Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573
Vol: 19 · N°. 1 · 2026
73-101
Recibido: 28/08/2025
Aprobado: 10/12/2025

Artículos de investigación

PROPUESTA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LAS RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DESDE EL MODELO DEL TRIÁNGULO SEMÁNTICO

DIDACTIC PROPOSAL FOR TEACHING TRIGONOMETRIC RATIOS BASED ON THE SEMANTIC TRIANGLE MODEL

Priscilla M. Angulo Chaves[1]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0008-2757-2136

Javier A. Picado Bermúdez[2]
ORCID iD: https://orcid.org/0009-0000-5412-3119

RESUMEN

Este artículo presenta una propuesta didáctica para la enseñanza de las razones trigonométricas basada en el modelo del triángulo semántico del significado matemático, propuesto por Rico y Moreno (2016). El objetivo del estudio es analizar el sentido que los estudiantes atribuyen al contenido de las razones trigonométricas mediante el diseño e implementación de una intervención educativa sustentada en dicho modelo. La propuesta se desarrolló en el marco de una investigación cualitativa con enfoque interpretativo, dirigida a estudiantes de primer año de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica. A través del diseño de una intervención compuesta por cuatro lecciones, se exploró el potencial de la terna semántica que aborda la estructura conceptual, sistemas de representación, y sentidos y modos de uso, estos como eje organizador de la planificación didáctica. Los resultados evidencian que este modelo favorece una enseñanza más coherente y significativa del contenido al permitir articular distintos niveles de complejidad conceptual, diversas representaciones y aplicaciones contextualizadas. Además, se identificaron elementos emergentes que sugieren una mayor apropiación del contenido por parte del estudiantado, particularmente en el uso de representaciones

[1] Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, Costa Rica. Correo electrónico: priscilla.angulo@ucr.ac.cr

[2] Sección de Matemática, Universidad de Costa Rica, San Ramón, Costa Rica. Correo electrónico: javier.picado@ucr.ac.cr

gráficas y la argumentación conceptual. Se concluye que la terna semántica constituye una herramienta teórica y metodológica valiosa tanto para la enseñanza como para la formación docente en Matemática.

Palabras clave: Significado Matemático, Terna semántica, Razones trigonométricas, Intervención educativa.

ABSTRACT

This article presents a didactic proposal for teaching trigonometric ratios based on the semantic triangle model of mathematical meaning, as proposed by Rico and Moreno (2016). The aim of the study is to analyze the meaning that students attribute to the content of trigonometric ratios through the design and implementation of an educational intervention based on this model. The proposal was developed within the framework of a qualitative research study with an interpretative approach, targeting first-year students in the Mathematics Teaching program at the University of Costa Rica. Through the design of a four-lesson intervention, the potential of the semantic triad—conceptual structure, representation systems, and senses and modes of use—as an organizing axis for lesson planning was explored. The results show that this model supports a more coherent and meaningful approach to teaching by integrating different levels of conceptual complexity, various representations, and contextualized applications. Additionally, emergent elements were identified, suggesting a deeper appropriation of the content by students, particularly in their use of graphic representations and conceptual reasoning. It is concluded that the semantic triangle constitutes a valuable theoretical and methodological tool for both mathematics teaching and teacher education.

Keywords: Mathematical Meaning, Semantic Triangle, Trigonometric Ratios, Educational Intervention.

1. INTRODUCCIÓN

La trigonometría es una de las ramas fundamentales de la Matemática debido a que posee un alto valor conceptual, estableciendo múltiples conexiones con diversas disciplinas científicas, además de que cuenta con una amplia gama de contextos y aplicaciones, desde ciencias puras hasta diversas áreas tecnológicas y en las que se aplica, como lo son la ingeniería, arquitectura, astronomía, ciencia de la computación y geografía, entre otras. Por ello, la Trigonometría es una herramienta poderosa e indispensable en la práctica académica y profesional.

A pesar de la importancia que poseen los temas afines a la trigonometría, gran parte de este contenido se descuida por su subestimación. Esta situación es sumamente preocupante porque genera deficiencias en el desarrollo de habilidades matemáticas significativas, especialmente para los estudiantes que planean cursar carreras universitarias científicas o técnicas, las cuales requieren el uso adecuado de la disciplina (Aray et al., 2020). Por tanto, la trigonometría debe ser tratada con la seriedad e importancia que merece, pues a menudo se utilizan formas inadecuadas de abordar el tema, así como el uso incorrecto de conceptos básicos o explicaciones carentes de su verdadero significado, lo que hace que estos temas sean aún más confusos y difíciles de comprender para los estudiantes. (Martín-Fernández et al., 2016).

En esta misma línea, Fiallo-Leal (2010) señala que existen diferentes factores que afectan negativamente el proceso de enseñanza-aprendizaje de la trigonometría. Entre estos se destaca la dificultad de los estudiantes para interpretar las razones trigonométricas en función del contexto, lo que impide la aplicación significativa del conocimiento. Asimismo, se señala la escasa disposición hacia la indagación autónoma y la falta de experiencias investigativas en el aula, donde estas permitan explorar nuevas formas de entender y aplicar los conceptos trigonométricos, así como comprender su valor en la resolución de problemas reales.

Lo anterior se agrava con los modelos de enseñanza que se brindan, ya que si los estudiantes utilizan procesos memorísticos no se genera un aprendizaje significativo (Diéguez et al., 2019). Por lo tanto, Rico (2012) plantea una terna semántica que permita el correcto significado en el aula: (1) el profesor comienza considerando diferentes representaciones de un mismo contenido, (2) se analizan sus propiedades y las relaciones que establece con aquellos que pertenecen a la misma estructura y (3) examina las diferentes referencias, fenómenos, sentidos y modos de uso que están en su origen.

Sin embargo, es importante destacar como Thompson (2013) explica la importancia de prestar especial atención a las generaciones venideras, señalando que no basta con revisar lo que se ha hecho hasta ahora, sino que es urgente enfocarse en lo que aún está por construirse. En este sentido, se destaca la necesidad de formar, de manera rigurosa y reflexiva, a los futuros docentes de matemática, esto debido a que son los primeros que deben comprender profundamente el significado de los contenidos que enseñarán, propiciando que se desarrolle una comprensión genuina, crítica y funcional de los conceptos matemáticos, especialmente en áreas que históricamente han presentado grandes desafíos, como lo es la trigonometría.

Partiendo de esta situación, este estudio se desarrolló con estudiantes de primer año de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica, Sede de Occidente, quienes se encuentran en las etapas iniciales de su formación docente. Es así que la investigación se enmarca en el área de la trigonometría, con el propósito de analizar, desde un enfoque cualitativo, el sentido que estos estudiantes atribuyen al contenido de las razones trigonométricas, además, se busca establecer un precedente en el campo de la investigación educativa sobre la trigonometría en Costa Rica, especialmente en el contexto posterior a la reforma de los programas de estudio de matemática implementada en el año 2012.

