



APLICACIÓN DE GEOGEBRA BAJO UN ENFOQUE DE AULA INVERTIDA PARA EL DESARROLLO DE LA VISUALIZACIÓN ESPACIAL EN ESTUDIANTE DE GEOMETRÍA Y ÁLGEBRA LINEAL

APPLICATION OF GEOGEBRA UNDER A FLIPPED CLASSROOM APPROACH FOR THE DEVELOPMENT OF SPATIAL VISUALIZATION IN STUDENTS OF GEOMETRY AND LINEAR ALGEBRA

Byron Andrey Solano Herrera¹



ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0009-3374-8158>

RESUMEN

La visualización espacial para el estudio de objetos geométricos tridimensionales puede convertirse en un obstáculo que no permite analizar la aplicación de conceptos matemáticos en el estudiantado, y que dificulta, por tanto, determinar el alcance de los objetivos de aprendizaje. Para solventar esto, se sigue una metodología de Investigación Basada en Diseño con cuatro fases de desarrollo, las cuales dieron como resultado una sistematización de la intervención didáctica mediante el desarrollo de cuatro módulos. La recolección de datos previa y posterior a la intervención destaca que se logró impulsar el enfoque de aula invertida, principalmente la implementación de videos y el trabajo colaborativo con el uso de GeoGebra. Entre los resultados más destacados las personas participantes reportaron una mejora en su visualización espacial, lo que sugiere un incremento en la capacidad de generar representaciones tridimensionales para la extracción de características y conjeturas de los objetos geométricos. Por lo tanto, se concluye que la metodología empleada dinamiza el aprendizaje y contribuye a solventar las dificultades de las personas estudiantes en materia de visualización espacial.

Palabras clave: aula invertida, visualización espacial, GeoGebra, módulos de aprendizaje, enseñanza de las matemáticas.

¹ Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, código postal 11501-2060. Correo electrónico: byron.solano@ucr.ac.cr



ABSTRACT

This study implements a didactic intervention that combines GeoGebra software with the flipped classroom model to enhance students' spatial visualization skills in the topics of lines, planes, and vector geometry. Using a four-phase Design-Based Research methodology, the intervention was structured into four modules. Pre- and post-intervention data highlights the successful adoption of the flipped classroom approach, particularly through instructional videos and collaborative tasks in GeoGebra. Participants reported improvement in spatial visualization, which suggests an increased capacity to construct three-dimensional representations, as well as extract characteristics about geometric objects and formulate conjectures. Therefore, it is concluded that the methodology employed promotes active learning and effectively addresses student challenges in spatial visualization.

Keywords: flipped classroom, spatial visualization, GeoGebra, learning modules, mathematics education.

1. INTRODUCCIÓN

A nivel de la educación superior y en la formación de personas docentes en matemática, la habilidad de visualización espacial es fundamental para el desempeño de cada profesional; en cursos avanzados las modelaciones y representaciones gráficas se realizan en dos o tres dimensiones. La asignatura Geometría y Álgebra Lineal de la carrera de Enseñanza de la Matemática de la Universidad de Costa Rica (en adelante UCR), en la cual se enmarca el presente estudio, es uno de los espacios de formación que requiere un adecuado desarrollo de la visualización y ubicación espacial.

La presente investigación busca experimentar con la implementación de una metodología de enseñanza basada en el aula invertida y el uso del software GeoGebra para los contenidos de rectas, planos y geometría vectorial, con el fin de potenciar la visualización espacial en estudiantes de Geometría y Álgebra Lineal de la UCR. Siguiendo las ideas de Monterroza (2021):

Se hace necesario que las instituciones educativas, a través del currículo institucional con apoyo de TIC, ofrezcan a sus educandos la posibilidad de desarrollar el pensamiento espacial y que lo puedan aplicar en la vida cotidiana en cualquier área del saber de forma interdisciplinaria, además les faciliten un buen desempeño académico en su formación futura de pregrado, en especial las que tienen orientación hacia las ciencias exactas (p. 4394).

Esta línea de pensamiento se enmarca en la situación que presenta la población estudiantil, a la cual se desea aplicar la estrategia didáctica, que está basada en módulos ubicados en un entorno virtual.

Andrade y Montecino (2011) también hacen una exposición de la necesidad educativa al señalar que las personas estudiantes presentan dificultades al acudir a los objetos tridimensionales para resolver una situación problema. Según los autores, una de las causas es el factor de arraigo que tienen las personas estudiantes respecto a las representaciones gráficas previas, en una o dos dimensiones.

Lo anterior justifica la necesidad de apoyar a la persona estudiante en el paso de un pensamiento gráfico más natural y al que ha estado acostumbrado desde secundaria, a uno más analítico donde se requieren habilidades que superan el reconocimiento e interpretación. Además, para Ramírez (2021) esta problemática generaría otro tipo de inconvenientes relacionados con aplicaciones futuras de las representaciones tridimensionales, principalmente en cálculos algebraicos.

En la formación de los aprendices, la visualización se vuelve una herramienta para crear imágenes mentales que den una idea de los objetos. Castro y Castro (1997), citados en Suárez y León (2016), plantean que el pensamiento visual “está ligado a la capacidad para la formación de imágenes mentales, cuya característica es hacer posible la evocación de un objeto sin que esté presente” (p. 113). En las evaluaciones sumativas, las personas estudiantes no tendrán acceso al recurso tecnológico para construir los objetos tridimensionales; por ende, la habilidad de visualización espacial debe generar un pensamiento visual que permita acercarse mentalmente a las manipulaciones que realiza el software durante una prueba.

Dada la problemática, se plantea ¿cómo podría potenciarse el desarrollo de la visualización espacial de las personas estudiantes en los contenidos de rectas, planos y geometría vectorial del curso Geometría y Álgebra Lineal de la Universidad de Costa Rica, mediante el uso del software GeoGebra y bajo el enfoque de aula invertida?

La importancia de resolver esta necesidad educativa se fundamenta en el desarrollo de la habilidad de la visualización espacial para asignaturas posteriores y el desempeño profesional de todo aprendiz, así como en el cambio de paradigma en la metodología de enseñanza al incorporar las tecnologías digitales a los procesos de enseñanza y aprendizaje del curso Geometría y Álgebra Lineal.

