



LA SIMBOLIZACIÓN COMO NÚCLEO EPISTEMOLÓGICO EN LA ENSEÑANZA DE LA LÓGICA MATEMÁTICA: UN ANÁLISIS DESDE LA TEORÍA DE LA SIMBOLISTA DE EDUCACIÓN EN MATEMÁTICA PURA

SYMBOLIZATION AS THE EPISTEMOLOGICAL CORE IN THE
TEACHING OF MATHEMATICAL LOGIC: AN ANALYSIS FROM THE
SYMBOLIST THEORY OF PURE MATHEMATICS EDUCATION

Juan Carlos Ruiz Castillo¹



ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2218-1442>

RESUMEN

El presente estudio analiza la enseñanza de la lógica matemática desde la Teoría Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP), la cual sitúa el lenguaje simbólico como núcleo epistemológico del conocimiento matemático. Mediante un enfoque cualitativo con apoyo cuantitativo descriptivo, se diseñó y aplicó un instrumento evaluativo orientado a identificar estructuras de pensamiento formal en estudiantes universitarios, más allá de la simple obtención de respuestas correctas. El análisis de las producciones permitió clasificar tres niveles de apropiación del lenguaje simbólico: receptivo, resolutorio y autónomo. Los resultados evidencian predominancia del nivel resolutorio, caracterizado por la ejecución operativa de procedimientos sin una comprensión estructural plenamente consolidada, así como una menor presencia del nivel autónomo, donde los estudiantes manifiestan dominio del sistema formal mediante el uso coherente de cuantificadores, la aplicación explícita de reglas de inferencia y la construcción de demostraciones válidas. Las dificultades identificadas trascienden lo procedimental y revelan obstáculos epistemológicos vinculados con la ruptura entre lenguaje natural y lenguaje formal, el uso instrumental de las reglas lógicas y la falta de justificación en los procesos deductivos. En diálogo crítico con enfoques centrados en la multiplicidad de representaciones, los hallazgos sugieren que la comprensión matemática requiere consolidar el lenguaje simbólico como sistema estructural. El estudio aporta evidencia empírica sobre las limitaciones de enfoques tradicionales y propone una reconfiguración didáctica fundamentada

¹ Universidad de San Carlos de Guatemala, Guatemala, Guatemala. Correo electrónico: jcefpem@profesor.usac.gt



en la TSEMP, orientada a formar sujetos capaces de operar en sistemas formales con rigor, autonomía y coherencia lógica.

Palabras clave: lógica matemática, simbolización, demostración, educación matemática, TSEMP.

ABSTRACT

This study analyzes the teaching of mathematical logic from the perspective of the Symbolist Theory of Pure Mathematics Education (TSEMP), which places symbolic language at the epistemological core of mathematical knowledge. Through a qualitative approach supported by descriptive quantitative analysis, an assessment instrument was designed and applied to identify structures of formal thinking in university students, beyond the mere production of correct answers. The analysis of students' written work made it possible to classify three levels of appropriation of symbolic language: receptive, procedural, and autonomous. The results show a predominance of the procedural level, characterized by the operational execution of procedures without a fully consolidated structural understanding, as well as a lower presence of the autonomous level, in which students demonstrate mastery of the formal system through the coherent use of quantifiers, the explicit application of rules of inference, and the construction of valid proofs. The difficulties identified go beyond procedural aspects and reveal epistemological obstacles related to the rupture between natural language and formal language, the instrumental use of logical rules, and the lack of justification in deductive processes. In critical dialogue with approaches focused on the multiplicity of representations, the findings suggest that mathematical understanding requires the consolidation of symbolic language as a structural system. The study provides empirical evidence regarding the limitations of traditional approaches and proposes a didactic reconfiguration grounded in TSEMP, aimed at forming individuals capable of operating within formal systems with rigor, autonomy, and logical coherence.

Keywords: mathematical logic, symbolization, proof, mathematics education.

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la matemática en el ámbito universitario se encuentra atravesada por una tensión estructural que no puede ser reducida a un problema meramente didáctico, sino que responde a una fractura de orden profundamente epistemológico: aquella que se configura entre los enfoques de carácter intuitivo, centrados en la accesibilidad del significado, y las aproximaciones formales, orientadas a la coherencia interna del sistema matemático. Esta tensión no es contingente ni reciente; por el contrario, expresa dos modos radicalmente distintos de comprender la naturaleza del conocimiento matemático. Mientras una tradición privilegia la construcción de sentido a partir de contextos cercanos a la experiencia del estudiante, otra reconoce que la matemática, en su desarrollo más riguroso, se constituye como un sistema autónomo de relaciones formales cuya validez descansa en la precisión simbólica, la consistencia lógica y la estructura deductiva.

Esta problemática adquiere una especial densidad en el campo de la lógica matemática, disciplina que no solo ocupa un lugar fundacional dentro de las

matemáticas, sino que constituye, en sentido estricto, el lenguaje mediante el cual se articulan sus estructuras más profundas. Sin embargo, su enseñanza ha sido orientada con frecuencia hacia enfoques predominantemente semánticos, en los que la interpretación de proposiciones en lenguaje natural, el uso de ejemplos contextualizados y la construcción de tablas de verdad ocupan un lugar central. Si bien estas estrategias pueden facilitar un acceso inicial al campo lógico, resultan insuficientes para la formación de un pensamiento deductivo riguroso, pues desplazan el eje del conocimiento desde la estructura formal hacia la interpretación contextual, debilitando la comprensión del sistema lógico como totalidad coherente.

En contraste, desde los trabajos fundacionales de Boole (1854) y Frege (1884/1893/1903), la lógica ha sido concebida como un sistema formal autónomo, en el cual los símbolos no operan como simples representaciones de significados externos, sino como elementos constitutivos de una arquitectura rigurosamente organizada. En este marco, el sentido no antecede al símbolo, sino que emerge de su inserción en un sistema regido por reglas precisas de formación e inferencia. Comprender la lógica, por tanto, no implica interpretar enunciados en función de contextos particulares, sino habitar un sistema de signos en el que la validez se determina exclusivamente por la coherencia interna de las transformaciones que en él se realizan.

Es precisamente en este horizonte donde adquiere relevancia la Teoría de la Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP), la cual propone una reconfiguración sustantiva del proceso de enseñanza al situar el símbolo como objeto epistemológico central y no como un recurso instrumental. Desde esta perspectiva, el aprendizaje matemático no se concibe como la traducción de significados previamente comprendidos al lenguaje formal, sino como un proceso de apropiación progresiva de un sistema simbólico en el que el pensamiento se constituye a través de la manipulación rigurosa de signos, la organización axiomática del conocimiento y la práctica sistemática de la demostración. En este sentido, la simbolización no es una etapa posterior al entendimiento, sino la condición misma de posibilidad del pensamiento matemático formal.

En consecuencia, el presente artículo tiene como propósito analizar la pertinencia de la TSEMP en la enseñanza de la lógica matemática en el nivel universitario, examinando críticamente los enfoques tradicionales que privilegian la accesibilidad en detrimento del rigor y proponiendo una alternativa fundamentada en la centralidad del lenguaje simbólico. Más allá de una discusión metodológica, el trabajo se inscribe en una reflexión de mayor alcance sobre la naturaleza del conocimiento matemático y las condiciones necesarias para su enseñanza efectiva, particularmente en la formación de docentes, donde el dominio del lenguaje formal no constituye un refinamiento académico opcional, sino una exigencia estructural para la comprensión y transmisión del saber matemático en su forma más rigurosa.

Desde este horizonte, la TSEMP permite comprender la enseñanza de la lógica matemática como un proceso de apropiación progresiva del lenguaje simbólico, la axiomatización y la demostración, situando el símbolo no como un recurso auxiliar, sino como el eje epistemológico del pensamiento matemático formal.

2.1 Fundamentos epistemológicos del formalismo matemático

El formalismo matemático constituye uno de los pilares fundamentales en la comprensión contemporánea de la naturaleza del conocimiento matemático, en la medida en que propone una ruptura radical con las concepciones empiristas e intuicionistas que históricamente han intentado fundamentar la disciplina. Desde esta perspectiva, las matemáticas no son concebidas como una descripción del mundo ni como una construcción derivada de la experiencia sensible, sino como un sistema autónomo de signos cuya validez se establece en virtud de su coherencia interna y de las reglas que rigen su manipulación.

Esta transformación epistemológica encuentra su consolidación en el programa formalista impulsado por David Hilbert, quien planteó la necesidad de fundamentar las matemáticas sobre bases estrictamente formales, libres de ambigüedades semánticas y de dependencias intuitivas. En este marco, los objetos matemáticos no poseen significado en sí mismos fuera del sistema en el que están inscritos; su identidad está determinada por su función dentro de una estructura axiomática, y su legitimidad se deriva exclusivamente de su deducibilidad a partir de reglas previamente establecidas (Hilbert & Ackermann, 1928).

Desde esta concepción, el lenguaje matemático adquiere un estatuto ontológico singular: deja de ser un medio de representación para convertirse en el espacio mismo en el que el conocimiento se configura. Esta idea, que encuentra antecedentes en la obra de Gottlob Frege, particularmente en su *Begriffsschrift* (1879), inaugura una nueva forma de entender la relación entre pensamiento y simbolización. Frege no solo introduce un lenguaje formal para la lógica, sino que establece que la precisión del pensamiento depende de la precisión del lenguaje en el que este se expresa. En consecuencia, la ambigüedad del lenguaje natural se convierte en un obstáculo epistemológico que debe ser superado mediante la formalización.

En esta misma línea, los desarrollos posteriores en lógica matemática, especialmente los aportes de Alfred Tarski, permiten profundizar en la distinción entre sintaxis y semántica, al establecer que la verdad en los sistemas formales no puede ser comprendida en términos puramente intuitivos, sino que requiere una definición rigurosa dentro de un marco estructurado (Tarski, 1944). Esta precisión no desplaza la centralidad de la sintaxis; por el contrario, permite reconocerla como eje organizador del sistema, en tanto las reglas formales garantizan la validez de las inferencias.

Por otra parte, los resultados de Kurt Gödel introducen una dimensión crítica al programa formalista, al demostrar que todo sistema formal suficientemente potente es necesariamente incompleto, en el sentido de que existen proposiciones verdaderas que no pueden ser demostradas dentro del sistema. Lejos de debilitar el formalismo, estos resultados permiten comprender con mayor profundidad sus alcances y limitaciones, evidenciando que la consistencia y la completitud no pueden ser garantizadas simultáneamente en sistemas complejos (Gödel, 1931). Esta tensión no invalida la perspectiva formalista, sino que la sitúa en un horizonte más amplio, donde el rigor

interno del sistema sigue siendo condición necesaria, aunque no suficiente, para la fundamentación total de las matemáticas.

