



MODELO GEOIA-M PARA LA MEDIACIÓN DEL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO EN CÁLCULO UNIVERSITARIO CON INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA Y GEOGEBRA

GEOIA-M MODEL FOR MEDIATING MATHEMATICAL REASONING
IN UNIVERSITY CALCULUS WITH GENERATIVE ARTIFICIAL
INTELLIGENCE AND GEOGEBRA

Marco Gutiérrez Montenegro¹



ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0004-0293-1578>

RESUMEN

La incorporación de inteligencia artificial (IA) generativa en la enseñanza universitaria del cálculo ha avanzado con rapidez, pero muchas de las prácticas observadas conservan un carácter instrumental y orientado a la obtención de respuestas, lo que favorece que el estudiante delegue su razonamiento en la herramienta. Este artículo, de naturaleza teórico-metodológica, propone y fundamenta el Modelo GeoIA-M, una arquitectura didáctica para mediar el razonamiento matemático en cursos de cálculo diferencial e integral, en la que la IA generativa actúa como interlocutor que problematiza y GeoGebra como entorno de exploración, representación y validación. A partir de una revisión narrativa y crítica de literatura reciente y del análisis didáctico de tareas prototípicas de cálculo universitario, el modelo se organiza en cinco dimensiones —exploración, visualización, argumentación, metacognición y reflexión ética— y siete fases de implementación, situando el razonamiento del estudiante en el centro del proceso. Se desarrollan dos ejemplos de cálculo universitario, sobre optimización con derivadas y sobre integral definida y acumulación, con protocolos de construcción dinámica, prompts de consulta socrática y criterios de evaluación del proceso. El aporte central es una arquitectura didáctica inicial para orientar prácticas de aula y formación docente en Educación Matemática universitaria, susceptible de validación empírica posterior.

¹Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica. Correo electrónico: vgutierrez@itcr.ac.cr



Palabras clave: razonamiento matemático, cálculo universitario, inteligencia artificial generativa, GeoGebra, mediación didáctica.

ABSTRACT

The integration of generative artificial intelligence (AI) into university calculus teaching has advanced rapidly, yet many observed practices remain instrumental and answer-oriented, which encourages students to delegate their reasoning to the tool. This theoretical-methodological paper proposes and grounds the GeoIA-M Model, a didactic architecture for mediating mathematical reasoning in differential and integral calculus courses, in which generative AI acts as an interlocutor that problematizes and GeoGebra as an environment for exploration, representation and validation. Drawing on a narrative and critical review of recent literature and on the didactic analysis of prototypical university calculus tasks, the model is organized into five dimensions —exploration, visualization, argumentation, metacognition and ethical reflection— and seven implementation phases, placing student reasoning at the center of the process. Two university calculus examples are developed, on optimization with derivatives and on the definite integral and accumulation, including dynamic construction protocols, Socratic querying prompts and process-oriented assessment criteria. The main contribution is an initial didactic architecture to guide classroom practices and teacher education in university Mathematics Education, open to subsequent empirical validation.

Keywords: mathematical reasoning, university calculus, generative artificial intelligence, GeoGebra, didactic mediation.

1. INTRODUCCIÓN

La irrupción de las herramientas de inteligencia artificial (IA) generativa ha modificado, en muy pocos años, las preguntas que docentes e investigadores se formulan sobre la enseñanza universitaria. Las revisiones disponibles coinciden en que estas tecnologías abren oportunidades de personalización, retroalimentación y acceso, al tiempo que plantean desafíos relativos a la integridad académica, los sesgos y la dependencia cognitiva (Michel-Villarréal et al., 2023; Jensen et al., 2024; Qian, 2025). En el campo específico del cálculo, donde el valor formativo reside menos en la respuesta que en el proceso de razonamiento que conduce a ella, esa tensión adquiere un matiz particular: una herramienta capaz de producir soluciones plausibles de manera inmediata puede, paradójicamente, debilitar aquello que la enseñanza pretende cultivar.

El problema no es nuevo en su forma, pero sí en su escala. El uso más extendido de la IA generativa en contextos de aprendizaje matemático consiste en solicitar la solución de un ejercicio; esa práctica, cómoda y comprensible, encierra un riesgo que la investigación reciente ha comenzado a documentar. Un estudio con estudiantes de secundaria mostró que el acceso a tutores basados en IA sin las salvaguardas adecuadas puede perjudicar el aprendizaje, en la medida en que la herramienta opera como un recurso que sustituye el esfuerzo cognitivo (Bastani et al., 2025). Aunque esta evidencia proviene de un contexto escolar y no universitario, su traslado al cálculo universitario debe asumirse con cautela: el estudio no prueba directamente el efecto en educación superior, pero advierte un riesgo relevante para el diseño didáctico. El hallazgo es relevante porque matiza el optimismo: no es la herramienta en sí, sino el modo de uso, lo que determina su efecto formativo.

Frente a este escenario conviene recordar que la educación matemática universitaria cuenta desde hace tiempo con recursos tecnológicos cuyo aporte a la comprensión ha sido documentado de forma consistente. GeoGebra ocupa un lugar central entre ellos. La evidencia acumulada a lo largo de dos décadas sugiere que su uso favorece el logro matemático, en particular en cálculo y geometría (Zhang et al., 2023), y diversos estudios reportan mejoras en la comprensión conceptual y en el razonamiento (Bedada y Machaba, 2022; Negara et al., 2022). Lo que distingue a GeoGebra no es la rapidez del cálculo, sino su capacidad para representar dinámicamente los objetos matemáticos y conectar registros distintos, una propiedad especialmente valiosa para sostener la transición entre la intuición y la formalización (Duval, 2004; Del Río, 2016).

Este artículo parte de una premisa sencilla: si la IA generativa y la visualización dinámica se incorporan de forma separada y fundamentalmente instrumental, su potencial didáctico tiende a diluirse. La IA se usa como solucionador y GeoGebra como verificador pasivo, sin que ninguno active de manera sostenida los procesos de exploración, argumentación y reflexión que dan sentido al aprendizaje del cálculo. Se requiere, por tanto, una propuesta que ordene pedagógicamente esa integración y que ponga el razonamiento, y no la herramienta, en el centro.

El objetivo de este trabajo es proponer y fundamentar el Modelo GeoIA-M, entendido no como una manera de «usar IA y GeoGebra», sino como una arquitectura didáctica para mediar el razonamiento matemático en cálculo universitario. En esta arquitectura, la IA generativa y GeoGebra son medios al servicio de tres ámbitos articulados del trabajo matemático: la exploración y la formulación de conjeturas; el tránsito entre representaciones y la visualización dinámica; y la validación, la argumentación y el control del error. A estos ámbitos se suman, como componentes transversales, la metacognición y el uso ético y crítico de herramientas inteligentes. No se trata de un estudio empírico, sino de una construcción teórico-metodológica que se ofrece como marco inicial y reconoce, desde el principio, la necesidad de validación posterior en el aula.

La contribución del Modelo GeoIA-M es, así, una propuesta de mediación: una manera de organizar la tarea de cálculo para que la potencia de la IA y la visualización no reemplacen el razonamiento del estudiante, sino que lo provoquen, lo sostengan y lo expongan a la crítica. El manuscrito se organiza de la siguiente manera. Tras esta introducción se exponen los elementos teóricos que sustentan la propuesta; luego se describe el abordaje metodológico; a continuación, se presenta el modelo, sus dimensiones y principios, y la secuencia de implementación; después se desarrollan dos ejemplos de cálculo universitario; y, finalmente, se discuten los alcances, las implicaciones para la formación docente y las limitaciones de la propuesta.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

La fundamentación del Modelo GeoIA-M se organiza en torno a seis ejes que, leídos en conjunto, delimitan el vacío didáctico que la propuesta busca atender. En cada eje se construye un argumento (antes que un catálogo de autores) y se cierra señalando de qué modo ese eje alimenta el modelo.



2.1 Inteligencia artificial generativa y razonamiento matemático

El cuerpo de trabajos sobre IA generativa en educación superior es todavía predominantemente exploratorio y se orienta a delimitar oportunidades y riesgos. Las revisiones tempranas advierten que el entusiasmo inicial debe templarse con una mirada crítica (Jensen et al., 2024), y los estudios de percepción muestran actitudes mayoritariamente favorables junto con preocupaciones por la precisión y el desarrollo personal (Chan y Hu, 2023). En el dominio matemático los resultados son prometedores pero condicionados: el uso de IA puede potenciar la comprensión conceptual y la autoeficacia cuando se atienden los sesgos y las limitaciones técnicas (Canonigo, 2024; El Fathi et al., 2025), y en cálculo los estudiantes valoran su efecto sobre la participación (Serhan y Welcome, 2024). Sin embargo, persiste una advertencia doble. Por un lado, la IA generativa puede inducir sobredependencia y la externalización de habilidades cognitivas y metacognitivas que deberían permanecer en el estudiante (Qian, 2025; Zafar et al., 2024). Por otro, sus respuestas no siempre son correctas: un estudio comparativo encontró que las sugerencias generales para resolver problemas matemáticos producidas por IA resultaban menos precisas que las elaboradas por docentes (Jia et al., 2024).