2. ELEMENTOS CONCEPTUALES

El estudio adecuado de un contenido matemático permite fortalecer la enseñanza del mismo. Bajo esta perspectiva, se incorporan fundamentos teóricos que sustentan el análisis, la interpretación y explicación de los datos, para ello se desarrolló la idea planteada por Rico y Moreno (2016) y otros colaboradores que permiten enriquecer aún más la teoría que se quiere exponer. Se plantea una indagación en el significado de un contenido en la enseñanza de la matemática desde su estructura conceptual, los sistemas de representación y los sentidos y modo de uso que estos posean, además de explicar la importancia de dicho análisis del significado en la planificación curricular, y más específicamente, en las razones trigonométricas.

El uso de la terna semántica en el estudio de distintos contenidos matemáticos ha comenzado a incorporarse progresivamente desde su origen en el campo de la filosofía. Rico (2012) explica que Frege propone una noción de significado basada en tres dimensiones: el sentido que expresa, el modo de uso y el concepto o definición en sí misma. Estos tres elementos constituyen la base para la formulación de una terna semántica aplicada a la educación matemática.

Rico y Moreno (2016) proponen un triángulo semántico como herramienta para que los estudiantes puedan analizar el significado de los contenidos matemáticos a partir de tres componentes complementarios: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los sentidos y modos de uso. Este modelo busca establecer una relación coherente entre el concepto en sí, los diferentes usos que puede adquirir en distintos contextos y las diversas formas en que puede representarse. En esta línea, Fernández-Plaza et al. (2015) plantean interrogantes clave para el análisis del significado desde la perspectiva del estudiante:

> ¿sobre qué conceptos, propiedades, definiciones o relaciones los estudiantes argumentan y comunican sus ideas Matemáticas?, ¿qué signos emplean para ello?, ¿qué modos de uso se identifican en el concepto? o ¿qué situaciones o contextos enmarcan sus ideas Matemáticas o están en su origen? (p.215)

Si se logra una correcta correlación de estos tres aspectos, el estudiante tendrá la capacidad de comprender correctamente el significado del contenido matemático abordado. Cada uno de esos componentes se conforma de una serie de elementos que permiten su caracterización y estudio, tal como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1. Componentes del significado de un contenido matemático.

Estructura conceptual			**Sistemas de representación**	**Sentidos y modos de uso**
Ámbitos o campos				
Conceptual	*Procedimental*	*Actitudinal*		
Hechos	Destrezas	Emociones	Simbólico	Modos de uso
Conceptos	Razonamientos	Moralidad y normas	Gráfico	Contextos
Estructuras	Estrategias	Valores éticos		Situaciones

Fuente: Elaboración de Angulo y Picado (2022) basada en la autoría de Rico y Moreno (2016).

En un sentido estrictamente matemático, Castro (2015) define una estructura como un "conjunto con una colección finita de operaciones y relaciones definidas dentro del conjunto" (p. 72). Sin embargo, en el contexto de la enseñanza, el término 'estructura conceptual' adquiere un significado más amplio, vinculado al análisis didáctico del contenido. Desde esta perspectiva, Angulo y Picado (2022) lo entienden como "todos aquellos aspectos formales que caracterizan y describen a un contenido matemático, los conjuntos de procedimientos, conceptos, propiedades y relaciones que se derivan" (p.21) lo que permite establecer un criterio de veracidad que acate y permita dar sentido matemático al contenido que se aborda.

Respecto a la información presentada en la tabla 1, Angulo y Picado (2022) en el análisis que elaboraron destacan que la estructura conceptual se divide en tres ámbitos o campos de estudio, los cuales están compuestos por tres niveles de complejidad. El *campo conceptual* se refiere al conjunto de ideas y vínculos que conforman el contenido matemático, de este se desglosan los hechos, los cuales se analizan a través de términos, notaciones, convenios y resultados; se tienen también los conceptos y cómo estos se relacionan entre sí; por último, las estructuras conceptuales, que emergen de las transformaciones y conexiones que pueden relacionar conceptos más complejos. Ahora bien, en cuanto al ámbito procedimental se tiene las destrezas que se utilizan para procesar los hechos, los razonamientos que procesan los conceptos, y finalmente, las estrategias que se utilizan para procesar las estructuras. Por otra parte, el campo actitudinal se refiere a las emociones, la moralidad, las normas y los valores éticos. No obstante, debido al alcance de esta investigación y sus metas, dicho campo no se emplea en este trabajo.

Esta estructura conceptual resulta fundamental para dotar de significado a los distintos contenidos matemáticos, ya que permite responder a preguntas clave como: "¿Cuáles son los conceptos que caracterizan el tema? ¿Qué procedimientos están implicados en el tema? ¿Cómo se relacionan estos conceptos entre sí? ¿Cómo se relacionan estos procedimientos entre sí? ¿Cómo se relacionan estos conceptos y estos procedimientos?" (Cañadas et al., 2016, p. 5).

Según Rico (2012) y Castro (2015) en el campo de la educación matemática, el uso de símbolos, palabras, diagramas y otras formas de representación, fundamentadas en sus propias normas, transmiten y detallan de forma propia el contenido matemático académico. Por tanto, Angulo y Picado (2022) definen los *sistemas de representación* de un contenido matemático escolar como la serie de propiedades, convenios, símbolos, gráficos, notas y otros signos pertinentes que presentan dicho concepto y lo vinculan con otros.

Es importante destacar que, para esta investigación, se toman en cuenta dos tipos de sistemas de representación: los simbólicos que incluyen símbolos alfanuméricos que operan bajo un sistema de normas preestablecido, y los gráficos que son figurativos, también operan bajo un sistema de normas de composición e interpretación.

Los sentidos y modos de uso hacen referencia a las circunstancias a las que se enfrenta el contenido matemático, las dificultades que puede solucionar y los fenómenos que estructuran (Ruiz-Hidalgo, 2016). En este estudio se toman en cuenta tres puntos de vista: los términos que constituyen la definición de un concepto y facilitan la comprensión de sus distintos sentidos, donde a veces los términos tienen un origen matemático concreto, o bien, forman parte del lenguaje diario de los alumnos; los contextos que son explicaciones de cómo las estructuras conceptuales satisfacen las demandas específicas de las matemáticas; y las situaciones se utilizan para proporcionar significado a los contenidos matemáticos, identificando contextos y usos de los distintos conceptos.