En este contexto, el formalismo no debe entenderse como una reducción mecanicista del pensamiento matemático, sino como una reconfiguración de su naturaleza, en la que la actividad matemática se concibe como una práctica simbólica rigurosa. El acto de hacer matemáticas consiste, desde esta perspectiva, en operar dentro de sistemas de signos conforme a reglas explícitas, donde cada transformación es legítima en la medida en que respeta la estructura del sistema. La demostración, en este sentido, no es una verificación externa, sino un proceso interno que garantiza la coherencia del discurso matemático.

Desde esta articulación, la TSEMP proyecta los principios del formalismo al ámbito educativo, al concebir el aprendizaje matemático como apropiación progresiva del lenguaje simbólico. En este proceso, el símbolo no representa simplemente una idea previa, sino que constituye el medio formal mediante el cual el pensamiento matemático adquiere estructura, precisión y validez.

Desde esta perspectiva, la enseñanza de la lógica matemática adquiere una relevancia particular, pues constituye uno de los dominios donde el formalismo se manifiesta con mayor pureza. La lógica proporciona herramientas para el análisis del razonamiento y, al mismo tiempo, encarna principios fundamentales del pensamiento formal: axiomatización, inferencia y coherencia estructural. Por ello, su enseñanza requiere superar la mera interpretación de enunciados o la resolución mecánica de ejercicios, orientándose hacia la formación de sujetos capaces de operar con autonomía dentro de sistemas simbólicos.

Los fundamentos epistemológicos del formalismo matemático permiten comprender la matemática como una construcción simbólica autónoma, regida por principios internos de coherencia, antes que como un reflejo inmediato de la realidad. Esta concepción, lejos de desvincularla de la experiencia, la sitúa en un plano donde el pensamiento alcanza su máxima precisión. En el ámbito educativo, asumir esta perspectiva implica reconocer que aprender matemáticas exige ingresar progresivamente en un sistema formal, donde el rigor, la consistencia y la explicitación constituyen condiciones esenciales del conocimiento.

2.2 La lógica matemática como sistema simbólico y su problematización en la educación matemática

La lógica matemática, en tanto sistema formal por excelencia, representa el punto culminante de la estructuración simbólica del pensamiento. No obstante, su enseñanza ha sido objeto de múltiples tensiones en el campo de la educación matemática, particularmente en lo que respecta a la relación entre el lenguaje natural, los registros de representación y la formalización rigurosa. Estas tensiones revelan una problemática de fondo: la dificultad de transitar desde formas de pensamiento intuitivo hacia estructuras simbólicas autónomas.

Desde una perspectiva estrictamente formal, la lógica proposicional y de predicados se configura como un sistema cerrado, regido por reglas de formación, transformación e inferencia. En este contexto, el significado de las expresiones no depende de su interpretación en el mundo, sino de su posición dentro del sistema y de las relaciones que establecen con otras expresiones. Esta concepción, heredera directa del formalismo hilbertiano, sitúa a la lógica como una disciplina en la que la sintaxis no solo organiza el discurso, sino que lo constituye.

Sin embargo, en el ámbito educativo, esta visión ha sido matizada —e incluso cuestionada— por diversos enfoques que subrayan la importancia de la comprensión semántica y de la diversidad de representaciones en el aprendizaje matemático. En particular, la teoría de los registros de representación semiótica desarrollada por Raymond Duval ha tenido una influencia significativa al plantear que la comprensión matemática no puede reducirse a un único sistema de signos, sino que requiere la coordinación entre múltiples registros (gráfico, algebraico, verbal, simbólico, entre otros). Según Duval (2006), el aprendizaje se produce en la capacidad de transformar y convertir representaciones entre distintos registros, lo que implica una actividad cognitiva compleja que trasciende la mera manipulación formal.

La perspectiva de los registros de representación aporta elementos valiosos para comprender diversos procesos de aprendizaje; sin embargo, al ser examinada desde el formalismo matemático, revela una tensión epistemológica significativa. Para la Teoría Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP), la diversidad de registros puede favorecer el acceso inicial al conocimiento, pero no sustituye el dominio del lenguaje simbólico formal. Cuando la interpretación contextual desplaza la estructura formal, existe el riesgo de debilitar el rigor propio del pensamiento matemático. En consecuencia, la TSEMP plantea que la comprensión profunda exige consolidar el lenguaje simbólico como sistema estructural capaz de sostener la coherencia, la generalidad y la validez del conocimiento matemático.

Esta postura guarda cierta afinidad con la epistemología genética de Jean Piaget, particularmente en la idea de que el desarrollo del pensamiento lógico supone una progresiva interiorización de operaciones intelectuales. Sin embargo, mientras Piaget subraya el papel de la acción y de la interacción con el entorno en la construcción del conocimiento, la TSEMP orienta el análisis hacia la internalización de sistemas simbólicos formales, concebidos no como representaciones directas de la realidad, sino como marcos autónomos desde los cuales el pensamiento matemático se organiza y adquiere rigor.

Por otro lado, desde la perspectiva de la teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau, el aprendizaje matemático se concibe como el resultado de la interacción entre el estudiante, el medio y las situaciones problemáticas diseñadas por el docente. Si bien este enfoque ha permitido comprender la importancia del contexto en la construcción del conocimiento, también ha contribuido a consolidar una tendencia en la que el problema contextual se convierte en el eje del aprendizaje, relegando en ocasiones la formalización a un plano secundario.

En contraste, la TSEMP sostiene que la lógica matemática, en tanto sistema formal, no debe ser introducida únicamente a través de situaciones contextualizadas, sino mediante una inmersión progresiva en el lenguaje simbólico que la constituye. Esto implica reconocer que la dificultad en el aprendizaje de la lógica no radica exclusivamente en la complejidad de sus conceptos, sino en la naturaleza misma de su lenguaje, que exige un tipo de pensamiento radicalmente distinto al del lenguaje natural.

En este punto, resulta pertinente considerar las aportaciones de Lev Vygotsky, particularmente en lo relativo al papel del lenguaje como mediador del pensamiento. Desde esta perspectiva, el desarrollo cognitivo está profundamente vinculado a la internalización de sistemas simbólicos culturalmente construidos. No obstante, la TSEMP introduce una distinción crucial: no todos los sistemas simbólicos poseen el mismo estatuto epistemológico. El lenguaje matemático, en su forma formalizada, no es simplemente un medio de comunicación, sino una estructura que redefine las posibilidades mismas del pensamiento.

En consecuencia, la enseñanza de la lógica matemática debe ser concebida como un proceso de transición epistemológica, en el que el estudiante abandona progresivamente la dependencia del lenguaje natural para adentrarse en un sistema simbólico autónomo. Esta transición no es trivial, ni puede ser reducida a la práctica repetitiva de ejercicios; requiere una reorganización profunda de las estructuras cognitivas, en la que la precisión, la explicitación y la coherencia se convierten en principios rectores.

Desde esta perspectiva, los errores cometidos por los estudiantes — particularmente en el uso de cuantificadores, en la aplicación de reglas de inferencia o en la construcción de demostraciones— no deben ser interpretados únicamente como fallas procedimentales, sino como manifestaciones de una tensión epistemológica no resuelta entre dos formas de pensamiento: la intuitiva y la formal. La persistencia de estos errores evidencia que el acceso al lenguaje matemático no se logra mediante la simplificación del contenido, sino a través de un proceso de apropiación progresiva de su estructura simbólica.

La lógica matemática, entendida como sistema simbólico autónomo, plantea desafíos significativos en el ámbito educativo que no pueden ser abordados desde perspectivas exclusivamente interpretativas o contextuales. La TSEMP ofrece un marco teórico que permite reconfigurar estos desafíos, situando la simbolización en el centro del proceso de aprendizaje y reivindicando el carácter formal del conocimiento matemático como condición necesaria para su comprensión profunda.

2.3 La simbolización como núcleo epistemológico del conocimiento matemático: fundamentación desde la TSEMP

La simbolización, tradicionalmente concebida en el ámbito educativo como un recurso de representación o como una herramienta de traducción de ideas previamente comprendidas, adquiere en el marco de la Teoría Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP) un estatuto epistemológico central. Desde esta perspectiva, no se limita

a cumplir una función auxiliar o comunicativa, sino que opera como principio estructurante del conocimiento matemático, en la medida en que posibilita la constitución, organización y legitimación de sus objetos, relaciones y procedimientos formales.

Esta reconceptualización implica una ruptura profunda con las concepciones representacionistas del conocimiento, las cuales asumen que los objetos matemáticos existen con anterioridad al lenguaje que los describe. Desde la TSEMP, por el contrario, se sostiene que dichos objetos no poseen una existencia independiente de su formulación simbólica; es en la estructura del símbolo donde el objeto adquiere identidad, coherencia y operatividad. En este sentido, la simbolización no es posterior al pensamiento: es condición de posibilidad del pensamiento matemático.

Esta idea encuentra resonancia en la tradición lógica inaugurada por Gottlob Frege, quien ya advertía que la precisión del pensamiento depende de la precisión del lenguaje en que este se articula. Sin embargo, mientras Frege mantiene una distinción entre sentido y referencia, la TSEMP radicaliza esta postura al afirmar que, en el ámbito matemático, el símbolo no remite a un referente externo, sino que constituye un nodo dentro de una red formal de relaciones. El significado no se encuentra fuera del sistema, sino que emerge de la posición estructural que ocupa cada expresión dentro de él.

Desde esta perspectiva, la actividad matemática puede comprenderse como una práctica de manipulación simbólica rigurosamente regulada, en la cual cada operación adquiere validez por su conformidad con las reglas internas del sistema. Esta concepción guarda continuidad con el formalismo hilbertiano, pero lo proyecta hacia el campo didáctico al señalar que no basta con reconocer el carácter formal de las matemáticas; es necesario diseñar procesos de enseñanza que favorezcan la apropiación progresiva de dicho sistema en toda su complejidad estructural.

En este punto, la TSEMP introduce una distinción fundamental **entre** uso del símbolo y dominio del sistema simbólico. Mientras el primero puede lograrse mediante la repetición de procedimientos o la aplicación mecánica de reglas, el segundo implica una internalización profunda de las estructuras que organizan el lenguaje matemático. Esta distinción permite explicar por qué muchos estudiantes, aun siendo capaces de resolver ejercicios, no logran construir demostraciones coherentes ni operar con autonomía dentro del sistema formal.