Una línea particularmente pertinente es la de los enfoques de orientación socrática. Distintos trabajos sostienen que un diseño que privilegia el cuestionamiento sobre la entrega de respuestas puede promover el pensamiento autónomo y contrarrestar la sobredependencia (Degen, 2025; Degen y Asanov, 2025; Lee et al., 2025), y en la formación de ingenieros se han descrito sistemas que mejoran las conductas de resolución mediante guía socrática (Goyal et al., 2025). Las revisiones sobre tutores inteligentes matizan, no obstante, que sus efectos suelen ser moderados (Létourneau et al., 2025), lo que invita a no sobrestimar su alcance. Debe tenerse presente, además, que varias de estas fuentes son preprints o protocolos de estudio y que la revisión citada se centra en educación K-12; por ello, más que evidencia consolidada, ofrecen una línea promisorio y resultados preliminares, propios de un campo aún en consolidación, cuyo traslado al cálculo universitario debe asumirse con prudencia. De este eje el modelo retiene un principio operativo: en el aula de cálculo la IA es más valiosa cuando interroga que cuando responde.

2.2 GeoGebra, visualización dinámica y registros de representación

El aporte de GeoGebra a la educación matemática cuenta con respaldo empírico amplio. Un metaanálisis que recoge dos décadas de investigación reporta un efecto positivo de magnitud media a grande sobre el logro matemático, más marcado en cálculo y geometría (Zhang et al., 2023). En el nivel universitario se documentan efectos favorables en cálculo (Bedada y Machaba, 2022; Nonghanpitak et al., 2022) y en la comprensión de las integrales mediante representaciones dinámicas (Milenković et al., 2024), así como avances en el pensamiento computacional en lecciones de cálculo (Chytas et al., 2024). En lengua española, un estudio universitario reporta mejoras en el aprendizaje de transformaciones lineales y una reducción de la ansiedad matemática (Tejada Ramírez, 2025), y se ha argumentado el valor de GeoGebra como recurso de equidad en el acceso a la matemática (Vásquez Bernal, 2024). Lo que la literatura sostiene de manera convergente es que el valor de GeoGebra reside en sus posibilidades

de exploración y de conexión de representaciones, más que en su desempeño como calculadora (Kllogjeri y Kllogjeri, 2024).

Este aporte se comprende mejor a la luz de la teoría de los registros de representación semiótica. Duval (2004) sostiene que la actividad matemática exige movilizar y coordinar distintos registros (gráfico, numérico, algebraico, verbal) y que la comprensión radica precisamente en la capacidad de convertir una representación en otra sin perder el objeto. Las investigaciones sobre representaciones múltiples confirman que la representación potencia el razonamiento cuando se acompaña de andamiajes y tareas secuenciadas, y no por su mera presencia (Ünal et al., 2023; Abraham y Prediger, 2024; Medina Herrera et al., 2024). De aquí el modelo deriva una exigencia: en GeoGebra la visualización no es un fin, sino un puente que debe conducir a la conversión consciente entre registros y, desde allí, a la argumentación.

2.3 Argumentación, validación y control del error en cálculo

Si las respuestas de la IA no siempre son precisas (Jia et al., 2024) y su desempeño en tareas visuales y en idiomas locales presenta limitaciones (Švičević et al., 2025, evidencia procedente de un contexto de competición escolar que debe trasladarse con cautela al ámbito universitario), entonces la validez matemática no puede delegarse en la herramienta. En cálculo, esto significa que la argumentación comprende la justificación de por qué un punto crítico es máximo, de por qué una integral representa una acumulación y de por qué una aproximación converge; esa labor de validación matemática debe permanecer como responsabilidad del estudiante. El error, lejos de ser un fracaso, se convierte en objeto de análisis: una respuesta plausible pero incorrecta de la IA o una conjetura fallida del propio estudiante, ofrecen material privilegiado para discutir condiciones, dominios y supuestos. El modelo incorpora, por tanto, el control del error como una actividad deliberada y no como un accidente.

2.4 Metacognición en la resolución de problemas de cálculo

La dimensión metacognitiva aparece en la literatura de dos maneras complementarias. Por un lado, como una capacidad que la IA mal empleada podría debilitar, en la medida en que la externalización de procesos puede alcanzar también a la planificación y la autorregulación (Qian, 2025). Por otro, como un componente que ciertos diseños incorporan de manera intencionada: se han descrito sistemas para matemática avanzada que integran retroalimentación y elementos metacognitivos para apoyar la preparación de los estudiantes (Fang et al., 2024). La lectura conjunta sugiere que la metacognición no es un subproducto automático del uso de tecnología, sino un objetivo que debe diseñarse. El modelo la sitúa como cierre explícito de cada tarea de cálculo.

2.5 Formación docente y contexto latinoamericano

La integración efectiva de tecnologías emergentes depende de manera crítica de las competencias y decisiones del docente. La literatura sobre GeoGebra es explícita: sus beneficios se ven limitados por la formación insuficiente y el acceso desigual (Batiibwe, 2024). En el caso de la IA generativa se insiste en la necesidad de alfabetización específica y de un diseño curricular que conciba estas herramientas como apoyo y no sustituto de la función docente (Chan y Colloton, 2024; Kurtz et al., 2024; van den Berg y du Plessis, 2023; Eager y Brunton, 2023). Para la educación superior

latinoamericana esta condición es decisiva: la región cuenta con una comunidad activa de usuarios de GeoGebra y con experiencias documentadas en español (Del Río, 2016; Tejada Ramírez, 2025; Vásquez Bernal, 2024), pero la valoración de la calidad de los procesos de estudio exige criterios explícitos de idoneidad didáctica (Godino, 2013). Puede inferirse que cualquier modelo que articule IA y GeoGebra será tan eficaz como lo permita la mediación del docente que lo implementa.

2.6 El vacío didáctico que justifica el Modelo GeoIA-M

La síntesis anterior permite formular el vacío que motiva este trabajo. La literatura ofrece evidencia robusta sobre el aporte de GeoGebra a la comprensión y la visualización, y un cuerpo creciente, aunque más exploratorio, sobre las oportunidades y los riesgos de la IA generativa. Existen también aproximaciones a la mediación socrática, a los registros de representación y a la metacognición. Sin embargo, estos campos tienden a desarrollarse en paralelo. No se identificó una propuesta que articule de modo explícito y secuenciado la IA generativa, la visualización dinámica, la argumentación, la metacognición y la reflexión ética en un mismo diseño orientado al cálculo universitario. Esa articulación, más que la incorporación aislada de cada recurso, constituye el espacio en el que se inscribe el Modelo GeoIA-M.

2.7 El Modelo GeoIA-M frente a marcos consolidados

Conviene situar la propuesta en relación con marcos teóricos consolidados, no para reemplazarlos sino para precisar su aporte. Respecto de la idoneidad didáctica (Godino, 2013), el Modelo GeoIA-M no la sustituye: puede dialogar con ella como una concreción orientada al diseño de tareas que incorporan inteligencia artificial generativa y GeoGebra en cálculo universitario, en la medida en que sus dimensiones pueden interpretarse en términos de las facetas epistémica, cognitiva y mediacional. El modelo TPACK (Mishra y Koehler, 2006) ayuda a comprender los saberes tecnológicos, pedagógicos y disciplinares que el docente requiere para integrar tecnología; el Modelo GeoIA-M, en cambio, no describe esos saberes sino que propone una arquitectura didáctica y una secuencia concreta para mediar el razonamiento. Por su parte, la orquestación instrumental (Drijvers et al., 2010) permite comprender cómo el docente organiza los artefactos y las configuraciones del aula; el Modelo GeoIA-M especifica una forma particular de orquestar la IA generativa y GeoGebra al servicio de la exploración, la visualización, la argumentación, la metacognición y la reflexión ética.

Así entendida, la originalidad del Modelo GeoIA-M no reside en una ruptura con estos marcos, sino en la articulación de componentes que suelen estudiarse por separado (mediación socrática con IA, visualización dinámica, argumentación, metacognición y reflexión ética) en un diseño secuenciado y específico para el cálculo universitario. En esa articulación, la dimensión de visualización se apoya en los registros de representación semiótica de Duval (2004), que el modelo integra en lugar de confrontar.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

Este artículo se construye como una propuesta didáctico-metodológica fundamentada, no como un estudio empírico. Su elaboración combina dos procedimientos. El primero es una revisión narrativa y crítica de literatura reciente sobre IA generativa en educación superior y matemática, GeoGebra y visualización dinámica,

representaciones semióticas, metacognición y formación docente. No se trata de una revisión sistemática con protocolo de elegibilidad y síntesis cuantitativa, sino de una lectura interpretativa orientada a construir argumentos y a identificar un vacío didáctico.