Con ello, se busca solventar la necesidad que tiene la población estudiantil de mejorar sus competencias en visualización espacial, así como mitigar los problemas que el desarrollo reducido de las mismas manifiesta en asignaturas posteriores, a través del uso de GeoGebra en un enfoque de aula invertida. Rodríguez, Pérez y Ulloa (2024) afirman que esta metodología impacta positivamente en el rendimiento y motivación del estudiantado, debido a su introducción en un ambiente activo y participativo.

Junto a estos elementos, la experiencia de aula invertida con el uso de GeoGebra tiene como objetivo desarrollar cuatro módulos virtuales que utilicen el software GeoGebra bajo el enfoque de aula invertida, para mejorar la visualización espacial en rectas, planos y geometría vectorial en el estudiantado matriculado en la asignatura Geometría y Álgebra Lineal de la UCR.

2. ESTADO DE LA CUESTIÓN

Distintos trabajos de investigación y experiencias educativas han puesto en evidencia los esfuerzos que se hacen en educación superior para desarrollar la habilidad de la visualización espacial en diferentes áreas como el cálculo diferencial y el álgebra lineal.

Los profesores Marco Gutiérrez y Walter Mora del Instituto Tecnológico de Costa Rica publicaron un libro digital en la revista digital Matemática, Educación e Internet en el

2018, titulado *Vectores Rectas y Planos. Visualización interactiva*. El mismo fue un acercamiento para que las personas estudiantes pudieran interactuar con los objetos geométricos que son representados en tres dimensiones, con el objetivo de desarrollar la visualización espacial en algunos tópicos de Álgebra Lineal. Como señalan Gutiérrez y Mora (2018), la interactividad de una aplicación genera beneficios en el estudiantado al visualizar la aplicabilidad de un teorema o definición; destacando sus alcances. Además, mencionan que la visualización interactiva es un complemento al proceso de enseñanza, pero requiere la participación del profesor.

Por otro lado, Ramírez (2021) documenta una experiencia donde utiliza el software GeoGebra como recurso didáctico para visualizar distintas curvas y superficies en el espacio y sus proyecciones en los planos coordenados, esto para cubrir el contenido de integración en varias variables. Por otra parte, Del Río (2016), citado en Ramírez (2021), indica que algunos problemas para el aprendizaje de los tópicos de integración múltiple surgen por la dificultad de las personas estudiantes de realizar gráficas (en 2D y 3D) utilizando únicamente lápiz y papel, lo cual implica limitantes para la manipulación algebraica y la visualización de dichas gráficas.

Ramírez (2021) menciona, además, que se genera dificultades entre la manipulación algebraica y las interpretaciones de gráficos bidimensionales y tridimensionales, construidos con lápiz y papel. Esto respalda la importancia de resolver dicha problemática integrando tecnologías digitales, dado que el autor, entre las conclusiones que presentó de la investigación, destaca que las actividades que utilizan GeoGebra en dos y tres dimensiones favorecen los procesos de enseñanza y aprendizaje al aumentar la motivación e interés de los estudiantes.

Asimismo, a nivel internacional Andrade y Montecino (2011) desarrollaron una investigación que pretendió detectar las dificultades asociadas al uso de la visualización espacial dentro del contexto áulico chileno. Ellos detectaron que la persona estudiante presenta dificultades ante la manipulación de las representaciones en el plano de objetos geométricos tridimensionales, por eso concluyen que

es indispensable que los estudiantes desarrollen las habilidades y competencias para dibujar e interpretar las representaciones en el plano de los cuerpos tridimensionales y, de esta manera, obtener las herramientas necesarias para comprender, visualizar y manipular las representaciones icónicas y/o gráficas de la geometría espacial (Andrade y Montecino, 2011, p. 11).

Por otro lado, Vieira (2012) realizó un estudio en el cual destaca el uso de la tecnología para dar el paso de cálculo en una variable a cálculo en varias variables donde las presentaciones son tridimensionales, con lo cual concluye que GeoGebra tiene un papel facilitador para la comprensión de propiedades restringidas en el espacio de dos dimensiones. Además, el papel de este software en el ordenador potencia la articulación de registros entre cálculo en una variable a más.

Por último, Carrascal et al. (2017) desarrollaron una investigación que utilizó el software GeoGebra para la formulación del pensamiento espacial en los tópicos de cálculo diferencial en estudiantes de ingeniería en la Universidad Francisco de Paula en Santander

Ocaña, Colombia. El objetivo de los autores fue determinar si el uso de GeoGebra contribuye al fortalecimiento del pensamiento espacial en cálculo diferencial. Entre los resultados sobresale que el pensamiento espacial de las personas estudiantes relacionadas con el aprendizaje de GeoGebra se encuentra en un nivel que les permite resolver ejercicios y orientarse en el espacio.

3. MARCO TEÓRICO

En función del objetivo señalado anteriormente, es necesario tener un marco de referencia teórico que permita un adecuado uso e interpretación de los conceptos a estudiar y las teorías de aprendizaje utilizadas.

3.1 Visualización espacial

La necesidad de estudiar la visualización espacial es mencionada por Moral et al. (2023), quienes afirman que el error de aprendizaje en distintos contenidos del área de geometría radica precisamente en la capacidad de visualización que tienen las personas estudiantes. Suárez y León (2016), basados en los trabajos de Yakimanskaya (1991), mencionan que el pensamiento espacial es una forma de actividad mental donde se crean imágenes mentales para luego manipularlas al resolver problemas prácticos y teóricos. Siguiendo los pensamientos de Hershkowitz (1990), los autores añaden que esta habilidad permite representar, transformar, generalizar, comunicar, documentar y reflexionar información sobre la visión.

Por tanto, para el presente estudio se entenderá como visualización espacial aquella competencia que tiene una persona estudiante para conectar imágenes de objetos tridimensionales con esquemas mentales previos, o para la construcción de nuevos esquemas mentales que permitan manipular esas representaciones gráficas a nivel cognitivo, con el fin de utilizar esas representaciones gráficas en los contenidos de rectas, planos y geometría vectorial.