La simbolización, en tanto núcleo epistemológico, exige entonces una serie de condiciones que trascienden lo meramente procedimental. En primer lugar, requiere una comprensión de la **sintaxis formal**, es decir, de las reglas que determinan la correcta formación de expresiones. En segundo lugar, implica el dominio de las **reglas de inferencia**, entendidas no como algoritmos aislados, sino como transformaciones estructuralmente válidas dentro del sistema. Finalmente, demanda una capacidad de **articulación deductiva**, mediante la cual el sujeto es capaz de construir cadenas de razonamiento coherentes, explícitas y verificables.

Esta triple exigencia configura una forma de pensamiento distinta de la que opera en el lenguaje cotidiano. Mientras el lenguaje natural permite ciertos márgenes de

ambigüedad, elipsis o redundancia, el lenguaje matemático formal demanda un mayor grado de precisión, explicitación y coherencia en la construcción de sus enunciados. La transición entre ambos registros constituye uno de los desafíos centrales de la educación matemática y, desde la TSEMP, representa el núcleo del proceso mediante el cual el estudiante se apropia progresivamente del pensamiento formal.

En diálogo crítico con la teoría de los registros de representación semiótica de Raymond Duval, la TSEMP reconoce que la conversión entre registros puede desempeñar un papel inicial en la construcción del significado; no obstante, advierte que dicha diversidad no puede sustituir el dominio del lenguaje simbólico formal. Mientras que Duval (2006) enfatiza la coordinación entre registros como condición de comprensión, la TSEMP sostiene que la comprensión matemática plena solo se alcanza cuando el sujeto es capaz de operar exclusivamente dentro del registro simbólico, sin necesidad de apoyos externos.

Esta postura no implica una negación de la diversidad representacional, sino una jerarquización epistemológica en la que el lenguaje simbólico ocupa el nivel superior. En este sentido, la simbolización no es un registro más entre otros, sino el espacio en el que se sintetizan y formalizan las distintas formas de representación, permitiendo su generalización y su integración en un sistema coherente.

Por otra parte, la TSEMP redefine el papel de la abstracción en el aprendizaje matemático. Más que entenderla como un alejamiento de la realidad, la concibe como un proceso de depuración conceptual que permite transitar desde situaciones particulares hacia relaciones, patrones y estructuras generales. En este sentido, la abstracción no implica pérdida de significado, sino ampliación de la capacidad formal del pensamiento, pues posibilita operar con objetos matemáticos que exceden los casos concretos y alcanzan validez dentro de un sistema simbólico más amplio.

En este contexto, la demostración emerge como la práctica privilegiada en la que la simbolización alcanza su máxima expresión. Demostrar implica no solo manipular símbolos, sino organizar un discurso formal en el que cada paso se encuentra justificado por reglas explícitas. Es en este proceso donde el sujeto matemático se constituye plenamente, al asumir el control del sistema simbólico y desplegar su capacidad deductiva.

Desde una perspectiva educativa, asumir la simbolización como núcleo epistemológico implica una transformación profunda de las prácticas de enseñanza. No se trata de simplificar el contenido ni de adaptarlo a formas intuitivas, sino de diseñar trayectorias formativas que conduzcan progresivamente al estudiante hacia el dominio del lenguaje formal. Esto requiere una didáctica que privilegie la explicitación, la coherencia y el rigor, en lugar de la mera resolución de problemas contextualizados.

La TSEMP propone una concepción del conocimiento matemático en la que la simbolización no es un medio, sino un fin en sí mismo. Aprender matemáticas no consiste en interpretar el mundo a través de símbolos, sino en habitar un sistema simbólico en el que el pensamiento adquiere su forma más precisa. Esta perspectiva no solo redefine la naturaleza del aprendizaje matemático, sino que ofrece un marco

teórico sólido para comprender las dificultades que emergen en el proceso de formalización y para orientar prácticas pedagógicas que favorezcan una apropiación auténtica del lenguaje matemático.

2.4 Obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de la lógica matemática: una lectura desde la TSEMP

El estudio de las dificultades en el aprendizaje de la lógica matemática ha sido tradicionalmente abordado desde perspectivas psicológicas o didácticas que tienden a interpretar los errores como deficiencias cognitivas, vacíos conceptuales o fallas en la instrucción. No obstante, una lectura más profunda —anclada en la epistemología de las ciencias— permite comprender estos fenómenos no como simples equivocaciones, sino como manifestaciones de **obstáculos epistemológicos**, en el sentido propuesto por Gaston Bachelard, quien sostiene que el conocimiento científico no avanza de manera lineal, sino a través de rupturas con formas previas de pensamiento que, lejos de ser ingenuas, poseen una coherencia interna que resiste su superación.

Desde esta perspectiva, el aprendizaje de la lógica matemática implica una transformación estructural del pensamiento, en la que el sujeto debe abandonar progresivamente los esquemas propios del lenguaje natural para adentrarse en un sistema simbólico formal regido por principios de precisión, explicitación y coherencia interna. Este tránsito no es meramente técnico, sino profundamente epistemológico, en tanto supone una reconfiguración de las condiciones mismas bajo las cuales se produce el conocimiento.

En el marco de la TSEMP, estos obstáculos adquieren una significación particular, ya que la teoría sitúa la simbolización como el núcleo del conocimiento matemático. En consecuencia, las dificultades observadas en el uso del lenguaje lógico no pueden ser interpretadas únicamente como errores operativos, sino como indicadores de una **no apropiación del sistema simbólico en su dimensión estructural**.

Uno de los obstáculos más persistentes se manifiesta en la ruptura entre el lenguaje natural y el lenguaje formal. Aunque los estudiantes pueden mostrar una comprensión semántica adecuada de los enunciados en su formulación verbal, esta no siempre logra traducirse en una representación simbólica coherente. Tal situación evidencia la tensión entre dos sistemas de significación: uno intuitivo, vinculado al lenguaje cotidiano, y otro formal, que exige reorganizar el pensamiento bajo principios de precisión, explicitación y coherencia lógica. Desde esta perspectiva, la dificultad para establecer correspondencias entre ambos sistemas no constituye una simple limitación técnica, sino un indicio de que el estudiante aún no ha internalizado las **reglas** propias del sistema simbólico.

En estrecha relación con lo anterior, se identifica un segundo obstáculo caracterizado por el **uso instrumental de las reglas lógicas**. En este caso, los estudiantes aplican procedimientos como el *Modus Ponens*, el *Modus Tollens* o las *leyes de De Morgan* de manera mecánica, sin una comprensión profunda de su función dentro del sistema formal. Esta forma de operar responde a lo que puede denominarse

una racionalidad algorítmica, en la que el conocimiento se reduce a la ejecución de pasos predefinidos, desprovistos de una articulación estructural. Desde la TSEMP, este fenómeno es interpretado como una manifestación de un aprendizaje superficial, en el que el símbolo es utilizado, pero no comprendido como parte de un sistema coherente.

Un tercer obstáculo, de especial relevancia, se presenta en el **manejo de cuantificadores y estructuras de dependencia lógica**. Expresiones como $\forall x \exists y$ y $\exists y \forall x$, cuya diferencia radica en la estructura de las relaciones que establecen, suelen ser tratadas por los estudiantes como equivalentes o intercambiables. Esta dificultad no puede atribuirse únicamente a la complejidad de la notación, sino que pone de manifiesto una carencia en la comprensión de la organización interna del discurso lógico. El manejo adecuado de cuantificadores implica no solo habilidades simbólicas, sino una capacidad de estructuración del pensamiento que permita reconocer jerarquías, dependencias y condiciones de validez.

También, se observa de manera recurrente una **ausencia de justificación explícita en los procesos deductivos**. A pesar de que los estudiantes logran en algunos casos alcanzar conclusiones correctas, estas no se encuentran sustentadas por una cadena de inferencias claramente articulada. La presencia de saltos inferenciales, la omisión de leyes lógicas y la falta de explicitación en los pasos intermedios evidencian que el pensamiento formal no ha sido plenamente internalizado. Este fenómeno resulta particularmente significativo desde la TSEMP, ya que la demostración constituye el espacio privilegiado en el que el dominio del sistema simbólico se hace evidente.

En diálogo con la teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau, puede afirmarse que estos obstáculos no son únicamente inherentes al sujeto, sino que emergen en la interacción con el medio didáctico. Sin embargo, la TSEMP introduce una matización fundamental: no basta con diseñar situaciones que favorezcan la construcción del conocimiento; es necesario garantizar que dichas situaciones conduzcan efectivamente hacia la formalización simbólica. De lo contrario, existe el riesgo de consolidar formas de pensamiento que, aunque funcionales en contextos específicos, no permiten el acceso al sistema matemático en su totalidad.

Por otra parte, desde la perspectiva sociocultural de Lev Vygotsky, el lenguaje desempeña un papel central en la mediación del pensamiento. No obstante, la TSEMP enfatiza que el lenguaje matemático formal no puede ser asimilado de la misma manera que el lenguaje natural, dado que exige un nivel de explicitación y rigor que supera las prácticas comunicativas cotidianas. En este sentido, la zona de desarrollo próximo no solo implica la adquisición de nuevos conceptos, sino la incorporación de una forma de pensamiento estructuralmente distinta.

En este marco, los obstáculos epistemológicos identificados no deben ser concebidos como fallas a corregir mediante la simplificación del contenido, sino como indicadores de señales de un proceso de aprendizaje que aún no termina. La tarea del docente, desde la TSEMP, no consiste en evitar estos obstáculos, sino en **hacerlos visibles, problematizarlos y utilizarlos como punto de partida para la construcción del conocimiento formal**.

En síntesis, el aprendizaje de la lógica matemática implica una ruptura con formas previas de pensamiento que no puede ser lograda mediante estrategias puramente procedimentales o contextualizadas. Los obstáculos epistemológicos identificados evidencian la necesidad de una didáctica que asuma la simbolización como eje central, orientando el proceso educativo hacia la apropiación del sistema formal en su complejidad estructural. Solo a través de esta apropiación es posible alcanzar una comprensión profunda y autónoma del conocimiento matemático.