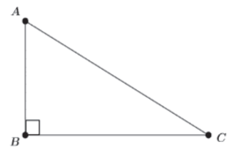
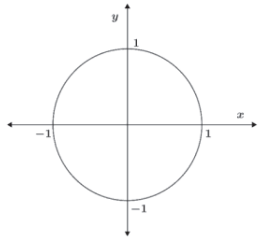
Esta terna semántica tiene un rol crucial en la elaboración del currículo, pues al tomar en cuenta estos tres elementos y sus componentes, se pueden crear vínculos entre ellos; asimismo en el profesor se genera un sentido de conciencia acerca de la relevancia de estos componentes en la comprensión del significado (Angulo y Picado, 2022). Para manipular y comprender un contenido matemático, es necesario reconocer su definición, entender sus representaciones, interpretar sus usos y, en términos generales, comprender todo lo que estos tres elementos vinculan entre sí. En otras palabras, otorgarle un significado, lo que facilita comprender y ordenar el significado de un contenido matemático desde un enfoque constructivo (Castillo-Céspedes et al., 2017).

Por lo tanto, para elaborar significados matemáticos adecuados y prácticos, los alumnos deben sugerir, desarrollar, construir y utilizar sus ideas a partir de las diversas tareas propuestas por el profesor. Desde este punto se empiezan a percibir los significados que los escolares construyen, a través de diferentes formas de expresión y uso, así como la habilidad para vincular varias estructuras y emplear diferentes procedimientos (Gómez, 2007).

En la tabla 2, se ejemplifican los tres componentes para el caso específico de las razones trigonométricas.

Tabla 2. Ejemplos sobre las razones trigonométricas en los componentes del significado

Organizador Conceptual	**Componentes**		**Ejemplos**
Estructuras Conceptuales	Conceptual	Hechos	Términos: razones, identidades, seno, coseno, tangente. Convenios: denotar $sen^2(x)$ en lugar de $(sen(x))^2$.
		Conceptos	Definición de las razones trigonométricas como la relación entre los lados y los ángulos de un triángulo rectángulo.
		Estructuras	El círculo trigonométrico.
	Procedimental	Destrezas	Calcular razones trigonométricas dados los lados y ángulos de un triángulo rectángulo.

		Razonamientos	Deducir identidades entre razones trigonométricas.
		Estrategias	Determinar las coordenadas de un punto en el círculo trigonométrico.
Sistemas de representación	Simbólico		Se utiliza $sen(x)$ para representar *seno de* x, $cos(x)$ para representar *coseno de* x, $tan(x)$ para representar *tangente de* x
	Gráfico		**Figura 1.** Triángulo rectángulo de vértices A, B y C.  **Figura 2.** Círculo trigonométrico centrado en el origen 
Sentidos y modos de uso	Modo de uso		Razón (como relación), Identidad (como equivalencia matemática).
	Contextos		Calcular distancias o ángulos.
	Situaciones		Personales, laborales y educativas, sociales y científicas.

Fuente: Elaboración de los autores.

3. METODOLOGÍA

Este estudio se enmarcó en un enfoque cualitativo de tipo exploratorio y descriptivo, dado que su propósito fue analizar el significado que estudiantes universitarios de primer ingreso asignan al contenido matemático de razones trigonométricas, y proponer una planificación didáctica que atienda dicha problemática. Según Hernández-Sampieri et al. (2014), las investigaciones cualitativas de tipo exploratorio-descriptivo buscan comprender los significados que los participantes atribuyen a determinados fenómenos en contextos específicos. La investigación se fundamenta en el modelo del triángulo semántico propuesto por Rico y Moreno (2016), el cual considera tres componentes para el análisis del significado de un contenido: estructura conceptual, sistemas de representación y sentidos y modos de uso.

La propuesta se desarrolló en tres fases. En la primera, se aplicó un cuestionario semántico a estudiantes de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica, sede de Occidente, con el fin de identificar sus concepciones iniciales sobre las razones trigonométricas. En la segunda fase, se diseñó e implementó una intervención educativa compuesta por cuatro lecciones, donde se abordaron contenidos fundamentales de Trigonometría desde un enfoque que favorece la construcción de significado; este artículo se basa principalmente en el abordaje teórico que sustenta dicha intervención, así como en el proceso de diseño y estructuración de las lecciones que la conforman. Finalmente, en la tercera, se aplicó un segundo cuestionario que permitió evaluar posibles cambios en las concepciones del estudiantado.

Los participantes fueron estudiantes del curso Matemática de Ingreso, correspondiente al primer ciclo de la carrera. La intervención se llevó a cabo con uno de los grupos del curso, seleccionado por conveniencia horaria. Las lecciones se impartieron de forma virtual y sincrónica, con una duración aproximada de dos horas por sesión. Las actividades de cada clase fueron diseñadas para trabajar explícitamente los componentes del significado, mediante el uso de representaciones gráficas, razonamientos matemáticos y problemas contextualizados.

Para la elaboración de los instrumentos de recolección de datos se construyó un banco de preguntas alineadas con los componentes del triángulo semántico. Cada pregunta fue validada por expertos y categorizada según el tipo de componente predominante. Esta organización sirvió de guía tanto para el análisis del desempeño estudiantil como para el diseño de las actividades en el aula.

3.1 Intervención educativa

La intervención educativa consistió en una secuencia de cuatro clases, cada una con una duración aproximada de dos horas, impartidas de forma virtual y sincrónica. El objetivo de esta intervención fue propiciar en el estudiantado una comprensión significativa del contenido de razones trigonométricas, abordando dicho contenido desde los tres componentes del significado propuestos por Rico y Moreno (2016): estructura conceptual, sistemas de representación, y sentidos y modos de uso. La planificación de las clases se realizó de manera progresiva, estableciendo conexiones entre los temas y favoreciendo el desarrollo paulatino del pensamiento trigonométrico.

La primera clase tuvo como objetivo introducir el concepto de razón trigonométrica a partir del triángulo rectángulo. Se abordaron las seis razones fundamentales (seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante), tanto en su definición conceptual como en su representación simbólica y gráfica. Se enfatizó la relación entre los lados del triángulo y los ángulos agudos, así como la manera correcta de denotar cada razón. A lo largo de la sesión se desarrollaron ejercicios en los que el estudiantado debía calcular razones trigonométricas a partir de medidas dadas y completar tablas con sus respectivos valores. En los anexos se pueden observar las tablas que se compartieron a los estudiantes con el fin de que ellos las completaran. Al finalizar, se resolvieron tres problemas contextualizados que involucraban situaciones personales y educativas, lo que permitió aplicar las razones trigonométricas a escenarios reales y favorecer su comprensión como herramientas útiles. En esta clase se trabajó fuertemente la estructura conceptual, tanto a nivel de hechos y conceptos como de destrezas, junto con los sistemas de representación simbólicos y gráficos. Los sentidos y modos de uso se incorporaron a través de las situaciones problema presentadas.

