que cubren completamente el plano sin dejar espacios ni superposiciones, pero que carecen de simetría traslacional. Esto significa que, aunque presentan una estructura globalmente ordenada, no existe un patrón finito que pueda repetirse por traslación para generar toda la teselación. Esta ruptura de la periodicidad representa un cambio paradigmático tanto en geometría como en física, ya que permite la existencia de orden sin repetición, una característica fundamental en los cuasicristales.

Uno de los desarrollos más significativos en la teoría de los teselados aperiódicos fue la introducción de los conjuntos de Wang, propuestos por Hao Wang en 1961. Estos consisten en fichas cuadradas con marcas de colores o símbolos en los bordes, cuya colocación debe obedecer reglas de coincidencia entre bordes adyacentes. Sorprendentemente, Robert Berger (1966) demostró que existe un conjunto finito de fichas de Wang que puede teselar el plano, pero únicamente de forma no periódica, para poder establecer así la existencia de un conjunto de prototiles aperiódicos (Berger, 1966). Este descubrimiento también mostró una conexión profunda entre la geometría y la teoría de la computabilidad, ya que probó que el problema de decidir si un conjunto arbitrario de fichas de Wang puede teselar el plano es indecidible.

Desde el punto de vista físico, los teselados aperiódicos proporcionan modelos adecuados para describir sistemas desordenados con orden local, en los que las simetrías globales están rotas, pero persisten regularidades estructurales. Este tipo de orden es característico en los cuasicristales, materiales descubiertos experimentalmente por Shechtman et al. (1984), que presentan patrones de difracción con simetrías no compatibles con la periodicidad (como simetrías pentagonales), lo que demuestra que pueden tener orden a largo alcance sin ser periódicos.

Los teselados aperiódicos, por tanto, abren un campo intermedio entre el caos y la regularidad, dando lugar a formalizar modelos que desafían la dicotomía clásica entre lo ordenado y lo aleatorio. Además, en el ámbito educativo, estos patrones estimulan el pensamiento lógico, la percepción geométrica avanzada y la comprensión de estructuras no convencionales, donde es una excelente antesala conceptual para la introducción de los **teselados de Penrose**, cuya cuasiperiodicidad representa el caso más elegante y conocido de teselación aperiódica con simetría rotacional de orden cinco.

Figura 4. Construcción geométrica de un patrón tipo Penrose con prototiles empíricos



Nota. Representación manipulativa de un patrón cuasiperiódico con teselado de Penrose, donde usa piezas tipo cometa y dardo, con marcas de coincidencia (reglas de apareamiento). Esta figura fue elaborada manualmente por estudiantes en el marco de una actividad didáctica en la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física. Fuente: Elaboración propia (2025).

La figura 4 presenta una actividad didáctica desarrollada en el marco de un laboratorio experimental de geometría, en la cual los estudiantes construyen teselados no regulares a partir de figuras recortadas en cartulina de colores. En este caso particular, se observa un patrón estrellado generado mediante la yuxtaposición de pentágonos isósceles que, al ensamblarse, configuran una estrella verde de cinco puntas. Esta construcción se continúa mediante la adición de figuras rosadas que completan el espacio sin superposiciones ni huecos evidentes, lo cual sugiere un principio de recubrimiento parcial orientado hacia estructuras aperiódicas o casi periódicas.

La manipulación física de los elementos geométricos permite al estudiante validar empíricamente las propiedades angulares necesarias para el acoplamiento perfecto, así como explorar la continuidad espacial del patrón. El uso de puntos de referencia marcados en los vértices facilita una comparación visual y sistemática de ángulos, aristas y simetrías involucradas.

Desde una perspectiva epistémica, se evidencia la construcción funcional del objeto matemático “teselado estrellado por pentágonos isósceles”, que puede descomponerse en propiedades como: (a) simetría rotacional local de orden cinco, (b) congruencia de lados para la continuidad del patrón y (c) posibilidad de extensión radial sin pérdida de regularidad local. Cognitivamente, esta experiencia permite el tránsito entre los registros concretos y visuales, donde se permite promover el desarrollo del pensamiento geométrico y la anticipación de configuraciones espaciales. Semióticamente, se producen procesos de tratamiento al reorganizar las piezas dentro del mismo registro visual, así como conversiones hacia registros verbales y simbólicos, mediante la argumentación de propiedades y la identificación de invariantes.

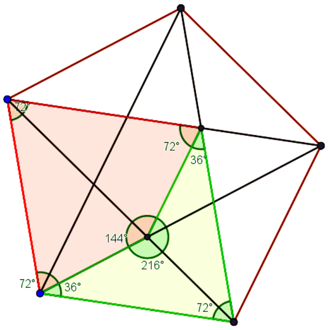
Esta propuesta, articulada desde el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento matemático, ha sido utilizada como estrategia de mediación entre la intuición espacial y la formalización conceptual (Ruiz Castillo, 2025c), donde genera oportunidades para que los estudiantes desarrollen estructuras de pensamiento geométrico a partir de la acción, la observación y la sistematización de patrones constructivos.

4.2 Teselados de Penrose: Geometría y Física Cuasiperiódica

Los teselados de Penrose constituyen uno de los ejemplos más paradigmáticos y elegantes de estructuras aperiódicas con orden geométrico no trivial. Introducidos por Roger Penrose en la década de 1970, estos patrones desafiaron la noción clásica de periodicidad como condición necesaria para la regularidad estructural. Sus configuraciones permiten cubrir el plano completamente, sin solapamientos ni huecos, pero sin admitir ninguna traslación que preserve la estructura global. A pesar de esta restricción, exhiben una forma de orden cuasiperiódico, caracterizada por la aparición recurrente de motivos finitos en disposiciones no repetitivas, pero con simetrías de largo alcance.

Penrose propuso diferentes versiones de sus teselados, conocidos comúnmente como P1, P2 y P3. En el caso del modelo **P1**, se utilizan cometas (*kites*) y dardos (*darts*) con reglas específicas de apareamiento que restringen su colocación, de forma que se evita la periodicidad. En la versión **P2**, se emplean dos tipos de rombos (angosto y ancho) cuyas diagonales están en proporciones áureas, y en **P3** se utilizan polígonos con segmentos curvos que permiten una mayor continuidad visual. En todos los casos, las reglas de coincidencia (matching rules) impiden una colocación arbitraria de las piezas, donde se forza una estructura cuasiperiódica global a partir de restricciones locales.

Figura 5. Pentágono donde se puede observar patrones del P2



Nota. La figura 5 muestra una construcción geométrica realizada en GeoGebra, basada en polígonos regulares y subdivisiones angulares características de los teselados de Penrose. En la imagen se representan triángulos y pentágonos unidos mediante ángulos de 36°, 72°, 108° y 144°, los cuales son fundamentales en la simetría no periódica que caracteriza a dichos teselados. Este diseño constituye un punto de partida para analizar la estructura matemática subyacente en los mosaicos aperiódicos y su potencial aplicación en contextos educativos y de investigación en física matemática.

Figura 6. Soles y cometas P2

Nota: La figura 6 presenta dos construcciones geométricas elaboradas con materiales didácticos en foamy, unidas mediante broches metálicos que permiten la movilidad de sus partes. La primera figura, en color rosa, corresponde a un decágono regular formado por la disposición de diez triángulos isósceles congruentes. La segunda figura, en color amarillo, representa una estrella pentagonal o pentagrama, construida igualmente a partir de triángulos isósceles que se articulan en un vértice común.

Estas construcciones permiten visualizar propiedades geométricas relacionadas con la simetría radial y la división angular del círculo en fracciones de 36° y 72°, las cuales son fundamentales en el estudio de polígonos regulares, estrellas pitagóricas y en los teselados no periódicos como los de Penrose. Asimismo, constituyen un recurso didáctico útil para la enseñanza de la geometría en contextos escolares, pues favorecen la manipulación, la exploración de invariantes y la comprensión de conceptos de ángulos, congruencia y simetría.

Figura 6. Media cometa

Figura: Generación 0 o Axioma en la primera figura y generación 1 en la segunda

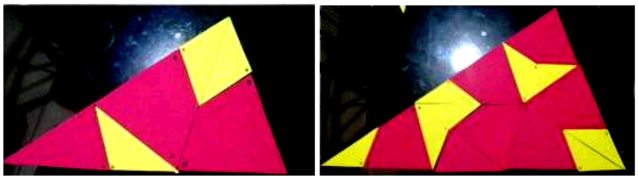
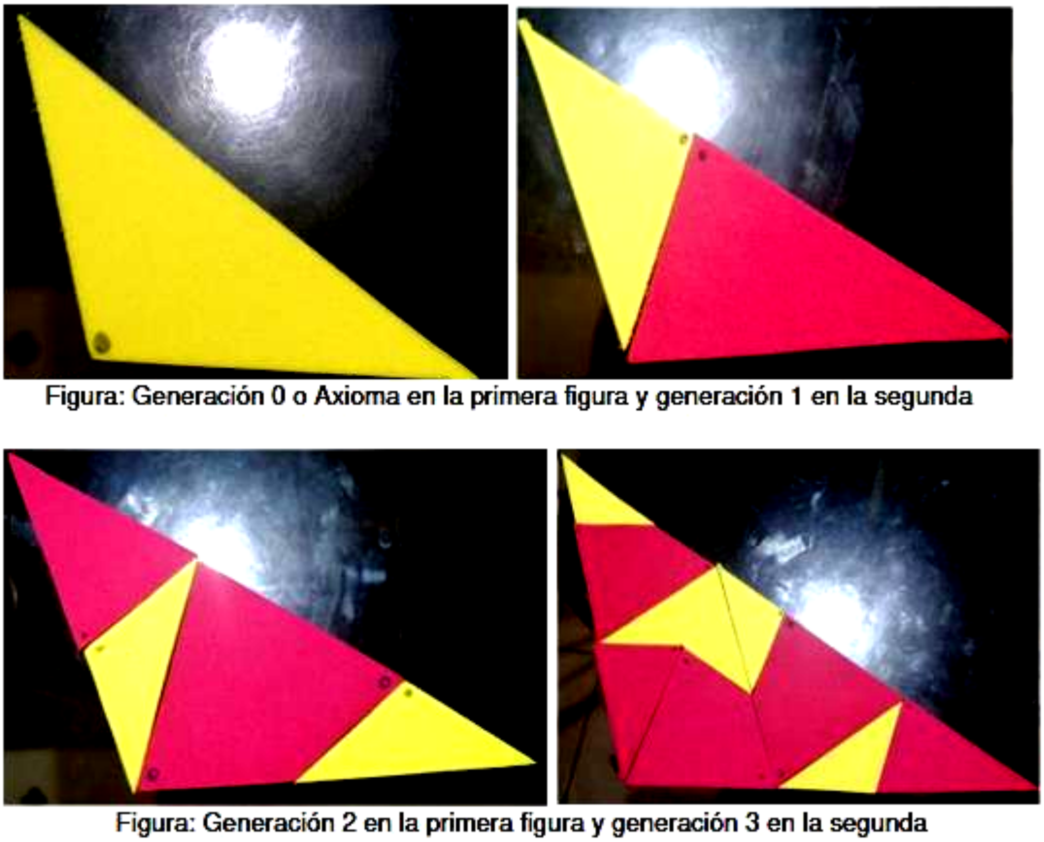


Figura: Generación 2 en la primera figura y generación 3 en la segunda

Nota. La secuencia de imágenes ilustra el proceso de construcción iterativa de la figura de media cometa, utilizada en los teselados de Penrose. En la primera figura (arriba a la izquierda) se observa la generación 0 o axioma, representada por un triángulo isósceles de color rojo. En la segunda (arriba a la derecha) aparece la generación 1, en la que se introduce un triángulo amarillo más pequeño, donde se mantiene la proporción áurea característica de este tipo de subdivisiones.

En la parte inferior, la tercera figura (abajo a la izquierda) muestra la generación 2, donde la figura inicial comienza a descomponerse en configuraciones más complejas, donde se incorpora varios triángulos amarillos que generan nuevas relaciones angulares. Finalmente, en la cuarta imagen (abajo a la derecha) se observa la generación 3, en la que la composición adquiere mayor riqueza estructural y simétrica, acercándose al patrón aperiódico de los teselados de Penrose. Este proceso evidencia cómo, a partir de un axioma simple, la aplicación de reglas de sustitución geométrica permite construir configuraciones crecientemente complejas, vinculadas al estudio de los sistemas dinámicos, la geometría no periódica y la proporción áurea. Además, constituye un recurso didáctico para la enseñanza de la recursividad y la autosimilitud, conceptos esenciales tanto en matemáticas puras como en física matemática.

Figura 7. Media flecha



Nota. Las imágenes presentan el proceso de construcción por generaciones de la figura dardo utilizada en los teselados de Penrose. En la primera parte (arriba), se observa el axioma o generación 0 (triángulo amarillo isósceles) y la generación 1, en la cual se añade un triángulo rojo que respeta las proporciones establecidas por la razón áurea.

En la segunda parte (abajo), la figura de la izquierda muestra la generación 2, donde la descomposición comienza a evidenciar un patrón repetitivo con triángulos amarillos y rojos en disposición alterna. La figura de la derecha corresponde a la generación 3, donde se conforma un entramado más complejo y armónico, que empieza a reflejar la estructura aperiódica propia de los teselados de Penrose. Este procedimiento ilustra cómo, a través de reglas de sustitución recursivas, es posible pasar de un axioma elemental a configuraciones de creciente complejidad que mantienen invariantes geométricos. La secuencia no solo revela la autosimilitud fractal del patrón, sino también la importancia de la proporción áurea y de la descomposición angular en múltiplos de 36° y 72°. Además, constituye un recurso didáctico valioso para la enseñanza de geometría, recursividad y simetría no periódica, con aplicaciones tanto en matemáticas como en física matemática y teoría de sistemas dinámicos.

Figura 8. Estrellas

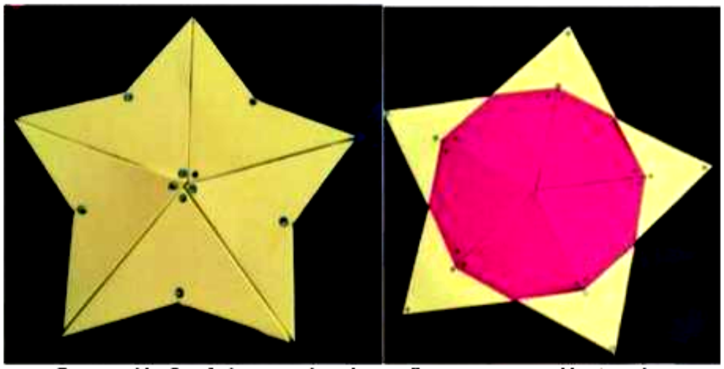


Figura: Generación 0 o Axioma en la primera figura y generación 1 en la segunda

Figura: Generación 2 en la primera figura y generación 3 en la segunda

Nota. La secuencia de imágenes representa el proceso de construcción iterativa de la estrella pentagonal como parte de los teselados de Penrose. En la primera parte (arriba), la figura de la izquierda corresponde a la generación 0 o axioma, donde se observa una estrella amarilla de cinco puntas construida a partir de triángulos isósceles congruentes. A la derecha aparece la generación 1, en la cual se introduce un decágono regular de color rosa en el interior de la estrella, donde se mantiene la simetría pentagonal y así poder evidenciar la relación con la proporción áurea.