El segundo procedimiento es el análisis didáctico de dos tareas prototípicas de cálculo universitario: la optimización con derivadas y la integral definida. Estas tareas ilustran la operatividad del modelo y muestran cómo operaría en contenidos concretos; no constituyen, sin embargo, evidencia empírica de su eficacia. El diseño de estas tareas prototípicas se orienta por la coordinación de registros de representación (Duval, 2004) y por criterios de idoneidad didáctica, especialmente en sus facetas epistémica, cognitiva y mediacional (Godino, 2013), de modo que los ejemplos funcionen como ilustraciones analíticas del modelo y no como resultados de implementación.

La revisión narrativa siguió un procedimiento transparente. Se consideraron fuentes localizadas en bases y repositorios académicos como Scopus, Web of Science, ERIC, SciELO, Redalyc, Dialnet y Google Académico, complementadas con repositorios institucionales y de acceso abierto. Para la inteligencia artificial generativa y GeoGebra se priorizó literatura reciente, publicada aproximadamente entre 2022 y 2025, mientras que los marcos teóricos clásicos (registros de representación, idoneidad didáctica y metacognición) se consultaron sin restricción temporal.

La búsqueda combinó descriptores en español e inglés, entre ellos inteligencia artificial generativa, ChatGPT, razonamiento matemático, cálculo universitario, GeoGebra, visualización dinámica, tutoría socrática, metacognición y registros de representación, así como generative AI, mathematical reasoning, calculus education, dynamic visualization, Socratic tutoring y metacognition. Como criterios de inclusión se consideraron trabajos arbitrados pertinentes para la mediación del razonamiento en matemática y educación superior; como criterios de exclusión se descartaron aquellos centrados en aspectos técnicos de los modelos sin implicaciones didácticas o ajenos al objeto de estudio. Los preprints se utilizaron de manera prudente y quedan señalados como tales.

Conviene precisar que el Modelo GeoIA-M se presenta como una propuesta teórico-metodológica y no como un modelo empíricamente validado. En consecuencia, el artículo no reporta resultados de implementación en aula, sino que articula aportes de la literatura reciente con una reflexión didáctica orientada al diseño de tareas en educación matemática universitaria. Esta condición no reduce el valor de la propuesta, pero sí delimita su alcance: el modelo requiere futuras investigaciones que analicen su pertinencia, sus posibilidades de transferencia y sus efectos sobre el razonamiento, la argumentación y la metacognición matemática del estudiantado.

Cabe precisar, asimismo, el papel de la experiencia docente universitaria del autor. Esta experiencia funciona como antecedente profesional y como criterio de problematización didáctica que orienta la identificación de tensiones y la formulación de la propuesta, pero no constituye una fuente de datos empíricos ni evidencia de eficacia. En consecuencia, el artículo no reporta resultados de aula, no analiza datos de estudiantes ni implementaciones con participantes humanos, por lo que no procede declarar un conjunto de datos empíricos asociado al estudio.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

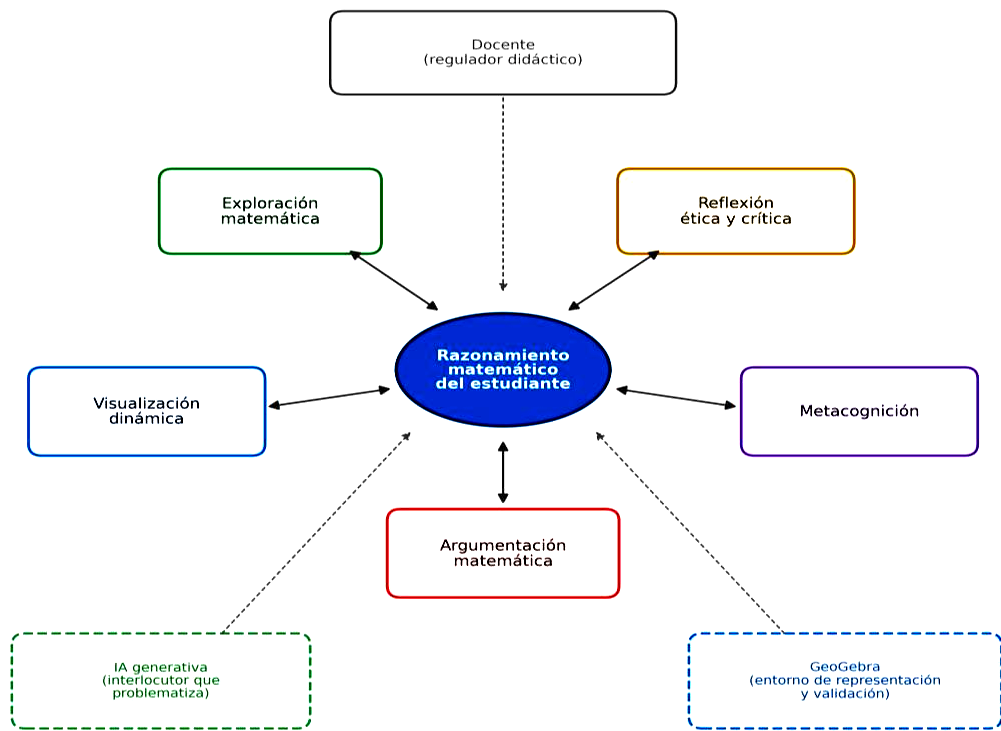
4.1 Modelo GeoIA-M: arquitectura de mediación del razonamiento

El Modelo GeoIA-M se sostiene sobre tres premisas que se desprenden de la revisión anterior. La primera es que el aprendizaje del cálculo se beneficia de la manipulación y conexión de representaciones, pero solo cuando la representación se inscribe en una tarea con propósito y va acompañada de mediación (Duval, 2004; Abraham y Prediger, 2024). La segunda es que la IA generativa resulta más valiosa cuando interroga que cuando responde, pues el cuestionamiento puede activar un pensamiento más deliberado mientras la evidencia disponible advierte que el acceso sin salvaguardas puede producir efectos contrarios, si bien dicha evidencia procede de contextos escolares y debe trasladarse con cautela a la educación universitaria (Degen, 2025; Bastani et al., 2025). La tercera es que la validez matemática no puede delegarse en la herramienta, dado que sus respuestas no siempre son precisas (Jia et al., 2024; Švičević et al., 2025). De estas premisas surge el principio rector del modelo: la IA provoca, cuestiona, acompaña y retroalimenta; el razonamiento matemático permanece en manos del estudiante.

4.2 Dimensiones del modelo

El Modelo GeoIA-M puede entenderse como una estructura de cinco dimensiones organizadas en torno al razonamiento del estudiante, que ocupa el centro del proceso. Las dimensiones no operan de manera lineal ni independiente, sino que se entrelazan a lo largo de una situación de aprendizaje. La exploración matemática asistida sitúa a la IA como apoyo para generar preguntas, reformular problemas y proponer conjeturas que el estudiante examina con criterio. La visualización dinámica corresponde al territorio de GeoGebra: representar, manipular y simular para conectar registros y poner a prueba conjeturas. La argumentación matemática exige justificar, contrastar, validar o refutar tanto las propias conjeturas como las respuestas de la IA. La metacognición invita a reflexionar sobre procedimientos, errores y estrategias. La reflexión ética y crítica busca que el estudiante use la IA reconociendo sus límites, sesgos y responsabilidades académicas. La Figura 1 representa esta arquitectura y la Tabla 1 precisa la función de cada recurso en cada dimensión. Las relaciones entre el razonamiento del estudiante, que ocupa el centro, y cada una de las dimensiones son bidireccionales: el razonamiento orienta el uso de cada recurso y, a la vez, se nutre de lo que cada dimensión aporta.

Figura 1. Arquitectura del Modelo GeoIA-M para la mediación del razonamiento matemático



Fuente: Elaboración propia.

Las flechas dobles indican relaciones bidireccionales entre el razonamiento del estudiante y cada dimensión; la IA y GeoGebra actúan como mediadores y el docente como regulador del proceso.

Tabla 1. Dimensiones didácticas del Modelo GeoIA-M

Dimensión	Función de la IA generativa	Función de GeoGebra	Evidencia de razonamiento matemático
Exploración matemática	Genera preguntas, reformula el problema y sugiere conjeturas y variantes.	Permite variar parámetros y observar regularidades antes de formalizar.	El estudiante delimita el problema y formula conjeturas propias.
Visualización dinámica	Propone qué representaciones conviene contrastar y por qué.	Representa y conecta los registros gráfico, numérico y simbólico.	El estudiante convierte entre registros y los interpreta.