La segunda clase estuvo orientada a introducir el círculo trigonométrico como una estructura conceptual fundamental en el estudio de la Trigonometría. La lección inició con la explicación del origen de la medida en radianes, acompañada de la conversión entre grados y radianes mediante ejemplos numéricos. Posteriormente, se definió el círculo trigonométrico y se representaron gráficamente sus elementos principales: el radio unitario, los ejes coordenados y los cuadrantes. Se explicó la forma en que las razones trigonométricas varían dependiendo del cuadrante, y se analizó el signo que asumen seno, coseno y tangente en cada uno de ellos. Se resolvieron ejercicios en los que se calculaban razones trigonométricas de ángulos expresados en radianes y se aplicaron estos conocimientos en dos problemas de carácter espacial relacionados con la ubicación de objetos. Esta clase fortaleció el componente de razonamiento dentro de la estructura conceptual y profundizó en los sistemas de representación gráficos, al tiempo que incluyó contextos de uso real que reforzaron el vínculo entre el contenido matemático y su aplicabilidad.

La tercera clase tuvo como eje central el estudio de los ángulos de referencia y su utilización para determinar el valor de razones trigonométricas en diferentes cuadrantes. En la primera parte de la clase se retomaron los problemas trabajados en la lección anterior para introducir de forma natural el concepto de ángulo de referencia. Se representaron estos ángulos en el plano cartesiano y se realizaron ejercicios con ángulos mayores a 90°, en los que el estudiantado debía: convertir a radianes, ubicar el ángulo en la circunferencia trigonométrica, determinar su ángulo de referencia y calcular el valor de seno, coseno y tangente del ángulo dado. En la segunda parte de la clase, se abordó por primera vez la identidad pitagórica y su deducción geométrica a partir de un triángulo inscrito en la circunferencia. Esta identidad se relacionó luego con otras identidades trigonométricas básicas. Las actividades permitieron trabajar estrategias y razonamientos más complejos, con un uso intensivo de representaciones gráficas y simbólicas, y se presentaron problemas en contextos laborales y científicos. En esta lección, se abordaron de manera integral los tres componentes del significado, consolidando los conocimientos previos y preparando al estudiantado para los contenidos finales.

Finalmente, la cuarta clase se dedicó al estudio y aplicación de las identidades trigonométricas de suma y resta de ángulos. Se retomaron las identidades vistas anteriormente y se introdujeron nuevas fórmulas, acompañadas de ejercicios que permitieron explorar sus usos y validar su veracidad. A lo largo de la sesión se resolvieron ejemplos en los que los estudiantes debían justificar procedimientos, establecer conexiones entre distintas razones trigonométricas y resolver expresiones mediante la aplicación de identidades. Además, se plantearon problemas aplicados que requerían integrar varias habilidades desarrolladas en las clases anteriores, como el uso de ángulos de referencia, el análisis de signos según el cuadrante y la comprensión gráfica de las razones. Esta clase enfatizó el uso de razonamientos formales y estrategias, así como la consolidación de los sistemas de representación simbólicos. También se reforzaron los sentidos y modos de uso del contenido al resolver problemas contextualizados que exigían una comprensión flexible del tema.

4. RESULTADOS

Los resultados que se presentan en este artículo se derivan del análisis de las respuestas obtenidas en los cuestionarios inicial y final, así como de las producciones escritas del estudiantado durante la intervención educativa. Este análisis permitió identificar evidencias claras sobre el sentido que los participantes atribuyen al contenido de las razones trigonométricas desde los tres componentes de la terna semántica del significado: la estructura conceptual, los sistemas de representación y los sentidos y modos de uso. Dichos hallazgos se presentan de manera integrada, destacando los cambios observados antes y después de la implementación de la propuesta didáctica.

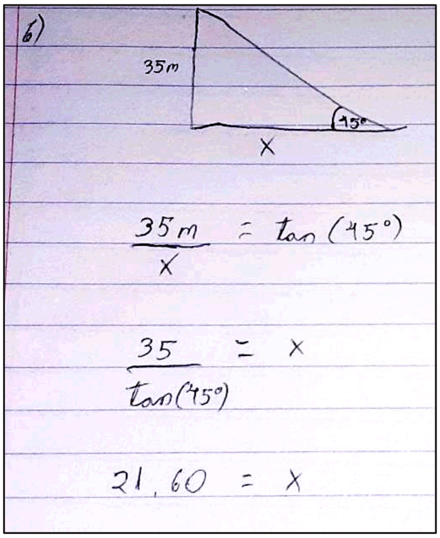
En relación con la estructura conceptual, las respuestas iniciales mostraron una comprensión limitada del contenido, principalmente de carácter operacional. La mayoría de los estudiantes definía las razones trigonométricas como una simple relación entre lados de un triángulo rectángulo, sin establecer vínculos entre los conceptos. Por ejemplo, ante la pregunta "¿Qué representa el seno de un ángulo?", un participante respondió: "Es el lado opuesto entre la hipotenusa" (E3). Este tipo de definición revela una comprensión centrada en el procedimiento, donde el concepto se asocia con una fórmula y no con una estructura de relaciones. De acuerdo con Rico y Moreno (2016), este tipo de significado se ubica en el nivel de hechos dentro del campo conceptual, pues se limita a la repetición de términos y notaciones sin establecer conexiones entre ellos.

Tras la intervención, las respuestas reflejaron una comprensión más completa. Varios estudiantes comenzaron a establecer relaciones entre distintos objetos trigonométricos, integrando ideas del círculo unitario, los signos de las razones según el cuadrante y las identidades fundamentales. Una de las respuestas posteriores lo ejemplifica: "El seno de un ángulo se puede entender también como la coordenada y del punto sobre el círculo trigonométrico" (E7). Este tipo de enunciado muestra una transición hacia un pensamiento estructural, donde las definiciones se vinculan con otras representaciones y propiedades, evidenciando una comprensión más profunda del significado matemático (Castro, 2015; Fernández-Plaza et al., 2015).

Respecto a los sistemas de representación, las evidencias iniciales indican una preferencia marcada por el uso simbólico y numérico, con escasa referencia a lo gráfico. Muchos estudiantes resolvían las tareas recurriendo a fórmulas sin diagramas o interpretaciones visuales. Por ejemplo, una respuesta común fue "tan = opuesto/adyacente" (E1), sin justificación ni referencia al contexto geométrico. Este comportamiento es consistente con lo señalado por Fernández-Plaza et al. (2015), quienes advierten que los estudiantes suelen operar dentro de un único registro, sin establecer equivalencias entre ellos.