En la segunda parte (abajo), la figura de la izquierda muestra la generación 2, en la que la estructura se amplía con nuevas subdivisiones en colores amarillo y rosa, donde se forma un entramado estelar más complejo. La figura de la derecha corresponde a la generación 3, donde el patrón alcanza un mayor nivel de complejidad y armonía, donde se destaca la aparición de estructuras concéntricas que refuerzan la simetría radial de orden cinco. Este proceso evidencia la recursividad geométrica y la autosimilitud propias de los teselados aperiódicos. A partir de un axioma simple (estrella inicial), se generan configuraciones cada vez más elaboradas que reflejan la riqueza matemática de la geometría no periódica. Además, estas construcciones constituyen un recurso didáctico valioso para la enseñanza de conceptos de simetría, fractalidad y proporción áurea, así como para la exploración de aplicaciones en matemáticas puras, física matemática y teoría de sistemas dinámicos.

Figura 9. Sol

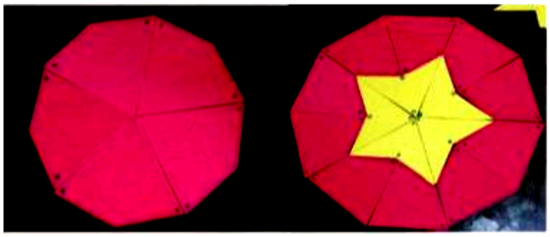


Figura: Generación 0 o Axioma en la primera figura y generación 1 en la segunda

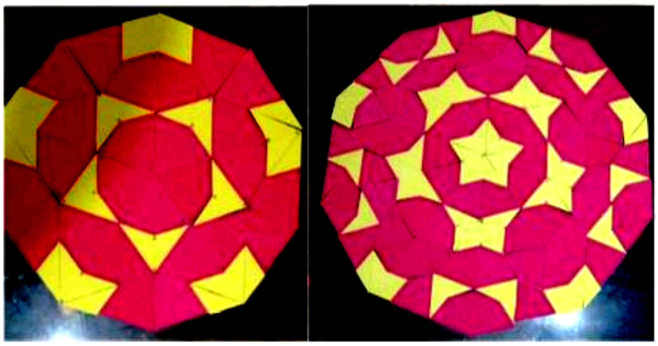


Figura: Generación 2 en la primera figura y generación 3 en la segunda

Nota. Las imágenes muestran el proceso de generación progresiva de un patrón derivado del decágono regular, utilizado como axioma en la construcción de teselados de Penrose. En la parte superior, la figura de la izquierda corresponde a la generación 0 o axioma, representada por un decágono rosa construido con triángulos isósceles congruentes. La figura de la derecha muestra la generación 1, donde se incorpora una estrella amarilla de diez puntas inscrita en el interior del decágono, donde se destaca la simetría de orden diez y la relación con la razón áurea en las proporciones de los lados.

En la parte inferior, la figura de la izquierda representa la generación 2, en la que aparecen subdivisiones adicionales con triángulos amarillos y rosas, donde se configura un patrón radial más complejo. Finalmente, la figura de la derecha corresponde a la generación 3, donde el diseño alcanza una mayor densidad estructural, y así se puede mostrar estrellas concéntricas y simetrías rotacionales que evocan la dinámica de los teselados no periódicos de Penrose. Este proceso ilustra cómo, a partir de un axioma elemental, la aplicación de reglas de sustitución recursiva permite obtener configuraciones crecientemente complejas, donde se conserva invariantes geométricas como la simetría y la proporción áurea. Además, constituye un recurso didáctico de gran valor para el estudio de la geometría de polígonos regulares, la recursividad y los sistemas dinámicos, con aplicaciones tanto en matemáticas puras como en física matemática.

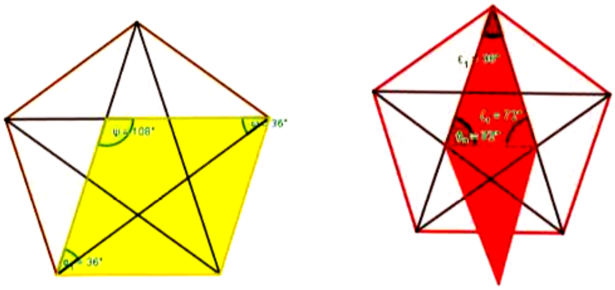
Una propiedad notable de los teselados de Penrose es su simetría de orden cinco, la cual no es compatible con la periodicidad euclidiana del plano. Esta característica los hace especialmente aptos para modelar cuasicristales, estructuras descubiertas empíricamente por

Dan Shechtman en 1982, cuya organización atómica muestra patrones de difracción con picos agudos —propios de estructuras ordenadas—, pero sin periodicidad traslacional (Shechtman et al., 1984). El estudio teórico previo de Penrose proporcionó así una base geométrica sólida para interpretar este fenómeno físico, donde permite demostrar que el orden cuasiperiódico no es una anomalía, sino una alternativa estructural viable a la periodicidad cristalina clásica (Levine & Steinhardt, 1984).

Desde la perspectiva de la física matemática, los teselados de Penrose han sido estudiados mediante herramientas de teoría de grupos, álgebra conmutativa, teoría de Galois y análisis armónico, dada su relación con el grupo de simetría icosaédrica y con sistemas dinámicos no lineales. Además, en términos pedagógicos, ofrecen un campo fértil para explorar conexiones entre geometría, número áureo, fractales, invariancia y transformaciones no convencionales, lo cual potencia una formación matemática transversal e interdisciplinar.

El uso de estos patrones en la enseñanza permite además desarrollar competencias semióticas superiores: el estudiante transita entre representaciones visuales, simbólicas y estructurales, y construye significados que articulan la intuición geométrica con el formalismo matemático y las aplicaciones físicas contemporáneas.

Figura 10. Representación del P3



Nota. Las imágenes presentan la descomposición geométrica de un pentágono regular, se puede evidenciar las bases de las figuras denominadas cometa y dardo, fundamentales en los teselados de Penrose.

En la figura de la izquierda se observa un pentágono en el que se han trazado sus diagonales, donde se destaca en amarillo un triángulo isósceles con ángulos de 36°, 36° y 108°. Esta construcción permite evidenciar cómo el pentágono regular se relaciona con la razón áurea a través de sus subdivisiones angulares y proporcionales.

En la figura de la derecha se ilustra otra subdivisión del pentágono, en la que aparecen triángulos isósceles con ángulos de 36°, 72° y 72°. Al colorear una de estas configuraciones en rojo, se forma la figura dardo, que junto con la cometa constituye la base del teselado no periódico de Penrose. Estas representaciones permiten comprender la transición desde polígonos regulares a configuraciones más complejas mediante la descomposición en triángulos áureos. Además, ofrecen un recurso didáctico valioso para el estudio de la geometría euclidiana, la simetría y la proporción áurea, así como para la exploración de aplicaciones en teselaciones, sistemas dinámicos y física matemática.

4.3. Implicaciones didácticas y epistemológicas desde el Enfoque Ontosemiótico

La enseñanza de los teselados periódicos, aperiódicos y de Penrose se llevó a cabo con estudiantes de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física, donde se aplica como marco teórico el Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, desarrollado por Juan D. Godino y colaboradores (Godino, Batanero & Font, 2007; Font, Godino & Gallardo, 2013). Este enfoque sostiene que el conocimiento matemático no se reduce a objetos abstractos independientes del sujeto, sino que emerge como una red de prácticas, significados y representaciones inscritas en contextos sociales, cognitivos y semióticos.

Desde esta perspectiva, los teselados fueron analizados no únicamente como configuraciones geométricas, sino como objetos epistémicos complejos, cuya apropiación exige comprender la articulación entre su génesis histórica, sus propiedades formales y su funcionalidad representacional. Así, el EOS permitió una reconstrucción didáctica rigurosa de estos objetos matemáticos, dando lugar a identificar no solo su estructura lógica, sino los sistemas de prácticas institucionales y personales que les dan sentido dentro del aula.

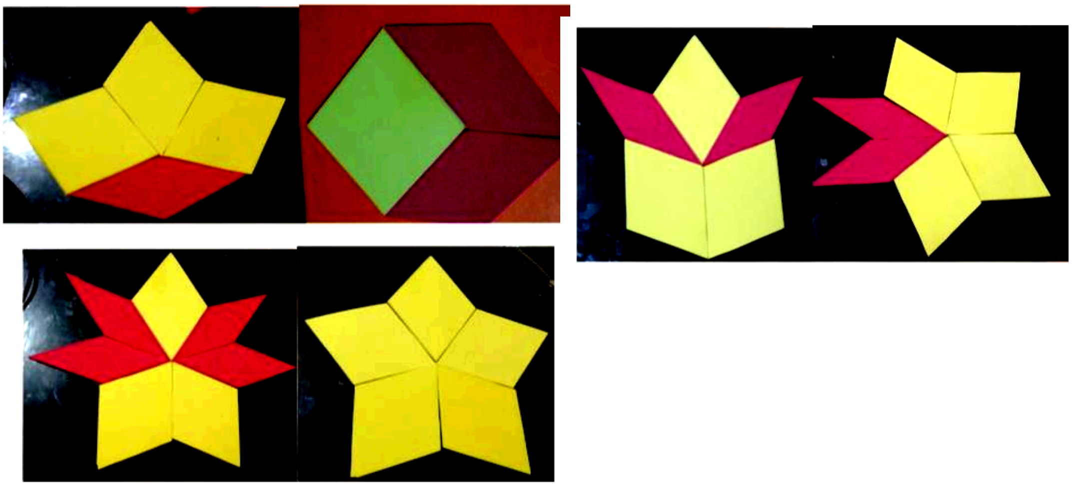
En el plano pragmático, se configuró un sistema de prácticas matemáticas en torno a tareas de análisis, clasificación, construcción y comparación de patrones teselados, guiado por criterios semióticos como la invariancia, la simetría, la cobertura sin solapamientos y las reglas de apareamiento. Estas prácticas fueron mediadas por registros de representación variados —geométrico, simbólico, verbal y dinámico (por medio de simulaciones digitales)— que permitieron a los estudiantes desarrollar procesos de conversión y tratamiento entre representaciones (Duval, 2006), condición fundamental para la comprensión profunda de los conceptos geométricos involucrados.

Desde el plano cognitivo, se observaron procesos de reorganización conceptual especialmente relevantes al introducir los teselados aperiódicos y, en particular, los de Penrose. Su carácter cuasiperiódico desafió las intuiciones geométricas previas de los estudiantes, basadas en simetrías convencionales, y propició la emergencia de conflictos semióticos (Godino & Batanero, 1994) que fueron abordados a través de configuraciones didácticas reflexivas, dando lugar a la construcción de nuevos significados compartidos y se promueva la argumentación matemática, el uso de contraejemplos y la validación formal.

En el plano institucional, esta experiencia permitió analizar cómo se articulan los significados personales construidos por los estudiantes con los significados institucionales propuestos por el currículum, y cómo el docente actúa como mediador entre estos sistemas de prácticas. Se hizo énfasis en la formación de futuros docentes capaces de interpretar situaciones matemáticas no estándar, de integrar saberes geométricos con saberes didácticos, y de reflexionar sobre su propia actividad como sujetos de conocimiento matemático.

En suma, esta experiencia reafirma el potencial del Enfoque Ontosemiótico para interpretar, diseñar e intervenir en procesos de enseñanza-aprendizaje complejos desde una mirada epistemológica, cognitiva, semiótica e institucional. Al trabajar con teselados desde una lógica de progresión conceptual —de lo periódico a lo aperiódico— se favoreció una comprensión más rica, crítica y articulada de la geometría como disciplina viva, conectada con la física contemporánea y con las prácticas educativas reflexivas.

Figura 11. Representación del P3



Nota. Las imágenes muestran diferentes configuraciones obtenidas con la disposición de losetas tipo cometa y dardo (P3 de Penrose) construidas en material didáctico (foamy). En la primera serie (arriba), la figura de la izquierda presenta una disposición de cinco cometas amarillas que conforman una estrella pentagonal incompleta, con un dardo rojo en la base. La figura de la derecha muestra un rombo verde inscrito dentro de un pentágono formado por losetas rojas, donde se permite ilustrar la relación entre las formas básicas del teselado.

En la segunda serie (abajo), la figura de la izquierda evidencia una estrella con alternancia de cometas amarillas y dardos rojos, mientras que la figura de la derecha representa una estrella amarilla de cinco puntas ensamblada únicamente con cometas. En la tercera serie (última fila), la figura de la izquierda muestra una composición en la que dos dardos rojos se integran con cometas amarillas donde se forma un diseño semejante a una flor, mientras que la figura de la derecha presenta una configuración en la que dardos y cometas se entrelazan para producir una estructura estelar abierta.

Estas construcciones representan ejemplos del teselado P3 de Penrose, caracterizado por la combinación no periódica de cometas y dardos bajo reglas de ensamblaje que garantizan la no repetición traslacional y la presencia de simetrías locales de orden cinco. Además, estas representaciones físicas facilitan la comprensión de la geometría aperiódica, la simetría pentagonal y la relación con la proporción áurea, constituyendo un recurso pedagógico para la enseñanza de teselaciones y de la matemática vinculada con la cristalografía cuasi-periódica.

4.4 Resultados de los estudiantes

La experiencia de trabajo con teselaciones no solo permitió que los estudiantes ejercitaran habilidades de construcción geométrica, sino que además abrió un espacio para la reflexión epistemológica y didáctica sobre el papel de la matemática en la comprensión del mundo. Desde el punto de vista educativo-matemático, los resultados se pueden interpretar como una manifestación de cómo la geometría, a menudo reducida a un conjunto de definiciones y teoremas abstractos, cobra sentido cuando se inserta en contextos de exploración y creación.

Uno de los aportes más relevantes observados fue la activación del pensamiento geométrico en distintos niveles de abstracción. Los estudiantes transitaron de un nivel figural, en el cual reconocían visualmente patrones de mosaicos, a un nivel conceptual, donde analizaron las condiciones angulares y de simetría que permiten la repetición en el plano. Esta transición ilustra el desarrollo de lo que Duval (1999) denomina *coordinación de registros semióticos*, ya que los estudiantes lograron pasar de la representación gráfica a la expresión simbólica y verbal de las propiedades geométricas.

Asimismo, la experiencia mostró la importancia de la argumentación matemática en un ambiente educativo. Los estudiantes no se conformaron con elaborar mosaicos visualmente atractivos; buscaron justificar por qué ciertas figuras cubren el plano y otras no, donde se ejercita así la dimensión deductiva propia de la matemática. Este aspecto resulta fundamental en la formación docente, pues coloca a los futuros maestros en la posición de constructores de conocimiento, antes que simples transmisores de fórmulas.

En el caso particular de los teselados aperiódicos de Penrose, la dificultad inicial fue superada gracias al trabajo colaborativo y la mediación docente, lo que evidencia que la construcción colectiva del conocimiento desempeña un papel decisivo en la comprensión de ideas complejas. Desde la perspectiva educativa, este hallazgo demuestra que los temas avanzados de la matemática pueden ser abordados exitosamente en el aula si se plantean como problemas abiertos que despierten curiosidad y permitan múltiples caminos de exploración.

Por otra parte, la actividad generó un enlace interdisciplinario que enriquece la visión educativa de la matemática. Varios estudiantes asociaron las teselaciones con el arte islámico y mesoamericano, se reconoce que la matemática se entrelaza con la cultura y la historia. Este reconocimiento rompe con la visión reduccionista de la matemática como disciplina aislada y la muestra como un lenguaje de diálogo entre la ciencia, el arte y la sociedad. En términos didácticos, esta transversalidad constituye un recurso valioso para promover la motivación y el sentido de pertenencia de los estudiantes hacia la matemática.

Finalmente, los resultados obtenidos permiten destacar que la experiencia con teselaciones potenció tres dimensiones educativas clave:

1. **La dimensión cognitiva**, al favorecer el razonamiento abstracto y la deducción lógica.
2. **La dimensión semiótica**, al exigir la traducción entre registros visuales, verbales y simbólicos.
3. **La dimensión formativa**, al fortalecer la visión de la matemática como una disciplina cultural y científica, viva y en constante diálogo con otros campos.