3.2 Aula invertida o flipped classroom

El aula invertida es un enfoque de enseñanza y aprendizaje que rompe con el paradigma tradicional y se enmarca en el paradigma emergente educativo. Sandobal et al. (2021) destacan que el aula invertida hace uso de la tecnología para que los alumnos visualicen y analicen los contenidos antes de ir al salón de clase. Esto permite que en el aula se realice más práctica, se profundice en contenidos y se promueva el aprender haciendo. Los autores añaden que el espacio de desarrollo colectivo del aula invertida (la lección presencial) se transforma en un ambiente dinámico y participativo por parte de las personas estudiantes.

Autores como Salas (2021) describen que el rol de la persona docente es el de facilitador y guía, encargado de diseñar actividades que promuevan y desarrollen habilidades. Asimismo, tiene la responsabilidad de realizar una exhaustiva planificación de las clases presenciales y no presenciales, así como ser un facilitador de retroalimentación. El aprendiz presenta un rol activo, pues es el eje del proceso educativo que aprende de manera autónoma y continua, además de trabajar en grupo e individualmente. También, las personas docentes deben tener el compromiso de consultar el material previo a la clase. El rol de la tecnología

toma un papel activo cuando se hace un uso creativo, eficiente, crítico y seguro de las tecnologías digitales.

Por tanto, para la presente investigación se estima que el aula invertida —apoyada por el constructivismo— ayudará a tratar el problema de la visualización espacial en los contenidos de rectas, planos y geometría vectorial. Esto debido a que las personas estudiantes podrán hacer una indagación y manipulación exhaustiva al ritmo que consideren necesario y en ambientes en los que se sientan más cómodas, lo cual propicia el aprendizaje activo.

El constructivismo avala el uso del aula invertida y de la tecnología en el proceso de enseñanza, que caracteriza como un proceso innovador que rompe con el paradigma tradicional. Santillán (2022) afirma lo siguiente:

La metodología flipped classroom está sustentada desde el enfoque de enseñanza centrado en el estudiante y desde los enfoques de aprendizaje: constructivista de Vygotsky, el aprendizaje situado, el aprendizaje experiencial la teoría del conflicto cognitivo de Piaget, el aprendizaje cooperativo basado en la Zona de Desarrollo Próximo de Vygotsky cuyos enfoques de enseñanza y del aprendizaje, aplicados en el desarrollo de la metodología flipped classroom en un contexto educativo, permite que los estudiantes sean el centro del proceso formativo y reciban una educación personalizada y adaptada a sus necesidades individuales (p. 2055).

Así, en el marco de la investigación se proyecta que la persona estudiante construya el conocimiento manipulando los objetos matemáticos, utilizando saberes previos y con la interacción en un ambiente social, principalmente a través del trabajo colaborativo.

3.3 Entorno virtual de aprendizaje

Se entenderá como entorno virtual de aprendizaje aquel espacio en una plataforma en el que interactúan la pedagogía y la didáctica para que la persona estudiante alcance el aprendizaje buscado. Esto con el apoyo de recursos tecnológicos externos e internos, como libros, imágenes, videos y módulos interactivos que permiten ser incrustados.

El planteamiento de la idea anterior sigue lo señalado por Onrubia (2005), citado en Pérez y Castro (2022): “un entorno virtual de aprendizaje está representado por el proceso de enseñanza y aprendizaje que se desarrolla en su interior” (p. 9). Asimismo, en los entornos virtuales de aprendizaje la persona docente “establece herramientas pedagógicas que interaccionan entre el conocimiento técnico y el pedagógico” (Pibaque y Larreal, 2023, 9267), transformando la educación tradicional a una con apoyo de la tecnología. La plataforma Mediación Virtual de la Universidad de Costa Rica será la que aloje los distintos módulos de esta investigación, ya que se pretende impulsar nuevas ideas, metodologías y formas creativas para promover el aprendizaje con el apoyo de tecnologías.

3.4 Relación de GeoGebra con la visualización espacial y aula invertida

Para Teófilo et al. (2022), GeoGebra es un software utilizado como recurso didáctico para el desarrollo de la intuición y el pensamiento geométrico, pues permite la visualización de objetos en tercera dimensión. Por su parte, García y Poveda (2022) sostienen que la cuantificación de los atributos de un objeto en el software permite analizar las variaciones de

los objetos geométricos de forma instantánea, donde la persona estudiante puede deducir patrones y conjeturas.

Además, Chóez y Sárate (2020) indican que un beneficio de GeoGebra desde lo didáctico “aporta a que los estudiantes desarrollen habilidades cognitivas de orden superior, a través de la manipulación, ya que, permite la visualización, la interpretación y reflexión de las construcciones” (p. 64). Además, señalan en sus conclusiones el respaldo del aula invertida apoyada con GeoGebra, pues “según los resultados obtenidos, contribuye a la autonomía, la participación y a la evaluación como proceso positivo para el estudiante. En cuanto a las habilidades sociales, promueve el trabajo en equipo, por ende, consolida las relaciones entre compañeros” (p. 64).

4. METODOLOGÍA

Esta investigación siguió un enfoque cualitativo debido a la pregunta ¿cómo podría potenciarse el desarrollo de la visualización espacial de las personas estudiantes en los contenidos de rectas, planos y geometría vectorial del curso Geometría y Álgebra Lineal de la UCR? A partir de ello, se requirió la interacción directa de la persona investigadora con el contexto para determinar cómo el estudiantado incorpora la tecnología a su aprendizaje y qué estrategias de análisis utilizan para desarrollar la visualización espacial.

Relacionado con lo anterior, Hernández et al. (2010) mencionan que en este enfoque la indagación se realiza entre los hechos y su interpretación y viceversa; destacan que se pasa de lo particular a lo general, aplicando un proceso inductivo.

La población de la investigación fueron las 15 personas matriculadas en el curso MA0307 Geometría y Álgebra Lineal de la UCR, sede Rodrigo Facio, en la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática, durante el segundo ciclo del 2024. Además, se escogió una muestra de cinco personas estudiantes bajo un muestreo por conveniencia y siguiendo una línea no probabilística, con el fin de aplicarles una entrevista de valoración al finalizar la aplicación de los módulos basados en GeoGebra. Para Hernández et al. (2010), estas muestras se conforman con los casos disponibles a los cuales hay acceso.