Posterior a la intervención educativa en donde se trabajó con representaciones simbólicas y gráficas, se observó una mayor flexibilidad. Los estudiantes comenzaron a combinar expresiones algebraicas con esquemas del círculo trigonométrico y argumentaciones en lenguaje natural. Una respuesta posterior ejemplifica este avance: "En el segundo cuadrante el seno es positivo porque el punto está sobre el eje y positivo" (E5). Este tipo de producción evidencia la articulación entre registros y la consolidación de significados que trascienden el plano procedimental (Rico y Moreno, 2016). La transición entre representaciones favoreció una comprensión más coherente del concepto y permitió vincular los aspectos geométricos con los algebraicos. En la figura 3 se observa la respuesta de un estudiante a la siguiente pregunta: Suponga que una persona observa la ventana del último piso de la biblioteca con un ángulo de elevación de 45°. Si la altura desde la base del edificio de la biblioteca hasta la ventana es de 35 m, ¿a qué distancia se encuentra la persona con respecto a la entrada de la biblioteca?

Figura 3. Respuesta dada por un estudiante donde integra representación gráfica y algebraica



Fuente: Elaboración propia a partir de una respuesta estudiantil.

En cuanto a los sentidos y modos de uso, los datos iniciales mostraron una concepción restringida del contenido, limitada a ejercicios escolares sin conexión con contextos reales. Las respuestas se centraban en calcular lados o encontrar ángulos, sin mencionar aplicaciones prácticas o interpretaciones fenomenológicas. Sin embargo, tras la intervención, surgieron evidencias de una apropiación más amplia del significado. Algunos participantes comenzaron a vincular las razones trigonométricas con situaciones cotidianas y científicas, como se aprecia en la respuesta de E2: "La tangente sirve para medir la altura de un edificio si conozco la distancia y el ángulo". Este cambio refleja un desplazamiento hacia un sentido funcional del contenido, en concordancia con lo que Rico (2012) y Ruiz-Hidalgo (2016) denominan el componente de *modos de uso* del significado matemático.

El análisis general muestra que, durante la intervención, los estudiantes transitaron desde una comprensión principalmente formal y fragmentada hacia una comprensión más integrada, donde los tres componentes de la terna semántica se conectan de manera coherente. La planificación basada en la terna permitió vincular definiciones, procedimientos, representaciones y modos de uso, generando una estructura significativa del aprendizaje. Por tanto, la evidencia obtenida respalda la pertinencia del modelo teórico de Rico y Moreno (2016) como eje organizador para la enseñanza de las razones trigonométricas en la formación inicial docente.

5. CONCLUSIONES

El diseño e implementación de una propuesta didáctica basada en la terna semántica del significado demostró ser una estrategia valiosa para abordar contenidos matemáticos de manera más comprensiva y alineada con los principios de una educación centrada en la construcción de significado. De forma específica, el tema de razones trigonométricas se benefició de una planificación que no se limitó a la exposición teórica magistral, sino que integró diversos niveles de complejidad conceptual, formas de representación y modos de uso significativos para el estudiantado. Estos hallazgos se complementan con los resultados de un análisis comparativo en el que se observaron avances cualitativos en los tres componentes del significado tras la implementación de la intervención educativa, en particular en el uso de representaciones y en la argumentación conceptual de los estudiantes.

Este enfoque permitió que cada clase se desarrollara con un propósito didáctico claro, estructurada intencionalmente en torno a los tres componentes del modelo: estructura conceptual, sistemas de representación y sentidos y modos de uso. Dicha articulación favoreció un aprendizaje más profundo, en el que los estudiantes no solo adquirieron definiciones y procedimientos, sino que también fueron expuestos a múltiples formas de pensar y aplicar los conceptos trigonométricos. La experiencia pone en evidencia que el triángulo semántico constituye una herramienta poderosa para la planificación didáctica en el aula. Este resultado se alinea con lo observado por otros autores como Mora et al., (2014) y Vilchez y Ramón (2017), quienes destacan cómo una estrategia didáctica adecuada puede fortalecer la comprensión del contenido a partir de la articulación de significados.

Además, se destaca que esta propuesta ofrece un camino para replantear la enseñanza de la trigonometría en los primeros cursos universitarios, especialmente considerando las limitaciones arrastradas desde la educación secundaria. El impacto de esta intervención también adquiere relevancia al considerar que los participantes eran estudiantes en formación docente, por lo que su experiencia con esta propuesta podría incidir en sus futuras prácticas de enseñanza. El modelo permite al docente anticipar dificultades conceptuales, seleccionar representaciones apropiadas y proponer actividades contextualizadas que favorezcan el razonamiento y la comprensión.

Adicionalmente, los materiales diseñados para esta intervención, lecciones, ejercicios y recursos teóricos representan un aporte valioso, tanto para la planificación de otros docentes como para futuras investigaciones centradas en la construcción de significado desde la terna semántica. Para que se continue el desarrollo de esta propuesta, se considera pertinente continuar explorando el uso de esta terna en otros contenidos matemáticos, tanto en la educación secundaria como universitaria, así como en niveles de complejidad mayor. Asimismo, sería valioso profundizar en el análisis de su impacto en los procesos de aprendizaje a través de investigaciones cualitativas o mixtas que permitan evidenciar con mayor claridad los cambios en las concepciones del estudiantado. Finalmente, se sugiere su incorporación en los procesos de formación inicial y continua del profesorado, donde puede servir como una herramienta teórica y metodológica para reflexionar sobre la enseñanza de los contenidos matemáticos desde una perspectiva más integral, crítica y consciente del significado que se construye en el aula.

Este trabajo no solo presenta una propuesta didáctica basada en la teoría del significado matemático, sino que también documenta un proceso riguroso de planificación que evidencia cómo esta teoría puede materializarse en acciones pedagógicas concretas. El análisis realizado permitió identificar avances en las concepciones estudiantiles y en su capacidad de representar, argumentar y aplicar las razones trigonométricas. Estos hallazgos, junto con los recursos generados, constituyen un aporte pedagógico y metodológico que puede ser replicado o adaptado para otros contextos y contenidos matemáticos.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

PAC y JPB concibieron la idea presentada, desarrollaron la teoría, adaptaron la metodología a este contexto. PAC elaboró el diseño de las lecciones y el material didáctico. JPB analizó los datos recopilados. Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por las personas autoras correspondientes, PAC y JPB previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Universidad de Costa Rica por incentivar la investigación y la formación continua de los docentes. A nuestra directora Dra. María Fernanda Vargas González, por su valioso acompañamiento, orientación y compromiso a lo largo de todo el proceso de desarrollo del Trabajo Final de Graduación.