En conclusión, la profundización de estos resultados evidencia que las teselaciones, más allá de ser un recurso geométrico, se constituyen en una estrategia didáctica poderosa para el desarrollo del pensamiento matemático, la creatividad y la apreciación cultural de las matemáticas. Esta experiencia muestra que, cuando se integran actividades de exploración, argumentación y conexión interdisciplinaria, la enseñanza de la geometría se transforma en un proceso significativo y humanizante, capaz de formar docentes con visión crítica, rigurosa y sensible a la riqueza de la matemática en contextos educativos y sociales.

5. CONCLUSIONES

El recorrido investigativo en torno a las teselaciones ha permitido constatar que estas configuraciones geométricas no solo poseen un atractivo estético y una profunda riqueza matemática, sino que además constituyen un recurso pedagógico de primer orden en la formación de competencias matemáticas escolares y en la preparación de futuros docentes. La experiencia demostró que el estudio de patrones, simetrías y estructuras aperiódicas abre un campo fértil para que los estudiantes desarrollen habilidades de razonamiento lógico, abstracción, argumentación formal y capacidad de conjeturar, aspectos que resultan esenciales para una enseñanza de la matemática con sentido y trascendencia.

En el plano educativo, las teselaciones ofrecen un escenario privilegiado para articular la teoría matemática con su dimensión cultural e histórica. Desde los mosaicos islámicos hasta los aportes de Penrose y Shechtman, se evidencia cómo las configuraciones geométricas trascienden los límites de lo puramente matemático para integrarse a la historia del arte, la física de los materiales y la exploración científica contemporánea. Este diálogo interdisciplinar otorga a la enseñanza un carácter más integral, en el que los estudiantes reconocen que la matemática no es una disciplina aislada, sino un lenguaje universal que se entrelaza con múltiples formas de conocimiento y expresión.

Asimismo, la investigación reveló que el uso de las teselaciones como recurso didáctico potencia la visualización matemática y facilita el tránsito entre representaciones semióticas diversas —gráficas, simbólicas, geométricas y algebraicas—, lo cual fortalece la comprensión profunda de los conceptos y evita que el aprendizaje quede limitado a la memorización mecánica de procedimientos. Se constató, además, que el trabajo con teselaciones fomenta la autonomía intelectual y la creatividad, al situar al estudiante en un rol activo de explorador, constructor y comunicador de ideas matemáticas.

En la formación de docentes, este tipo de experiencias cobra especial relevancia: al apropiarse de un recurso con tanto potencial explicativo y motivador, los futuros educadores adquieren no solo herramientas metodológicas, sino también una visión renovada de la matemática como disciplina viva, dinámica y vinculada con la cultura. De este modo, la investigación refuerza la necesidad de integrar propuestas innovadoras que promuevan en los docentes en formación la capacidad de diseñar ambientes de aprendizaje significativos, sensibles a la diversidad de sus estudiantes y orientados a la construcción de un pensamiento matemático crítico.

El estudio de las teselaciones trasciende la esfera del descubrimiento geométrico para consolidarse como una estrategia educativa-matemática de alto valor formativo. Más allá de la belleza de sus patrones, las teselaciones permiten ejercitar el razonamiento abstracto, tender puentes entre disciplinas, despertar el interés por la investigación y formar sujetos capaces de comprender la matemática como un lenguaje universal que armoniza el orden, la creatividad y la capacidad humana de dar sentido al mundo. La presente investigación, por tanto, reafirma que el desafío de la educación matemática contemporánea no es únicamente transmitir conocimientos, sino ofrecer experiencias formativas que logren transformar la manera en que los estudiantes se apropian, resignifican y proyectan la matemática en su vida académica, cultural y social.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

JRC desarrolló todo, con la participación de los alumnos de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física, en la asignatura de Didáctica de la Geometría y trigonometría.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Se debe colocar un texto similar al siguiente: Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la JRC previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco profundamente a la Universidad de San Carlos de Guatemala y, en particular, a la Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media (EFPEM), por haber brindado el espacio académico, los recursos institucionales y las condiciones formativas necesarias para la realización de esta investigación en el marco de las prácticas académicas del curso de Didáctica de la Geometría y la Trigonometría. Su respaldo continuo constituye un pilar fundamental para el desarrollo del pensamiento crítico, la innovación pedagógica y el fortalecimiento de la formación docente en Guatemala.

De igual manera, expreso mi más sincero reconocimiento a los estudiantes de la Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática y la Física, quienes participaron activamente en las experiencias didácticas propuestas. Su entusiasmo, compromiso y disposición al diálogo fueron decisivos para alcanzar los objetivos planteados en este estudio. Cada aporte, reflexión y construcción colectiva de conocimiento fortaleció el sentido formativo e investigativo de esta propuesta.

Asimismo, deseo rendir un especial homenaje y manifestar mi admiración al **MSc. Luis Enrique Solórzano**, quien ha sido para mí no solo un formador riguroso y generoso, sino también un mentor inspirador. Su guía intelectual, su sensibilidad didáctica y su profunda vocación académica han dejado una huella indeleble en mi trayectoria profesional. Le admiro

y aprecio sinceramente por todo lo compartido, enseñado y sembrado en mí como educador e investigador.

5. REFERENCIAS

Abas, S. J., & Salman, A. S. (1995). *Symmetries of Islamic geometric patterns*. World Scientific.

Berger, R. (1966). The undecidability of the domino problem. *Memoirs of the American Mathematical Society*, (66). https://doi.org/10.1090/memo/0066

Bonner, J. (2017). *Islamic geometric patterns: Their historical development and traditional methods of construction*. Springer.

Brading, K., & Castellani, E. (Eds.). (2003). *Symmetries in physics: Philosophical reflections*. Cambridge University Press. https://arxiv.org/pdf/quant-ph/0301097

Conway, J. H., Burgiel, H., & Goodman-Strauss, C. (2008). *The symmetries of things*. A K Peters.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131. https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z

Dürer, A. (1977). *Underweysung der Messung* (1525). (Edición facsímil). Dover Publications.

Euclides. (1956). *Los Elementos* (J. L. Heiberg, Ed. y trad.) (Obra original escrita ca. 300 a.C.). Dover Publications.

Field, J. V. (2005). *The invention of infinity: Mathematics and art in the Renaissance*. Oxford University Press.

Font, V., Godino, J. D., & Gallardo, J. (2013). The onto-semiotic approach. *For the Learning of Mathematics*, 33(1), 14–19. https://flm-journal.org/Articles/33C1FD9A6C1F30FB73D19A5BC9963D.pdf

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). *Enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos*. Universidad de Granada. https://www.ugr.es/~jgodino/eos/sintesis_EOS_24agosto14.pdf

Grünbaum, B., & Shephard, G. C. (1987). *Tilings and patterns*. W. H. Freeman.

Kaplan, C. S., & Salesin, D. H. (2000). Islamic star patterns in absolute geometry. *ACM Transactions on Graphics (TOG)*, 23(2), 97–119.

Levine, D., & Steinhardt, P. J. (1984). Quasicrystals: A new class of ordered structures. *Physical Review Letters*, 53(26), 2477–2480. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.53.2477

Ling, R. (1998). *Ancient mosaics*. Princeton University Press.

Lu, P. J., & Steinhardt, P. J. (2007). Decagonal and quasi-crystalline tilings in medieval Islamic architecture. *Science*, 315(5815), 1106–1110. https://doi.org/10.1126/science.1135491

Méndez, E. (2022). El pensamiento visual como clave en la comprensión de estructuras geométricas. *Revista Científica del SEP*, 5(1), 29–36.

O'Kane, B. (2016). *The treasures of Islamic art in the museums of Cairo*. The American University in Cairo Press.

Pedoe, D. (1988). *Geometry and the visual arts*. Dover Publications.

Penrose, R. (1974). The role of aesthetics in pure and applied mathematical research. *Bulletin of the Institute of Mathematics and Its Applications*, 10, 266–271.

Penrose, R. (1979). Pentaplexity: A class of non-periodic tilings of the plane. *Mathematical Intelligencer*, 2(1), 32–37.

Ruiz Castillo, J. C. (2025). *Aplicación del Enfoque Ontosemiótico y la incidencia en el estudio de la conjetura de Collatz desde las ciencias de la complejidad* (Tesis doctoral). Universidad de San Carlos de Guatemala. https://biblos.usac.edu.gt/api/filesystem/v1/files/fe3d0ff7-8d1d-4772-818d-8af0336b1308

Ruiz Castillo, J. C. (2025b). El Grupo Diédrico como Objeto Epistémico y Semiótico: Implementación del Enfoque Ontosemiótico en Contextos de Formación Docente. *Ibero Ciencias - Revista Científica y Académica*, 4(2), 107–133. https://doi.org/10.63371/ic.v4.n2.a58

Ruiz Castillo, J. C. (2025c). Aplicación de las representaciones semióticas en cálculo multivariable mediante la construcción de una montaña rusa física y virtual. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 18(2). https://doi.org/10.15517/5shh5h27

Schattschneider, D. (1978). Tiling the plane with congruent pentagons. *Mathematics Magazine*, 51(1), 29–44.

Shechtman, D., Blech, I., Gratias, D., & Cahn, J. W. (1984). Metallic phase with long-range orientational order and no translational symmetry. *Physical Review Letters*, 53(20), 1951–1953. https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.53.1951

Shechtman, D. (2013). *The discovery of quasicrystals: A personal perspective*. World Scientific.

Smith, C. (1958). The geometrical patterns of the Alhambra. *Leonardo*, 1(2), 99–105.

The Nobel Foundation. (2011). *The Nobel Prize in Chemistry 2011 – Press Release*. https://www.nobelprize.org/prizes/chemistry/2011/press-release/

Wang, H. (1961). Proving theorems by pattern recognition II. *Bell System Technical Journal*, 40(1), 1–41.

Wells, D. (1991). *The Penguin dictionary of curious and interesting geometry*. Penguin Books.

Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 19 · N°. 1 · 2026
179-202
Recibido: 27/10/2025
Aprobado: 03/12/2025

Artículos de investigación

ANÁLISIS DE ESTRATEGIAS DE RESOLUCIÓN EN UNA EXPERIENCIA DE MODELACIÓN MATEMÁTICA ESCOLAR SOBRE CONSUMO Y PRODUCCIÓN SOSTENIBLES

ANÁLISE DE ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO EM UMA EXPERIÊNCIA DE MODELAGEM MATEMÁTICA ESCOLAR SOBRE CONSUMO E PRODUÇÃO SUSTENTÁVEIS

Santiago Giovanetti[1]

ORCID iD: https://orcid.org/0009-0003-6669-5247

Susana Riquelme[2]

ORCID iD: https://orcid.org/0009-0007-7280-682X

Roberto Vilches[3]

ORCID iD: https://orcid.org/0009-0002-1942-9918

Iván Pérez Vera[4]

ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-2636-652

RESUMEN

Esta investigación analiza las estrategias de resolución desarrolladas por estudiantes durante una experiencia de modelación matemática orientada al consumo y producción sostenibles (ODS 12). El objetivo fue comprender cómo los estudiantes movilizan sus saberes matemáticos para analizar y

[1] Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación UMCE, Santiago, Chile, Correo electrónico: santiago.giovanetti2021@umce.cl

[2] Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación UMCE, Santiago, Chile, Correo electrónico: susana.riquelme2021@umce.cl

[3] Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación UMCE, Santiago, Chile, Correo electrónico: roberto.vilches2021@umce.cl

[4] Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación UMCE, Santiago, Chile, Correo electrónico: ivan.perez@umce.cl

cuestionar el impacto ambiental de la industria del Fast-Fashion, articulando la matemática con problemáticas sociales y ambientales cercanas a su realidad. El estudio se sustenta en un enfoque teórico sociocultural, donde el aprendizaje se concibe como una práctica situada y mediada culturalmente (Vygotsky, 1979; Wertsch, 1991). La modelación matemática escolar se entiende como una herramienta que resignifica el conocimiento al transformar los objetos matemáticos en saberes con sentido contextual. Asimismo, la interdisciplina, en diálogo con la Educación Ambiental, posibilita la comprensión de fenómenos complejos y la formación de una ciudadanía crítica y responsable. Metodológicamente, se adoptó un enfoque cualitativo mediante estudio de casos, con una situación de aprendizaje estructurada en cinco fases (Balda, 2022) e implementada con treinta estudiantes de educación secundaria. La recolección de datos se basó en los productos matemáticos generados y la observación directa de las interacciones grupales. Los resultados evidencian que los estudiantes, a través del trabajo colaborativo, construyen modelos significativos sustentados en el razonamiento proporcional, resignificando la matemática escolar como una herramienta para interpretar, evaluar e intervenir en fenómenos socioambientales reales.

Palabras clave: Modelación matemática escolar, Educación sociocultural, Educación ambiental, Pensamiento proporcional, Consumo y producción sostenibles.

RESUMO

Esta investigação analisa as estratégias de resolução desenvolvidas por estudantes durante uma experiência de modelagem matemática orientada ao consumo e à produção sustentáveis (ODS 12). O objetivo foi compreender como os estudantes mobilizam seus saberes matemáticos para analisar e problematizar o impacto ambiental da indústria do Fast-Fashion, articulando a matemática com problemáticas sociais e ambientais próximas de sua realidade. O estudo fundamenta-se em um enfoque teórico sociocultural, no qual a aprendizagem é concebida como prática situada e mediada culturalmente (Vygotsky, 1979; Wertsch, 1991). A modelagem matemática escolar é compreendida como uma ferramenta que ressignifica o conhecimento, ao transformar objetos matemáticos em saberes com sentido contextual. Além disso, a interdisciplinaridade, em diálogo com a Educação Ambiental, possibilita a compreensão de fenômenos complexos e a formação de uma cidadania crítica e responsável. Metodologicamente, adotou-se um enfoque qualitativo por meio de estudo de caso, com uma situação de aprendizagem estruturada em cinco fases (Balda, 2022) e implementada com trinta estudantes do ensino médio. A coleta de dados baseou-se nos produtos matemáticos gerados e na observação direta das interações grupais. Os resultados evidenciam que os estudantes, por meio do trabalho colaborativo, constroem modelos significativos sustentados no raciocínio proporcional, ressignificando a matemática escolar como ferramenta para interpretar, avaliar e intervir em fenômenos socioambientais reais.

Palavras-chave: Modelagem matemática escolar, Educação sociocultural, Educação ambiental, Pensamento proporcional, Consumo e produção sustentáveis.

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Matemática y ciudadanía

La formación ciudadana constituye un eje esencial de la educación respetuosa e inclusiva en las comunidades escolares al promover la convivencia democrática (Ministerio de Educación de Chile, 2023). En Chile, este principio se consolida con la Ley N.º 20.911, que crea el Plan de Formación Ciudadana para los establecimientos reconocidos por el Estado. Dicha ley exige incorporar acciones que fortalezcan la comprensión de la democracia, el ejercicio responsable de derechos y deberes, la participación crítica, la valoración de la diversidad y el compromiso con el entorno social y natural (Ministerio de Educación de Chile, 2016). Así, el sistema educativo asume la tarea de formar ciudadanos activos y conscientes de su papel en una sociedad democrática y sostenible.

Integrar estos propósitos en la enseñanza de las matemáticas resulta indispensable, pues las ciencias basadas en la matemática cumplen un rol clave en la generación de conocimiento y en la formación de ciudadanos críticos (Flores y Pérez, 2023). Sin embargo, persisten enfoques tradicionales que reducen la matemática a la aplicación mecánica de procedimientos, desconectándola de las problemáticas reales del estudiantado (Andrade y Guzmán, 2018).