2.5 La demostración matemática como práctica epistemológica central

La demostración matemática constituye, sin lugar a duda, el núcleo estructurante del conocimiento matemático, en tanto configura el criterio último de validez, legitimidad y coherencia dentro de los sistemas formales. Más allá de su función como herramienta de verificación, la demostración se erige como una práctica epistemológica compleja, en la que convergen la simbolización, la inferencia y la organización deductiva del pensamiento. En este sentido, no es posible comprender la naturaleza de la matemática —ni su enseñanza— sin situar la demostración en el centro del análisis.

Desde la tradición formalista, la demostración es concebida como una secuencia finita de fórmulas, cada una de las cuales se deriva de las anteriores mediante la aplicación de reglas de inferencia explícitas, partiendo de un conjunto de axiomas. Esta concepción encuentra una de sus formulaciones más influyentes en los sistemas axiomáticos desarrollados por Hilbert, para quien la validez de un enunciado no depende de su evidencia intuitiva ni de su correspondencia directa con la realidad, sino de su deducibilidad dentro del sistema formal (Hilbert & Ackermann, 1938). En consecuencia, demostrar no equivale a “convencer” en un sentido retórico, sino a garantizar la coherencia interna del discurso matemático.

Aunque esta definición ofrece una caracterización precisa, resulta insuficiente para comprender la prueba matemática en toda su complejidad cognitiva y educativa. En el campo de la educación matemática, su enseñanza ha sido interpretada de diversas maneras: en algunos casos, como un procedimiento técnico; en otros, como una actividad reservada para niveles avanzados de formación. Frente a estas concepciones, la Teoría Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP) sitúa la actividad demostrativa como una práctica central desde las etapas iniciales del aprendizaje, pues permite que el estudiante se apropie progresivamente del sistema simbólico y desarrolle una relación más rigurosa con el conocimiento formal.

Demostrar implica mucho más que encadenar inferencias válidas; supone la construcción de un **discurso formal coherente**, en el que cada afirmación se encuentra justificada y articulada dentro de una estructura lógica rigurosa. Este proceso exige una serie de competencias que trascienden lo meramente procedimental: dominio de la sintaxis formal, comprensión de las reglas de inferencia, capacidad de anticipación estructural y habilidad para organizar el pensamiento de manera explícita y sistemática.

En este contexto, resulta pertinente considerar las aportaciones de Imre Lakatos, quien, en su obra *Proofs and Refutations*, propone una visión dinámica de la demostración, entendida como un proceso de construcción y revisión en el que los

errores desempeñan un papel fundamental. Si bien esta perspectiva introduce una dimensión heurística valiosa, la TSEMP enfatiza que, en su forma final, la demostración debe alcanzar un nivel de formalización que garantice su validez dentro del sistema. Es decir, el proceso puede ser exploratorio, pero el producto debe ser rigurosamente formal.

Por otra parte, investigaciones en educación matemática, como las de Nicolas Balacheff, han puesto de manifiesto que los estudiantes suelen confundir la demostración con la verificación empírica o con la validación basada en ejemplos. Esta confusión revela una concepción epistemológica limitada, en la que la verdad matemática se asocia con la evidencia perceptiva en lugar de con la deducción formal. Desde la TSEMP, este fenómeno se interpreta como una consecuencia directa de la falta de apropiación del lenguaje simbólico, ya que es en dicho lenguaje donde la demostración adquiere su forma plena.

La demostración puede ser entendida como el punto de convergencia entre simbolización y pensamiento deductivo. No es posible demostrar sin operar con símbolos, ni es posible dotar de significado a los símbolos sin insertarlos en una estructura deductiva. Esta interdependencia refuerza la tesis central de la TSEMP: el conocimiento matemático no reside en los objetos, sino en las relaciones que se establecen entre ellos dentro de un sistema formal.

Además, la demostración desempeña una función formativa de primer orden, en la medida en que obliga al estudiante a abandonar formas de pensamiento implícitas y a explicitar cada paso de su razonamiento. Este proceso favorece la claridad, la precisión y la construcción de una actitud epistemológica caracterizada por el rigor, la coherencia y la responsabilidad intelectual. Aunque el descubrimiento matemático puede implicar intuición, ensayo y creatividad, su validación requiere una organización argumentativa rigurosa, capaz de transformar la conjetura en conocimiento matemáticamente justificado (Pólya, 1945/2004).

Desde una perspectiva didáctica, asumir la demostración como práctica central implica una reconfiguración de las estrategias de enseñanza. No se trata de presentar demostraciones acabadas para su reproducción, sino de involucrar al estudiante en su construcción, guiándolo en la identificación de estructuras, en la selección de estrategias y en la articulación de argumentos. Este enfoque requiere un equilibrio delicado entre la exploración y la formalización, en el que el docente actúa como mediador en el proceso de transición hacia el pensamiento formal.

En el marco de la TSEMP, esta transición se concibe como un proceso de **constitución del sujeto matemático**, en el que el estudiante deja de ser un ejecutor de procedimientos para convertirse en un agente capaz de operar dentro del sistema simbólico con autonomía. La demostración, en este sentido, no es solo una técnica, sino una práctica que configura la identidad del sujeto en relación con el conocimiento matemático.

La demostración matemática no puede ser reducida a un conjunto de pasos o a una técnica de validación; es una práctica epistemológica fundamental que articula la

simbolización, la inferencia y la estructura del conocimiento matemático. Desde la TSEMP, su enseñanza no es opcional ni secundaria, sino constitutiva del proceso de aprendizaje. Solo a través de la participación activa en la construcción de demostraciones es posible alcanzar una comprensión profunda, rigurosa y autónoma de las matemáticas.

Desde este posicionamiento teórico, se configura un abordaje metodológico que no busca medir únicamente resultados, sino interpretar el grado de apropiación del lenguaje simbólico formal

2.6 Implicaciones didácticas del formalismo lógico: hacia una pedagogía de la simbolización

La concepción de la lógica como sistema formal, enmarcada en la tradición hilbertiana y reinterpretada desde la Teoría de la Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP), no se limita a una redefinición epistemológica de la matemática, sino que exige, de manera inevitable, una transformación profunda del acto didáctico. En efecto, si el conocimiento matemático se constituye en y por el lenguaje simbólico, entonces la enseñanza no puede seguir orientándose hacia la mera comprensión intuitiva o la traducción semántica de enunciados, sino que debe configurarse como un proceso de inserción progresiva en sistemas formales rigurosamente estructurados.

Desde esta perspectiva, la didáctica deja de ser un espacio de mediación entre el conocimiento y el estudiante, para convertirse en un campo de configuración epistemológica, en el cual se diseñan las condiciones que posibilitan la apropiación del lenguaje formal como herramienta de pensamiento. No se trata, por tanto, de “facilitar” el acceso al conocimiento mediante simplificaciones o analogías, sino de construir trayectorias formativas que conduzcan al estudiante hacia el dominio operativo y estructural del sistema simbólico.

En este marco, la enseñanza de la lógica matemática adquiere un estatuto particular. Lejos de concebirse como un conjunto de técnicas para evaluar la validez de argumentos, se configura como un espacio privilegiado para la formación del pensamiento formal. Cada actividad didáctica debe ser diseñada no en función de la resolución de ejercicios, sino en función de la producción de discurso matemático formalmente coherente. Esto implica que la traducción del lenguaje natural al lenguaje lógico no puede ser tratada como un ejercicio mecánico, sino como un proceso de reconfiguración epistemológica, en el que el estudiante aprende a reconocer las estructuras subyacentes que organizan el pensamiento.

En este marco, el error adquiere valor didáctico porque revela tensiones epistemológicas en el proceso de simbolización. Desde la TSEMP, no debe corregirse únicamente de manera inmediata, sino analizarse como indicio de una relación todavía externa con el sistema formal. Las dificultades con cuantificadores, justificaciones o transformaciones lógicas permiten identificar cómo el estudiante comprende y organiza el lenguaje simbólico. Por ello, la enseñanza debe asumir el error como punto de partida para reconstruir el conocimiento y fortalecer la apropiación del sistema formal.

Esta concepción exige reconfigurar el rol docente. El profesor no se limita a transmitir contenidos ni a facilitar aprendizajes contextualizados; actúa como agente de formalización, orientando al estudiante hacia las reglas, estructuras y exigencias del sistema simbólico. Para ello, resulta indispensable mantener rigor en la presentación de los contenidos y promover la explicitación sistemática de los procesos deductivos. Así, la demostración se comprende como una práctica central de la formación matemática y no como una actividad reservada exclusivamente para niveles avanzados.

En contraste con enfoques que privilegian la multiplicidad de registros de representación como vía de acceso al conocimiento (Duval, 2006), la TSEMP sostiene que dicha diversidad, si bien puede cumplir una función transitoria, no debe desplazar el papel central del lenguaje simbólico. La comprensión matemática no se consolida en la traducción entre registros, sino en la estabilización del sujeto dentro del sistema formal. De igual manera, frente a perspectivas socioepistemológicas que enfatizan el origen contextual del conocimiento (Godino et al., 2007; Radford, 2014), la TSEMP propone que el sentido matemático no emerge de la práctica social en sí misma, sino de la estructuración simbólica que dicha práctica puede alcanzar.

Así, la didáctica del formalismo lógico, en el marco de la TSEMP, se orienta hacia la formación de sujetos capaces de operar con autonomía dentro de sistemas formales, reconociendo en el símbolo no un medio de representación, sino el espacio mismo donde el pensamiento adquiere forma. Enseñar lógica, desde esta perspectiva, no consiste en enseñar a “pensar mejor” en términos generales, sino en enseñar a pensar matemáticamente en sentido estricto: esto es, a operar dentro de un sistema de reglas, a justificar cada inferencia y a construir conocimiento a partir de la coherencia interna del lenguaje.

En última instancia, esta articulación entre teoría y didáctica permite comprender que la enseñanza de la matemática no es una simple transmisión de contenidos, sino un proceso de transformación epistemológica del sujeto. La TSEMP no propone una didáctica más, sino una reconfiguración radical del acto educativo, en la que el acceso al conocimiento matemático se produce no por reducción de su complejidad, sino por la inmersión progresiva en la estructura formal que lo constituye.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

3.1 Enfoque epistemológico y tipo de investigación

La presente investigación adopta un enfoque cualitativo de corte interpretativo, sustentado en una perspectiva epistemológica que concibe el conocimiento matemático como una construcción formal mediada por sistemas simbólicos. En coherencia con la Teoría Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP), el estudio no busca medir variables aisladas, sino analizar las producciones simbólicas de los estudiantes como expresiones de su grado de apropiación del lenguaje matemático formal.