4.1 Diseño de investigación

Las acciones de la investigación se abordaron desde la Investigación Basada en Diseño (IBD). Para Plomp (2013), citado en Vrancken et al. (2018), la IBD es un enfoque de investigación sistemático, desarrollador y evaluador de intervenciones educativas que pretende

dar soluciones a problemas complejos de la práctica educativa, que al mismo tiempo tiene por objetivo avanzar en el conocimiento sobre las características de estas intervenciones y sobre los procesos de diseño y desarrollo de las mismas, con el propósito de desarrollar o validar teorías (p. 782).

Para desarrollar el objetivo de investigación, la IBD permitirá construir una estrategia didáctica con el uso de GeoGebra, mediante el aula invertida, para su implementación en personas estudiantes. Esto con el fin de determinar el desarrollo de la visualización espacial sobre los contenidos de rectas, planos y geometría vectorial.

Se utilizó el modelo de fases de IBD propuesto por Guisasola et al. (2021), que utiliza un funcionamiento por medio de ciclos continuos de diseño, implementación, análisis y rediseño. Se plantean cuatro fases de acción en las cuales no se asume una teoría educativa o herramientas específicas, por lo que se da libertad a los investigadores. Las fases son las siguientes:

1. *Fundamentos teóricos que guían la investigación.* Toma la teoría y las investigaciones científicas como el primer punto de partida, pues comprender la epistemología científica es clave para estructurar la enseñanza y generar un acercamiento a una secuencia de contenidos temáticos específicos. (Guisasola et al., 2021).
2. En la presente investigación, esta fase se desarrolló previo a la intervención para conocer la problemática expuesta, haciendo una revisión bibliográfica e indagación de propuestas similares que involucren la visualización espacial, el aula invertida y el uso de las tecnologías digitales. Además, se consultaron aspectos de metodología que fueron los cimientos para establecer el accionar de los módulos y la investigación. Por último, en esta fase se desarrollaron entrevistas de diagnóstico de la habilidad de visualización espacial.
3. *Diseño.* En este paso se hizo una conexión entre la teoría y el diseño de la intervención educativa. Se creó un producto inicial que consistente con la teoría y con los objetivos de aprendizaje. Además, se diseñaron las actividades de la intervención, las pautas de evaluación y el material para el profesorado (Guisasola et al., 2021).

Siguiendo los objetivos planteados, esta fase contempló el diseño de la propuesta didáctica para cada módulo con el diseño y la creación de videos, actividades evaluativas y colaborativas, entre otros recursos, siguiendo una metodología de aula invertida. Cada actividad involucró el uso de un *applet* en el software GeoGebra. Con todos los recursos preparados, los cuatro módulos fueron integrados cuidadosamente en la plataforma institucional de la UCR, Mediación Virtual. Para finalizar la fase se dio una revisión exhaustiva del contenido y la secuencia pedagógica a desarrollar.

4. *Implementación.* Para Guisasola et al. (2021), este paso tiene como objetivo determinar cómo el diseño conducirá a un mejor aprendizaje de la persona estudiante. Se puede visualizar como un experimento de enseñanza que permite revisar conjeturas según el análisis continuo.

Esta fase se desarrolló en cuatro días, en los que se implementaron los cuatro módulos. Las personas estudiantes revisaron y analizaron el material previo a la clase presencial, para luego trabajar en el aula y de manera colaborativa la construcción de resultados teóricos y la resolución de ejercicios. La implementación se desarrolló en laboratorios especializados con computadoras y conexión a Internet, de tal manera que tuvieron acceso a GeoGebra.

5. *Evaluación y rediseño.* Para esta última fase se prepararon las evaluaciones desarrollando preguntas enfocadas en el uso del aula invertida, la implementación de GeoGebra y los niveles de visualización espacial, para luego realizar cinco entrevistas de valoración sobre los módulos. En esta etapa se evaluaron la calidad de las actividades, el tiempo de implementación y el cambio hacia una nueva estrategia de

aprendizaje mediante el aula invertida, además de la adquisición de habilidades de visualización espacial.

4.2 Instrumentos de recolección

Se aplicaron dos instrumentos de recolección de información basados en la observación y la entrevista semiestructurada; estas se desarrollaron antes, durante y después de la aplicación de los módulos. Esto debido a que la investigación busca observar cómo las personas estudiantes interactúan, de manera colectiva, con la tecnología y el objeto matemático. Por tanto, cumple con elementos específicos que se pueden observar en una investigación, según lo proponen Hernández et al. (2010): el ambiente físico, el ambiente social y humano, actividades (acciones) individuales y colectivas, artefactos que utilizan, hechos relevantes y retratos humanos.

La entrevista semiestructurada es una técnica que se adapta de manera favorable a las investigaciones con enfoques cualitativos. Conforme a Hernández et al. (2010), este tipo de entrevista consiste en una reunión para conversar e intercambiar información entre el entrevistador y las personas entrevistadas. Además, permite añadir preguntas adicionales durante la ejecución de la entrevista, si el entrevistador lo considera necesario.

Las entrevistas se realizaron en dos ocasiones a cinco personas. El primer momento fue previo a la aplicación de los módulos, con el fin de conocer las falencias que el estudiantado percibe en el desarrollo de la visualización espacial y el manejo del software GeoGebra. La información obtenida en este momento es relevante para enriquecer las primeras dos fases de la IBD.

El segundo momento de aplicación de la entrevista semiestructurada tuvo el objetivo de recabar información sobre las valoraciones de la experiencia al utilizar el software GeoGebra bajo el enfoque de aula invertida. Así, se cumple con las últimas fases de la IBD: evaluación, rediseño y validación. Las mismas se agruparon en cuatro bloques (ver Figura 1) para medir el impacto de GeoGebra, el desarrollo de la visualización espacial, el impacto de las tecnologías digitales en el aprendizaje y el uso del aula invertida.