Por ello, se requieren experiencias de aprendizaje contextualizadas que vinculen la matemática con la realidad social y fomenten competencias con sentido ciudadano (Alvis-Puentes et al., 2019). Los ambientes de aprendizaje deben propiciar la reflexión crítica sobre fenómenos sociales, reconociendo que las matemáticas forman parte de la cultura tecnológica y de las estructuras sociales y políticas (Skovsmose, 2000). Integrar la formación ciudadana en la enseñanza matemática permite desarrollar pensamiento crítico, sostenibilidad y participación responsable.

1.2 Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS)

El planeta enfrenta hoy una crisis climática sin precedentes, manifestada en fenómenos extremos como olas de calor, inundaciones y sequías que afectan ecosistemas y comunidades humanas (IPCC, 2023). La preocupación ambiental comenzó a consolidarse en la segunda mitad del siglo XX (Manzanares, 2020, p. 74). En 1987, el *Informe Brundtland de la Comisión Mundial sobre Medio Ambiente y Desarrollo* introdujo el concepto de desarrollo sostenible, entendido como el satisfacer las necesidades del presente sin comprometer las de las generaciones futuras (Organización de las Naciones Unidas, 1987).

Posteriormente, en el 2000, se aprobó la Declaración del Milenio que estableció los Objetivos de Desarrollo del Milenio (ODM), orientados a transformar las pautas insostenibles de desarrollo. En 2015 fueron reemplazados por los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS), que constituyen un plan global para erradicar la pobreza, proteger el planeta y garantizar una prosperidad equitativa (Organización de las Naciones Unidas, 2015).

Entre ellos, el ODS 12, "Producción y Consumo Responsables", destaca por promover la eficiencia en el uso de recursos y la reducción de residuos, impulsando estilos de vida sostenibles. Los ODS representan un marco internacional que orienta políticas y prácticas hacia la sostenibilidad, situando la protección del medio ambiente como un compromiso ético, político y social ineludible para los Estados y las comunidades (Organización de las Naciones Unidas, 2015).

En este contexto y en relación con los temas tratados en la presente investigación, resulta imprescindible considerar el papel del *Fast-Fashion* como uno de los fenómenos contemporáneos que más tensionan el cumplimiento del ODS 12. Este modelo de moda rápida "se basa en la reproducción acelerada de colecciones de alta costura mediante procesos de producción de bajo costo, lo que permite ofrecer prendas a precios significativamente reducidos" (Cervantes et al., 2025, p. 147). En esencia, el *Fast-Fashion* implica la fabricación masiva de ropa en función de tendencias cambiantes y de una innovación constantemente inducida, lo que introduce millones de prendas en el mercado y promueve en los consumidores la renovación acelerada de su vestuario (Greenpeace México, 2021).

1.3 Educación Ambiental

En el contexto de la crisis climática actual, la Educación Ambiental (EA) se reconoce como un proceso formativo esencial que trasciende la transmisión de información ecológica, orientándose al desarrollo de una ciudadanía crítica y activa. Su propósito es dotar a los estudiantes de competencias para comprender la complejidad de las problemáticas socioambientales e intervenir de manera informada en su entorno, tal como lo plantean la Declaración de Tbilisi (UNESCO, 1977) y la Carta de Belgrado (PNUMA, 1975). Estas bases promueven el pensamiento crítico frente a modelos de producción y consumo insostenibles (como el Fast-Fashion), la capacidad de analizar información y la participación en la búsqueda de soluciones.

Desde una perspectiva sociocultural, la EA se fortalece cuando se enraíza en las realidades y experiencias de los estudiantes, permitiendo construir significados a partir del diálogo entre saberes científicos, escolares y cotidianos (Vygotsky, 1979). Así, el aprendizaje ambiental se convierte en una práctica situada y culturalmente mediada.

Lejos de ser una disciplina aislada, la EA asume un rol interdisciplinario, articulando distintas áreas del conocimiento para abordar fenómenos complejos. En esta articulación, la matemática adquiere un papel clave: permite cuantificar el impacto ambiental, interpretar variables como el consumo de agua o las emisiones de dióxido de carbono (CO_2) y evaluar alternativas sostenibles.

En Chile, este enfoque se sustenta en la Ley General de Educación (Ley N.º 20.370), que incorpora la sostenibilidad como principio rector (Chile, 2009), y en los Objetivos de Aprendizaje Transversales (Ministerio de Educación de Chile, 2012; 2015), consolidando la EA como un espacio para vincular la modelación matemática con la acción ciudadana y la transformación social.

1.4 Problemática y objetivo de la investigación

Dado este contexto y la urgencia de promover el desarrollo sostenible, la enseñanza de la matemática se enfrenta al desafío de articularse con problemáticas reales que fomenten una ciudadanía crítica y comprometida, ya que suele centrarse en procedimientos formales desvinculados de los temas del entorno o de las situaciones socioculturales cercanas al estudiantado. A esto se suma que los jóvenes, en general, desconocen temas como el ODS 12 o el consumo responsable, lo que limita su posibilidad de comprender y cuestionar el impacto de sus decisiones diarias.

De este modo, el presente artículo se enmarca en una visión sociocultural de la educación matemática, en la que la modelación matemática se asume como metodología de intervención para abordar un objeto de estudio situado en la educación ambiental. Se explora su potencial para favorecer una conciencia crítica en torno a la relación entre el consumo, la sostenibilidad y las matemáticas, mediante el análisis de las estrategias de resolución que emergen cuando los estudiantes enfrentan una situación de modelación vinculada al impacto ambiental de la industria de la moda, particularmente del Fast-Fashion.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

En este estudio adoptamos un enfoque teórico que integra tres dimensiones complementarias: la educación sociocultural, que actúa como paradigma general y concibe el aprendizaje como una práctica socialmente situada y mediada culturalmente; la modelación matemática escolar, entendida como la herramienta que articula los saberes matemáticos con fenómenos del entorno; y la interdisciplina, en diálogo con la educación ambiental, como horizonte que permite abordar la complejidad del fenómeno estudiado. En coherencia con estos ejes, se incorpora además el pensamiento proporcional como forma de razonamiento que emerge en las prácticas de modelación matemática, posibilitando comprender cómo los estudiantes movilizan sus saberes matemáticos para interpretar relaciones de magnitud en contextos significativos.

2.1 Educación sociocultural

La perspectiva sociocultural de la educación, propuesta por Vygotsky (1979), sostiene que aprender es un proceso que ocurre en un contexto social, donde el conocimiento se construye a través de la mediación cultural, las interacciones sociales y el uso de herramientas simbólicas. Esta mirada, ampliada por Wertsch (1991), plantea que las funciones mentales superiores se desarrollan primero en el plano social y luego se interiorizan individualmente.

Desde esta perspectiva, Viché (2021) concibe la educación sociocultural como una práctica inclusiva orientada a promover el bienestar individual y la convivencia, fortaleciendo redes de identidad cultural y fomentando relaciones basadas en la interacción y el reconocimiento mutuo.

La sala de clases deja de ser así un espacio neutro para convertirse en un entorno culturalmente rico, donde los estudiantes interactúan con herramientas como el lenguaje, los símbolos y la matemática. En este marco, "el aprendizaje y el desarrollo cognitivo no se conciben como procesos individuales, sino como procesos mediados culturalmente que ocurren en contextos socialmente estructurados" (Martínez, 1999, p. 19).

Enseñar implica, por tanto, crear escenarios de participación donde los estudiantes construyan significados compartidos. Según Hitt y Quiroz-Rivera (2017), "una representación espontánea ligada a la resolución de un problema [...] podrá evolucionar en la discusión con otros y convertirse en un signo dentro de esa micro comunidad" (p. 159). Estas dinámicas de interacción son esenciales, pues en el intercambio de significados emerge la comprensión colectiva (Martínez, 1999; Guerra, 2020).

En síntesis, el enfoque sociocultural desafía las concepciones individualistas del aprendizaje, proponiendo una comprensión contextualizada y situada del conocimiento.

2.2 Modelación matemática escolar

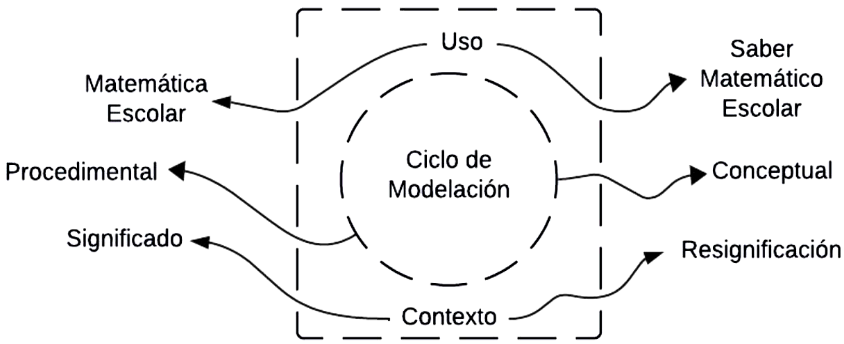
Para este artículo, comprendemos la modelación matemática en los términos propuestos por Arrieta y Díaz (2015) como una práctica que articula dos entidades: una denominada modelo y otra denominada lo modelado. El modelo permite actuar sobre el fenómeno bajo estudio (lo modelado), y su existencia no es independiente de la actividad de quien modela; más bien, emerge en el acto mismo de intervenir en la realidad. En este sentido, un modelo matemático se concibe como una herramienta dinámica que adquiere significado a través del proceso de modelar.

De esta articulación, entre el modelo y lo modelado, se constituye una nueva entidad para quien modela, denominada Dipolo Modélico (DM). Los DM, al articularse en red, configuran una red de modelos asociada al fenómeno, interconectados mediante los procedimientos, las intencionalidades y los argumentos que emergen de la actividad (Pérez y Carrasco, 2018, p. 2).

Por su parte, Cordero y Suárez (2010) y Pérez (2020) plantean que la modelación matemática no sólo permite representar fenómenos, sino que también contribuye a la resignificación del conocimiento matemático en tanto los estudiantes asignan nuevos significados a los elementos matemáticos involucrados en el proceso de modelación.

En esta línea, Pérez y Salazar (2024) señalan que la modelación, desde una perspectiva sociocultural, se fundamenta en las herramientas del modelador, las cuales, en interacción con las experiencias, generan una comprensión profunda del fenómeno estudiado. Según los autores mencionados, un estudiante que participa en una actividad de modelación debe poseer objetos, procedimientos y significados de la matemática escolar; sin embargo, al vivenciar un ciclo de modelación, estos saberes se transforman tanto por su uso como por su relación con el contexto, convirtiendo la matemática escolar en un saber matemático escolar, lo procedimental en conceptual, y resignificando los significados tanto por el uso como por el contexto.

Figura 1. Transformaciones al vivenciar un ciclo de modelación matemática escolar.



Fuente: Tomado de Pérez y Salazar (2024b, p. 17).

Este proceso de resignificación convierte los conceptos abstractos en herramientas útiles para la interpretación y predicción de fenómenos, promoviendo así un aprendizaje significativo y contextualizado.

En síntesis, Arrieta y Díaz (2015), Cordero y Suárez (2010) y Pérez y Salazar (2024) coinciden en definir el proceso de modelación (la interacción entre el modelo y lo modelado) como una práctica no lineal ni estática, sino una interacción dinámica que sigue fases esenciales. En primer lugar, se identifica un fenómeno o problema; luego, se construye un modelo utilizando herramientas matemáticas; posteriormente, el modelo se valida al contrastarlo con datos reales o experimentales; y, finalmente, se interpreta y aplica para intervenir en el fenómeno estudiado, asignando significado a sus componentes desde el contexto del problema. Estas fases evidencian que la modelación no es una actividad meramente técnica, sino una práctica reflexiva que conecta el mundo real con el conocimiento matemático.

2.3 Interdisciplina y educación ambiental

La educación ambiental enfrenta, al ser llevada al aula, un desafío persistente: la fragmentación del conocimiento. Según Infante-Malachias y Araya-Crisóstomo (2023), esta fragmentación de contenidos impide que docentes y estudiantes reflexionen críticamente sobre los problemas desde una mirada global. Ello ocurre a pesar de que los lineamientos internacionales enfatizan que la formación ambiental debe desarrollarse desde la interdisciplina. Sin embargo, Eschenhagen (2007) evidencia que esta orientación no se ha concretado plenamente, lo que demuestra una carencia histórica. En el mismo sentido, Reséndiz (2023) señala que diversos autores, incluso en investigaciones anteriores, ya destacaban la relevancia de la interdisciplinariedad para el fortalecimiento de la educación ambiental, así como para la construcción de una mirada crítica respecto de su historia, su cultura y los problemas ambientales.

En este contexto, la interdisciplina se reafirma como una alternativa necesaria. León (2013) la define como la integración coordinada de diversas disciplinas interconectadas, que permite evitar enfoques aislados o fragmentados. Desde esta perspectiva, la interdisciplina se convierte, como plantean Bell et al. (2022), en una respuesta pedagógica, didáctica y metodológica frente a la fragmentación del conocimiento. Su propósito es integrar saberes provenientes de múltiples campos para abordar las problemáticas desde una mirada compleja y articulada. Esta integración favorece el desarrollo de la capacidad para identificar conexiones entre diferentes áreas del conocimiento, estimula el análisis crítico de las situaciones y facilita la transferencia de aprendizajes obtenidos dentro y fuera del entorno escolar (Infante-Malachias y Araya-Crisóstomo, 2023).

De acuerdo con esta visión, la educación ambiental se comprende como un “proceso permanente de carácter interdisciplinario destinado a la formación de una ciudadanía que reconozca valores, aclare conceptos y desarrolle las habilidades y las actitudes necesarias para una convivencia armónica entre seres humanos, su cultura y su medio físico circundante” (Chile, 1994, Art. 2, letra h). A ello se suma la disposición legal de que “el sistema educativo incluirá y fomentará el respeto por el medio ambiente natural y cultural, la buena relación y el uso racional de los recursos naturales y su sostenibilidad” (Chile, 2019, Art. 1, letra l).

En síntesis, la educación ambiental enfrenta el reto de superar la fragmentación del conocimiento, y la interdisciplina se plantea no solo como una exigencia normativa, sino también como una vía pedagógica que promueve la comprensión crítica y global de las problemáticas socioambientales, integrando saberes que permiten abordar la complejidad de los fenómenos contemporáneos desde una perspectiva educativa transformadora.

2.4 Articulación teórica: educación sociocultural, modelación matemática, interdisciplina y educación ambiental

A modo de síntesis, este trabajo adopta como paradigma general la educación sociocultural, entendida desde Vygotsky (1979) como un proceso de construcción de significados situado en la interacción social y mediado culturalmente. En este marco, la modelación matemática se concibe como la herramienta que articula la matemática escolar con fenómenos complejos del entorno. De acuerdo con Pérez y Salazar (2024), en la interacción entre las herramientas matemáticas y las experiencias del estudiantado se producen transformaciones significativas de los saberes, resignificando lo procedimental en conceptual y vinculando el conocimiento con la realidad.

Abordar problemáticas ambientales vinculadas al ODS 12 exige una mirada interdisciplinaria capaz de superar la fragmentación entre los saberes matemáticos y los fenómenos socioambientales. Esta integración sitúa la modelación en diálogo con la educación ambiental, la cual, desde su carácter interdisciplinario (Chile, 1994, Art. 2, letra h), fomenta una ciudadanía informada, crítica y comprometida con la sostenibilidad.

En conjunto, estos tres ejes teóricos articulan un aprendizaje situado, culturalmente mediado y orientado a la acción transformadora. Esta articulación teórica sienta las bases para introducir un cuarto eje emergente: el pensamiento proporcional, identificado en el análisis de los resultados como un componente central en la construcción de los modelos elaborados por los estudiantes. Este razonamiento, que surge en contextos sociales y culturales específicos, se examina en el apartado siguiente donde se profundiza en su papel dentro de los procesos de modelación matemática escolar.