Argumentación matemática	Devuelve preguntas que exigen justificar afirmaciones y descartar casos.	Ofrece material gráfico-numérico para sostener o refutar la conjetura.	El estudiante justifica con criterios matemáticos y valida resultados.
Metacognición	Pregunta por las estrategias, los errores y las decisiones tomadas.	Permite revisar la construcción y rehacer el camino seguido.	El estudiante explicita y regula su propio proceso de resolución.
Reflexión ética y crítica	Se somete a verificación; se discuten sus límites y posibles sesgos.	Sirve de contraste independiente frente a la respuesta automática.	El estudiante usa la IA con criterio y asume la responsabilidad académica.

Fuente: Elaboración propia.

4.3 Principios pedagógicos

La arquitectura se traduce en siete principios que ordenan las decisiones didácticas del docente.

Primero, la centralidad del razonamiento: el criterio último de cualquier tarea es que el razonamiento permanezca en el estudiante (Qian, 2025; Bastani et al., 2025, evidencia procedente de contextos escolares que se traslada con cautela al nivel universitario).

Segundo, la visualización como puente entre intuición y formalización, de modo que la representación dinámica conduzca a la conversión consciente entre registros (Duval, 2004; Zhang et al., 2023).

Tercero, la IA como mediación y no como sustitución: la herramienta debe preguntar más de lo que responde (Degen, 2025; van den Berg y du Plessis, 2023).

Cuarto, el error como oportunidad: las respuestas imprecisas de la IA y las conjeturas fallidas se aprovechan como material de análisis (Jia et al., 2024).

Quinto, la argumentación como condición de validez: ninguna respuesta se acepta sin justificación.

Sexto, la metacognición como cierre del proceso, diseñada de manera intencionada (Fang et al., 2024).

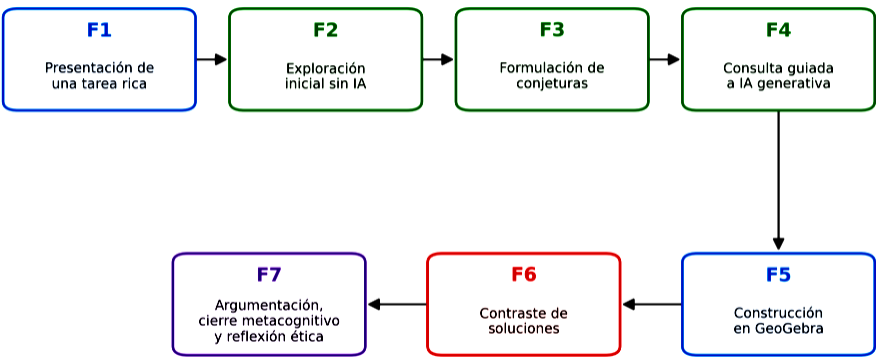
Séptimo, el uso ético y crítico de herramientas inteligentes, que debe enseñarse y no suponerse (Michel-Villarreal et al., 2023; Hashmi y Bal, 2024).

4.4 Secuencia de implementación didáctica

El modelo se concreta en una secuencia de siete fases que el docente adapta según el contenido y el nivel del curso. La secuencia, representada en la Figura 2 y descrita en la Tabla 2, busca que la IA y GeoGebra intervengan en momentos específicos y no como reemplazo del trabajo autónomo inicial. La ubicación de la exploración sin IA antes de la consulta a la herramienta no es casual: responde a evidencia que, aunque procede de contextos escolares, advierte que el acceso temprano y sin restricciones a

respuestas automáticas puede operar como un apoyo que desplaza el razonamiento autónomo y debilita el aprendizaje; su traslado al cálculo universitario se asume aquí como un supuesto didáctico prudente, no como una prueba directa (Bastani et al., 2025). Reservar un espacio inicial de trabajo autónomo y emplear después la IA con un propósito de cuestionamiento (Degen, 2025) preserva el valor formativo del esfuerzo propio.

Figura 2. Secuencia didáctica del Modelo GeoIA-M (siete fases)



Fuente: Elaboración propia.

La secuencia es orientadora y admite ajustes según el contenido y el contexto.

Tabla 2. Fases de implementación didáctica del Modelo GeoIA-M

Fase	Acción del estudiante	Acción del docente	Uso de la IA generativa	Uso de GeoGebra y evidencia esperada
F1	Interpreta una tarea rica de cálculo con más de una vía.	Plantea la situación y explicita el objetivo de razonamiento.	—	Sin uso aún; se espera la comprensión del problema.
F2	Explora con lápiz y papel y activa conocimientos previos.	Observa y registra concepciones iniciales.	Sin uso (trabajo autónomo).	Sin uso; se espera una primera conjetura propia.
F3	Formula conjeturas y anticipa el	Promueve la explicitación de las conjeturas.	Sin uso (autonomía).	Esbozo gráfico opcional; se espera una

	comportamiento del objeto.			hipótesis argumentable.
F4	Consulta a la IA con preguntas, no pide la solución.	Regula el intercambio para que la IA problematice.	Devuelve preguntas y rutas; no entrega respuestas cerradas.	Se espera el refinamiento de la conjetura.
F5	Construye y manipula el objeto dinámicamente.	Orienta la construcción y la lectura de registros.	Sugiere qué representaciones contrastar.	Construcción dinámica; se espera la conexión entre registros.
F6	Compara solución analítica, respuesta de IA y gráfico.	Problematiza discrepancias y pide criterios.	Se somete a verificación frente al desarrollo propio.	Contraste visual; se espera la detección de errores.
F7	Argumenta, revisa estrategias y valora el uso de la IA.	Cierra con discusión metacognitiva y ética.	Objeto de reflexión sobre límites y responsabilidad.	Revisión de la construcción; se espera una justificación validada.

Fuente: Elaboración propia.

4.5 Ejemplos de aplicación en cálculo universitario

A continuación, se desarrollan dos ejemplos de cálculo universitario. En cada caso se muestra el desarrollo matemático, el protocolo de construcción dinámica en GeoGebra, el prompt de consulta a IA y la forma en que las siete fases del Modelo GeoIA-M se concretan en la tarea.

4.5.1 Ejemplo 1. Optimización con derivadas

Enunciado. Con una lámina rectangular de $40 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$ se desea construir una caja sin tapa recortando cuadrados iguales de lado x en las esquinas y doblando las pestañas. Determinar el valor de x que maximiza el volumen de la caja.

Objetivo didáctico y conceptos. Modelar una función a partir de una situación, identificar su dominio físico, derivar e interpretar los puntos críticos y distinguir el máximo pertinente del contexto. Se ponen en juego la modelación, el dominio, la derivada, los puntos críticos y el criterio de la segunda derivada.

Tabla 3. Aplicación de las fases del Modelo GeoIA-M al ejemplo de optimización con derivadas

Fase	Acción del estudiante	Acción del docente	Uso de la IA generativa	Uso de GeoGebra y evidencia esperada
F1	Interpreta la situación de la caja sin tapa, identifica la lámina de 40 cm × 25 cm, el corte de lado x y el volumen por maximizar.	Presenta el reto y aclara que se valorará la modelación, el dominio, la validación y no solo el resultado.	No se usa todavía.	Sin uso; se espera comprensión de datos, variables y objetivo de la tarea.
F2	Dibuja la lámina, reconoce que las dimensiones cambian con x y anticipa que el volumen dependerá de una función.	Solicita explicar qué representa x y qué restricciones físicas aparecen.	No se usa todavía.	Puede apoyarse en un bosquejo manual; se espera una primera representación del problema.
F3	Propone $V(x)=x(40-2x)(25-2x)$ y conjetura que el máximo debe estar dentro del dominio físico.	Pide justificar la función y revisar si todas las expresiones tienen sentido en el contexto.	No se usa para resolver.	Se espera una conjetura funcional y un dominio preliminar.
F4	Consulta a la IA con un prompt socrático para revisar función, dominio, puntos críticos y significado del máximo.	Regula que la IA formule preguntas orientadoras y no entregue la solución completa.	Pregunta por el dominio, las dimensiones de la caja y el criterio para validar el máximo.	Se espera refinamiento de la función y del dominio antes de graficar.
F5	Construye el deslizador x, define $V(x)$, grafica la función y representa la caja dinámica.	Orienta la lectura de la gráfica y la relación entre la caja y la función de volumen.	Puede sugerir qué elementos conviene representar, pero no valida por sí sola.	GeoGebra muestra gráfica, punto máximo y variación de la caja; se espera conexión entre registros.