Figura 1 Agrupación de las preguntas para la entrevista de valoración



Fuente: Elaboración propia (2025).

5. RESULTADOS

A continuación, se presentan los principales resultados evidenciados en las entrevistas y observaciones tras la aplicación de la propuesta metodológica. Estos se agrupan en tres categorías: implementación del aula invertida, uso de GeoGebra, y desarrollo de la visualización espacial.

El enfoque de aula invertida como metodología de enseñanza tuvo fuertes beneficios para el estudiantado. Los entrevistados manifestaron que consultar los contenidos previos a la clase presencial les permitió asistir con mayor preparación, lo que proporciona una base de la materia y mejor comprensión de los tópicos estudiados. Además, señalaron que tuvieron más tiempo para interiorizar la materia.

Ligado a esto, el uso de videos tuvo una alta preferencia por el estudiantado; según afirmaron en las entrevistas, los videos fueron un recurso con un impacto benéfico en el aprendizaje, ya que estos permiten ser consultados más de una vez y avanzar a un ritmo individualizado. Un reflejo de esto son las altas visualizaciones que reportaron los videos en la plataforma YouTube.

También, el trabajo desarrollado en la clase presencial fue de índole colaborativo. Los entrevistados declararon que esta modalidad les permitió conocer nuevas opiniones y formas de abordar un ejercicio, por lo que la consideran una forma de innovar. Una estudiante compartió su opinión de lo observado durante el desarrollo de los cuatro módulos:

Estudiante 2: *De hecho, a mí me gustaron porque salen un poco de lo normal de la clase digamos en la mayoría de los cursos de matemática. Y nos ayudó a verlo no solo de manera que el profesor no lo explique directamente en la pizarra, sino nosotros también construir el concepto, los teoremas y todo lo que estamos por desarrollar.*

Asimismo, GeoGebra tuvo un gran impacto en el proceso de interiorizar los contenidos estudiados y visualizar representaciones gráficas en el espacio de rectas y planos. Algunas opiniones evidencian la manifestación de este fenómeno:

Estudiante 1: *GeoGebra, ayuda mucho porque, al menos en el caso mío, yo soy como de imaginar mucho las cosas gráficamente, entonces sí sentí que me ayudó bastante.*

Estudiante 2: *GeoGebra me ayudó mucho a visualizar gráficamente todo lo que estábamos viendo. Mientras estaba viendo el video, yo misma utilizaba GeoGebra como apoyo para también ver qué era lo que estaba pasando y ver si yo misma también lo podía hacer.*

Estudiante 4: *la parte de GeoGebra me sirvió mucho para visualizar la parte de planos, rectas, vectores, que eso, sinceramente, cuando lo había llevado en cursos anteriores, o inclusive cuando lo había llevado previamente en geometría, no fue tan, tan explícito como ahorita. Entonces me ayudó demasiado.*

Otros de los beneficios reportados por los entrevistados tras el uso de GeoGebra son la capacidad de visualizar las características de los objetos geométricos de rectas, planos y vectores, además de estudiar el paralelismo y perpendicularidad (ortogonalidad). Uno de los entrevistados menciona: “me ha ayudado para visualizar como esas características también y las relaciones que tienen también el punto, los vectores, las rectas, si son ortogonales también, todas esas características también se pueden visualizar a través de GeoGebra”.

También, el software tuvo un uso fundamental para la interpretación de un enunciado y resultados al estudiar rectas, planos y geometría vectorial. Fue útil para comprender el abordaje hacia un ejercicio, dado que les permitió plantear un camino hacia la solución. Algunos entrevistados opinaron lo siguiente:

Estudiante 1: *todavía sigo estudiando para el próximo examen, utilizo GeoGebra porque hay preguntas que no entiendo cómo entrarles, pero con GeoGebra me hago una idea.*

Estudiante 3: *para verificación y como para darme una idea de cómo poder, tal vez, realizar el procedimiento, qué es lo que debo de hacer.*

Estudiante 4: *a la hora de hacer las prácticas, de hecho, a veces me costaba mucho visualizar lo que decía el enunciado. Entonces lo ponía en GeoGebra para poder más o menos saber por dónde llegarle a la respuesta.*

Estudiante 5: *hubo varios que no lograba comprender como el ejercicio, entonces nada más venía y lo ponía en GeoGebra y ya decía, ah mira, es que este punto está acá y yo lo estaba visualizando en otra posición.*

Un importante resultado son las dificultades que surgieron durante el uso de GeoGebra, principalmente al realizar el trabajo en tercera dimensión. Aunque las personas estudiantes se encontraban capacitadas en el uso del software debido a conocimientos previos, se presentaron dificultades para comprender la gestión de los objetos tridimensionales y las herramientas de GeoGebra. Según mencionan, previamente solo habían trabajado en 2D; es decir, en el plano.

Por último, el aprendizaje de los contenidos de rectas, planos y geometría vectorial se vio favorecido ante el uso de GeoGebra; este software logró que a las personas estudiantes se le facilitara la comprensión de conceptos complejos por la interacción con el objeto de estudio, según manifestaron en las entrevistas.

Además, las personas entrevistadas destacaron que las representaciones en dos dimensiones se les facilitaron; inclusive, manifestaron que las lograron realizar con lápiz y papel. Sin embargo, mencionaron dificultades para visualizar objetos en tercera dimensión, por lo que necesitaron apoyo del software GeoGebra. Esto se ve reflejado en la opinión de uno de los entrevistados:

***Estudiante 3:** Si requiero hacer la representación en R2 la podría hacer manual, la podría hacer manual y con lápiz, pero ya al momento de hacer en R3, si se me complica un poco ya hacerla tanto mentalmente como también visualizarlo en un lápiz y papel, se me complica un poco, entonces ya para partir de R3 si prefiero mejor utilizar la herramienta de GeoGebra.*

Siguiendo esta línea, solo una de las cinco personas entrevistadas manifestó que podía visualizar los objetos mentalmente, pero el software GeoGebra le facilitó el trabajo en situaciones complejas. En general, las personas entrevistadas mencionaron tener un desarrollo visual más elevado en comparación al inicio de los módulos; sin embargo, en un grado siguen dependiendo de un apoyo complementario, como lo es el software GeoGebra.