2.5 Pensamiento proporcional

El uso frecuente de la regla de tres, entendida como un procedimiento asociado a la proporcionalidad, invita a reflexionar sobre si su aplicación constituye realmente una manifestación del pensamiento proporcional. De acuerdo con Reyes-Gasperini y Cantoral (2014), este tipo de pensamiento surge a partir de diversos razonamientos que se desarrollan progresivamente en contextos sociales y culturales. Los autores identifican seis niveles: el razonamiento cualitativo, que establece relaciones entre magnitudes sin emplear números; el razonamiento aditivo simple, que vincula incrementos unitarios con aumentos constantes; el razonamiento aditivo compuesto, que reconoce que la suma de dos elementos del dominio equivale a la suma de sus imágenes; el razonamiento multiplicativo, que utiliza una constante para determinar cualquier valor a partir del valor unitario; el razonamiento inter, que mantiene la proporción entre magnitudes; y el razonamiento intra, que identifica una razón constante entre dominio y codominio.

Estos niveles permiten analizar las respuestas de los estudiantes y orientar las intervenciones didácticas hacia la comprensión de la proporcionalidad como una relación constante entre dos magnitudes (Reyes-Gasperini, 2013). No obstante, en la enseñanza tradicional, las razones y proporciones se han abordado como procedimientos mecánicos, siendo la regla de tres el recurso más habitual para determinar un valor desconocido dentro de una proporción. Su estructura formal se expresa como $a/b = c/x$ y se resuelve mediante multiplicación cruzada.

Sin embargo, resolver proporciones de forma automática no implica necesariamente un razonamiento proporcional. García y Farfán (2016) sostienen que este se evidencia en la capacidad de decidir si un problema se aborda mediante una proporción directa, inversa u otro tipo de relación numérica. En esta misma línea, Reyes-Gasperini (2013) y Mochón (2012) coinciden en que la regla de tres puede considerarse parte del pensamiento proporcional sólo cuando su uso se enmarca en una reflexión contextualizada, fundamentada en la comprensión de las relaciones entre magnitudes y en su sentido dentro del contexto del problema.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

La presente investigación se desarrolló bajo un enfoque cualitativo utilizando la metodología de estudio de casos con el objetivo de diseñar e implementar una situación de aprendizaje, la que permitió comprender cómo los estudiantes construyen significados en torno a la sostenibilidad y el consumo responsable a través de la modelación matemática. Para ello, utilizamos como diseño de situación de aprendizaje las cinco fases de la estructura de situaciones de Balda (2022).

3.1 Enfoque cualitativo y estudio de casos

La presente investigación se inscribe en el paradigma cualitativo, en tanto busca comprender fenómenos educativos desde una perspectiva interpretativa centrada en los significados que construyen los sujetos en torno a su experiencia. Este enfoque asume que la realidad es una construcción social e intersubjetiva; por ello, el conocimiento emerge de la interpretación de discursos, acciones y contextos situados. En esta línea, Capocasale (2015) sostiene que el paradigma cualitativo se interesa por "comprender e interpretar la realidad construida por los sujetos", con el propósito de "penetrar en el mundo construido y compartido por los sujetos y comprender cómo funcionan a partir de sus acuerdos intersubjetivos" (p. 44). En consecuencia, el análisis se orienta a desentrañar los sentidos que los participantes atribuyen a sus prácticas en las situaciones donde actúan.

3.2 Estudio de casos

Como estrategia metodológica optamos por el estudio de casos que posibilita investigar un fenómeno contemporáneo en su contexto real: en este trabajo, los productos matemáticos generados por estudiantes frente a una situación de aprendizaje alineada con el ODS 12. Tal como afirma Yin (1989; como se citó en Jiménez, 2012, p. 142), el estudio de casos es "una investigación empírica que investiga un fenómeno contemporáneo en su contexto real, donde los límites entre el fenómeno y el contexto no se muestran de forma precisa, y en el que múltiples fuentes de evidencia son utilizadas".

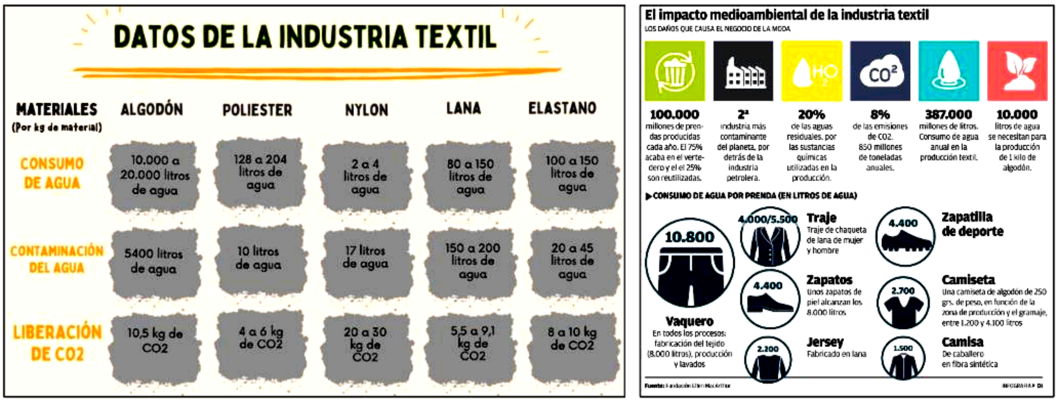
Desde una perspectiva cualitativa, el estudio de casos permite analizar, en profundidad, fenómenos educativos complejos, atendiendo su ambigüedad y particularidad (Jiménez, 2012). Según Villarreal y Landeta (2007; como se citó en Jiménez, 2012, p. 142), esta estrategia resulta pertinente cuando se requiere "explicar relaciones causales complejas, realizar descripciones de perfil detallado, generar teorías o aceptar posturas teóricas exploratorias o explicativas, [y] analizar procesos de cambio longitudinales". En este caso estudiado, dicho enfoque se ajusta a la necesidad de caracterizar productos de modelación matemática elaborados por estudiantes sin prescribir estrategias ni herramientas de antemano, observando cómo movilizan conocimientos previos para responder a una problemática real vinculada con la sustentabilidad.

3.3 Situación de aprendizaje

Para abordar la problemática, se diseñó una situación de aprendizaje compuesta por siete preguntas o problemas clave, distribuidos según las cinco fases propuestas por Balda (2022): introducción, exploración, procedimental, consolidación y ejercitación. Cada fase se orientó a favorecer la comprensión del impacto ambiental asociado al consumo y a la contaminación del agua, así como a las emisiones de CO_2, mediante procesos de modelación matemática que promueven una lectura crítica del fenómeno del Fast-Fashion. En coherencia con el paradigma cualitativo y el estudio de casos, la secuencia prioriza la producción de evidencias situadas (modelos, representaciones y argumentaciones) que permitan interpretar los significados construidos por la población estudiantil en torno a la relación entre matemática, tecnología y sostenibilidad.

En la primera fase, denominada "Conociendo el Fast-Fashion y su impacto ambiental", la población estudiantil analizó diversas infografías compuestas con información cuantitativa sobre el impacto ambiental de la industria textil. Este recurso integró datos sobre el consumo y la contaminación del agua, así como sobre la liberación de CO_2 asociados a distintos materiales y prendas de vestir. Las infografías se utilizaron como disparador de reflexión y diálogo inicial, promoviendo la identificación de variables relevantes y la problematización del fenómeno desde una perspectiva ambiental y social. Los datos visualizados (referidos al uso de recursos naturales y emisiones por tipo de material textil) constituyeron la base para las actividades posteriores de estimación, comparación y modelación matemática, conectando la información ambiental con el razonamiento cuantitativo escolar.

Figura 2. Impacto ambiental de la industria textil: consumo de agua, contaminación y emisiones de CO_2 por material y prenda.



Fuente: Elaboración propia a partir de la Fundación Ellen MacArthur e informes ambientales.

El análisis guiado de esta infografía facilitó la construcción de un contexto de significación compartido, donde los estudiantes discutieron sobre el uso de recursos naturales, la contaminación del agua y la relación entre decisiones de consumo y sostenibilidad, sentando las bases para la formulación de modelos en las siguientes fases.

En la Tabla 1 se presenta una síntesis de la planificación de la situación de aprendizaje, donde se describen los objetivos, actividades y preguntas orientadoras que guiaron el proceso de modelación.

Tabla 1. Resumen de actividades de la situación de aprendizaje

Fase	**Objetivo principal**	**Actividades y metodología**	**Preguntas o problemas claves**
Introducción - "Conociendo el *Fast-Fashion* y su Impacto Ambiental"	Crear un contexto significativo e informar sobre el consumo masivo de ropa.	Se presentan videos y una infografía sobre el consumo de Fast-Fashion para iniciar una discusión guiada. Luego de las preguntas se les presenta infografías sobre el impacto del Fast-Fashion.	• ¿Qué opinas sobre cómo la sociedad consume ropa hoy en día? • ¿Sabes qué materiales componen tus prendas? • ¿Qué impacto ambiental crees que tiene la cultura del Fast-Fashion?
Exploración - "Dimensionando el impacto de tu ropa"	Identificar variables y organizar información relevante a partir de datos concretos.	Los estudiantes eligen una de tres etiquetas de ropa y estiman libremente su impacto ambiental, usando el objeto matemático que consideren conveniente.	La actividad principal consiste en estimar el impacto ambiental de la prenda escogida.
Procedimental - "Outfits de impacto (ambiental)"	Crear un modelo matemático inicial y formular una hipótesis a partir de la información organizada.	Utilizando fichas con información de distintas combinaciones de ropa ("outfits"), los estudiantes diseñan un modelo matemático para evaluar el impacto ambiental.	La tarea es construir un modelo y generar una hipótesis inicial que responda al problema.
Consolidación - "Vestir con responsabilidad"	Validar y fundamentar el modelo matemático creado y la hipótesis propuesta.	Se realiza una discusión entre los grupos, donde cada uno defiende el modelo que creó para sustentar su postura y conclusiones.	• ¿Cuál es el *outfit* más sustentable? • ¿Cuáles fueron sus criterios para tomar aquella postura?
Ejercitación - "Consumo consciente y matemática crítica"	Aplicar el modelo consolidado para resolver problemas estandarizados y contextualizados.	Los estudiantes utilizan su modelo para resolver problemas de aplicación sobre el impacto ambiental del uso cotidiano de ropa.	• Problema 1: Calcular los kg de CO_2 emitidos para producir 700 kg de ropa de una tienda (algodón, lana, mezcla). • Problema 2: Calcular el agua utilizada para confeccionar el uniforme completo de 400 alumnos.

Fuente: Elaboración propia.

3.4 Instrumentos de recolección de datos

La recolección de datos se basó en los productos y registros generados durante la implementación de la situación de aprendizaje descrita previamente. En este estudio, el cuestionario no se concibió como un instrumento independiente, sino como la materialización didáctica de la situación de aprendizaje diseñada bajo la estructura propuesta por Balda (2022). Este instrumento integró las siete preguntas o problemas clave, distribuidos en las cinco fases (introducción, exploración, procedimental, consolidación y ejercitación), estas orientadas a promover la reflexión y la modelación matemática en torno al impacto ambiental del Fast-Fashion.

Siguiendo la definición de Hernández et al. (2014), el cuestionario "consiste en un conjunto de preguntas respecto a una o más variables a medir" (p. 217); en este caso, permitió identificar las herramientas y objetos matemáticos movilizados por los estudiantes al abordar problemas asociados al consumo y contaminación del agua, así como a las emisiones de CO_2 derivadas de la producción textil.

De forma complementaria, se empleó la observación directa, entendida como el "registro sistemático, válido y confiable del comportamiento o conducta que se manifiesta" (Hernández et al., 1991, p. 316). Esta técnica permitió documentar interacciones, discusiones y decisiones adoptadas por los grupos durante el proceso de resolución y modelación, aportando evidencia cualitativa sobre la construcción colectiva de significados y las estrategias de validación emergentes en la actividad.

3.5 Contexto y muestra

La muestra estuvo conformada por treinta estudiantes de segundo año medio, con un promedio de 16 años, pertenecientes a una institución diferenciada por sexo, enfocado en este caso en el masculino. La selección se realizó por conveniencia, considerando la disponibilidad de los participantes durante el periodo de transición entre semestres académicos, y contó con la autorización y acompañamiento del Departamento de Matemática de la institución.

La situación de aprendizaje se desarrolló en diez grupos de tres integrantes, con el propósito de fomentar el trabajo colaborativo y la argumentación conjunta. La intervención se llevó a cabo en dos bloques pedagógicos consecutivos de 45 minutos, en un aula tradicional. Esto permitió observar de manera directa cómo los estudiantes articulan ideas, justifican decisiones y elaboran modelos para resolver los problemas propuestos. Aunque la intervención se implementó con diez grupos, el análisis en profundidad se centró en dos de ellos (G1 y G2), seleccionados por su diversidad de estrategias y riqueza analítica. Esta decisión responde a un criterio de muestreo teórico-intencional (Stake, 1995; Patton, 2015), coherente con la naturaleza interpretativa del estudio.

3.6 Procedimiento de análisis de datos

El análisis de los datos se desarrolló bajo una estrategia cualitativa interpretativa, orientada a comprender los significados, razonamientos y transformaciones del conocimiento matemático que emergieron durante la implementación de la situación de aprendizaje. Las unidades de análisis correspondieron a los productos escritos elaborados por los estudiantes (respuestas al cuestionario–situación de aprendizaje) y a los registros de observación directa obtenidos durante las sesiones.

El proceso analítico se estructuró en tres momentos complementarios:

1. Organización y codificación inicial. Se transcribieron y organizaron las producciones de cada grupo, conformando un corpus de respuestas por fase del diseño de Balda (2022). A partir de una lectura abierta, se identificaron patrones de acción, argumentación y de uso de herramientas matemáticas, generando categorías emergentes que fueron contrastadas con los referentes teóricos de la educación sociocultural (Vygotsky, 1979; Wertsch, 1991) y la modelación matemática escolar (Arrieta y Díaz, 2015; Pérez y Salazar, 2024).
2. Análisis por fases del diseño didáctico. Las categorías resultantes se aplicaron a cada una de las cinco fases de la estructura de Balda (2022): introducción, exploración, procedimental, consolidación y ejercitación. Este procedimiento permitió reconstruir los procesos de modelación y resignificación del conocimiento matemático, así como las formas de razonamiento proporcional que surgieron al resolver los problemas planteados.
3. Interpretación teórica. Finalmente, se realizó una interpretación transversal sustentada en los tres ejes conceptuales del estudio: Educación sociocultural, modelación matemática e interdisciplina vinculada a la educación ambiental. Esto con el propósito de identificar cómo los estudiantes articularon saberes matemáticos y contextuales para dar sentido a la problemática del Fast-Fashion, transformando procedimientos rutinarios en herramientas conceptuales y argumentativas.

4. RESULTADO Y ANÁLISIS

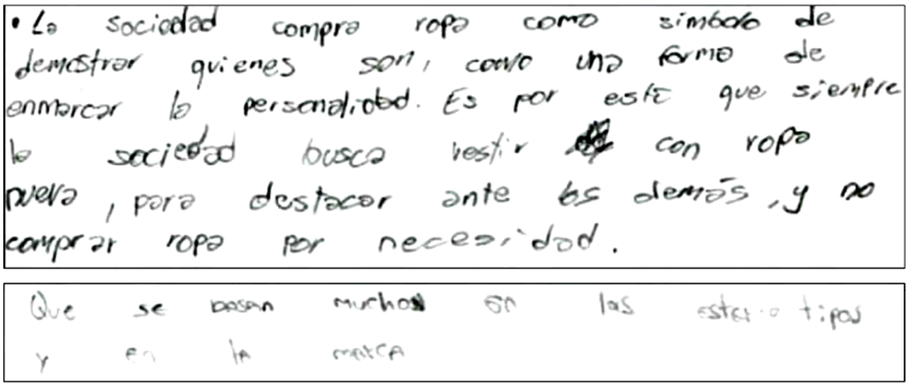
En esta sección se presenta el desarrollo de los estudiantes a partir de la intervención didáctica, considerando las producciones elaboradas por dos grupos (G1 y G2) durante la secuencia de aprendizaje. El análisis se organiza en torno a las cinco fases del diseño propuesto por Balda (2022): Introducción, exploración, procedimental, consolidación y ejercitación.