F6	Compara el cálculo analítico, la respuesta de la IA y la gráfica de GeoGebra.	Problematiza discrepancias y pide justificar por qué se descarta $x=50/3$.	La respuesta de IA se somete a verificación mediante el desarrollo propio.	Se espera validar el máximo en $x=5$ y el volumen 2250 cm^3 .
F7	Explica la estrategia seguida, los errores posibles y el aporte de cada herramienta.	Cierra con preguntas sobre dependencia de la IA, validación y responsabilidad matemática.	Puede apoyar preguntas de reflexión, no redactar la conclusión final.	Se espera una reflexión escrita sobre proceso, uso crítico de IA y papel de GeoGebra.

Fuente: Elaboración propia.

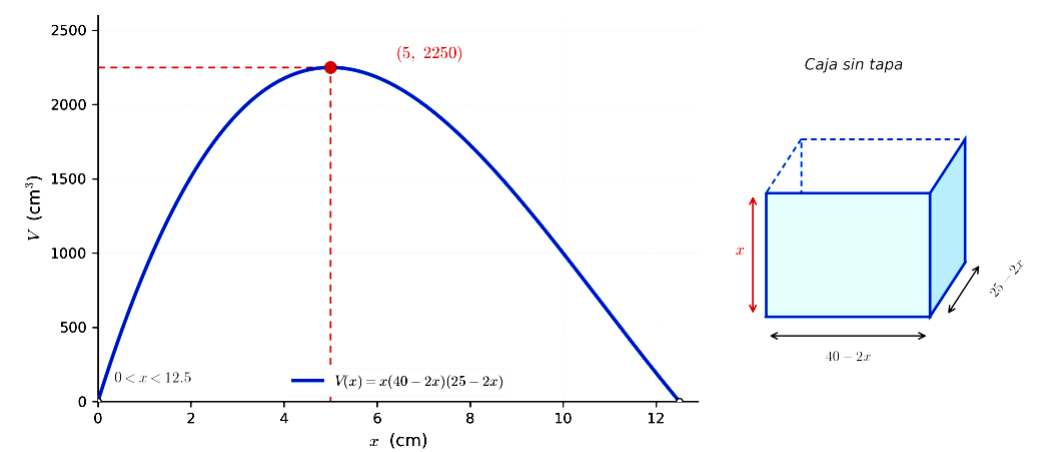
Desarrollo matemático. Al recortar cuadrados de lado x , la base mide $(40 - 2x)$ por $(25 - 2x)$ y la altura es x , de modo que el volumen es

$$V(x) = x(40 - 2x)(25 - 2x) = 4x^3 - 130x^2 + 1000x.$$

El dominio físico es $0 < x < 12,5$, pues la dimensión menor, $25 - 2x$, debe ser positiva. Derivando, $V'(x) = 12x^2 - 260x + 1000$; al igualar a cero y simplificar (dividiendo entre 4) se obtiene $3x^2 - 65x + 250 = 0$, cuyas raíces son $x = 5$ y $x = 50/3 \approx 16,7$. Solo $x = 5$ pertenece al dominio. Como $V''(x) = 24x - 260$ y $V''(5) = -140 < 0$, el punto $x = 5$ es un máximo. El volumen máximo es $V(5) = 5 \cdot 30 \cdot 15 = 2250 \text{ cm}^3$.

Interpretación. Recortar cuadrados de 5 cm de lado produce la caja de mayor capacidad, 2250 cm^3 . En los extremos del dominio el volumen tiende a cero (al no haber altura cuando $x \rightarrow 0$, o al anularse la base cuando $x \rightarrow 12,5$), lo que explica por qué el óptimo es interior. La Figura 3 muestra la gráfica de $V(x)$ y un esquema de la caja; la Tabla 4 detalla el protocolo de construcción en GeoGebra.

Figura 3. Simulación del problema de optimización: volumen $V(x)$ y caja sin tapa



Fuente: Elaboración propia con base en una construcción reproducible en GeoGebra.

Tabla 4. Protocolo de construcción en GeoGebra para el ejemplo de optimización

Paso	Acción en GeoGebra
1	Crear un deslizador x con intervalo $0 < x < 12,5$.
2	Definir largo = $40 - 2x$.
3	Definir ancho = $25 - 2x$.
4	Definir altura = x .
5	Definir $V(x) = x(40 - 2x)(25 - 2x)$.
6	Graficar $V(x)$ restringido al dominio válido.
7	Hallar el máximo con la herramienta correspondiente o con Extremo (V , 0 , 12.5).
8	Construir una caja dinámica simplificada que dependa de x .
9	Observar el comportamiento cuando x se aproxima a 0 y a $12,5$.
10	Comparar el máximo gráfico con el máximo analítico ($x = 5$).

Fuente: Elaboración propia.

Figura 4. Prompt socrático para el problema de optimización con derivadas

Prompt de consulta a IA

Actúa como tutor socrático de cálculo diferencial. No me des la solución completa. Revisa mi planteamiento de la función de volumen y hazme preguntas para identificar el dominio, los puntos críticos y el significado del máximo en el contexto. Si cometo un error, dame una pista, no la respuesta. Además, ayúdame a diseñar una forma de contrastar mi resultado con una construcción en GeoGebra.

Fuente: Elaboración propia.

Contraste y validación. Ante este prompt cabe esperar que la IA pregunte, por ejemplo, qué condición física limita el valor de x o por qué no todo punto crítico es un máximo, en lugar de entregar el número 5. El estudiante debe contrastar tres fuentes: su desarrollo analítico ($x = 5$, $V = 2250 \text{ cm}^3$), la respuesta de la IA que somete a

verificación, atendiendo a su precisión variable (Jia et al., 2024) y la lectura del gráfico, donde el máximo coincide visiblemente con $x = 5$. Preguntas útiles para interrogar a la IA son: ¿descartaste la raíz $x = 50/3$ y por qué?; ¿usaste algún criterio para confirmar que se trata de un máximo y no de un mínimo? En la reflexión metacognitiva el estudiante valora si confió de más en alguna respuesta automática, cómo detectó un posible error y qué papel jugó la visualización en su comprensión.

4.5.2 Ejemplo 2. Integral definida y acumulación

Enunciado. Durante un intervalo de 6 horas, el caudal de entrada de agua a un tanque, en litros por hora, se modela mediante $q(t) = 20 + 6t - t^2$, para $0 \leq t \leq 6$. Determinar la cantidad total de agua que ingresa al tanque durante ese intervalo e interpretar geoméricamente el resultado.

Objetivo didáctico y conceptos. Distinguir entre el valor de la función, el área bajo la curva y la cantidad acumulada; interpretar la integral definida como acumulación y aproximarla mediante sumas de Riemann antes de calcularla de forma exacta. Esta tarea moviliza una dimensión del cálculo distinta de la del primer ejemplo: no la optimización, sino la acumulación.

Tabla 5. Aplicación de las fases del Modelo GeoIA-M al ejemplo de integral definida y acumulación

Fase	Acción del estudiante	Acción del docente	Uso de la IA generativa	Uso de GeoGebra y evidencia esperada
F1	Interpreta el problema del caudal $q(t)=20+6t-t^2$ y reconoce que se busca una cantidad acumulada.	Presenta la situación y enfatiza la diferencia entre caudal instantáneo y volumen acumulado.	No se usa todavía.	Sin uso; se espera comprensión del contexto, intervalo y unidades.
F2	Identifica que $q(t)$ está en litros por hora y que el intervalo de análisis es $0 \leq t \leq 6$.	Pregunta qué representa la función y qué podría representar el área bajo la curva.	No se usa todavía.	Puede realizarse un bosquejo manual; se espera una primera interpretación gráfica.
F3	Conjetura que la cantidad total corresponde al área bajo la	Solicita distinguir entre $q(t)$, integral definida y acumulación total.	No se usa para resolver.	Se espera una conjetura sobre la integral como acumulación.

	curva y puede aproximarse con sumas.			
F4	Usa el prompt socrático para revisar la interpretación de la integral definida y de las sumas de Riemann.	Regula que la IA pregunte por unidades, área y acumulación, sin calcular directamente.	Pregunta qué representa la integral y cómo contrastar una suma aproximada.	Se espera mayor claridad conceptual antes de la construcción dinámica.
F5	Grafica $q(t)$, sombrea el área bajo la curva, calcula la integral y construye sumas de Riemann.	Orienta la lectura de la curva, el área sombreada y el efecto de aumentar n .	Puede sugerir comparaciones entre aproximaciones, sin sustituir la interpretación.	GeoGebra muestra área, integral 156 y sumas; se espera conexión entre gráfico, número y significado.
F6	Compara cálculo exacto, sumas de Riemann, respuesta de IA y visualización.	Problematiza errores como confundir caudal con cantidad acumulada.	Se usa como interlocutor crítico para revisar unidades e interpretación.	Se espera validar que 156 representa litros acumulados.
F7	Explica cómo comprendió la integral, qué aportó la visualización y qué revisó con la IA.	Cierra con preguntas sobre estrategia, errores conceptuales y uso responsable.	Puede apoyar preguntas de reflexión, no redactar el cierre final.	Se espera una reflexión sobre función, área, acumulación y validación matemática.

