

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573



Cuadernos

de Investigación y Formación
en Educación Matemática

Año 2025

Vol. 18

Nº. 2

CIMM

Centro de Investigación en
**Matemática y
Meta-Matemática**


EDITORIAL
UCR

UCR
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA



Contenido del Volumen 18. Número 2. Año 2025

Presentación.....	5
Sección 1. Artículos de investigación	
1. Discriminación de género en la docencia de las matemáticas: una revisión sistemática	7-23
<i>Autor: Luis Alejandro Bustos Mancera</i>	
2. Integración de modelación matemática, inteligencia artificial generativa y situaciones de aprendizaje para la enseñanza del cálculo escolar	25-48
<i>Autores: Sebastián Saavedra Messina, Adiel Silva Riveros e Iván Pérez Vera</i>	
3. Procesos matemáticos en prácticas de estudiantes de profesorado en Matemática y Física.....	49-71
<i>Autores: Pablo Alejandro Wiernes y Ricardo Fabián Espinoza</i>	
4. Narrativas sobre las trayectorias de formación para enseñar matemáticas	73-83
<i>Autores: Yully Stefanny Jiménez Rodríguez y Elizabeth Torres Puentes</i>	
5. Aplicación de las representaciones semióticas en cálculo multivariable mediante la construcción de una montaña rusa física y virtual.....	85-98
<i>Autor: Juan Carlos Ruiz Castillo</i>	
6. Una descomposición genética preliminar para el concepto de logaritmo como número real.....	99-121
<i>Autores: Kevin David Gómez Guillén y Fabián Wilfrido Romero Fonseca</i>	
7. The use of adaptive digital technologies in teaching mathematics to students with special educational needs in Spain and Ecuador	123-133
<i>Autora: Celia Gallardo Herrerías</i>	
8. Integración de metodologías activas e inteligencia artificial en la enseñanza del tema de sucesiones y series: una experiencia de clase en un curso semipresencial del Instituto Tecnológico de Costa Rica.....	135-160
<i>Autores: Reiman Yitsak Acuña Chacón y Marcela Marrero Calvo</i>	
9. Diseño e implementación de una intervención formativa con Edpuzzle para promover el aprendizaje autónomo en un curso universitario de matemática general	161-180
<i>Autoras: Rita Díaz-Flores y Marianella Bolaños-Barquero</i>	

Sección 3. Mi formación en EducMate

1. **Experiencia de formación: estrategia didáctica para la enseñanza de la probabilidad frecuencial en un espacio muestral no equiprobable.....** 181-187
Autor: Luis Diego Chavarría Brenes
2. **Experiencia profesional: concurso de cuentos matemáticos.....** 189-192
Autor: Aarón Josué Vargas Carrillo



Presentación del Volumen 18. Número 2, Año 2025

El propósito de una investigación en la enseñanza y aprendizaje de la matemática es contribuir con sociedad, identificando problemas y proponiendo soluciones en el sistema educativo. A nivel latinoamericano, es importante realizar y difundir investigaciones para desarrollar el razonamiento lógico, mejorar la formación matemática, abordar deficiencias y fundamentar políticas educativas, proporcionando un marco para el diseño de estudios y la sistematización del conocimiento en el campo.

En este número de Cuadernos, las personas investigadoras nos presentan los resultados de su trabajo desde Argentina, Chile, Colombia, Costa Rica, Ecuador, España y Guatemala en aras de contribuir con nuevas metodologías y teorías para mejorar desde la enseñanza el aprendizaje de nuestros y nuestras estudiantes. Entre los aportes se encuentran: la discriminación de género en la docencia de matemáticas, la modelación matemática, formación de profesores, aplicación de representaciones semióticas, una descomposición genética para el concepto de logaritmo como número real.

Además, en el área de las tecnologías digitales, se presentan tres investigaciones relacionadas con el uso adaptativo de las tecnologías en la enseñanza de estudiantes con necesidades especiales, la inteligencia artificial utilizada en el tema de series y sucesiones y el diseño e implementación de una intervención formativa con Edpuzzle para promover el aprendizaje autónomo en un curso universitario de matemática general.

La sección “Mi formación en EducMate” tiene como objetivo que las personas egresadas de alguna carrera relacionada con la formación de profesores de matemática compartan y analicen experiencias que vivieron durante su formación. Un egresado comparte la experiencia de diseñar e implementar un juego como estrategia didáctica para la enseñanza de la probabilidad frecuencial en un espacio muestral no equiprobable, otra persona comparte su experiencia y analiza el papel del cuento titulado: El reloj circunferencia como estrategia didáctica para docentes y estudiantes de educación primaria.