6. RESULTADOS/DISCUSIONES

El aula invertida es uno de los enfoques de aprendizaje que buscan transformar las dinámicas tradicionales de clase. Para Córdor et al. (2023), los beneficios de este enfoque consisten en que las personas estudiantes estudien de manera independiente en sus casas, lo cual les da la oportunidad de avanzar a su propio ritmo y revisar los contenidos cuantas veces lo requieran. En el presente estudio, esto se demuestra en el uso que las personas estudiantes dieron a los videos previo a la clase presencial de cada módulo. Se concuerda con la investigación planteada por Gaviria et al. (2019), donde concluyeron que en el aula invertida “los participantes en general reaccionaron positivamente a la mediación en el desarrollo del curso con videos educativos” (p. 610).

Otro elemento para rescatar respecto a las actividades colaborativas presenciales es que las personas estudiantes lograron construir conocimientos y resolver ejercicios mediante la discusión entre pares. Siguiendo las ideas de Zavala et al. (2023), el aula invertida genera beneficios en la participación, aumento en el trabajo cooperativo e incremento en el rendimiento académico.

En general, Salas (2021) afirma que este modelo mejora el ambiente de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas al hacer uso de videos para el estudio en casa y el trabajo colaborativo mediante la resolución de problemas durante la sesión presencial, lo cual es un reflejo de la aplicación de los cuatro módulos en rectas, planos y geometría vectorial.

Además, Cedeño y Vigueras (2020) añaden que la dinámica de este enfoque —aula invertida— está dirigida hacia la motivación y el empleo de herramientas innovadoras, lo cual se destaca en los resultados, donde uno de los entrevistados expresó afinidad por la dinámica de los módulos debido a su novedad respecto a las clases tradicionales de matemática.

Seguir el enfoque de aula invertida apoyado con trabajo colaborativo durante los módulos tuvo efectos positivos, ya que en cada módulo se observó un avance graduado en el aprendizaje. Cedeño y Vigueras (2020) reflejan que el aula invertida cubre los niveles más bajos de la taxonomía de Bloom, con actividades desarrolladas fuera del salón de clases y apoyadas por la tecnología; mientras que los niveles más altos se alcanzan con el trabajo colaborativo y la guía del docente en el salón de clase.

Interpretar el resultado de un ejercicio o un enunciado con GeoGebra es una manifestación clara de lo que señalan Lucas y Aray (2023); en la calculadora gráfica de GeoGebra las personas estudiantes pueden comprobar manualmente los resultados obtenidos, lo que proporciona retroalimentación del trabajo y favorece la corrección de errores. Para Sánchez y Borja (2022), GeoGebra es una herramienta que fomenta en el alumnado un aprendizaje por descubrimiento y estimula la creación de proyectos matemáticos.

Siguiendo la misma línea, Martínez et al. (2023) rescatan el enfoque práctico y experimental de GeoGebra, que permite la construcción y manipulación visual de figuras geométricas en tiempo real. Lo anterior se liga con las herramientas que brindó el software en cada módulo para que las personas estudiantes manipularan los objetos de rectas, planos y vectores, con el fin de estudiar las características de estos.

De manera similar, Sánchez y Borja (2022) mencionan que GeoGebra facilita los procesos de abstracción para evidenciar cómo se construye una relación entre un modelo geométrico a uno algebraico, hecho que se ve plasmado en el momento en que la persona estudiante se apropia de GeoGebra para estudiar las características de vectores, rectas o planos y su representación gráfica.

El uso que se le dio a GeoGebra durante el desarrollo de los cuatro módulos facilitó el aprendizaje de la temática estudiada y generó un impacto en la interiorización de los contenidos. Lo anterior se relaciona con los pensamientos de Mendoza et al. (2024), quienes expresan que “el uso del GeoGebra para la visualización gráfica y algebraica, en la resolución de problemas, facilita el aprendizaje de la temática y hace más eficiente la comprensión de la matemática, en grupos colaborativos” (p. 30).

Con respecto a la competencia de visualización espacial apoyada por el software GeoGebra, se presenta una mejora al utilizar la representación gráfica. Este resultado positivo se asocia con lo concluido por González et al. (2021), quienes utilizaron GeoGebra como un apoyo para visualizar la relación de las representaciones algebraicas con las geométricas, uso que causó una mejora en la visualización. Esto se vincula con el objetivo planteado en la

presente investigación, que buscó desarrollar la visualización espacial en rectas, planos y geometría vectorial.

Las personas participantes tuvieron facilidades al trabajar con representaciones gráficas en dos dimensiones; sin embargo, las de tres dimensiones les presentaron dificultades, por lo que requirieron apoyo de GeoGebra. Como se mencionó anteriormente, esto se refleja en el hecho de que solamente una persona manifestó tener facilidades para crear representaciones mentalmente y, aun así, necesitó corroborar ciertos ejercicios en el software. Este estudio sigue la postura que adoptan Fernández y Santacruz (2024) al concluir que existen dificultades y obstáculos en la visualización de figuras en el espacio a nivel universitario. Los autores añaden que el pensamiento visual y el aprendizaje de la geometría en 3D tienen beneficios al usar la geometría dinámica, dado que proporciona una “variedad de riqueza visual de imágenes espaciales que no se consigue en representaciones estáticas en el papel o, en algunos casos, en el espacio físico” (p. 40).

Asimismo, se vuelve a ratificar el cumplimiento del objetivo de la investigación al destacar que todas las personas entrevistadas percibieron una mejora de su visualización espacial; evidencia de que el uso de GeoGebra solventa significativamente esta necesidad educativa. Esto se traduce en una mejora para asignaturas posteriores y se relaciona con la investigación que realizó Ramírez (2021) en una población con las mismas características, pero en niveles más avanzados de la misma carrera (Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática), donde destaca que las actividades didácticas que hacen uso de GeoGebra en dos y tres dimensiones fortalecen los procesos de aprendizaje.