Desde esta perspectiva, el objeto de estudio no se reduce a los resultados obtenidos en los exámenes, sino que se centra en las estructuras de razonamiento que subyacen a dichas producciones. Esto implica un desplazamiento metodológico desde

la evaluación de respuestas correctas o incorrectas hacia la interpretación de los procesos simbólicos que configuran el pensamiento lógico del estudiante.

El diseño adoptado es de tipo **analítico-descriptivo con alcance interpretativo**, en la medida en que busca caracterizar los niveles de formalización alcanzados por los estudiantes, así como identificar los obstáculos epistemológicos presentes en su proceso de aprendizaje. Este enfoque permite articular el análisis empírico con el marco teórico, generando una comprensión integrada del fenómeno estudiado.

3.2 Contexto y participantes

La investigación se desarrolló en el contexto de la formación inicial de docentes de matemática, específicamente en estudiantes de nivel universitario que cursan asignaturas vinculadas a la lógica matemática y al pensamiento formal. Este contexto resulta particularmente pertinente, ya que los participantes se encuentran en una etapa formativa en la que se espera la transición hacia el dominio del lenguaje matemático riguroso.

Los participantes fueron seleccionados mediante un muestreo intencional, considerando criterios de accesibilidad y relevancia académica. Se trabajó con un grupo de estudiantes que habían sido expuestos previamente a contenidos de lógica proposicional y lógica de predicados, incluyendo el uso de cuantificadores, equivalencias lógicas y reglas de inferencia.

Desde la perspectiva de la TSEMP, estos sujetos no son considerados meros receptores de contenido, sino agentes en proceso de constitución como sujetos matemáticos, cuyo nivel de apropiación del sistema simbólico puede ser analizado a través de sus producciones formales.

3.3 Instrumento de recolección de datos

El instrumento principal de recolección de datos fue un examen estructurado, diseñado para evaluar el nivel de formalización lógica alcanzado por los estudiantes en el contexto de la lógica matemática. Más que una prueba convencional orientada a verificar respuestas correctas o incorrectas, se concibió como un dispositivo analítico de carácter epistemológico, cuyo propósito fue develar la estructura del pensamiento matemático en su manifestación simbólica. De este modo, el examen permitió analizar no solo los resultados del razonamiento, sino también la organización interna del discurso lógico producido por los estudiantes.

Desde el marco de la Teoría de la Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP), el diseño del instrumento respondió a la necesidad de situar al estudiante frente a situaciones que exigieran una interacción directa, consciente y rigurosa con el lenguaje formal. Por ello, cada ítem fue construido con una intencionalidad precisa: provocar procesos de simbolización que pusieran en evidencia el grado de apropiación del sistema lógico, así como la capacidad del estudiante para operar dentro de él con coherencia estructural. De esta manera, el examen trascendió la función evaluativa tradicional para constituirse en un espacio de producción matemática donde el sujeto debía asumir el control del sistema simbólico.

El instrumento incluyó tareas que implicaban la traducción de enunciados del lenguaje natural al lenguaje lógico formal, lo cual permitió analizar la capacidad de los estudiantes para establecer correspondencias estructurales entre distintos niveles de expresión. Este proceso, lejos de ser una simple conversión lingüística, exigió la identificación de relaciones lógicas subyacentes, la correcta jerarquización de conectores y la adecuada formalización de dependencias entre variables.

Igualmente, se incorporaron situaciones que requerían el uso de cuantificadores en contextos estructuralmente complejos, lo que posibilitó evaluar no solo la manipulación simbólica de estos elementos, sino la comprensión de su alcance lógico y de las relaciones de dependencia que establecen dentro de una proposición. Este componente resultó particularmente relevante, dado que el manejo de cuantificadores constituye uno de los indicadores más sensibles del nivel de formalización alcanzado.

El examen también contempló la aplicación explícita de reglas de inferencia, con el propósito de observar si los estudiantes reconocían y justificaban las transformaciones realizadas dentro del sistema lógico. Más que valorar únicamente la conclusión alcanzada, el análisis se centró en la legitimidad de los procesos inferenciales que la sustentan, en coherencia con una concepción del conocimiento matemático fundada en la validez estructural.

De igual manera, se incluyeron tareas orientadas a la construcción de demostraciones formales, entendidas como el núcleo de la actividad matemática en el marco de la TSEMP. Estas tareas exigieron la articulación secuencial de proposiciones, el uso adecuado de axiomas y reglas de inferencia, así como la coherencia global del argumento. La demostración fue abordada no como un producto final, sino como un proceso en el que se hace visible la organización del pensamiento lógico.

Se solicitó la justificación detallada de cada paso en los procesos deductivos, con el fin de evitar la presencia de inferencias implícitas o saltos argumentativos. Esta exigencia permitió analizar el grado de explicitación del razonamiento, así como la capacidad del estudiante para reconocer las leyes que sustentan cada transformación dentro del sistema.

En conjunto, cada uno de estos componentes fue diseñado para activar distintos niveles de simbolización, posibilitando una lectura profunda del desempeño estudiantil. El instrumento, en consecuencia, no se limitó a registrar ejecuciones procedimentales, sino que permitió examinar la coherencia interna, la consistencia lógica y el grado de estructuración del discurso matemático, elementos fundamentales para comprender el proceso de apropiación del lenguaje formal desde la perspectiva de la TSEMP.

3.4 Procedimiento de aplicación

La aplicación del instrumento se llevó a cabo bajo condiciones rigurosamente controladas, con el propósito de garantizar la validez epistemológica de las producciones obtenidas. Para ello, se estableció un entorno de trabajo individual, en el que cada estudiante desarrolló el examen sin acceso a recursos externos —ya sean tecnológicos, bibliográficos o colaborativos— que pudieran incidir en la naturaleza de sus respuestas. Esta decisión no responde únicamente a un criterio de control

evaluativo, sino a una exigencia teórica fundamental: asegurar que las producciones reflejen de manera auténtica el estado de apropiación del lenguaje matemático formal.

Desde la perspectiva de la Teoría de la Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP), la evaluación no puede reducirse a la verificación de resultados, sino que debe orientarse hacia la observación del pensamiento en acto, tal como se manifiesta en la construcción simbólica. En consecuencia, el procedimiento de aplicación fue concebido como un dispositivo que favorece la emergencia del discurso matemático propio del estudiante, evitando interferencias que pudieran enmascarar su estructura cognitiva real. La ausencia de apoyos externos permitió así acceder a un tipo de evidencia particularmente valiosa: aquella que emerge de la interacción directa entre el sujeto y el sistema formal.

Adicionalmente, se solicitó la justificación detallada de cada paso desarrollado en las soluciones. Este requisito permitió identificar el nivel de simbolización alcanzado por los estudiantes, al evidenciar si sus respuestas se apoyaban en leyes lógicas explícitas, transformaciones válidas y argumentos internamente coherentes. De este modo, la explicitación del razonamiento se convirtió en un elemento clave para distinguir entre procedimientos meramente intuitivos y procesos deductivos formalmente fundamentados.

En este marco, la omisión de justificaciones, la presencia de saltos inferenciales o la utilización de resultados sin fundamentación fueron considerados indicadores relevantes en la caracterización del desempeño estudiantil. Más que errores aislados, tales manifestaciones fueron interpretadas como señales de una relación aún no consolidada con el sistema formal, en la que el estudiante no ha internalizado plenamente la necesidad de operar bajo criterios de validez explícita.

De esta manera, el procedimiento de aplicación contempló la asignación de un tiempo suficiente para el desarrollo reflexivo de las tareas, evitando presiones que pudieran inducir respuestas apresuradas o mecánicas. Este aspecto resulta particularmente significativo en el contexto de la lógica matemática, donde la construcción de una demostración exige no solo precisión, sino también un proceso deliberado de organización del pensamiento.

El diseño del procedimiento de aplicación permitió crear las condiciones necesarias para que el examen funcionara como un espacio de producción matemática auténtica, en el que los estudiantes no solo resolvieran problemas, sino que se vieran obligados a posicionarse frente al sistema simbólico y a operar dentro de él con distintos grados de coherencia y rigor. De esta manera, la información recolectada adquiere un valor analítico profundo, en tanto posibilita comprender el proceso de apropiación del lenguaje formal desde una perspectiva estructural, en plena consonancia con los postulados de la TSEMP.

3.5 Criterios de análisis

El análisis de los datos se desarrolló a partir de una estrategia de categorización cualitativa orientada por criterios epistemológicos, cuyo propósito central consistió en interpretar el grado de apropiación del lenguaje simbólico formal evidenciado en las

producciones de los estudiantes. En coherencia con los postulados de la Teoría de la Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP), el interés no se centró en la cuantificación de aciertos o errores, sino en la comprensión de la estructura interna del discurso lógico, tal como se manifiesta en la actividad escrita.

Desde esta perspectiva, el proceso analítico se fundamentó en una lectura interpretativa de las respuestas, en la que cada producción fue considerada como una unidad de significado susceptible de revelar el nivel de formalización alcanzado. En lugar de aplicar categorías predefinidas de manera rígida, se optó por un procedimiento inductivo de codificación progresiva, mediante el cual emergieron patrones recurrentes en el uso del lenguaje lógico. Este proceso iterativo permitió identificar regularidades en la manera en que los estudiantes construyen, articulan y justifican sus expresiones simbólicas, dando lugar a la configuración de tres niveles fundamentales de apropiación: nivel autónomo, nivel resolutivo y nivel receptivo.

La distinción entre estos niveles no obedece a una jerarquía meramente cuantitativa, sino a diferencias cualitativas en la relación que el sujeto establece con el sistema formal. En este sentido, cada nivel representa una forma particular de habitar el lenguaje matemático, caracterizada por distintos grados de coherencia, explicitación y control estructural. Así, la categorización no constituye un mecanismo de clasificación externa, sino una herramienta interpretativa que permite comprender las modalidades de pensamiento presentes en las producciones analizadas.

El análisis se orientó a partir de un conjunto de criterios interrelacionados que permitieron examinar la consistencia del discurso lógico en múltiples dimensiones. En primer lugar, se consideró la coherencia sintáctica de las expresiones, entendida como la capacidad del estudiante para construir fórmulas bien formadas conforme a las reglas del sistema, respetando la jerarquía de conectores y la correcta organización de los símbolos. Este aspecto resulta fundamental, ya que constituye la base estructural sobre la cual se edifica cualquier razonamiento formal.