6. REFERENCIAS

Angulo, P., y Picado, J. (2022). *Significado que manifiestan estudiantes de primer año de la carrera Enseñanza de la Matemática sobre el tema de razones trigonométricas* [Tesis licenciatura, Universidad de Costa Rica]. https://repositorio.sibdi.ucr.ac.cr/handle/123456789/20527

Aray, C., Guerrero, Y., Montenegro, L., y Navarrete, S. (2020). La superficialidad en la enseñanza de la trigonometría en el bachillerato y su incidencia en el aprendizaje del cálculo en el nivel universitario. *Rehuso, 2(5),* 62–69. https://revistas.utm.edu.ec/index.php/Rehuso/article/view/1684

Cañadas, M., Gómez, P., y Pinzón, A. (2016). *Módulo 2-Análisis de contenido.* MAD 5. http://funes.uniandes.edu.co/8453/1/Ca%C3%B1adas2015Apuntes.pdf

Castillo-Céspedes, M. J., Chaverri-Hernández, J. J., Hernández-Arce, K., y Vallejos Meléndez, D. (2017). *Estudio de los significados atribuidos al Teorema de Pitágoras que manifiestan profesores de matemática en formación inicial en Costa Rica.* [Tesis de licenciatura, Universidad de Costa Rica]. http://repositorio.sibdi.ucr.ac.cr:8080/jspui/handle/123456789/6015

Castro, E. (2015). *Significados de las fracciones en las matemáticas escolares y formación inicial de maestros.* [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. http://hdl.handle.net/10481/40316

Diéguez, A., Batista, M., y Figueroa, H. (2019). Trigonometría significativa y metacognición. *Opuntia Brava*, 11(2), 443–464. http://200.14.53.83/index.php/opuntiabrava/article/view/937

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Rico, L. (2015). Reasoning based on the concept of finite limit of a function at a point. *Enseñanza de Las Ciencias, 33*(2), 211-229. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1575

Fiallo-Leal, J. E. (2010). *Estudio del proceso de Demostración en el aprendizaje de las 99 Razones Trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica* [Tesis doctoral, Universitat de Valéncia]. https://www.educacion.gob.es/teseo/imprimirFicheroTesis.do?idFichero=yuWxCrIh1%20Kc%3D

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria.* [tesis doctoral, Universidad de Granada]. http://funes.uniandes.edu.co/444/

Hernández-Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, M. P. (2014). *Metodología de la investigación* (6.ª ed.). México: McGraw Hill Interamericana.

Martín-Fernández, E., Ruiz-Hidalgo, J. F., y Rico, L. (2016). Significado escolar de las razones trigonométricas elementales. *Enseñanza de Las Ciencias, 34(3),* 51–71. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1871

Mora, M, Nieto, E, Polanía, D, Romero, M y González, M. (2014). Capítulo 6: Razones trigonométricas vistas a través de múltiples lentes. Universidad de los Andes. Disponible en: https://hdl.handle.net/1992/32137

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la Matemática. *Avances de Investigación En Educación Matemática*, 39–63. http://funes.uniandes.edu.co/1986/1/Rico_Avances.pdf

Rico, L., y Moreno, A. (2016). *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria*. Pirámide. https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=660283

Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). Sentido y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de Secundaria* (pp. 139–152). Pirámide. https://dialnet.unirioja.es/servlet/libro?codigo=660283

Thompson, P. W. (2013). In the absence of meaning… . In Leatham, K. (Ed.), *Vital directions for research in mathematics education* (pp. 57-93). New York, NY: Springer.

Vilchez, J., y Ramón, J. (2017). *Aprendizaje personalizado de las funciones trigonométricas en educación secundaria*. II Congreso de Educación Matemática de América Central y de El Caribe. https://cemacyc.org/index.php/ii_cemacyc/iicemacyc/paper/viewFile/99/32

7. ANEXOS

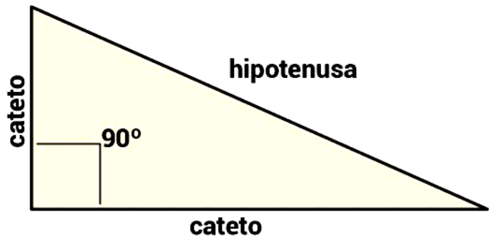
A continuación, se presenta el material elaborado para la intervención educativa. Cabe señalar que, dado que las lecciones se impartieron de forma virtual, los recursos de apoyo incluyen varias secciones sin resolver. Esta decisión respondió a la intención de que los docentes completaran la información en tiempo real durante la clase, utilizando una tableta gráfica mientras compartían pantalla, de modo que el desarrollo se construyera de manera conjunta con el estudiantado.

Clase 1: Razones trigonométricas en triángulo rectángulos

Recordemos

Un triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo recto (es decir, que mida 90°) y sus otros dos ángulos son agudos.

Los lados que conforman el ángulo recto se llaman **Catetos,** y el lado opuesto al ángulo recto se llama **Hipotenusa.**

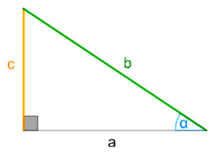
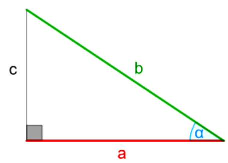
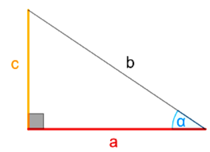


Razón trigonométrica

Una razón trigonométrica se refiera a la relación que existe entre la medida de los lados de un triángulo rectángulo con la medida de uno de sus ángulos agudos.

Existen 3 razones trigonométricas principales:

Seno, Coseno y Tangente.

Razón	Definición	Representación algebraica	Representación gráfica
Seno	$\dfrac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$	$sen(\alpha) = \dfrac{c}{b}$	
Coseno	$\dfrac{cateto\ adyacente}{hipotenusa}$	$cos(\alpha) = \dfrac{a}{b}$	
Tangente	$\dfrac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$	$tan(\alpha) = \dfrac{c}{a}$	

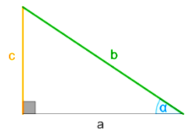
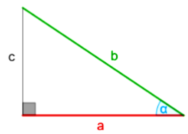
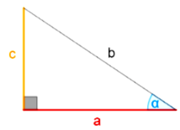
➔ **Actividad en Geogebra**

Cateto AB	Cateto BC	Hipotenusa AC	Medida del Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
5	3		59.04°			
6	6		45°			
3.48	2		60°			
7	2.4		71°			
6.96	4		60°			

Razones trigonométricas recíprocas

Estas razones son las recíprocas de las anteriores, corresponde respectivamente con

Cosecante, Secante y Cotangente

Razón	Definición	Representación algebraica	Representación gráfica
Cosecante	$\dfrac{hipotenusa}{cateto\ opuesto}$	$csc(\alpha) = \dfrac{1}{sen(\alpha)} = \dfrac{b}{c}$	
Secante	$\dfrac{hipotenusa}{cateto\ adyacente}$	$sec(\alpha) = \dfrac{1}{cos(\alpha)} = \dfrac{b}{a}$	
Cotangente	$\dfrac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$	$cot(\alpha) = \dfrac{1}{tan(\alpha)} = \dfrac{a}{c}$	