7. CONCLUSIONES

Esta investigación se ha desarrollado ante la necesidad de potenciar la visualización espacial en los contenidos de rectas, planos y geometría vectorial en las personas estudiantes matriculadas en la asignatura Geometría y Álgebra Lineal, con miras a que esta destreza se aplique en cursos más avanzados, como cálculo multivariado. GeoGebra fungió como un recurso de apoyo útil para la interacción del aprendiz con las representaciones gráficas, con el objetivo de lograr visualizar sus características y manipular los objetos en dos o tres dimensiones.

La implementación de los cuatro módulos ha logrado desarrollar en la persona aprendiz un aumento en el grado de la visualización espacial, permitiéndole observar características y construir conjeturas sobre ellas; sin embargo, las representaciones espaciales se limitan a un manejo visual concreto, dado que se basan únicamente en su apariencia física o visual, y no de manera abstracta. Ante esto, se observa que la aplicación de GeoGebra permite crear y manipular representaciones espaciales, con lo que se responde a la pregunta de investigación.

Se cumplió con lo planteado respecto a la estrategia de aula invertida al lograr que las personas estudiantes analizaran las temáticas a un ritmo individualizado previo a la clase presencial; no obstante, se dio una preferencia por el uso del video en comparación con los contenidos que se expusieron de manera textual en el entorno virtual. Este comportamiento se asocia con la descripción del enfoque de aula invertida y su relación con el papel activo del

estudiante y la tecnología. Por otro lado, el trabajo en clase colaborativo tuvo una buena aceptación, pues permitió amplia discusión, así como la construcción conjunta del conocimiento.

Con respecto a GeoGebra, la población se sintió cómoda trabajando con las herramientas en tercera dimensión para la construcción y fácil visualización de los objetos. Además, por tener una interfaz sencilla y ser de acceso gratuito en línea, es una aplicación que el estudiantado consultó de manera recurrente durante el trabajo presencial. Se demostró que GeoGebra es una herramienta tecnológica que influye de manera positiva en el aprendizaje del estudiantado para el estudio de objetos geométricos complejos.

Como fruto de la experiencia de construcción de los recursos digitales, se encontró la limitación del tiempo en el diseño y edición de videos desarrollados por la propia persona docente, lo que se traduce en un faltante de productos digitales para consulta por parte del aprendiz. Otra barrera de ejecución de la propuesta consistió en el tiempo que se asignó entre cada módulo: de dos a tres días, lo que perjudicó al estudiantado con otras labores académicas. Lo anterior es consecuencia del horario de clases asignado para la asignatura y el cronograma institucional.

Para futuras líneas de investigación, se pretende apoyar el uso del aula invertida en asignaturas avanzadas de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática y el uso de GeoGebra en temáticas que involucren la visualización espacial. Además, queda pendiente estudiar el impacto que tiene el uso de GeoGebra y el enfoque de aula invertida en el rendimiento académico, donde se podría incluir al software como parte de las acciones que debe desarrollar el estudiantado en una evaluación sumativa.

Esta investigación ha demostrado que los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática se pueden transformar en dinámicos e innovadores, y romper, así, con el paradigma tradicional. Bajo el enfoque empleado, el aprendiz toma control de su aprendizaje y lo gestiona con apoyo de la tecnología, lo que le da mayor participación en la elaboración del conocimiento. Esta propuesta es una invitación a que el personal docente se sirva de las tecnologías digitales para la implementación de nuevos enfoques emergentes en el aprendizaje de la matemática universitaria.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

BSH planteó la idea desarrollada y construyó el referente teórico y metodológico. También, ejecutó las intervenciones didácticas para luego realizar una recolección y análisis de los datos. Por último, BSH ejecutó la redacción de la investigación.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la persona autora correspondiente, BSH, previa solicitud razonable.



AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la Escuela de Matemática, Departamento de Educación Matemática, de la Universidad de Costa Rica; y a la Maestría en Tecnología e Innovación Educativa, de la Universidad Nacional de Costa Rica por su colaboración y guía para desarrollar esta investigación.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Andrade Molina, M. y Montecino, A. (2011, 26-30 de junio). *La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano*. XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Brasil.
- Carrascal Carrascal, H., Cháves Peña, J. y Cabellos Martínez, M. I. (2017). GeoGebra para el fortalecimiento del pensamiento espacial en cálculo diferencial. *Revista Ingenio UFPSO*, 13, 171-177. <https://doi.org/10.22463/2011642X.2145>
- Cedeño Escobar, M. R. y Viguera Moreno, J. A. (2020). Aula invertida una estrategia motivadora de enseñanza para estudiantes de educación general básica. *Revista Científica Dominio de las Ciencias*, 6(3), 878-897. <http://dx.doi.org/10.23857/dc.v6i3.1323>
- Chóez Martínez, G. N. y Sárata Juca, J. A. (2020). *Aula invertida apoyada con GeoGebra para la enseñanza y aprendizaje del tema Triángulos, en el noveno año EGB de la Unidad Educativa Luis Cordero* [Tesis de licenciatura, Universidad Nacional de Educación]. <http://repositorio.unae.edu.ec/handle/123456789/1398>
- Cóndor Chicaiza, M. G., Valladares Perugachi, L. J., Ulcuango Ashqui, M. T., Rovalino Robalino, M. D. y Velasco Bazantes, L. F. (2023). Los beneficios y desafíos de la implementación de la clase inversa en la educación secundaria. *GADE: Revista Científica*, 3(4), 356-369. <https://revista.redgade.com/index.php/Gade/article/view/259>
- Fernández Mosquera, E. y Santacruz Rodríguez, M. (2024). Visualización dinámica tridimensional en actividades de lugares geométricos 3D en geometría dinámica. *Perspectivas actuales de la Educación Matemática* (pp. 39-45). <https://doi.org/10.24844/SOMIDEM/S3/2024/01-03>
- García Rodríguez, M. L. y Poveda Fernández, W. E. (2022). El MOOC, un entorno virtual para la resolución de problemas matemáticos. *Educación Matemática*, 34(2), 133-181. <https://doi.org/10.24844/EM3402.06>
- Gaviria Rodríguez, D., Arango Arango, J., Valencia Arias, A. y Bran Piedrahita, L. (2019). Percepción de la estrategia aula invertida en escenarios universitarios. *RMIE Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 24(81), 593-614.
- González Hernández, N., Garcés Cecilio, W. y Grimaldy Romy, L. (2021). La visualización en la enseñanza de la matemática. Su empleo mediante el uso del GeoGebra. *Didáctica y Educación*, 11(4), 130-140.