En segundo lugar, se analizó el uso de cuantificadores, prestando especial atención a su correcta interpretación y aplicación en contextos de dependencia lógica. Este criterio permitió identificar no solo la manipulación adecuada de símbolos como $\forall$ y $\exists$, sino también la comprensión de las relaciones que estos establecen entre variables, particularmente en situaciones que implican anidamiento o negación de cuantificadores.

De esta forma, se examinó la aplicación explícita de reglas de inferencia, con el objetivo de determinar si los estudiantes eran capaces de reconocer y justificar las transformaciones realizadas dentro del sistema lógico. La explicitación de estas reglas constituye un indicador clave del nivel de formalización, en tanto refleja el grado de conciencia que el sujeto tiene sobre los mecanismos que regulan el tránsito entre proposiciones.

Otro criterio central fue la estructura de las demostraciones, entendida como la organización secuencial y coherente de los argumentos. Este análisis permitió valorar la capacidad del estudiante para articular una cadena inferencial válida, en la que cada

proposición se derive legítimamente de las anteriores, sin rupturas ni inconsistencias. La demostración, en este sentido, fue concebida como el espacio privilegiado donde se hace visible la arquitectura del pensamiento lógico.

Definitivamente, se consideró el nivel de justificación en los procesos deductivos, atendiendo a la presencia o ausencia de fundamentación explícita en cada paso. Este criterio permitió identificar la existencia de inferencias implícitas, saltos argumentativos o conclusiones no sustentadas, elementos que revelan una relación aún incipiente con el lenguaje formal.

Es importante subrayar que cada uno de estos criterios fue interpretado no como un indicador aislado, sino como parte de una red estructural de significación, en la que los distintos componentes del discurso lógico se articulan de manera interdependiente. De este modo, el análisis permitió acceder a una comprensión integral del proceso de formalización, en la que la coherencia, la consistencia y la explicitación se constituyen como dimensiones inseparables del pensamiento matemático.

Este enfoque analítico posibilita una lectura profunda de las producciones estudiantiles, alineada con la concepción de la TSEMP, según la cual el conocimiento matemático no se mide por la corrección de los resultados, sino por la capacidad del sujeto para operar dentro de un sistema simbólico con autonomía, rigor y coherencia estructural.

3.6 Estrategia de interpretación

La interpretación de los resultados se desarrolló desde una perspectiva hermenéutica rigurosamente fundamentada, en la que las producciones escritas de los estudiantes fueron concebidas como textos matemáticos susceptibles de ser leídos, analizados e interpretados en su dimensión estructural. Bajo esta concepción, cada respuesta no fue tratada como un simple registro de aciertos o errores, sino como una manifestación concreta del modo en que el sujeto organiza su pensamiento dentro del sistema lógico. Esta aproximación permitió desplazar el foco de la evaluación hacia la comprensión profunda de la lógica interna que articula el razonamiento, reconociendo en cada producción una configuración particular del vínculo entre el estudiante y el lenguaje formal.

Desde este posicionamiento, la actividad interpretativa no se limitó a describir resultados, sino que buscó reconstruir los procesos subyacentes que dieron lugar a dichos resultados. En este sentido, el análisis asumió que toda expresión simbólica es portadora de una estructura de pensamiento, la cual puede ser develada mediante una lectura atenta a la coherencia, a las rupturas y a las regularidades presentes en el discurso. La interpretación, por tanto, se constituyó como un proceso de desentrañamiento de significados, en el que cada elemento —desde la elección de símbolos hasta la organización de las inferencias— fue considerado en relación con el sistema formal que lo sustenta.

En coherencia con la TSEMP, el análisis se centró en comprender los obstáculos epistemológicos evidenciados en las producciones estudiantiles. Los errores no fueron asumidos únicamente como fallas individuales, sino como manifestaciones de tensiones estructurales vinculadas con la apropiación del lenguaje matemático. En particular, permitieron reconocer una relación todavía incipiente con el sistema simbólico, marcada por la oscilación entre formas de pensamiento intuitivas y exigencias de formalización rigurosa.

Uno de los ejes interpretativos centrales estuvo constituido por la tensión entre el lenguaje natural y el lenguaje formal. En múltiples producciones, se evidenció que los estudiantes logran construir significados en el plano semántico, pero encuentran dificultades al intentar expresarlos dentro de las restricciones sintácticas del sistema lógico. Esta disociación fue interpretada como un punto crítico en el proceso de simbolización, en el que el tránsito desde la comprensión intuitiva hacia la formalización estructurada no se ha completado. La hermenéutica adoptada permitió, en este sentido, identificar no solo la presencia de esta tensión, sino las formas específicas en que se manifiesta en el discurso.

De igual manera, la interpretación se orientó a analizar el grado de internalización del sistema simbólico, entendido como la capacidad del estudiante para operar dentro de él sin recurrir a apoyos externos o a intuiciones no formalizadas. Este aspecto se hizo visible en la consistencia de las expresiones, en la explicitación de las reglas de inferencia y en la coherencia global de las demostraciones. La ausencia de estos elementos fue leída no como un simple error técnico, sino como un indicador de que el sistema aún no ha sido incorporado como herramienta de pensamiento.

Además, la estrategia hermenéutica permitió reconocer que las producciones estudiantiles no son homogéneas, sino que reflejan distintos niveles de relación con el lenguaje matemático. Cada respuesta fue interpretada en su singularidad, pero también en relación con patrones más amplios que emergieron del conjunto de datos, lo que posibilitó articular una lectura individual y colectiva del fenómeno estudiado.

Esta estrategia interpretativa permitió analizar el aprendizaje de la lógica matemática a partir del valor epistemológico de los errores, las inconsistencias y las rupturas presentes en las producciones estudiantiles. Estos elementos no fueron tratados únicamente como fallas a corregir, sino como indicios de las formas en que los estudiantes organizan su pensamiento durante el proceso de formalización. Así, el análisis permitió reconocer las condiciones bajo las cuales el conocimiento matemático se construye, se tensiona y se transforma.

3.7 Consideraciones éticas

El desarrollo de la presente investigación se sustentó en un marco ético riguroso, orientado a salvaguardar la integridad de los participantes y la legitimidad del proceso investigativo. En este sentido, se adoptaron principios fundamentales de la ética en investigación educativa, garantizando en todo momento el respeto por la dignidad, la autonomía y la confidencialidad de los estudiantes involucrados.

La información recolectada fue tratada bajo criterios estrictos de anonimato, evitando cualquier tipo de identificación directa o indirecta de los participantes. Las producciones analizadas fueron codificadas de manera que su interpretación se centrara exclusivamente en los aspectos epistemológicos del razonamiento matemático, sin vinculación con identidades individuales. Este procedimiento permitió preservar la privacidad de los estudiantes y, al mismo tiempo, asegurar la objetividad del análisis.

Asimismo, se garantizó que los datos obtenidos fueran utilizados exclusivamente con fines académicos y de investigación, descartando cualquier uso que pudiera incidir en la evaluación formativa o sumativa de los participantes dentro del curso. Esta separación permitió evitar la superposición entre los procesos institucionales de evaluación y los objetivos analíticos del estudio, resguardando la relación pedagógica entre docente e investigador. Además, los estudiantes fueron informados sobre el propósito de la investigación, el tipo de análisis a realizar y el uso de sus producciones, asegurando condiciones de transparencia y participación voluntaria, sin coerción ni condicionamiento académico.

Desde una perspectiva más amplia, el abordaje ético adoptado se alinea con la concepción de la TSEMP, en la medida en que reconoce al estudiante no como un objeto de evaluación, sino como un sujeto epistémico en proceso de construcción de conocimiento. En consecuencia, las producciones analizadas fueron tratadas con el respeto que implica reconocerlas como manifestaciones legítimas de pensamiento, evitando juicios reduccionistas o interpretaciones que desvirtúen su sentido formativo.

La investigación se orientó por el principio de responsabilidad académica, procurando que los resultados obtenidos contribuyan no solo al avance del conocimiento en educación matemática, sino también a la mejora de las prácticas de enseñanza. Desde este enfoque, la dimensión ética no se limita al resguardo de los participantes, sino que se extiende al compromiso de generar conocimiento pertinente, riguroso y respetuoso de la complejidad del proceso educativo.

4. RESULTADOS

4.1 Estratificación cognitiva en el uso del lenguaje lógico formal

El análisis de las producciones escritas, complementado con el tratamiento estadístico de las calificaciones obtenidas en el instrumento aplicado ($n=33$), permitió identificar una estructura diferenciada de niveles de apropiación del lenguaje matemático formal. Esta estratificación no se reduce a una clasificación cuantitativa del desempeño, sino que revela formas cualitativamente distintas de relación con el sistema simbólico. En coherencia con los principios de la Teoría de la Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP), estos niveles deben ser comprendidos como configuraciones epistemológicas que expresan distintos grados de internalización del lenguaje formal.

La distribución empírica obtenida muestra que el **nivel resolutivo constituye el grupo predominante (40.86%)**, seguido por el **nivel autónomo (37.71%)** y, finalmente, el **nivel receptivo (21.43%)**. Esta configuración no solo describe el

comportamiento del grupo, sino que ofrece una evidencia concreta del estado actual de la apropiación del lenguaje lógico en el contexto analizado.

En el nivel autónomo se sitúan aquellos estudiantes cuya producción evidencia una apropiación estructural del sistema simbólico. En estos casos, el lenguaje lógico deja de operar como un instrumento externo para convertirse en un espacio de pensamiento plenamente habitado. Las expresiones presentan una coherencia sintáctica rigurosa, el uso de cuantificadores se realiza sin ambigüedad y las demostraciones se articulan mediante cadenas deductivas explícitas, en las que cada inferencia es justificada conforme a reglas formales claramente identificadas. Este nivel no solo expresa dominio técnico, sino una transformación epistemológica profunda: el sujeto ha internalizado el sistema simbólico como forma de pensamiento autónoma.

En contraste, el nivel resolutivo, que se presenta como el predominante, se caracteriza por un dominio operativo de las reglas del sistema, aunque aún carente de una comprensión estructural completa. Los estudiantes logran aplicar procedimientos correctos y resolver tareas específicas; sin embargo, sus producciones evidencian una dependencia de esquemas algorítmicos y una formalización incompleta en la transición del lenguaje natural al lenguaje simbólico. Las justificaciones suelen ser implícitas o parciales, lo que revela una relación funcional con el sistema lógico, pero no una apropiación plena de su estructura.