En cada fase se describen las estrategias, modelos y argumentaciones que emergieron de los estudiantes, junto con una interpretación teórica sustentada en los marcos de la educación sociocultural y la modelación matemática, la que orienta este estudio.

4.1 Resultados fase de introducción - Conociendo el Fast-Fashion y su Impacto Ambiental

Pregunta 1: ¿Qué opinas sobre la forma en que la sociedad consume productos hoy en día, especialmente cuando se trata de ropa?

Figura 3. Respuesta de los estudiantes en la pregunta 1.


• La sociedad compra ropa como símbolo de demostrar quienes son, como una forma de enmarcar la personalidad. Es por este que siempre la sociedad busca vestir con ropa nueva, para destacar ante los demás, y no comprar ropa por necesidad.

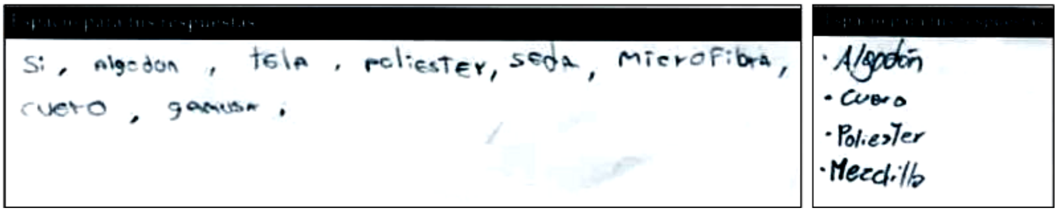
Que se basan muchos en los estereotipos y en la marca

Fuente: Creación de los estudiantes.

Las respuestas de ambos grupos evidencian una mirada crítica sobre los patrones de consumo, resaltando la influencia de los estereotipos, las marcas y la validación social a través de la apariencia. El Grupo 1 señaló que "se basan mucho en los estereotipos y en la marca", mientras que el Grupo 2 expresó que "la sociedad compra ropa como símbolo de demostrar quiénes son, como una forma de enmarcar la personalidad. Es por esto que siempre la sociedad busca vestir con ropa nueva, para destacar ante los demás, y no compran ropa por necesidad". Ambas respuestas muestran que los jóvenes reconocen que vestir ha dejado de ser una necesidad básica para transformarse en una forma de identidad y estatus. Desde la perspectiva sociocultural de Wertsch (1991), el consumo se comprende como una práctica mediada por herramientas culturales y signos compartidos; los estudiantes reproducen y resignifican estas prácticas, mostrando cómo los significados sociales configuran modos de pensar y pertenecer culturalmente.

Pregunta 2: ¿Sabes qué materiales componen tus prendas favoritas? ¿Podrías nombrar algunos de estos materiales?

Figura 4. Respuesta de los estudiantes en la pregunta 2.


Espacio para tus respuestas

Si, algodon, tela, poliester, seda, microfibra, cuero, gamusa,

• Algodón
• Cuero
• Poliester
• Mezclilla

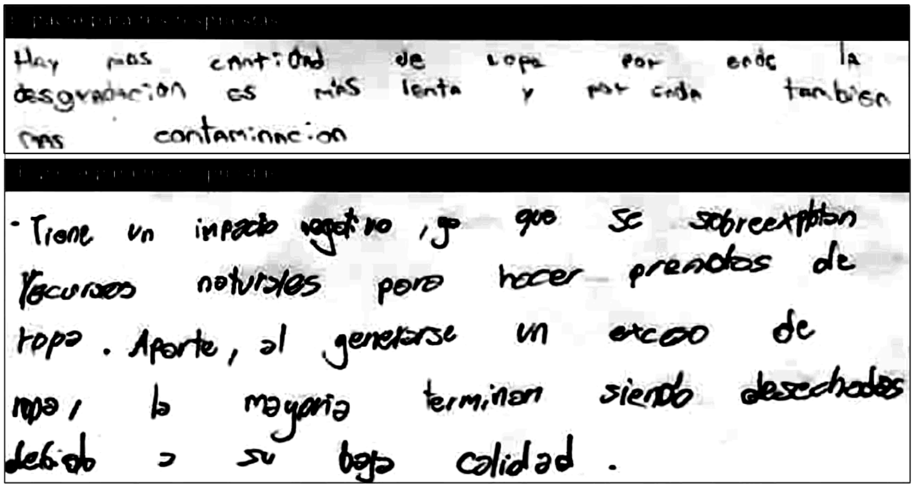
Fuente: Creación de los estudiantes.

Los estudiantes reconocen materiales textiles propios y comunes de su cultura, tales como el algodón, poliéster o el cuero.

Desde la educación sociocultural, este resultado evidenció cómo el conocimiento cotidiano se construye en función de las experiencias y del entorno social inmediato y luego se interiorizan en el ámbito individual, tal como menciona Wertsch (1991). Los estudiantes reconocen los materiales a través de su interacción con los objetos culturales que los rodean, lo que refleja que el aprendizaje no se produce de manera aislada, sino mediado por herramientas y prácticas compartidas.

Pregunta 3: ¿Qué impacto, en términos ambientales, crees que tiene la cultura del Fast-Fashion?

Figura 5. Respuesta de los estudiantes en la pregunta 3.



Fuente: Creación de los estudiantes.

Las respuestas de ambos grupos reflejan una visión crítica sobre el consumo y sus implicaciones ambientales. El Grupo 1 expresó que “hay más cantidad de ropa, por ende, la degradación es más lenta y por ende también más contaminación”, relacionando directamente la sobreproducción con el deterioro ambiental.

Por su parte, el Grupo 2 indicó que “tiene un impacto negativo, ya que se sobreexplotan recursos naturales para hacer prendas de ropa. Aparte, al generarse un exceso de ropa, la mayoría terminan siendo desechadas debido a su baja calidad”. Estas respuestas muestran que los jóvenes comprenden el fenómeno del Fast-Fashion, más allá de lo superficial, reconociendo las consecuencias ecológicas del consumo acelerado y su vínculo con la contaminación y el desperdicio.

Desde la perspectiva sociocultural de Wertsch (1991), el consumo se entiende como una práctica mediada por herramientas culturales y signos compartidos; en este caso, los estudiantes resignifican estas prácticas al analizar críticamente cómo las dinámicas de consumo configuran sus modos de pensar, decidir y pertenecer dentro de una cultura que asocia la identidad con el vestir.

4.2 Resultados fase de exploración - Dimensionando el impacto de tu ropa

Esta situación fue intencionada para trabajar en la fase de exploración, se solicitó a los estudiantes que, a partir de la información de una etiqueta de ropa elegida de entre tres, estimaran el impacto ambiental de la prenda seleccionada. Esta actividad tenía como objetivo observar las estrategias iniciales que emergen al enfrentarse a un problema abierto de modelación. La situación presenta tres etiquetas, la primera indicando su composición de 100% polyester, la segunda 100% cotton y la tercera 100% wool.

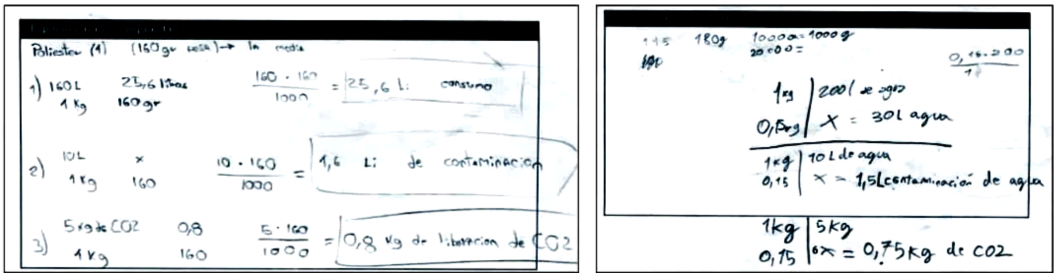
Figura 6. Etiquetas de ropa

(a) Etiqueta 1 (b) Etiqueta 2 (c) Etiqueta 3

Fuente: Situación de aprendizaje implementada, creación propia.

Además, como información complementaria se indica que una polera de polyester suele pesar entre 145 y 180 gramos, una de algodón (cotton) entre 130 y 150 gramos y un suéter de lana (wool) pesa entre 450 y 600 gramos. Aunque la instrucción fue que cada grupo tenía la libertad de escoger una de las tres etiquetas, ambos grupos eligieron la etiqueta de poliéster. A continuación, podemos observar el desarrollo que realizó cada grupo

Figura 7. Respuesta de los estudiantes pregunta 4.



Fuente: Creación de los estudiantes.

Ambos grupos seleccionaron valores dentro del intervalo de gramajes propuesto, aunque se esperaba que trabajaran con el punto medio. El G1 eligió 160 g como peso de la prenda y el G2, 150 g. En cuanto a las variables, G1 utilizó 160 litros de agua por kilogramo de poliéster y 5 kg de CO_2 por kilogramo (el punto medio), mientras que G2 mantuvo el mismo valor para el CO_2, pero empleó 200 litros de agua, cercano al extremo superior del intervalo. Estas decisiones generaron variaciones en los resultados, aunque ambos grupos, mediante procedimientos distintos, arribaron al mismo objeto matemático: el razonamiento proporcional.

El modo en que abordaron la tarea refleja los principios de la educación sociocultural y la modelación matemática que sustenta esta investigación. A través de la interacción construyeron significados compartidos (Martínez, 1999); las etiquetas de ropa y las variables de impacto actuaron como herramientas mediadoras culturales (Vygotsky, 1979; Wertsch, 1991), todo esto permitiendo a los grupos desarrollar estrategias propias. La decisión de simplificar intervalos a valores únicos constituyó una representación espontánea que, tras la discusión, evolucionó hacia un modelo compartido, en línea con lo expuesto por Hitt y Quiroz-Rivera (2017).

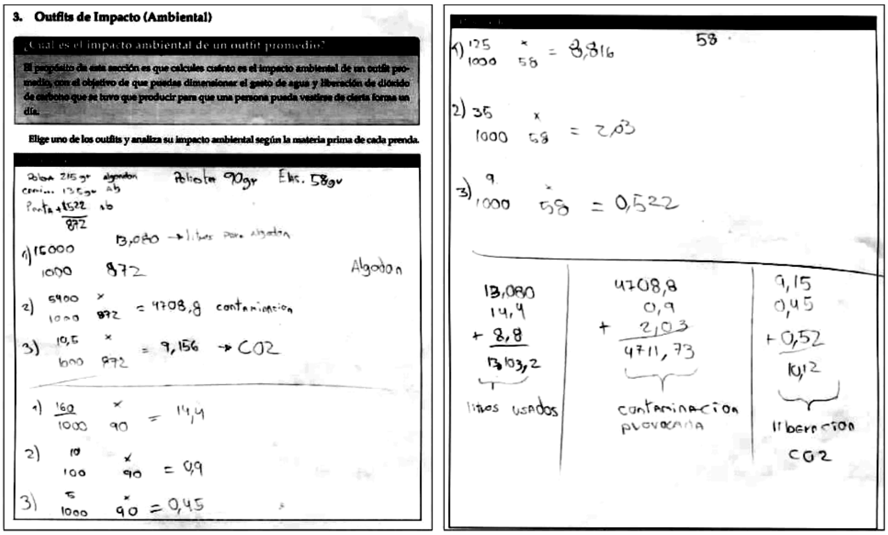
Desde la perspectiva de la modelación, emergió un Dipolo Modélico (DM) (Arrieta y Díaz, 2015), articulando “lo modelado” (el impacto ambiental) con “el modelo” (el cálculo proporcional), el cual adquiere significado en la acción misma de resolver. Este proceso evidenció la transformación del saber descrita por Pérez y Salazar (2024), donde un objeto matemático escolar se convierte en saber matemático escolar. Así, la proporcionalidad se resignifica (Cordero y Suárez, 2010; Pérez, 2020), pasando de un procedimiento mecánico a una herramienta conceptual para comprender fenómenos socioambientales reales.

4.3 Resultados fase procedimental

Pregunta 5: Elige uno de los outfits y analiza su impacto ambiental según la materia prima de cada prenda.

El Grupo 1 separó cada prenda según sus materias primas. Luego sumó los gramos de cada material para obtener un peso total por tipo y aplicó la regla de tres para calcular el impacto ambiental en cada variable (CO_2, consumo y contaminación de agua). Finalmente, sumó los resultados parciales para presentar un valor global de impacto por variable.

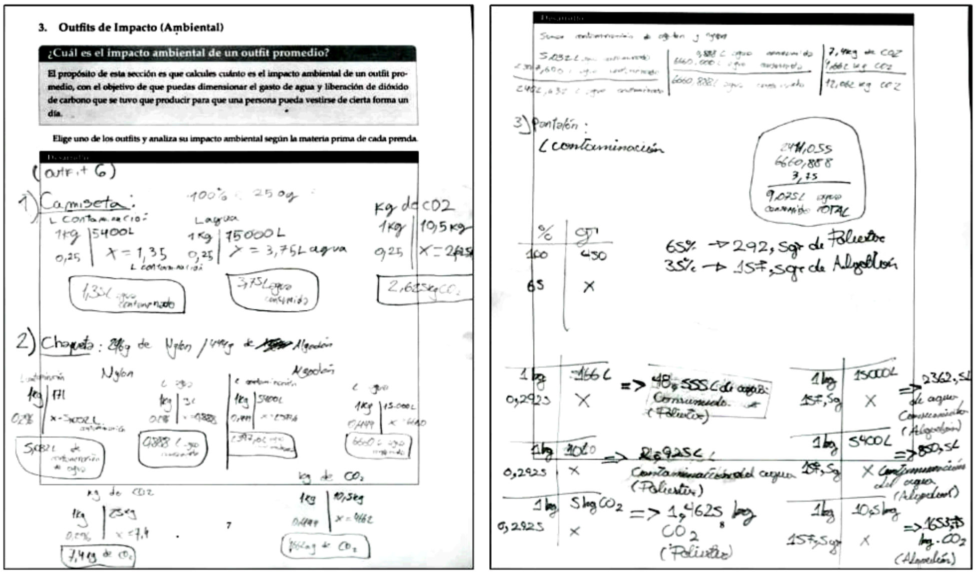
Figura 8. Respuesta de los estudiantes G1 en la pregunta 5.



Fuente: Creación de los estudiantes.

El Grupo 2, en cambio, analizó cada prenda de manera individual, calculando el impacto de estas tres variables mediante el mismo procedimiento proporcional. Sin embargo, no consolidó sus resultados finales, limitándose a valores parciales numéricos.

Figura 9. Respuesta de los estudiantes G2 en la pregunta 5.



Fuente: Creación de los estudiantes.

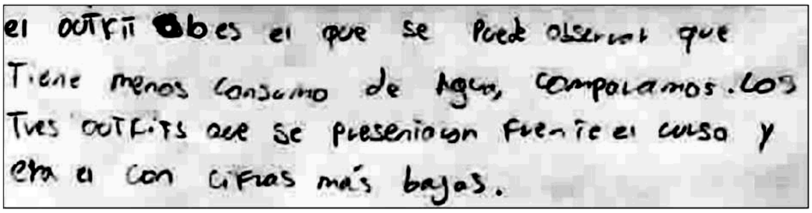
En síntesis, ambos grupos emplearon estrategias distintas, pero coincidieron en el uso de la proporcionalidad como herramienta matemática central. La actividad evidenció su carácter interdisciplinario, al integrar las matemáticas con la educación ambiental para abordar el impacto ecológico de los “outfits”.