Fuente: Elaboración propia.

Desarrollo matemático. Como $q(t)$ representa una razón de cambio (litros por hora), la cantidad total acumulada en el intervalo es la integral definida de q entre 0 y 6. Calculando,

$$\int_0^6 (20 + 6t - t^2) dt = \left[20t + 3t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^6 = 120 + 108 - 72 = 156 \text{ litros.}$$

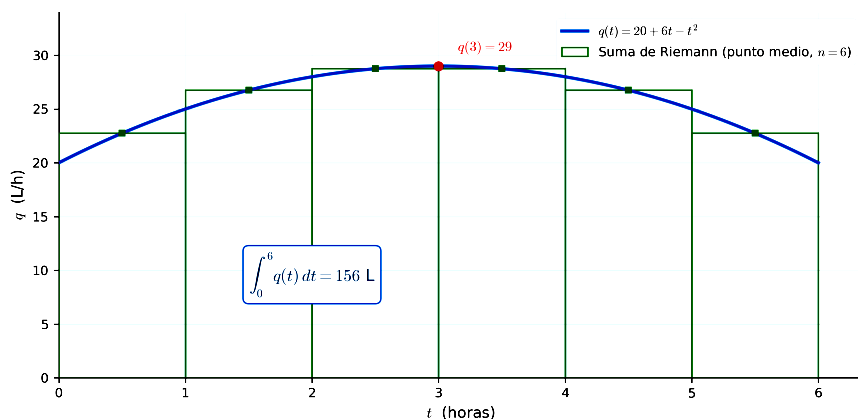
Por lo tanto, ingresan 156 litros de agua al tanque durante el intervalo de seis horas.

El caudal alcanza su valor máximo en $t = 3$, donde $q(3) = 29$ L/h. Una aproximación por sumas de Riemann con $n = 6$ subintervalos de amplitud 1 ilustra la

idea de acumulación: con extremos izquierdos y derechos la suma es 155, mientras que con los puntos medios es 156,5; al aumentar n , la aproximación se acerca al valor exacto de 156 litros.

Interpretación. El número 156 no es un caudal sino un volumen acumulado: el área bajo la curva de q entre $t = 0$ y $t = 6$, expresada en litros. Conviene insistir en esta distinción, pues confundir el valor de $q(t)$ con la cantidad acumulada es un error frecuente. La Figura 5 muestra la función, el área sombreada y los rectángulos de la aproximación por punto medio; la Tabla 6 detalla el protocolo de construcción.

Figura 5. Simulación del problema de integral definida: caudal $q(t)$, área acumulada y sumas de Riemann



Fuente: Elaboración propia con base en una construcción reproducible en GeoGebra.

Tabla 6. Protocolo de construcción en GeoGebra para el ejemplo de integral definida

Paso	Acción en GeoGebra
1	Definir la función $q(t) = 20 + 6t - t^2$.
2	Restringir la visualización al intervalo $0 \leq t \leq 6$.
3	Graficar $q(t)$ y, opcionalmente, marcar su máximo en $t = 3$.
4	Sombrear el área bajo la curva entre $t = 0$ y $t = 6$.
5	Calcular $\text{Integral}(q, 0, 6)$ y mostrar el valor (156).
6	Crear un deslizador n para el número de subintervalos.
7	Construir sumas de Riemann (inferior, superior o de punto medio).
8	Observar cómo cambia la aproximación cuando n aumenta.
9	Comparar la suma aproximada con el valor exacto de la integral.
10	Interpretar el resultado en litros como cantidad acumulada.

Fuente: Elaboración propia.

Figura 6. Prompt socrático para la interpretación de la integral definida y la acumulación

Prompt de consulta a IA

Actúa como tutor socrático de cálculo integral. No resuelvas el problema directamente. Hazme preguntas para interpretar qué representa la integral definida en este contexto. Ayúdame a distinguir entre el valor de la función $q(t)$, el área bajo la curva y la cantidad acumulada. Si propongo una aproximación por sumas de Riemann, revisa mi razonamiento y dame pistas para contrastarlo con GeoGebra.

Fuente: Elaboración propia.

Contraste y validación. Se espera que la IA pregunte qué unidades tiene el resultado de la integral o por qué la suma de Riemann se aproxima al valor exacto al crecer n , antes que ofrecer el número 156. El estudiante contrasta su cálculo exacto, la respuesta de la IA y la construcción en GeoGebra, donde el valor de $\text{Integral}(q, 0, 6)$ y el área sombreada coinciden. Preguntas para interrogar a la IA: ¿el resultado representa un caudal o una cantidad acumulada?; ¿qué ocurre con la aproximación si uso puntos medios en lugar de extremos? En el cierre metacognitivo el estudiante reflexiona sobre la diferencia entre función y acumulación y sobre el papel de la visualización en su comprensión.

4.5.3 Criterios de evaluación del razonamiento mediado

Coherente con el principio de centralidad del razonamiento, la evaluación se orienta al proceso y no solo al resultado. La Tabla 7 propone criterios que el docente puede adaptar a cada tarea de cálculo.

Tabla 7. Criterios de evaluación del razonamiento matemático mediado por IA y GeoGebra

Criterio	Indicador	Evidencia observable
Modelación y dominio	Traduce la situación a una función y delimita su dominio.	Justifica el dominio físico (p. ej., $0 < x < 12,5$).
Conversión entre registros	Conecta los registros gráfico, numérico y simbólico.	Interpreta el gráfico y lo vincula con el desarrollo analítico.
Argumentación y validación	Justifica resultados y no acepta respuestas sin verificarlas.	Confirma el máximo o el valor de la integral con criterios propios.
Control del error	Detecta y analiza errores propios o de la IA.	Descarta soluciones espurias (p. ej., $x = 50/3$) con argumento.
Metacognición	Explicita estrategias, decisiones y dificultades.	Describe cómo reorientó su análisis tras la consulta a la IA.

Uso ético y crítico de la IA	Reconoce límites y responsabilidades en el uso de la herramienta.	Distingue lo aportado por la IA de su propia elaboración.
-------------------------------------	---	---

Fuente: Elaboración propia.

Estos criterios dialogan con marcos consolidados de la educación matemática. La modelación, la corrección matemática, la validación y la argumentación remiten a la idoneidad epistémica; la atención a la comprensión, a los errores y a la metacognición, a la idoneidad cognitiva; y el papel de la IA y de GeoGebra como recursos de mediación, a la idoneidad mediacional (Godino, 2013). A su vez, el hecho de que el docente regule cuándo, cómo y para qué se emplean las herramientas conecta con la orquestación instrumental (Drijvers et al., 2010), pues la evaluación del razonamiento depende también de la forma en que se organiza el uso de los artefactos en el aula. Esta articulación habilita, además, que los criterios de la Tabla 7 sirvan de base para construir indicadores y rúbricas en futuras investigaciones orientadas a validar el modelo.

4.6 Discusión

El aporte del Modelo GeoIA-M conviene leerlo en relación con dos prácticas que procura superar. Frente a una enseñanza del cálculo centrada en la repetición de procedimientos, el modelo recupera el valor de la exploración y de la visualización dinámica, cuyo efecto sobre la comprensión cuenta con respaldo empírico en cálculo y geometría (Zhang et al., 2023). Frente a los usos superficiales de la IA, orientados a obtener la respuesta, propone una configuración en la que la herramienta interroga y acompaña, en línea con la evidencia emergente que asocia los enfoques socráticos con un pensamiento más deliberado, y en contraste con los riesgos documentados del acceso sin salvaguardas (Bastani et al., 2025).

Lo distintivo de la propuesta no reside en ninguno de sus componentes por separado, sino en su articulación. Conviene insistir en una distinción que atraviesa todo el trabajo: usar tecnología y mediar el razonamiento no son lo mismo. Incorporar IA generativa o GeoGebra a una clase de cálculo no garantiza, por sí solo, que el estudiante mejore la profundidad, la autonomía o la calidad argumentativa de su razonamiento; puede incluso ocurrir lo contrario si la herramienta se convierte en un atajo hacia la respuesta. La mediación, en cambio, supone un diseño deliberado en el que cada recurso ocupa una función subordinada a un propósito cognitivo: la IA para problematizar, GeoGebra para representar y contrastar, y el estudiante para conjeturar, argumentar y validar. El modelo ofrece una manera de ordenar esa integración asignando a cada recurso un papel coherente con sus fortalezas y sus límites.