- Guisasola Aranzabal, J., Ametller, J. y Zuza, K. (2021). Investigación basada en el diseño de secuencias de enseñanza-aprendizaje: una línea de investigación emergente en Enseñanza de las Ciencias. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias*, 18(1), Artículo 1801. https://doi.org/10.25267/Rev_Eureka_ensen_divulg_cienc.2021.v18.i1.1801
- Gutiérrez Montenegro, M. y Mora Flores, W. (2018). *Vectores, Rectas y Planos. Visualización Interactiva*. Revista digital Matemática Educación e Internet. https://tecdigital.tec.ac.cr/servicios/revistamatematica/material_didactico/libros/
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, M. P. (2010). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill Education.
- Lucas Avila, G. E. y Aray Andrade, C. A. (2023). GeoGebra como herramienta didáctica para el fortalecimiento del aprendizaje de secciones cónicas en bachillerato. *Revista Científica Arbitrada Multidisciplinaria Pentaciencias*, 5(5), 386-400. <https://doi.org/10.59169/pentaciencias.v5i5.747>
- Martínez Zapata, M. E., Pérez Urruchi, A. E., Robles Medina, G. B. y Apolinario Arzube, O. O. (2023). Explorando la geometría con GeoGebra: estrategias para reforzar el aprendizaje en estudiante de niveles intermedios. *Universidad, Ciencia y Tecnología*, 28(122), 62-72. <https://doi.org/10.47460/uct.v28i122.766>
- Mendoza Carlos, M. M., Lozano Reátegui, R. M., Asencios Tarazona, V. y Romero Cahuana, Á. A. (2024). Mediación del software GeoGebra en la aplicación de estrategias para la matematización de problemas por estudiantes de ingeniería en Perú. *Formación Universitaria*, 17(3), 21-34. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062024000300021>
- Monterroza Santos, L. (2021). GeoGebra y el desarrollo del pensamiento espacial: una oportunidad de innovación en la práctica educativa. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 5(4), 4388-4405. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v5i4.627
- Moral Sánchez, S. N., Sánchez Compañía, M. T. y Romero Albaladejo, I. (2023). Uso de realidad virtual en Geometría para el desarrollo de habilidades espaciales. *Enseñanza de las Ciencias*, 41(1), 125-147. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.5442>
- Pérez Pérez, R. y Castro, A. (2022). Entornos virtuales de aprendizaje en la resolución de problemas matemáticos. *Technological Innovations Journal*, 1(4), 7-20. <https://doi.org/10.35622/j.ti.2022.04.001>
- Pibaque Tigua, D. D. y Larreal Bracho, A. J. (2023). Entornos virtuales de aprendizaje: una mirada teórica hacia el aprendizaje. *Ciencia latina revista multidisciplinar*, 7(1), 9262-9278. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i1.5048
- Ramírez Santamaría, B. A. (2021). GeoGebra en 2D y 3D como recurso didáctico en un curso de integración múltiple: una experiencia de enseñanza-aprendizaje. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, 21(1), 1-18. <https://doi.org/10.18845/rdmei.v21i1.5341>
- Rodríguez Jiménez, F. J., Pérez Ochoa, M. E. y Ulloa Guerra, Ó. (2024). Innovación educativa: explorando el impacto del aula invertida en el rendimiento académico de

- estudiantes de secundaria en matemática. *Revista Educación*, 48(1) <https://doi.org/10.15517/revedu.v48i1.55892>
- Salas Rueda, R. A. (2021). Impacto del aula invertida en el proceso de enseñanza-aprendizaje sobre los mapas de Karnaugh. *Revista electrónica Educare*, 25(2), 1-22 <https://doi.org/10.15359/ree.25-2.14>
- Sánchez, R. y Borja, A. (2022). Geogebra en el proceso de Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Científica Dominio de las Ciencias*, 8(2), 33-52 <http://dx.doi.org/10.23857/dc.v8i2.2737>
- Sandobal Verón, V. C., Marín, B y Barrios, T. H. (2021). El aula invertida como estrategia didáctica para la generación de competencias: una revisión sistemática. *RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 24(2), 285-308 <https://doi.org/10.5944/ried.24.2.29027>
- Santillán Aguirre, J. P. (2022). Flipped Classroom: ¿Enfoque o Metodología? *Polo de conocimiento*, 7(2), 2039-2059. <https://doi.org/10.23857/pc.v7i2.3695>
- Suárez Moya, W. A. y León Corredor, O. L. (2016). El aprendizaje de la visualización espacial en niños y en niñas. *Revista Horizontes Pedagógicos*, 18(2), 110-119 <https://horizontespedagogicos.iber.edu.co/article/view/18209>
- Teófilo de Sousa, R., Vieira Alves, F. R. y Ferreira de Azevedo, I. (2022). Una propuesta didáctica apoyada por GeoGebra para la enseñanza del Principio de Cavalieri. *Números*, 110, 41-60. <https://sinewton.es/publicacion-numeros/articulo-3-110/>
- Vieira Alves, F. R. (2012). Transição interna do Cálculo: uma discussão do uso do *GeoGebra* no contexto do Cálculo a várias variáveis. *Revista do Instituto GeoGebra de São Paulo*, 1(2), 5-19. <https://revistas.pucsp.br/index.php/IGISP/article/view/11373>
- Vrancken, S., Engler, A. y Müller, D. (2018). La investigación basada en diseño como sustento de ambientes de aprendizaje para el aula de matemática. En Arturo, Luis; Páges, Daniela (Eds.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 779-786). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. México.
- Zavala, M. A., González, I. y Rojas, G. M. (2023). Aportes al conocimiento actual sobre el aula invertida. *Revista Espacios*, 43(9), 206-217. <https://doi.org/10.48082/espacios-a23v44n09p13>