Desde la perspectiva sociocultural, los estudiantes utilizaron herramientas matemáticas como mediadoras culturales (Vygotsky, 1979; Wertsch, 1991), construyendo modelos numéricos con sentido en la discusión colectiva. Las diferencias en sus procedimientos reflejan la complejidad del proceso de modelación y cómo este permite resignificar el conocimiento matemático al aplicarlo en la comprensión de fenómenos reales.

4.4 Resultados fase de consolidación

Pregunta 6: Compara entre los grupos y responde: ¿Cuál es el outfit más sustentable? ¿Cuáles fueron tus criterios para tomar aquella postura?

Figura 10. Respuesta dada en la pregunta por los estudiantes en la pregunta 6.


el outfit 6 es el que se puede observar que Tiene menos consumo de Agua, compoLamos. Los Tres outfits que se presentaron frente el curso y era el con cifras más bajas.

Fuente: Creación de los estudiantes.

El Grupo 1 argumentó que "el outfit 10 es el que se puede observar que tiene menos consumo de agua; comparamos los tres outfits que se presentaron frente al curso y era el con cifras más bajas". Por su parte, el Grupo 2 señaló que "el outfit más sustentable fue el outfit 3, ya que gasta menos agua y genera menos CO_2".

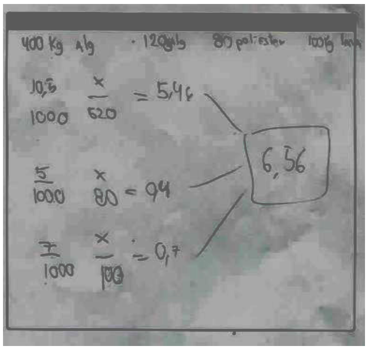
Ambos grupos identificaron la sustentabilidad de los outfits a partir de criterios cuantitativos, como el consumo de agua y la emisión de dióxido de carbono, evidenciando la capacidad de comparar datos, argumentar y tomar decisiones informadas. Estas respuestas muestran un tránsito desde una reflexión más descriptiva hacia un razonamiento analítico sustentado en la modelación y el trabajo colaborativo.

Desde la perspectiva sociocultural, el aprendizaje se construyó colectivamente mediante la interacción y el diálogo al contrastar información. La interdisciplina se manifestó en la integración de saberes matemáticos, ambientales y sociales, donde las herramientas matemáticas, especialmente la modelación proporcional, permitieron comprender de manera crítica la relación entre consumo, impacto ambiental y sustentabilidad.

4.5 Resultados fase de ejercitación

Pregunta 7: Una tienda recibe mensualmente 700 kg de ropa para vender. Esta se distribuye de la siguiente manera: - 400 kg de poleras 100 % algodón - 100 kg de chalecos 100 % lana - 200 kg de poleras con 60 % algodón y 40 % poliéster. Pregunta: ¿Cuántos kilogramos de CO_2 se liberan en total al producir esta ropa?

Figura 11. Transcripción de respuesta de los estudiantes pregunta 7.



Fuente: Creación de los estudiantes.

El Grupo 1 calculó el total de algodón, lana y poliéster presentes en los kilogramos totales de ropa, aplicando la regla de tres para cada material. Se observó un error al considerar que la liberación de CO_2 por kilogramo era 1000 en lugar de 1, aunque luego sumaron correctamente los resultados parciales para obtener el valor total de emisión.

Este proceso refleja que el aprendizaje es un fenómeno social, donde los estudiantes construyen significados compartidos. El grupo elaboró una estrategia propia para resolver el problema, evidenciando que no operaron mecánicamente, sino que utilizaron la matemática como herramienta para interpretar y cuantificar un fenómeno ambiental real, otorgando así un sentido conceptual más profundo a los procedimientos aplicados.

5. CONCLUSIONES/ REFLEXIONES / CONSIDERACIONES FINALES

Ciudadanía y sentido de la matemática. La integración explícita de la relación entre matemática y ciudadanía en la experiencia didáctica favoreció aprendizajes con mayor sentido crítico y contextualizado: los estudiantes vincularon contenidos matemáticos con fenómenos sociales globales (Fast-Fashion), posicionando la matemática como herramienta para tomar decisiones informadas sobre su realidad y no como un saber abstracto.

Este enfoque dio a la matemática un rol activo en el desarrollo del pensamiento crítico; mediante el trabajo colaborativo y el diálogo, las y los estudiantes construyeron significados compartidos, en coherencia con la perspectiva sociocultural que sitúa el aprendizaje como proceso mediado culturalmente (Vygotsky, 1979; Wertsch, 1991; Martínez, 1999). Se superaron rasgos de la enseñanza tradicional centrada en la repetición, al reconocer la utilidad pública de la matemática para analizar dilemas de consumo y sostenibilidad (Skovsmose, 2000). Ante lo anterior, reconocemos los debates sociales, políticos y culturales de mayor escala, como un escenario que favorece la relación matemática y ciudadanía, instalando y favoreciendo la discusión en el aula escolar.

Modelación matemática escolar y resignificación del saber. La modelación se consolidó como una herramienta pedagógica potente para matematizar objetivos de Educación Ambiental (EA). La situación de aprendizaje condujo desde una concienciación inicial (UNESCO, 1977; PNUMA, 1975) hacia una comprensión crítica del fenómeno. En la fase de exploración se observó un punto de inflexión: ante la necesidad de cuantificar el impacto, emergió de los propios saberes estudiantiles el razonamiento proporcional como modelo articulador. Este tránsito de lo cualitativo a lo cuantitativo habilitó la evaluación de escenarios y decisiones, núcleo de la EA (UNESCO, 1977).

Desde la teoría de la modelación, los estudiantes articularon lo modelado (impacto ambiental) y el modelo (cálculo proporcional), configurando Dipolos Modélicos (Arrieta y Díaz, 2015) y mostrando la resignificación del conocimiento: el objeto matemático escolar se transformó en saber matemático escolar al ser usado con propósito y en contexto (Cordero y Suárez, 2010; Pérez y Salazar, 2024).

ODS 12 como práctica situada. A lo largo de la secuencia, el ODS 12 se trabajó como práctica y no como contenido declarativo: desde las preguntas iniciales, el estudiantado reconoció problemáticas de consumo/producción de ropa; durante la modelación, interpretó datos y cuantificó impactos (agua, CO_2); y en consolidación/ejercitación comparó alternativas y justificó decisiones con criterios ambientales y sociales. El resultado fue una conciencia informada y una capacidad argumentativa para evaluar la sustentabilidad de opciones concretas, articulando criterios cuantitativos con juicios éticos propios de la ciudadanía responsable (UNESCO, 1977; PNUMA, 1975).

Articulación de los ejes teóricos. Los hallazgos muestran la coherencia entre los tres ejes del marco: (i) lo sociocultural aportó la mediación (herramientas, interacción, lenguaje) que habilitó la construcción de significados (Vygotsky, 1979; Wertsch, 1991); (ii) la modelación operó como puente entre los saberes escolares y el fenómeno socioambiental, permitiendo validar, interpretar y aplicar modelos en contexto (Arrieta y Díaz, 2015; Cordero y Suárez, 2010; Pérez y Salazar, 2024); y (iii) la interdisciplina propia de la EA evitó la fragmentación del conocimiento y favoreció decisiones informadas sobre consumo responsable (Chile, 1994; UNESCO, 1977; PNUMA, 1975). En este marco, el pensamiento proporcional emergió como razonamiento clave en la construcción de modelos y en la toma de decisiones.

Aportes, limitaciones y proyecciones. Como aporte, el estudio muestra evidencia situada de cómo la modelación, en diálogo con la formación ciudadana y la EA, resignifica contenidos matemáticos y fortalece competencias para el análisis crítico de problemas reales. Entre las limitaciones, se reporta un análisis en profundidad de dos casos (G1 y G2) dentro de un curso, decisión coherente con el muestreo teórico-intencional del estudio cualitativo; no busca generalización estadística, sino comprensión analítica.

Como proyección, se sugiere (a) ampliar el análisis a más grupos y ciclos, (b) profundizar en trayectorias del pensamiento proporcional en tareas de EA, y (c) explorar rúbricas de validación de modelos que integren criterios matemáticos y socioambientales para la formación inicial docente y el diseño curricular.

En síntesis, la experiencia confirma que la modelación matemática + enfoque sociocultural + EA constituyen una vía fértil para formar ciudadanía: la matemática se vive como lenguaje y herramienta para comprender, cuestionar e intervenir el mundo en que se habita.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

Este artículo, basado en la investigación titulada “Aporte de la modelación matemática a la educación ambiental: una aproximación al consumo y producción sostenible en el aula escolar”, fue desarrollado por SGP, SRS y RVM, bajo la orientación de IPV.

La idea inicial fue planteada de forma conjunta, mientras que SGP, SRS y RVM se encargaron del marco teórico, la revisión bibliográfica, el diseño de la situación de aprendizaje y su implementación.

La discusión, análisis de los resultados y redacción final del artículo fueron realizados de manera colaborativa por SGP, SRS, RVM e IPV.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio están disponibles en el repositorio de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, en el vínculo de tesis de pregrado.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a todas las personas e instituciones que contribuyeron al desarrollo de esta investigación, brindando apoyo, orientación y recursos para su realización.

Agradecemos al Departamento de Matemática de la UMCE por su apoyo en la realización de esta investigación. También, expresamos nuestra gratitud al proyecto de vinculación con el medio "Red FerMat: modelación matemática y tecnología en el aula escolar”, (código V-25-4) y al proyecto de investigación "Superación de obstáculos en el cálculo escolar mediante modelación matemática y tecnologías digitales en la formación docente" (código 13-2025-IED), ambos fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

5. REFERENCIAS

Alvis-Puentes, J., Aldana-Bermúdez, E. y Caicedo-Zambrano, S. (2019). Los ambientes de aprendizaje reales como estrategia pedagógica para el desarrollo de competencias matemáticas en estudiantes de básica secundaria. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación, 10*(1), 63–78. https://doi.org/10.19053/20278306.v10.n1.2019.10

Andrade, T. y Guzmán, I. (2018). Educación matemática y formación ciudadana: Un estudio que confronta la matemática escolar, el currículo y las prácticas docentes. *PARADIGMA*, *39*(1), 319–331. https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2018.p319-331.id657

Arrieta, J. y Díaz, L. (2015). Una perspectiva de la modelación desde la Socioepistemología. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 18*(1), 19–48. https://doi.org/10.12802/relime.13.1811.

Balda, P. (2022). Estructura para el diseño de situaciones de aprendizaje desde un enfoque socioepistemológico. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 7.* https://doi.org/10.46618/iime.148

Bell, R., Orozco, I. y Lema, B. (2022). Interdisciplinariedad, aproximación conceptual y algunas implicaciones para la educación inclusiva. *UNIANDES Episteme, 9*(1), 101–116.

Capocasale, A. (2015). ¿Cuáles son las bases epistemológicas de la investigación educativa? *Abriendo puertas al conocimiento*, 32.

Cervantes, C., Rangel-Lyne, L. y Ochoa-Hernández, M. (2025). Determinantes del comportamiento de compra *fast fashion* en centennials de México. *Estudios Gerenciales, 41*(175), 142-155. https://doi.org/10.18046/j.estger.2025.175.6919

Chile. (1994). *Ley N.º 19.300: Bases Generales del Medio Ambiente.* Diario Oficial de la República de Chile. https://www.bcn.cl/leychile/navegar?idNorma=30667

Chile. (2009). *Ley N.º 20.370: Establece la Ley General de Educación*. Diario Oficial de la República de Chile. https://bcn.cl/29xpy

Chile. (2019). Ley N.º 20.845: De Inclusión Escolar. Diario Oficial de la República de Chile. https://www.bcn.cl/leychile/navegar?idNorma=1078172

Cordero, F. y Suárez, L. (2010). Modelación - graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 13(4-II), 319-333.

Eschenhagen, M. L. (2007). La educación ambiental superior en América Latina: una evaluación de la oferta de posgrados ambientales. *Theomai*, (16), 87–107.

Flores, E. y Pérez, L. (2023). *Educación matemática y formación ciudadana en estudiantes de la unidad educativa Dr. Emilio Uzcategui periodo enero – marzo 2023* [Trabajo de titulación, Universidad Nacional de Chimborazo]. Repositorio UNACH. http://dspace.unach.edu.ec/handle/51000/11224

García, M. y Farfán, R. (2016). Una caracterización de actitudes hacia lo proporcional desde una perspectiva socioepistemológica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *19*(3), 773–783.

Greenpeace México. (2021). *Fast fashion: de tu armario al vertedero*. Greenpeace. https://www.greenpeace.org/mexico/blog/9514/fast-fashion/

Guerra, J. (2020). El constructivismo en la educación y el aporte de la teoría sociocultural de Vygotsky para comprender la construcción del conocimiento en el ser humano. *Dilemas*

Contemporáneos: Educación, Política y Valores, 7(2). https://doi.org/10.46377/dilemas.v32i1.2033

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (1991). Metodología de la investigación. *McGraw-Hill Education.*

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). Metodología de la investigación (6ª ed.). *McGraw-Hill Education.*

Hitt, F. y Quiroz-Rivera, S. (2017). Aprendizaje de la modelación matemática en un medio sociocultural. *Revista Colombiana de Educación, 73*, 153–177.

Infante-Malachias, M. y Araya-Crisóstomo, S. (2023). Interdisciplinariedad como desafío para educar en la contemporaneidad. *Revista Mexicana de Investigación Educativa, 27*(1), 1-16. https://doi.org/10.1590/1984-0411.88371

IPCC. (2023). Climate Change 2023: Synthesis Report – Summary for Policymakers. *Intergovernmental Panel on Climate Change.* https://www.ipcc.ch/report/ar6/syr/summary-for-policymakers/

Jiménez, V. (2012). El estudio de caso y su implementación en la investigación. *Revista Internacional de Investigación en Ciencias Sociales, 8*(1), 141–150.

León, E. (2013). *La interdisciplinariedad y su incidencia en el aprendizaje significativo en los estudiantes de los sextos años de educación general básica de la escuela fiscal México de la ciudad de Ambato* [Tesis de maestría, Universidad Técnica de Ambato].

Manzanares, G. (2020). Desarrollo sostenible y políticas públicas: Enfoque de la ONU y ecología política. *Revista de la Academia Nicaragüense de Ciencias Jurídicas y Políticas, 6*(12), 73–87.

Martínez, M. (1999). El enfoque sociocultural en el estudio del desarrollo y la educación. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 1(1), 16–37.

Ministerio de Educación de Chile. (2012). *Bases Curriculares Primero a Sexto Básico*. Recuperado el 29 de enero de 2025, https://www.curriculumnacional.cl

Ministerio de Educación de Chile. (2015). *Bases Curriculares 7.º básico a 2.º medio*. Recuperado el 29 de enero de 2025, https://www.curriculumnacional.cl

Ministerio de Educación de Chile. (2016). *Orientaciones para la elaboración del Plan de Formación Ciudadana*. Recuperado de https://convivenciaparaciudadania.mineduc.cl

Ministerio de Educación de Chile. (2023). *Actualización del Plan de Formación Ciudadana 199para la Reactivación Educativa Integral*. https://convivenciaparaciudadania.mineduc.cl/formacion-ciudadana/

Mochón, S**.** (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación Matemática, 24*(1), 133–157.