El valor del modelo para el cálculo universitario merece subrayarse. El cálculo diferencial e integral concentra dificultades de aprendizaje bien conocidas: la interpretación del límite, el tránsito entre la pendiente y la derivada, o la comprensión de la integral como acumulación y no solo como antiderivada. En estos contenidos, la posibilidad de coordinar el registro gráfico, el numérico y el simbólico resulta especialmente fértil (Duval, 2004), y GeoGebra ofrece un entorno donde esa coordinación se vuelve manipulable. Los dos ejemplos desarrollados ilustran cómo la

optimización y la integral definida admiten una exploración que parte de la intuición visual y se cierra en la argumentación formal, sin que la herramienta sustituya el trabajo matemático del estudiante.

Subordinar la IA y GeoGebra al razonamiento tiene, además, una consecuencia ética. Dado que las respuestas de la IA no siempre son precisas (Jia et al., 2024) y que su desempeño en tareas visuales y en idiomas locales presenta limitaciones (Švičević et al., 2025), reservar la validación al estudiante y al docente no es una cautela accesoria, sino una condición del sentido formativo del modelo. El estudiante aprende cálculo y, al mismo tiempo, aprende a usar herramientas inteligentes con criterio, distinguiendo lo que aporta la máquina de lo que debe sostener su propio razonamiento.

Para la formación docente, la propuesta abre una agenda concreta. Implementar el modelo exige profesores capaces de diseñar tareas ricas, de configurar la interacción con la IA para que pregunte más de lo que responde y de orquestar el uso de GeoGebra al servicio de la argumentación. Estas competencias no se improvisan; la literatura recuerda que los beneficios de las tecnologías digitales dependen de manera crítica de la mediación docente y se ven limitados por una formación insuficiente (Batiibwe, 2024; van den Berg y du Plessis, 2023). El modelo es, en este sentido, también una propuesta para la formación del profesorado de matemática.

Finalmente, conviene precisar el estatus de la propuesta. El Modelo GeoIA-M se presenta como una construcción teórico-didáctica fundamentada y no como un resultado empíricamente validado. Su formulación surge de la articulación entre la literatura reciente sobre inteligencia artificial generativa, visualización dinámica y educación matemática, y una práctica docente universitaria que, durante los últimos años, ha explorado el uso de herramientas de IA y GeoGebra en tareas de cálculo. Esa experiencia no se asume como evidencia de eficacia, sino como punto de partida para identificar tensiones didácticas, organizar principios de mediación y traducirlos en una arquitectura aplicable al diseño de tareas. En consecuencia, el modelo debe entenderse como un marco inicial susceptible de futuras investigaciones que analicen su pertinencia, sus posibilidades de transferencia y sus efectos sobre el razonamiento, la argumentación y la metacognición matemática del estudiantado.

Limitaciones prácticas del modelo

La propuesta presenta, además, limitaciones prácticas que conviene reconocer. La primera concierne a la fiabilidad de la interacción socrática con la IA: el modelo no siempre sostiene un comportamiento socrático estable, pues puede entregar respuestas directas pese a la instrucción, cometer errores o proporcionar pistas demasiado fuertes que anticipan la solución. Por ello, el papel del docente resulta insustituible, ya que le corresponde diseñar y depurar los prompts, revisar las interacciones, advertir sobre posibles errores y exigir que toda respuesta se someta a validación matemática por parte del estudiante.

La segunda limitación se relaciona con la equidad y el acceso. El modelo presupone disponibilidad de dispositivos, conectividad, un dominio básico de GeoGebra y acceso a herramientas de IA, condiciones que no siempre se cumplen y que pueden generar brechas entre estudiantes. Para atenuarlas conviene prever

alternativas, como el trabajo colaborativo en grupos, el uso de versiones gratuitas de las herramientas, actividades en laboratorios institucionales, prompts comunes proporcionados por el docente, construcciones de GeoGebra previamente preparadas o, cuando sea necesario, momentos de la secuencia sin IA. Estas decisiones forman parte de la mediación docente y deben considerarse al planificar la implementación. En particular, la capa de IA podría ampliar la misma brecha que GeoGebra ayuda a cerrar cuando el acceso a modelos más capaces depende de cuentas, conectividad estable o recursos de pago.

5. CONSIDERACIONES FINALES

El problema del que parte este trabajo es que la incorporación de IA generativa en la enseñanza universitaria de la matemática, cuando es instrumental y orientada a la respuesta, puede debilitar precisamente aquello que la educación matemática busca cultivar: el razonamiento del estudiante. Frente a ello, el Modelo GeoIA-M ofrece una arquitectura didáctica para organizar la mediación entre IA generativa, GeoGebra y tareas de cálculo universitario, asignando a cada recurso una función subordinada al razonamiento, la argumentación, la validación y la reflexión crítica.

El aporte del modelo es ofrecer un marco que ordena la mediación del razonamiento en cursos de cálculo, donde el valor formativo reside menos en la respuesta que en el proceso que conduce a ella. Aunque los ejemplos desarrollados en este artículo se sitúan en cálculo diferencial e integral, los principios del Modelo GeoIA-M: exploración, visualización dinámica, argumentación, metacognición y uso crítico de la IA pueden proyectarse hacia otras áreas de la matemática universitaria, como álgebra lineal, geometría analítica, estadística o precálculo, siempre que las tareas sean rediseñadas según la naturaleza epistemológica de cada contenido. No se afirma que el modelo garantice mejores aprendizajes; se plantea como una posibilidad didáctica fundamentada y prudente, que requiere validación empírica posterior. Las líneas futuras más evidentes son su implementación en cursos reales de matemática universitaria y el diseño de instrumentos que permitan evaluar no solo el producto, sino el razonamiento, la argumentación y la metacognición que el modelo busca movilizar. En un escenario en el que la IA generativa seguirá presentándose como una vía rápida hacia la respuesta, propuestas como esta buscan recordar que, en matemática, el camino sigue siendo parte esencial del aprendizaje.

En cuanto a la agenda de investigación, el modelo abre líneas concretas y accionables: estudios piloto en cursos reales de cálculo universitario; investigación basada en diseño que refine la secuencia en ciclos sucesivos; validación de los criterios y rúbricas de evaluación del razonamiento; análisis de las interacciones entre estudiante e IA; estudios comparativos entre tareas con y sin mediación GeoIA-M; investigaciones sobre la formación docente que el modelo requiere; y análisis de las condiciones de equidad y acceso que condicionan su implementación. Estas líneas permitirían contrastar empíricamente aquello que el artículo, por su carácter teórico-didáctico, no demuestra.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

MGM concibió la idea del artículo, formuló el Modelo GeoIA-M, desarrolló la fundamentación teórico-didáctica, diseñó los ejemplos de aplicación en cálculo universitario, elaboró los protocolos de construcción en GeoGebra, redactó el manuscrito, revisó la coherencia matemática de los ejemplos y aprobó la versión final del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Este artículo corresponde a una propuesta teórico-metodológica fundamentada en revisión narrativa de literatura y análisis didáctico de tareas de cálculo universitario. No se generaron, recopilaron ni analizaron datos empíricos propios de participantes humanos. Por tanto, no existe un conjunto de datos asociado al estudio. Los materiales didácticos, protocolos de construcción y ejemplos presentados en el manuscrito pueden solicitarse al autor correspondiente previa solicitud razonable. Asimismo, las construcciones dinámicas asociadas a las figuras y los applets derivados de los ejemplos podrán compartirse por el autor previa solicitud razonable o mediante repositorios institucionales cuando estén disponibles.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece al equipo editorial de la revista y a la revisora filológica por sus observaciones, que contribuyeron a mejorar la claridad, la organización y la presentación del manuscrito.