Agradecemos a todas las personas investigadoras por sus contribuciones y a nuestros los lectores que hacen posible nuestro objetivo: enriquecer la comunidad de Educación Matemática mediante la provisión de herramientas teóricas y metodológicas, para potenciar los quehaceres dentro de esta gran comunidad, hacia el avance del conocimiento en todos los niveles educativos.

Dr. William Poveda Fernández
Editor en jefe





DISCRIMINACIÓN DE GÉNERO EN LA DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS: UNA REVISIÓN SISTEMÁTICA

GENDER DISCRIMINATION IN MATHEMATICS TEACHING: A SYSTEMATIC REVIEW

Luis Alejandro Bustos Mancera¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-0079-7657>

RESUMEN

Este artículo tiene como propósito analizar las categorías presentes en la investigación acerca de la discriminación de género en la docencia de las matemáticas con enfoque narrativo a partir de una revisión sistemática. Se presenta una contextualización del problema de investigación, algunos elementos teóricos y aspectos metodológicos de la forma en que se seleccionaron y organizaron los artículos y tesis elegidos usando el protocolo PRISMA. Luego se presentan las categorías que engloban la mayoría de estas investigaciones: experiencia, representación, trayectoria y posicionamiento. Además, se presenta un análisis acerca de las perspectivas de género y enfoques narrativos presentes en dichas fuentes. Se concluye con algunas recomendaciones sobre futuras investigaciones sobre el tema.

Palabras clave: Discriminación de Género, Docencia de las Matemáticas, Investigación Narrativa, Revisión Sistemática.

ABSTRACT

The purpose of this article is to analyze the categories present in the research on gender discrimination in mathematics teaching with a narrative approach based on a systematic review. It presents a contextualization of the research problem, some theoretical elements, and methodological aspects of the way in which the selected articles and theses were selected and organized using the PRISMA protocol. Then, the categories that encompass most of these investigations are presented: experience, representation, trajectory and positioning. In addition, an analysis of the gender perspectives and narrative approaches present in these sources is presented. It concludes with some recommendations for future research on the topic.

Keywords: Gender Discrimination, Mathematics Teaching, Narrative Inquiry, Systematic Review.

¹ Estudiante Doctorado Interinstitucional en Educación Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Énfasis: Lenguaje y Educación; Línea de investigación: Discurso, Discriminación, Escuela. Profesor de planta de la Secretaría de Educación Distrital, Bogotá, Colombia, código postal C.P. 111311. Correo electrónico: labustosm@udistrital.edu.co



1. INTRODUCCIÓN

Desde el comienzo del siglo XX se establecieron maneras de justificar y naturalizar las diferencias cognitivas entre mujeres y hombres a través de estudios psicométricos que incluyeron los siguientes: test de inteligencia general (Binet y Simon, 1904; Moebius, 1900), estudios sobre las hormonas sexuales (Levy, 1969), análisis factorial de la inteligencia (Thurstone y Thurstone, 1941) y estudios sobre la lateralización cerebral (Gómez Rodríguez, 2014). Estos estudios se basaron en la anatomía, neurología y psicología. En la década de los treinta aparecieron en Estados Unidos los primeros estudios que intentaron evaluar las diferencias de desempeño en pruebas de aritmética (Monroe y Engelhart, 1931), centradas en efectos motivadores a partir del elogio y la reprensión. No es hasta finales de la década del setenta que iniciaron los estudios sobre el desempeño de niñas y mujeres en pruebas de matemáticas, distanciándose de los estudios clásicos de psicometría y centrándose en las actitudes que ponían en juego niñas y niños al resolver problemas de visualización espacial (Fennema y Sherman, 1976, 1977). En paralelo, comenzaron a desarrollarse otro tipo de estudios, centrados específicamente en los discursos de niñas y jóvenes, para mostrar cómo el desempeño en clases de matemáticas asociado a las niñas hacia parte de un artificio, que las hacía ver como incapaces en comparación con el desempeño de los niños (Walkerdine, 1990, 1998).

Estas dos últimas tendencias han marcado el gran grueso de investigación sobre lo que se ha conocido como el problema del “género y las matemáticas” hasta la actualidad. La primera tendencia, que se apoya en estudios cuantitativos y a veces en modelos mixtos, se ocupa de medir las diferencias del desempeño de niñas y niños, ya no solo en actitudes, sino en un rango más amplio que incluye logros, desempeños, amenaza de estereotipos, efectos de género, estilos cognitivos, ansiedad matemática, motivación y razonamiento espacial. Esta tendencia recoge la mayor cantidad de literatura sobre el tema y es posible encontrar, en la mayoría de los países, por lo menos un estudio que examine dichas diferencias de género usando como referente resultados en pruebas censales de matemáticas. La segunda tendencia, que se ocupa del discurso y ha sido examinada en menor medida, ha tenido en cuenta aspectos relacionados con la interacción en el aula entre profesores y estudiantes a nivel escolar y universitario. Asimismo, ha conllevado a investigaciones con enfoque narrativo que se preocupan por comprender y visibilizar las voces de niñas y mujeres que por muchos años han sido silenciadas en relación con sus experiencias en los espacios matemáticos.