Por su parte, el nivel receptivo pone de manifiesto una relación aún externa con el lenguaje matemático formal. Las producciones muestran intentos iniciales de simbolización, pero se encuentran marcadas por inconsistencias estructurales, errores en el uso de cuantificadores y dificultades en la aplicación de reglas de inferencia. La resolución se apoya predominantemente en la intuición, lo que indica que el sistema simbólico no ha sido aún internalizado como herramienta de pensamiento. Desde la TSEMP, este nivel se interpreta como una fase de transición, no como un déficit.

Esta estratificación permite sostener que el aprendizaje de la lógica matemática no puede evaluarse únicamente en términos de aciertos, sino que exige un análisis de la estructura del discurso producido. La diferencia entre niveles no radica en la cantidad de conocimiento, sino en la organización interna del mismo dentro del sistema simbólico.

4.2 Dificultades epistemológicas en la apropiación del sistema simbólico

El análisis detallado de las producciones permitió identificar patrones de error recurrentes que, lejos de ser contingentes, configuran obstáculos de naturaleza epistemológica. Estas dificultades reflejan una apropiación incompleta del lenguaje simbólico, en la que el estudiante no ha logrado reorganizar plenamente su pensamiento conforme a las exigencias del sistema formal. En este marco, se observa una disociación persistente entre el lenguaje natural y el lenguaje formal, ya que una comprensión semántica adecuada de los enunciados no siempre conduce a una formalización simbólica coherente. Este hecho evidencia la coexistencia de dos sistemas de significación no integrados:

uno intuitivo, vinculado al lenguaje cotidiano, y otro estructural, propio del sistema lógico-formal.

De manera correlativa, se identifica un uso instrumental de las reglas de inferencia. Procedimientos como el *Modus Ponens* o las leyes de De Morgan son aplicados de forma mecánica, sin integrarse en una red estructural de relaciones lógicas. Esta aproximación algorítmica limita la consolidación del pensamiento formal, pues el estudiante opera con reglas sin reconocer plenamente su función dentro del sistema deductivo. Particularmente relevante resulta la debilidad en el manejo de cuantificadores, observable en errores de negación y en la confusión entre estructuras de dependencia lógica como $\forall x \exists y$ y $\exists y \forall x$, lo cual constituye un indicador clave del nivel de formalización alcanzado.

Definitivamente, la ausencia de justificación explícita en los procesos deductivos sugiere que la demostración no ha sido internalizada como práctica cognitiva. La presencia de saltos inferenciales y la omisión de leyes utilizadas ponen en evidencia una relación todavía parcial con el sistema simbólico, en la que el estudiante puede alcanzar ciertos resultados, pero sin articular de manera rigurosa las razones que los sostienen.

Esta versión responde a las observaciones porque une los párrafos relacionados, evita cortes bruscos y mantiene una progresión más clara: primero la disociación lenguaje natural/lenguaje formal, luego el uso mecánico de reglas, después los cuantificadores y, finalmente, la falta de justificación demostrativa.

4.3 Interpretación integradora de los resultados desde la TSEMP

La articulación entre la distribución empírica de los niveles cognitivos y las dificultades epistemológicas observadas permite construir una interpretación integrada del fenómeno estudiado. El predominio del nivel resolutorio, evidenciado tanto en el análisis cualitativo como en la distribución porcentual, indica que los estudiantes han desarrollado una competencia operativa, pero no han internalizado el sistema formal en su totalidad.

Las medidas estadísticas obtenidas (media =78.5, mediana =82, asimetría negativa) refuerzan esta interpretación, mostrando una concentración en desempeños medios-altos con una dispersión moderada. Esta configuración es consistente con un grupo en el que predominan habilidades procedimentales, pero donde la formalización rigurosa aún no se ha generalizado.

Desde la TSEMP, estos resultados confirman que el aprendizaje matemático no consiste en la acumulación de conocimientos, sino en la apropiación de un sistema simbólico que redefine las condiciones del pensamiento.

Con el propósito de fortalecer la trazabilidad entre los datos obtenidos y las conclusiones del estudio, se incorporan a continuación tres evidencias representativas de producciones estudiantiles derivadas del instrumento aplicado. No se presenta el examen completo, sino un ítem que permite observar el modo en que los estudiantes

formalizan, infieren, justifican y estructuran simbólicamente sus razonamientos. Esta decisión responde a la necesidad de mostrar evidencias empíricas que sustenten la clasificación en los niveles receptivo, resolutivo y autónomo.

Figura 1. Resolución del tercer ítem del examen

III. INFERENCIA Y DEMOSTRACIÓN (10 pts)

Se presenta el siguiente razonamiento:

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge (\neg r) \wedge p$$

Se sabe que la conclusión esperada es:

$$\neg q$$

Se pide:

1. Reescribir la premisa principal usando equivalencias lógicas.
2. Desarrollar una demostración formal completa que conduzca a la conclusión.
3. Indicar claramente en cada paso si se utiliza:
 - una equivalencia lógica, o
 - una ley de inferencia.
4. Explicar por qué la conclusión no es inmediata sin transformación previa.

Se presenta el siguiente razonamiento:

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q), \quad p \vee r$$

La conclusión propuesta es:

$$q \vee \neg q$$

Se pide:

1. Demostrar formalmente la conclusión.
2. Explicar el papel de la disyunción inicial en la estructura del razonamiento.
3. Justificar por qué este argumento siempre conduce a una tautología.
4. Señalar en qué momento se utiliza razonamiento por casos.

Considere el siguiente razonamiento:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r), \quad \neg r$$

Se desea llegar a la conclusión:

$$\neg p$$

Se pide:

1. Transformar las premisas usando equivalencias lógicas hasta obtener una forma útil.
2. Desarrollar la demostración formal.
3. Explicar el papel de la contraposición en el razonamiento.
4. Justificar por qué no es posible obtener directamente la conclusión sin transformación previa.

Fuente: Elaboración propia.

Nota. La figura presenta tres ítems seleccionados del apartado “Inferencia y demostración” del instrumento aplicado a los estudiantes. Los ejercicios fueron diseñados para valorar la capacidad de reescribir premisas mediante equivalencias lógicas, desarrollar demostraciones formales completas, justificar cada paso mediante leyes de inferencia y explicar la estructura deductiva del razonamiento. En el primer caso, se analiza una implicación anidada que conduce a la conclusión $\neg q$; en el segundo, se examina un razonamiento por casos que permite obtener $q \vee \neg q$; y en el tercero, se estudia el uso de la contraposición y del *Modus Tollens* para llegar a $\neg p$. Estos ítems permiten evidenciar el grado de apropiación del lenguaje simbólico formal y la coherencia deductiva de las producciones estudiantiles desde la perspectiva de la Teoría de la Simbolización y Enseñanza Matemática Pura.

Figura 2. Evidencia de producción estudiantil en el Ítem III: inferencia y demostración formal.

III Inferencia y Demostración

Se presenta el siguiente razonamiento
 $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge (\neg r) \wedge p$

Conclusión esperada: $\neg q$

① $\equiv \neg p \vee \neg q \vee r$	Equiva. de Impl. y AD.
② $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge \neg r \wedge p$	Premisa
③ $\neg p \vee \neg q \vee r$	Simp. 2
④ $\neg r$	Simp. 2
⑤ p	Simp. 2
⑥ $\neg p \vee \neg q$	SD ② y ④
⑦ $\neg q$	SD ⑥ y ⑤

③ ¿Por qué siempre conduce a una tautología?

Porque $q \vee \neg q$

Es una tautología (ley del tercero excluido)

- desde p se obtiene q
- desde r se obtiene $\neg q$.

No depende de valores particulares siempre es verdadero

④ ¿Dónde usamos razonamiento por casos?

⑫ → Eliminación de la disyunción

Porque partimos de $p \vee r$

Analizamos caso p y caso r y en ambos llegamos a la misma conclusión.

⑭ Justificar

Porque MP necesita q , no $\neg r$, y si no hacemos sería una falacia por ende se necesita transformar.

Se presenta el siguiente razonamiento
 $(P \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q), p \vee r$

① $(P \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q)$	
② $P \vee r$	
③ $P \rightarrow q$	Simp. de ①
④ $r \rightarrow \neg q$	Simp. de ①
⑤ $p \vee r$	Premisa
⑥ P	Suposición
⑦ q	Modus Ponens: ③ y ⑥
⑧ $q \vee \neg q$	A
⑨ r	o. o. o
⑩ $\neg q$	S.
⑪ $q \vee \neg q$	MP ⑦ y ⑩
⑫ $q \vee \neg q$	Elim. de D. ⑤ y casos ⑥, ⑧, ⑨, ⑪

Considere el siguiente razonamiento
 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r), \neg r$

① $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	Premisa
② $\neg r$	Premisa
③ $p \rightarrow q$	①
④ $q \rightarrow r$	①
⑤ $\neg r \rightarrow \neg q$	Contr. ④
⑥ $\neg q$	Modus P. ③ y ⑤
⑦ $\neg q \rightarrow \neg p$	Contr. ③
⑧ $\neg p$	⑥ y ⑦ MP.

③ Papel de contraposición

Es clave porque, no puedes usar directamente $q \rightarrow r$ con $\neg r$, pero al convertirlo en $\neg r \rightarrow \neg q$ ahora sí se puede usar MP.

Fuente: Producción estudiantil recolectada en el instrumento aplicado.

Nota. La figura presenta fragmentos de la resolución desarrollada por una estudiante en el Ítem III del instrumento evaluativo, correspondiente al apartado de inferencia y demostración. En las evidencias se observa el tratamiento de tres razonamientos lógicos: el primero orientado a obtener la conclusión $\neg q$ a partir de una implicación anidada; el segundo centrado en el razonamiento por casos para alcanzar $q \vee \neg q$; y el tercero dirigido a demostrar $\neg p$ mediante el uso de contraposición y reglas de inferencia. La producción estudiantil muestra una apropiación significativa del lenguaje simbólico, en tanto separa premisas, transforma implicaciones, utiliza reglas como *Modus Ponens*, *Modus Tollens*, simplificación, silogismo disyuntivo y eliminación de la disyunción. No obstante, también se identifican algunos pasos abreviados y ciertas justificaciones que podrían explicitarse con mayor rigor formal. En conjunto, la evidencia permite ubicar la producción en un nivel resolutivo alto con rasgos de autonomía formal, desde la perspectiva de la Teoría de la Simbolización y Enseñanza Matemática Pura.