Cateto AB	Cateto BC	Hipotenusa AC	Medida del Ángulo	Cosecante	Secante	Cotangente
5	3		59.04°			
6	6		45°			
3.48	2		60°			
7	2.4		71°			

Clase 2:Círculo Trigonométrico

Radianes

Los radianes son una unidad de medida de los ángulos. Para comprender mejor su definción veamos el siguiente vídeo:

https://www.youtube.com/watch?v=MgbKapLpgUA

Conversiones entre Grados y Radianes

Como $\mathbf{180° = \pi\, rad}$, entonces $\frac{\mathbf{180°}}{\boldsymbol{\pi}\, \mathbf{rad}} = \mathbf{1} = \frac{\boldsymbol{\pi}\, \mathbf{rad}}{\mathbf{180°}}$, por lo que podemos multiplicar alguna de estas razones por el ángulo que queremos convertir.

Ejemplo: Realice las converciones de los siguientes ángulos.

60°=

45°=

85°=

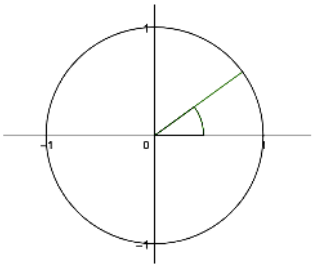
$\frac{\pi}{3} =$

$\frac{4\pi}{3} =$

<u>Problema 1:</u> Si en una naranja, cada gajo forma un ángulo de $\frac{\pi}{5}$, ¿cuántos gajos de naranja se pueden obtener?

El círculo trigonométrico

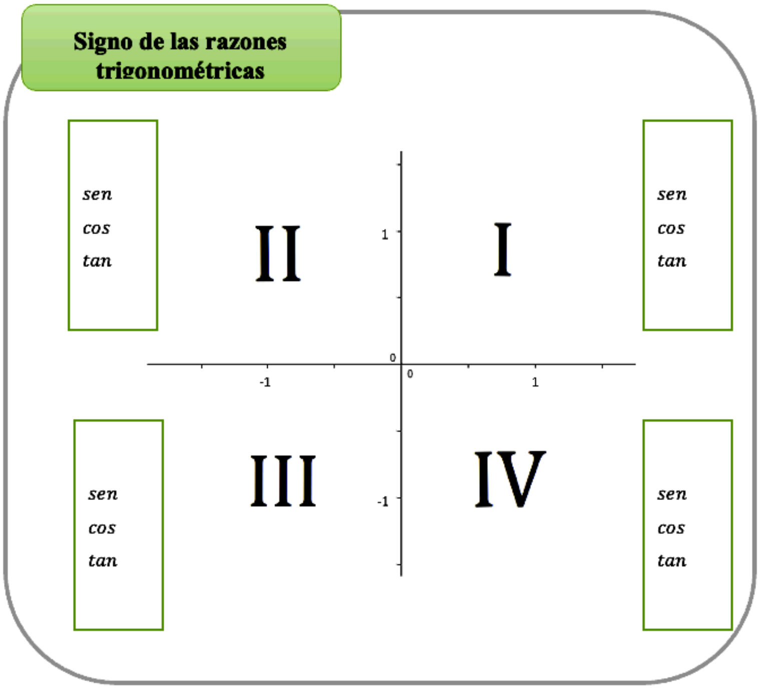
También llamado circunferencia trigonométrica o círculo unitario; es una circunferencia de radio 1 centrada en el origen del plano cartesiano. En ella, se pueden representar las razones trigonométricas.



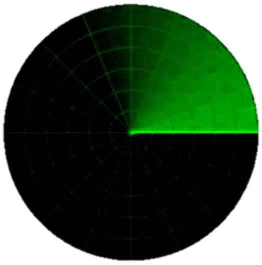
Medida del Ángulo		Seno	Coseno	Tangente
Grados	Radianes			
59°				
45°				
60°				
71°				
120°				
235°				
323°				

Problema 2: Utilice el círculo trigonométrico para analizar si las siguientes desigualdades son verdaderas o falsas.

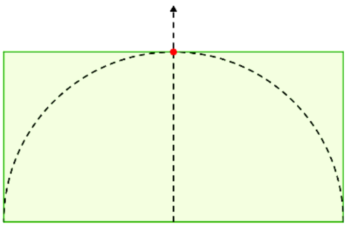
1. $\operatorname{sen}(20º) < \operatorname{sen}(70º)$
2. $\cos(20º) < \cos(70º)$
3. $\tan(20º) < \tan(70º)$
4. $\operatorname{sen}(45º) < \operatorname{sen}(135º)$



Problema 3: Imagine que está en un barco anclado en el mar. Dicho barco, como casi todos, tiene un radar. El radar ha detectado la presencia de otro barco en un punto, a un kilómetro de distancia con un ángulo de 135º. Determine la coordenada en la que se encuentra el barco detectado en el radar.



Problema 4: Esteban quiere colocar algunas plantas en su jardín. Desea que sus plantas formen una semicircunferencia sobre el terreno separas por la **misma distancia**. Para ello, hace un croquis sobre un círculo unitario donde el punto rojo se refiere a la única planta que sabe con certeza donde colocar:



Ayude a Esteban a determinar las coordenadas de las otras cuatro plantas.