REFERENCIAS

- Abraham, M., y Prediger, S. (2024). Scaffolding fifth graders' learning with a digital multi-representation applet: Design research on focusing multiplicative structures with dynamic dot arrays. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 11(2), 219–246. <https://doi.org/10.1007/s40751-024-00156-7>
- Bastani, H., Bastani, O., Sungu, A., Ge, H., Kabakçı, Ö., y Mariman, R. (2025). Generative AI without guardrails can harm learning: Evidence from high school mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 122(5), e2422633122. <https://doi.org/10.1073/pnas.2422633122>
- Batiibwe, M. S. (2024). Integration of GeoGebra in learning mathematics: Benefits and challenges. *East African Journal of Education Studies*, 7(4), 684–697. <https://doi.org/10.37284/eajes.7.4.2454>
- Bedada, T. B., y Machaba, M. (2022). The effect of GeoGebra on students' abilities to study calculus. *Education Research International*, 2022, Article 4400024. <https://doi.org/10.1155/2022/4400024>
- Canonigo, A. M. (2024). Leveraging AI to enhance students' conceptual understanding and confidence in mathematics. *Journal of Computer Assisted Learning*, 40(6), 3215–3229. <https://doi.org/10.1111/jcal.13065>

- Chan, C., y Colloton, T. (2024). *Generative AI in higher education*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003459026>
- Chan, C., y Hu, W. (2023). Students' voices on generative AI: Perceptions, benefits, and challenges in higher education. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, 20, Article 43. <https://doi.org/10.1186/s41239-023-00411-8>
- Chytas, C., van Borkulo, S. V., Drijvers, P., Barendsen, E., y Tolboom, J. (2024). Computational thinking in secondary mathematics education with GeoGebra: Insights from an intervention in calculus lessons. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 10, 228–259. <https://doi.org/10.1007/s40751-024-00141-0>
- Degen, B. (2025). *Resurrecting Socrates in the age of AI: A study protocol for evaluating a Socratic tutor to support research question development in higher education*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arxiv.2504.06294>
- Degen, P., y Asanov, I. (2025). *Beyond automation: Socratic AI, epistemic agency, and the implications of the emergence of orchestrated multi-agent learning architectures*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arxiv.2508.05116>
- Del Río, L. S. (2016). Enseñar y aprender cálculo con ayuda de la vista gráfica 3D de GeoGebra. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 17(1). <https://doi.org/10.18845/rdmei.v17i1.2739>
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 213–234. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5>
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.
- Eager, B., y Brunton, R. (2023). Prompting higher education towards AI-augmented teaching and learning practice. *Journal of University Teaching and Learning Practice*, 20(5). <https://doi.org/10.53761/1.20.5.02>
- El Fathi, T., Saad, A., Larhzil, H., Lamri, D., y Al Ibrahmi, E. M. (2025). Integrating generative AI into STEM education: Enhancing conceptual understanding, addressing misconceptions, and assessing student acceptance. *Disciplinary and Interdisciplinary Science Education Research*, 7, Article 6. <https://doi.org/10.1186/s43031-025-00125-z>
- Fang, Y., He, B., Liu, Z., Liu, S., Yan, Z., y Sun, J. (2024). Evaluating the design features of an intelligent tutoring system for advanced mathematics learning. In A. M. Olney, I.-A. Chounta, Z. Liu, O. C. Santos e I. I. Bittencourt (Eds.), *Artificial Intelligence in Education. AIED 2024* (Lecture Notes in Computer Science, Vol. 14829, pp. 338–350). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-64302-6_24
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en*

- Educación Matemática*, 8(11), 111-132.
<https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14720>
- Goyal, H., Gupta, R., Sharma, S., Mittal, K., Mehra, A., Sesh, J., y Kumar, D. (2025). *Saksham AI: Advancing AI-assisted coding education for engineering students in India through Socratic tutoring and comprehensive feedback*. *ACM Journal on Computing and Sustainable Societies*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1145/3788679>
- Hashmi, N., y Bal, A. S. (2024). Generative AI in higher education and beyond. *Business Horizons*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1016/j.bushor.2024.05.005>
- Jensen, L. X., Buhl, A., Sharma, A., y Bearman, M. (2024). Generative AI and higher education: A review of claims from the first months of ChatGPT. *Higher Education*, 89, 1145–1161. <https://doi.org/10.1007/s10734-024-01265-3>
- Jia, J., Wang, T., Zhang, Y., y Wang, G. (2024). The comparison of general tips for mathematical problem solving generated by generative AI with those generated by human teachers. *Asia Pacific Journal of Education*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1080/02188791.2023.2286920>
- Kllogjeri, Q., y Kllogjeri, P. (2024). GeoGebra—A great platform for experiential learning, explorations and creativity in mathematics. *Journal of Applied Math*, 2(4), Article 553. <https://doi.org/10.59400/jam.v2i4.553>
- Kurtz, G., Amzalag, M., Shaked, N., Zaguri, Y., Kohen-Vacs, D., Gal, E., Zailer, G., y Barak-Medina, E. (2024). Strategies for integrating generative AI into higher education: Navigating challenges and leveraging opportunities. *Education Sciences*, 14(5), Article 503. <https://doi.org/10.3390/educsci14050503>
- Lee, J., Hung, J.-T., Soyulu, M., Popescu, D. M., Cui, C. Z., Grigoryan, G., Joyner, D. A., y Harmon, S. (2025). Socratic Mind: Impact of a novel GenAI-powered assessment tool on student learning and higher-order thinking. *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arxiv.2509.16262>
- Létourneau, A., Deslandes Martineau, M., Charland, P., Karran, J. A., Boasen, J., y Léger, P.-M. (2025). A systematic review of AI-driven intelligent tutoring systems (ITS) in K-12 education. *npj Science of Learning*, 10, Article 29. <https://doi.org/10.1038/s41539-025-00320-7>
- Medina Herrera, L. M., Juárez Ordóñez, S., y Ruiz-Loza, S. (2024). Enhancing mathematical education with spatial visualization tools. *Frontiers in Education*, 9, Article 1229126. <https://doi.org/10.3389/feduc.2024.1229126>
- Michel-Villarreal, R., Vilalta-Perdomo, E., Salinas-Navarro, D., Thierry-Aguilera, R., y Gerardou, F. S. (2023). Challenges and opportunities of generative AI for higher education as explained by ChatGPT. *Education Sciences*, 13(9), Article 856. <https://doi.org/10.3390/educsci13090856>
- Milenković, A., Takači, Đ., y Božić, R. (2024). The influence of dynamic representations in mobile applications on students' learning achievements in

- solving multiple integrals. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*. Advance online publication. <https://doi.org/10.46328/ijemst.4246>
- Mishra, P., y Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017–1054. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x>
- Negara, H. R. P., Wahyudin, Nurlaelah, E., y Herman, T. (2022). Improving students' mathematical reasoning abilities through social cognitive learning using GeoGebra. *International Journal of Emerging Technologies in Learning*, 17(18), 118–135. <https://doi.org/10.3991/ijet.v17i18.32151>
- Nonghanpitak, P., Yonwilad, W., y Khansila, P. (2022). The effect of GeoGebra software in calculus for mathematics teacher students. *Journal of Educational Issues*, 8(2). <https://doi.org/10.5296/jei.v8i2.20422>
- Qian, Y. (2025). Pedagogical applications of generative AI in higher education: A systematic review of the field. *TechTrends*, 69, 1105–1120. <https://doi.org/10.1007/s11528-025-01100-1>
- Serhan, D., y Welcome, N. B. (2024). Integrating ChatGPT in the calculus classroom: Student perceptions. *International Journal of Technology in Education and Science*. Advance online publication. <https://doi.org/10.46328/ijtes.559>
- Švičević, M., Milenković, A., Vučićević, N., y Stanković, M. (2025). Evaluating the success of AI tools in supporting student performance in Mathematical Kangaroo competition. *Computer Applications in Engineering Education*, 33(5), Article e70063. <https://doi.org/10.1002/cae.70063>
- Tejada Ramírez, F. A. (2025). Impacto del uso de GeoGebra en el aprendizaje universitario de transformaciones lineales en geometría dinámica. *Pedagogical Constellations*, 4(1), Article 90. <https://doi.org/10.69821/constellations.v4i1.90>
- Ünal, Z. E., Ala, A. M., Kartal, G., Özel, S., y Geary, D. (2023). Visual and symbolic representations as components of algebraic reasoning. *Journal of Numerical Cognition*, 9(2), Article e11151. <https://doi.org/10.5964/jnc.11151>
- van den Berg, G., y du Plessis, E. D. (2023). ChatGPT and generative AI: Possibilities for its contribution to lesson planning, critical thinking and openness in teacher education. *Education Sciences*, 13(10), Article 998. <https://doi.org/10.3390/educsci13100998>
- Bernal, M. V.V. (2024). GeoGebra: Software que genera equidad social. *Revista Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información*, 11(21), 117–120. <https://doi.org/10.21017/rimci.2024.v11.n21.a157>
- Zafar, S., Shaheen, F., y Rehan, J. (2024). Use of ChatGPT and generative AI in higher education: Opportunities, obstacles and impact on student performance. *iRASD Journal of Educational Research*, 5(1), Article 2463. <https://doi.org/10.52131/jer.2024.v5i1.2463>

Zhang, Y., Wang, P., Jia, W., Zhang, A., y Chen, G. (2023). Dynamic visualization by GeoGebra for mathematics learning: A meta-analysis of 20 years of research. *Journal of Research on Technology in Education*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1080/15391523.2023.2250886>