4.4 Discusión

Los resultados obtenidos permiten sostener con mayor precisión que la dificultad estructural en la enseñanza de la lógica matemática no reside en la complejidad inherente de sus contenidos, sino en la configuración didáctica desde la cual estos han sido históricamente abordados. La predominancia del nivel resolutivo no debe interpretarse como un logro suficiente, sino como un indicador de una formación incompleta: los estudiantes han desarrollado destrezas operativas funcionales, pero no han alcanzado una apropiación estructural del sistema formal que les permita ejercer un pensamiento matemático autónomo.

En este marco, la Teoría de la Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP) se consolida no solo como una propuesta didáctica, sino como un marco interpretativo de alto alcance epistemológico, al situar el lenguaje simbólico como condición constitutiva del conocimiento matemático. La evidencia empírica obtenida refuerza esta postura: los estudiantes que alcanzan el nivel autónomo no se distinguen únicamente por la corrección de sus respuestas, sino por la coherencia interna de sus producciones, la explicitación rigurosa de sus inferencias y, fundamentalmente, por una internalización estructural del sistema formal que les permite operar en él con consistencia lógica.

Por el contrario, los niveles resolutivo y receptivo ponen de manifiesto formas de relación incompletas con el conocimiento matemático. En el primero, se observa una ejecución adecuada de procedimientos que, sin embargo, no está acompañada de una comprensión profunda de las estructuras que los sustentan; en el segundo, predomina una aproximación fragmentaria, en la que el lenguaje simbólico no ha sido incorporado como herramienta de pensamiento, sino que permanece como un conjunto de reglas externas al sujeto. En ambos casos, la dependencia de intuiciones no formalizadas y la ausencia de control sintáctico evidencian una brecha significativa entre operar en el sistema y comprenderlo en su totalidad.

Particularmente reveladora resulta la ausencia sistemática de justificación en las demostraciones, la cual no puede reducirse a una omisión técnica, sino que debe

interpretarse como un síntoma de una desconexión más profunda entre la naturaleza del conocimiento matemático —intrínsecamente deductiva y estructurada— y las prácticas de enseñanza que lo median. Este hallazgo refuerza la necesidad de restituir la demostración no como un elemento complementario, sino como el eje articulador del aprendizaje matemático formal.

En diálogo crítico con enfoques como el de Duval, los resultados obtenidos permiten cuestionar la suficiencia de la multiplicidad de registros de representación como vía para la comprensión. Si bien la conversión entre registros puede favorecer ciertos procesos cognitivos, la evidencia sugiere que dicha diversidad no garantiza la apropiación del conocimiento si no se consolida el dominio del registro simbólico como espacio privilegiado de producción de significado. Desde la perspectiva de la TSEMP, esta limitación se interpreta como consecuencia de haber desplazado el centro epistemológico del conocimiento fuera del sistema formal que le da coherencia.

En consecuencia, los hallazgos de este estudio no solo ofrecen respaldo empírico a los postulados de la TSEMP, sino que plantean la necesidad de una reconfiguración didáctica profunda, orientada a formar sujetos capaces de habitar el lenguaje matemático como un sistema formal autónomo. Esto implica promover una enseñanza que privilegie la explicitación, la coherencia lógica y el rigor simbólico, con el propósito de desarrollar una autonomía intelectual que trascienda la mera ejecución de procedimientos y se instale en el dominio estructural del pensamiento matemático.

5. CONCLUSIONES

La presente investigación ha permitido evidenciar que la enseñanza de la lógica matemática, cuando es abordada desde la Teoría de la Simbolización y Enseñanza Matemática Pura (TSEMP), trasciende el ámbito de la instrucción procedimental para situarse en un plano eminentemente epistemológico. Los resultados obtenidos no solo describen niveles diferenciados de desempeño estudiantil, sino que revelan grados distintos de internalización del lenguaje matemático como sistema formal autónomo.

En este sentido, puede formularse una generalización teórica fundamental: el aprendizaje matemático, particularmente en dominios como la lógica, no depende primariamente de la comprensión semántica ni de la contextualización intuitiva, sino del grado de apropiación del sistema simbólico que estructura el pensamiento. La simbolización no opera como un medio de expresión posterior al pensamiento, sino como la condición misma de posibilidad del pensamiento matemático. Esta afirmación, sostenida empíricamente en el presente estudio, refuerza el núcleo epistemológico de la TSEMP y plantea la necesidad de reconsiderar los fundamentos sobre los cuales se diseñan los procesos de enseñanza en matemática.

Desde esta perspectiva, las diferencias observadas entre los niveles receptivo, resolutivo y autónomo no deben interpretarse únicamente como escalas de rendimiento, sino como manifestaciones de distintas formas de relación con el conocimiento matemático. Mientras que en los niveles iniciales predomina una interacción externa con el sistema simbólico, en el nivel autónomo se evidencia una apropiación estructural que permite al sujeto operar dentro del sistema con coherencia, rigor y control deductivo.

Esta distinción aporta un marco analítico potente para comprender las dificultades persistentes en la enseñanza de la matemática formal.

En cuanto a las implicaciones educativas, los hallazgos del estudio sugieren la necesidad de una reorientación profunda de las prácticas de enseñanza. No resulta suficiente promover la comprensión de conceptos en términos intuitivos o contextuales si esta no se traduce en una formalización rigurosa. En consecuencia, se plantea la urgencia de diseñar propuestas didácticas que sitúen la simbolización en el centro del proceso formativo, privilegiando la explicitación, la demostración y la coherencia sintáctica como criterios fundamentales de aprendizaje. Asimismo, la evaluación debe transformarse en un espacio de análisis del pensamiento matemático, en el que la justificación de los procesos tenga un valor central por encima de la simple obtención de resultados correctos.

Este enfoque implica también una reconsideración del rol del docente, quien deja de ser un mediador de significados contextualizados para convertirse en un formador de pensamiento formal, capaz de guiar al estudiante en el tránsito hacia la apropiación del lenguaje matemático en su forma más rigurosa. Lejos de simplificar el contenido, esta perspectiva apuesta por acompañar al estudiante en la construcción progresiva de estructuras formales cada vez más complejas.

En relación con las líneas futuras de investigación, el presente trabajo abre múltiples posibilidades de profundización. Resulta pertinente extender este análisis a otros campos de la matemática, como el álgebra abstracta, el análisis matemático o la teoría de números, con el fin de explorar la validez y el alcance de la TSEMP en distintos dominios formales. Asimismo, se plantea la necesidad de desarrollar estudios longitudinales que permitan observar la evolución de la simbolización a lo largo del proceso formativo, así como investigaciones comparativas que contrasten este enfoque con otros modelos didácticos contemporáneos.

De igual manera, futuras investigaciones podrían centrarse en el diseño y validación de instrumentos específicos que permitan medir con mayor precisión los niveles de apropiación del lenguaje simbólico, así como en la construcción de secuencias didácticas fundamentadas explícitamente en los principios de la TSEMP.

Este estudio no solo aporta evidencia empírica sobre las dificultades en la enseñanza de la lógica matemática, sino que propone una reconfiguración del horizonte educativo, en la que la simbolización se reconoce como el núcleo constitutivo del conocimiento matemático. Asumir esta perspectiva implica un cambio paradigmático que, aunque exigente, se presenta como una condición necesaria para la formación de sujetos capaces de habitar el pensamiento matemático en su dimensión más rigurosa y profunda.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORES

JCR concibió la idea presentada y desarrolló la teoría. adaptó la metodología a este contexto, crearon los modelos, realizaron las actividades y recopilaron los datos. JCR analizó los datos. El autor participó activamente en la discusión de los resultados, revisó y aprobó el trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la persona autor correspondiente, JCRC previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa su profundo agradecimiento a los estudiantes del curso de Matemática Discreta con Teorías Axiomáticas, cuya participación, compromiso y esfuerzo intelectual hicieron posible el desarrollo del presente estudio. Sus producciones académicas no solo constituyeron la base empírica de este trabajo, sino que reflejan el proceso de apropiación del lenguaje matemático formal en un contexto real de formación.

Asimismo, se reconoce el valioso respaldo institucional de la Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media (EFPEM) de la Universidad de San Carlos de Guatemala, por su compromiso con la formación rigurosa de docentes en matemática y por propiciar espacios académicos que permiten el desarrollo de propuestas innovadoras en educación matemática. Para finalizar a mi mentor MSc Luis Solorzano, gracias por todo.

6. REFERENCIAS

- Boole, G. (1854). *An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. ISBN: 978-0486600284
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Enderton, H. B. (2001). *A mathematical introduction to logic* (2nd ed.). Academic Press.
- Ewald, W. (Ed.). (2005). *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics*. Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198505358.001.0001>
- Frege, G. (1879). *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete formelsprache des reinen denkens*. Nebert.
- Frege, G. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik* Koebner.
- Frege, G. (1893/1903). *Grundgesetze der Arithmetik*. Pohle.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 39(1–2), 127–135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Hilbert, D., & Ackermann, W. (1938). *Grundzüge der theoretischen Logik*.

- Pólya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press. (Original work published 1945)
- Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(1), 7–44. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.44.1.0007>
- Ruiz Castillo, J. C. (2025). *Teoría simbolista de la educación matemática pura (TSEMP)*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.17797210>
- Ruiz Castillo, J. C. (2026). *Enseñanza del álgebra booleana desde la teoría de la simbolización y enseñanza matemática pura en un contexto axiomático universitario*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.19342697>
- Ruiz Castillo, J. C. (2026b). *Enseñanza del álgebra booleana desde la teoría de la simbolización y enseñanza matemática pura en un contexto axiomático Universitario*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.19342697>
- Ruiz Castillo, J. C. (2026c). *La demostración matemática: desarrollo epistemológico y formal desde la teoría simbolista de educación matemática pura (TSEMP)*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.18751757>
- Ruiz Castillo, J. C. (2026d). *Teoría simbolista de educación matemática pura (TSEMP) leyes de inferencia, deducción fitch y lógica de predicados capítulo con teoría, demostraciones y ejemplos resueltos*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.18687124>
- Ruiz Castillo, J. C. (2026e). *Teoría simbolista de educación matemática pura (TSEMP) y la enseñanza formal de tablas de verdad, conectivas y leyes lógicas*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.18653159>
- Ruiz Castillo, J. C. (2026f). *Boolean algebra, formal logic and karnaugh maps a formal, structural and epistemological exposition from the theory of symbolization and pure mathematical teaching (TSEMP)*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.18529473>
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.
- Stanford Encyclopedia of Philosophy. (2016).