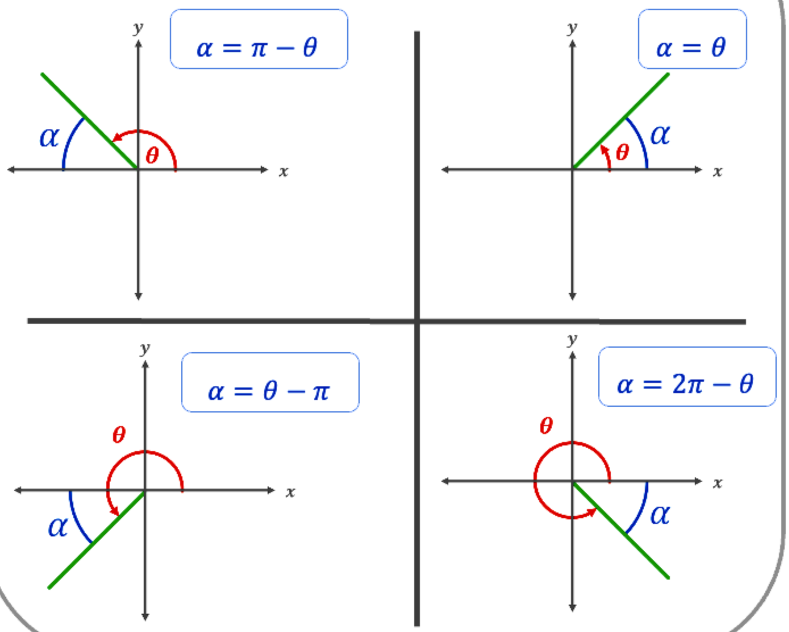
Clase 3: Ángulos de referencia

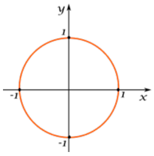
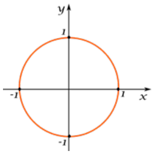
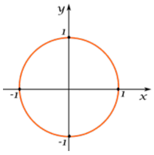
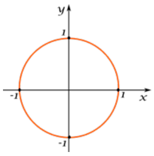
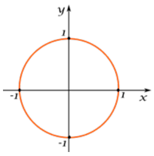
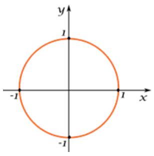
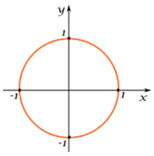
Ángulo de referencia

Un ángulo de referencia es un ángulo agudo positivo α que representa un ángulo θ de cualquier medida.

Este es el ángulo más pequeño formado entre el lado terminal de θ y el eje x.

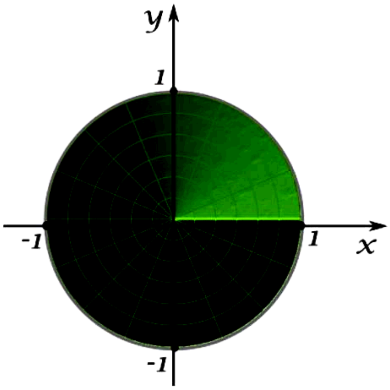
Ángulos de referencia en cada cuadrante



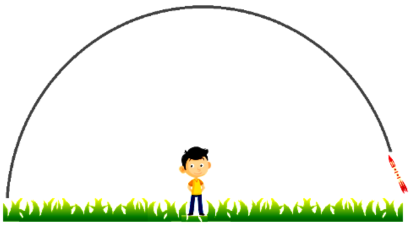
Medida del Ángulo		Representación	Ángulo de referencia	Sen	Cos	Tan
Grados	Radianes					
120°						
135°						
210°						
252°						
300°						
330°						
450°						

Algunos problemas aplicados a los ángulos de referencia

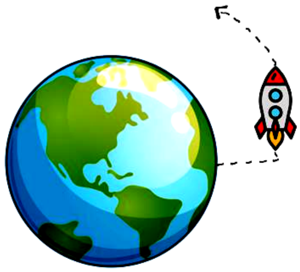
Problema 1: El radar de un barco se activa para buscar la presencia de otro navío. Después de producir un ángulo de 480º grados detecta una embarcación. Represente el ángulo en el plano cartesiano y determine la coordenada de la embarcación detectada.



Problema 2: Gabriel observa a lo lejos como un proyectil es lanzado y recorre el cielo mediante un movimiento circular sin que cambie la distancia entre Gabriel y el proyectil. El proyectil pasa por encima de Gabriel, y explota antes de llegar al suelo; él observa esa explosión con un ángulo de elevación de aproximadamente 45º. Determine el ángulo que forma el proyectil desde su salida hasta su explosión y la coordenada donde sucede.



Problema 3: Un cohete espacial sale de la base de lanzamiento y realiza un recorrido circular alrededor del planeta para poder preparar la salida de la Tropósfera. Si inicia el ascenso en la coordenada $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, determine el ángulo que produjo la trayectoria del cohete antes de su ascenso.



Identidades trigonométricas

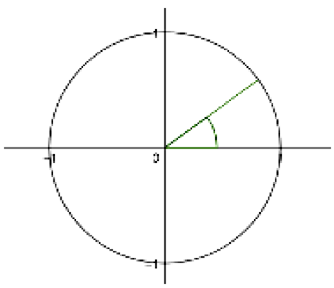
Identidades pitagóricas

Recordemos

El teorema de Pitágoras establece que en un triángulo rectángulo de catetos a y b, de hipotenusa c, se cumple que

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$



$$sec^2\theta = 1 + tan^2\theta \qquad csc^2\theta = 1 + cot^2\theta$$

Clase 4: Identidades trigonométricas

Recordemos

Identidades pitagóricas

$$sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$sec^2\theta = 1 + tan^2\theta \qquad csc^2\theta = 1 + cot^2\theta \text{ c}$$

Algunos valores ya conocidos

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
$\frac{\pi}{2}$			
$\frac{\pi}{3}$			
$\frac{\pi}{4}$			
$\frac{\pi}{6}$			
$\frac{3\pi}{2}$			

Suma y resta de ángulos

Seno

$$sen(\alpha + \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta + sen\beta \cdot cos\alpha$$

$$sen(\alpha - \beta) = sen\alpha \cdot cos\beta - sen\beta \cdot cos\alpha$$

Ejercicio: Utilice las identidades anteriores para calcular el valor de las siguientes razones.

1. $sen\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=$

2. $sen\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=$

Suma y resta de ángulos

Coseno

$$cos(\alpha+\beta) = cos\alpha \cdot cos\beta - sen\alpha \cdot sen\beta$$

$$cos(\alpha-\beta) = cos\alpha \cdot cos\beta + sen\alpha \cdot sen\beta$$

Ejercicio: Utilice las identidades anteriores para calcular el valor de las siguientes razones.

1. $cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=$

2. $cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=$

Suma y resta de ángulos

Tangente

$$tan(\alpha+\beta) = \frac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha \cdot tan\beta}$$

$$tan(\alpha-\beta) = \frac{tan\alpha - tan\beta}{1 + tan\alpha \cdot tan\beta}$$

Ejercicio: Utilice las identidades anteriores para calcular el valor de las siguientes razones.

1. $tan\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)=$
2. $tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=$

Problema:

Utilice las identidades de suma de ángulos de seno y coseno para demostrar que

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{tan\ \alpha \pm\ tan\beta}{1 \mp tan\ \alpha \cdot tan\beta}$$

Ángulo doble

$$\boldsymbol{sen(2\alpha) = 2\ sen\alpha \cdot cos\alpha}$$

$$\boldsymbol{cos(2\alpha) = cos^2\alpha - sen^2\alpha}$$

Problemas:

1. Considere un ángulo α en posición estándar cuyo lado terminal se encuentra en el II cuadrante, si se sabe que el valor de $sen(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{3}$, determine el valor de $\cos(\alpha)$ y $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$.
2. Determine el valor exacto de $\tan\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ considerando que $\frac{11\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}$.
3. Compruebe que $\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$ y que $\cos(2\alpha) = 1 - 2sen^2\alpha$.