Organización de las Naciones Unidas. (1987). *Informe de la Comisión Mundial sobre el Medio Ambiente y el Desarrollo: Nota del Secretario General (A/42/427)*. Naciones Unidas. https://ecominga.uqam.ca/

Organización de las Naciones Unidas. (2015). *Objetivo 12: Garantizar modalidades de consumo y producción sostenibles*. Recuperado de https://www.un.org/es/chronicle/article/objetivo-12-garantizar-modalidades-de-consumo-y-produccion-sostenibles-un-requisito-esencial-para-el

Patton, M. Q. (2015). *Qualitative research & evaluation methods: Integrating theory and practice (4th ed.)*. SAGE Publications.

Pérez, I. y Carrasco, E. (2018). Análisis de ciclos epistémicos de figuración en base a dipolos modélicos. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, *31*(2), 1536–1543.

Pérez, I. (2020). Una significación de los coeficientes de una función cuadrática: Una experiencia de modelación. Paulo Freire. *Revista de Pedagogía Crítica*, 23, 177–194.
Pérez, I. y Salazar, P. (2024). Modelación matemática como propuesta de trabajo para superar obstáculos y dificultades en el cálculo escolar. Una experiencia en formación inicial docente. *Acta latinoamericana de matemática educativa, 37*(1). https://alme.org.mx/revista/index.php/alme/article/view/100
Programa de las Naciones Unidas para el Medio Ambiente (PNUMA). (1975*). Carta de Belgrado: Un marco global para la educación ambiental*. Seminario Internacional sobre Educación Ambiental.
Reséndiz, J. (2023). De la construcción del campo a la interdisciplinariedad en la educación ambiental: El caso de la UNAM. *Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação,* 18(00), e023168. https://doi.org/10.21723/riaee.v18i00.16195
Reyes-Gasperini, D. (2013). La transversalidad de la proporcionalidad. *Secretaría de Educación Pública*. ISBN: 978-607-9362-01-0
Reyes-Gasperini, D. y Cantoral, R. (2014). Socioepistemología y Empoderamiento: la profesionalización docente desde la problematización del saber matemático. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 28(48), 360-382. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a18
Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, 6 (1), 3-26.
Stake, R. E. (1995). *The art of case study research.* SAGE Publications.
UNESCO. (1977). *Declaración de la Conferencia Intergubernamental de Tbilisi sobre Educación Ambiental*. UNESCO. https://unesdoc.unesco.org.
Viché, M. (2021). *Metodología de una educación sociocultural transformadora: De la dialogicidad y la transformación narrativa*. Lulu.com.
Vygotsky, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Crítica.
Wertsch, J. (1991). *Voices of the mind: A sociocultural approach to mediated action*. Harvard University Press.

Cuadernos
de Investigación y Formación en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 19 · N°. 1 · 2026
203-208
Recibido: 28/06/2023
Aprobado: 20/08/2023

Mi formación en EducMate

GAMIFICACIÓN EN UN CURSO DE LA UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

IMPLEMENTATION OF A STRATEGY BASED ON GAMIFICATION IN A COURSE AT THE UNIVERSITY OF COSTA RICA

Camilo Campos León[1]

ORCID iD: https://orcid.org/0009-0008-9973-0295

RESUMEN

El presente texto tiene como objetivo compartir una experiencia de aplicación de la gamificación en el curso FD5094: *Currículum en matemática* de la Universidad de Costa Rica, como parte de un proceso formativo en la carrera Enseñanza de la Matemática. La estrategia fue implementada durante una exposición mediante un tablero digital inspirado en el videojuego *Mario Party*, diseñado con la herramienta PowerPoint. A través de dinámicas basadas en retos, monedas y objetos, se buscó promover la participación activa y la comprensión de los contenidos. Sin embargo, durante la aplicación se presentaron diversas dificultades relacionadas con la falta de claridad en las reglas y el desconocimiento previo del juego por parte de los participantes. A partir de esta experiencia, se reflexiona sobre la importancia de una adecuada planificación y la coherencia entre los elementos lúdicos y los objetivos de aprendizaje. Igualmente, se considera el valor de la gamificación como estrategia para fomentar la motivación y la participación en contextos universitarios.

Palabras clave: gamificación, docencia universitaria, motivación, aprendizaje activo, estrategias didácticas.

ABSTRACT

This paper aims to share an experience of applying gamification in the course FD5094: *Curriculum in Mathematics* at the University of Costa Rica, as part of a teacher training process in Mathematics Education. The strategy was implemented during a class presentation using a digital board inspired by

[1] Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica. Correo electrónico: camilo.campos@ucr.ac.cr

the *Mario Party* video game, designed with PowerPoint. Through dynamics based on challenges, coins and items, the activity sought to encourage active participation and comprehension of the content. However, several difficulties emerged due to lack of clarity in the rules and some participants' prior unfamiliarity with the game. Based on this experience, the paper reflects on the importance of adequate planning and the coherence between playful elements and learning objectives. Likewise, it considers the value of gamification as a strategy to foster motivation and engagement in university learning contexts.

Keywords: gamification, higher education, motivation, active learning, teaching strategies.

En diversos contextos educativos, se ha señalado que los enfoques tradicionales de enseñanza, centrados principalmente en la transmisión de contenidos, pueden resultar menos efectivos para mantener la motivación o la participación activa del estudiantado. Aun con el esfuerzo docente por incorporar metodologías mucho más atractivas e innovadoras, las universidades continúan enfrentando el desafío de promover la motivación y el compromiso genuino con las asignaturas. Esto resulta especialmente relevante considerando que, en la mayoría de los casos, las personas estudiantes ya poseen un interés previo por la carrera que eligieron cursar; sin embargo, dicho entusiasmo inicial no siempre se traduce en una participación activa o en una conexión significativa con los contenidos de cada curso. En este contexto, la incorporación del juego como herramienta pedagógica emerge como una alternativa prometedora, capaz de favorecer la comprensión de los contenidos y desarrollar habilidades transversales como la resolución de problemas, la colaboración y la comunicación (Llapo, 2019; Morillas, 2016; Edo, 2021; Hunicke et al., 2004).

El presente ensayo tiene como objetivo compartir mi experiencia como docente en formación durante la aplicación de una estrategia basada en la gamificación en el curso FD5094: Curriculum en matemática de la Universidad de Costa Rica. Esta vivencia surge en el marco de mi proceso formativo de licenciatura en la carrera Enseñanza de la Matemática y representa una oportunidad para reflexionar sobre cómo la gamificación puede fortalecer la motivación, la participación y la comprensión de conceptos vinculados con conocimientos propios de la asignatura. Para alcanzar este propósito, describo brevemente el contexto del curso, los principales elementos que conformaron la estrategia —incluido el diseño del recurso y las dinámicas implementadas— y, finalmente, comparto algunas reflexiones personales sobre los aprendizajes obtenidos y los retos que implica integrar la gamificación en la enseñanza universitaria.

El curso FD5094 se desarrolló con un grupo de 17 estudiantes de la carrera Enseñanza de la Matemática. En este espacio, se abordan diversos enfoques sobre la evolución del currículo, los movimientos educativos que han influido en este y las principales corrientes de pensamiento que sustentan las propuestas curriculares en el área de la matemática. A partir de estos contenidos, y como parte de una exposición asignada dentro del curso, se decide diseñar una actividad basada en la gamificación que permita trabajar los conceptos teóricos, y al mismo tiempo, promover la participación activa y el trabajo colaborativo entre los alumnos.

Así, la dinámica se estructuró a partir de un tablero digital inspirado en el videojuego *Mario Party*, diseñado en PowerPoint. El tablero simulaba un recorrido con casillas que representaban distintos desafíos o situaciones relacionadas con los temas del curso. Cada equipo debía avanzar por turnos, enfrentándose a preguntas o retos ubicados en las casillas.

Un ejemplo de los ejercicios propuestos es el siguiente: *"Lea las siguientes proposiciones: En los 60s fueron los llamados estudios longitudinales. En los 90s se hizo la educación obligatoria. En los 90s fueron los llamados estudios longitudinales. ¿Todas las premisas son verdaderas?"* Con este tipo de preguntas se buscaba fomentar la reflexión sobre los períodos históricos y las transformaciones que ha experimentado el currículo matemático.

Además, se implementó un sistema de monedas que funcionaban como puntos de avance y objetos especiales que otorgaban ventajas o desventajas entre los equipos. Algunas dinámicas permitían, por ejemplo, "robar" puntos u objetos valiosos dentro del juego o "protegerse" de otras acciones, lo que generaba una competencia sana y un ambiente dinámico durante la exposición. En este caso, el proceso fue mediado por el equipo expositor, encargado de controlar el avance de las personas jugadores, explicar las situaciones que surgían y mantener el orden durante su desarrollo.

Sin embargo, durante la aplicación de la estrategia surgieron dificultades que afectaron el desarrollo de la actividad. A pesar del entusiasmo inicial, varios compañeros manifestaron confusión respecto a las reglas del juego y la forma en que debían participar. Asimismo, algunos equipos, incluso con la mediación de alguno de los expositores que tampoco tenían claras las reglas, no comprendieron la mecánica general ni la manera de utilizar los objetos o monedas, mientras que otros optaron por improvisar o incluso hacer "trampa" para avanzar. Es así como esta falta de claridad generó un ambiente de desorden que, en lugar de fomentar la colaboración, provocó una desorientación y desmotivación en algunas personas.

El juego, sin embargo, contaba con una dinámica bien pensada. El PowerPoint funcionaba como el tablero y cada equipo tenía una ficha con los objetos correspondientes. Todos los grupos jugaban simultáneamente, ya que cada uno contaba con una copia del archivo. El avance se determinaba mediante dados virtuales. Cuando un equipo caía en una casilla especial, se generaba un reto en el cual debía elegir a un equipo rival para competir. Ese enfrentamiento consistía en responder una serie de preguntas relacionadas con el tema trabajado, y el grupo que obtuviera más aciertos le quitaba una estrella al oponente. Los puntos, en general, se conseguían respondiendo correctamente o mediante comodines; además, podían canjearse por estrellas, que representaban el objetivo principal del juego.

Dos años más tarde, en el marco de la investigación desarrollada para el Trabajo de Fin de Grado, se tuvo la oportunidad de profundizar en la gamificación y, al reflexionar sobre la experiencia a raíz de este escrito, se entiende que gran parte de las dificultades se debieron a una planificación y estudio incompleto del componente estructural del juego. En ese momento, el conocimiento que poseía sobre gamificación era muy limitado, por lo que no se tuvo presente la importancia de establecer reglas claras e incluir un apartado dentro del propio recurso que explicara, de manera clara, cómo se debía jugar. Si bien es cierto que se dedicó tiempo a definir los objetos y las preguntas, no se consideró que, para muchas personas, el juego de *Mario Party* no era familiar, lo que hizo que la dinámica resultara confusa.

A partir de nuevas lecturas y experiencias, como menciona Morillas (2016), la gamificación no consiste en agregar elementos de juego, sino en diseñar una experiencia significativa y coherente con los objetivos de aprendizaje. Por ello, aspectos como la claridad de las reglas, la secuencia lógica de los retos, la retroalimentación inmediata y la adecuación de la dificultad son fundamentales para mantener la motivación y garantizar que la dinámica cumpla su propósito pedagógico.

Debido a todo lo anterior, esta experiencia permitió reconocer el potencial que tiene la gamificación en los procesos de enseñanza y aprendizaje, principalmente en contextos universitarios en los que la motivación se puede ver afectada por la rutina, la carga académica de los cursos y otros factores. A pesar de las dificultades antes mencionadas, el proceso ayudó a comprender que el diseño de una estrategia basada en la gamificación exige una planificación rigurosa, en la que se consideren no solo los elementos lúdicos —propios de los juegos—, sino también la claridad de las reglas, la coherencia interna del sistema de juego y su alineación con los objetivos de aprendizaje.

Dicha práctica conllevó a valorar la importancia de que las actividades basadas en la gamificación no se reduzcan a simples juegos, sino que se integren como recursos didácticos con sentido pedagógico que sean capaces de generar un aprendizaje más significativo. Asimismo, se evidenció la necesidad de anticipar posibles obstáculos, como la falta de familiaridad del grupo con la dinámica o el riesgo de que la atención se centre más en la competencia que en la comprensión de los contenidos.

A nivel personal, esta vivencia representó un punto crítico en mi formación docente, pues permitió reconocer áreas de mejora en cuanto al diseño de instrucciones y la gestión de la dinámica grupal. Una de las principales lecciones fue la importancia de ofrecer explicaciones claras, precisas y secuenciadas, especialmente cuando se trabaja con recursos innovadores como los juegos didácticos. Una instrucción ambigua o incompleta puede generar confusión, desmotivación y desorden, lo que afecta directamente el aprendizaje y la experiencia general de la actividad.

Además, esta experiencia evidenció una limitación importante relacionada con el tipo de preguntas empleadas en el juego. Muchas de ellas apelaban a la memorización de datos o conceptos poco relevantes para el desarrollo profesional de una persona docente de matemáticas. Este enfoque estuvo condicionado en parte por la naturaleza del texto trabajado, el cual privilegiaba la memorización de información por encima del análisis crítico. En retrospectiva, habría sido más enriquecedor diseñar preguntas orientadas a la reflexión sobre la función y forma del currículo, la toma de decisiones pedagógicas o la propia práctica docente. Preguntas de carácter analítico, que inviten a argumentar, justificar y debatir ideas, podrían aportar un valor formativo mucho mayor.

Finalmente, se considera que integrar el juego en la educación universitaria no es solo una forma de hacer más atractiva la enseñanza, sino también una oportunidad para replantear la relación entre el aprendizaje, la emoción y la participación activa. La gamificación, cuando se aplica de manera consciente y bien estructurada, puede convertirse en una herramienta poderosa para promover el pensamiento crítico, la colaboración y el compromiso genuino con el conocimiento (Llapo, 2019; Morillas, 2016).

No obstante, más allá del componente lúdico, resulta fundamental que el juego posea un sentido funcional en los desafíos y preguntas que propone. Es decir, que no solo entretenga, motive y despierte la competencia entre los participantes, sino que también los lleve a reflexionar y pensar de manera profunda sobre lo que responden. En el caso particular de la formación del docente de matemáticas, esto implica diseñar dinámicas en las que las preguntas inviten a analizar el uso y la naturaleza de la matemática, así como el sentido y el propósito del currículo en la enseñanza de esta disciplina. De esta manera, el juego se convierte en una herramienta didáctica atractiva en un espacio formativo que integra el pensamiento, la emoción y la reflexión profesional.

Referencias Bibliográficas

Edo, E. (2021). *La metodología de gamificación para el aprendizaje de historia de la educación española: investigación acción en la formación universitaria de docentes* [Tesis doctoral]. Universitat Politècnica de València.

Hunicke, R., LeBlanc, M., & Zubek, R. (2004). MDA: Un enfoque formal sobre el diseño y la investigación de juegos. En *Actas del Taller Challenges in Game Design and Game Research, Northwestern University.*

Llapo, J. (2019). *La gamificación para el rendimiento académico en el curso de Cálculo 2 de los estudiantes de la Facultad de Ingeniería de la UPN, Trujillo 2017* [Tesis de maestría, Universidad San Pedro]. Repositorio Universidad San Pedro.

Morillas, C. (2016). *Gamificación de las aulas mediante las TIC: un cambio de paradigma en la enseñanza presencial frente a la docencia tradicional* [Tesis doctoral, Universidad Miguel Hernández]. Repositorio RediUMH.

ANEXOS

Presentación de PowerPoint: https://docs.google.com/presentation/d/1SBwg8zN-B9VZKBpp9m6VoEAz2YEB-AKs/edit?usp=sharing&ouid=105493256956515864426&rtpof=true&sd=true

Indicaciones del uso de los objetos dentro del juego: https://drive.google.com/file/d/1NKPRAFE3Xu1AS-0k0AaN-DSX-yeTOHJJ/view?usp=sharing

Cuadernos
de Investigación y Formación
en Educación Matemática

Año 2026 **Vol. 19** **N°. 1**

EDITORIAL UCR

19126

9 772215 562000