Un interés investigativo de esta segunda tendencia tiene que ver con el ingreso y participación de mujeres en la docencia de las matemáticas desde sus propias voces, con la paradoja de encontrarse en un campo históricamente masculinizado en una profesión feminizada (Montoya Palacio, 2012). La presencia de estereotipos, prejuicios y actos discriminatorios han influido en el ingreso y participación de mujeres en la docencia de las matemáticas, lo cual se suma a las dificultades encontradas para ingresar a carreras con un fuerte componente en matemáticas disciplinares (Astorga Sandoval, 2016; Caro Cárdenas, 2017; Montero Rojas et al., 2021; Ursini, 2014). Para el caso de Colombia, este ingreso a la docencia de las matemáticas se dio hasta la década del sesenta, a pesar de que entre la década del treinta y cincuenta ya se habían creado los primeros programas de licenciatura en matemáticas (Calvo, 2004; González-Gutiérrez et al., 2018; Jiménez, 2018; Sánchez B., 2017). Incluso, fue recién en la década de los treinta cuando se les permitió a niñas y mujeres tanto estudiar secundaria como la posibilidad de ingresar a la educación superior (Congreso de Colombia, 1933). Al considerarse el reciente ingreso y participación de mujeres en la docencia de las matemáticas, se vuelve relevante comprender los obstáculos y desafíos que han debido superar para acceder a esta profesión desde investigaciones en las que sus voces sean protagónicas. El objetivo principal

de este estudio es analizar las tendencias, categorías y tensiones que existen alrededor de la investigación acerca de la discriminación de género en la docencia de las matemáticas, desde un enfoque narrativo y a partir de la revisión sistemática de artículos y tesis.

2. ABORDAJE METODOLÓGICO

Esta revisión siguió los pasos del protocolo PRISMA (Moher et al., 2009; PRISMA, 2020; Sánchez-Serrano, *et al.*, 2022). Para lograr obtener la mayor cantidad de estudios se decidió escoger un rango abierto que abarcara hasta el 2024, lo que favoreció tener una mirada general que pudiera incluir cambios en las tendencias investigativas.

2.1 Pregunta de investigación

Esta revisión pretende responder las siguientes preguntas:

¿Qué categorías enmarcan las investigaciones acerca de la discriminación de género en la docencia de las matemáticas con enfoque narrativo?

¿Qué perspectivas de género y de enfoque narrativo sustentan las investigaciones sobre la discriminación de género en la docencia de las matemáticas?

2.2 Estrategia de búsqueda

Las bases de datos escogidas fueron Scopus, Sagepub, Taylor y Francis, SpringerLink, y Redalyc. Además, se realizaron búsquedas manuales en algunos repositorios que contienen tesis de doctorado y maestría como ND LTD, BDTD, ERIC, así como en Google Académico. Por esta razón, se consolidaron los datos de búsqueda en el diagrama PRISMA (2020), referido a nuevas revisiones sistemáticas que incluyen bases de datos y otros métodos de búsqueda. Las búsquedas se realizaron en español e inglés, aunque arrojaron referencias también en portugués. Las palabras claves usadas para la búsqueda se afinaron con el tiempo, de tal forma que permitieran obtener información más concisa sobre el tema. Así, la cadena de palabras clave elegida fue la siguiente: (TITLE-ABS-KEY ((gender OR (“gender discrimination”) OR women) AND (math* OR “mathematics teachers” OR mathematicians OR (“mathematics education”)) AND (narrative* OR discourse)) AND TITLE-ABS-KEY (“higher education” OR prospective OR graduate OR master OR doctorate OR phd))) AND NOT (STEM) y de igual forma, en su respectiva traducción en español cuando fuese necesario.

2.3 Proceso de selección

Los resultados obtenidos se alojaron en el gestor bibliográfico Zotero. Desde allí, se realizó el proceso de cribado del protocolo PRISMA. Cabe aclarar que en ningún momento se empleó algún tipo de inteligencia artificial, de forma directa o indirecta. La Tabla 1 contiene los criterios de inclusión y exclusión que se definieron. A partir de la lectura de títulos y resúmenes, se excluyeron aquellos documentos que estaban relacionados con otros temas. En los criterios de exclusión fue relevante dejar por fuera aquellas investigaciones cuya temática abordara el campo STEM, debido a la inclusión de problemáticas que ocurren en otras

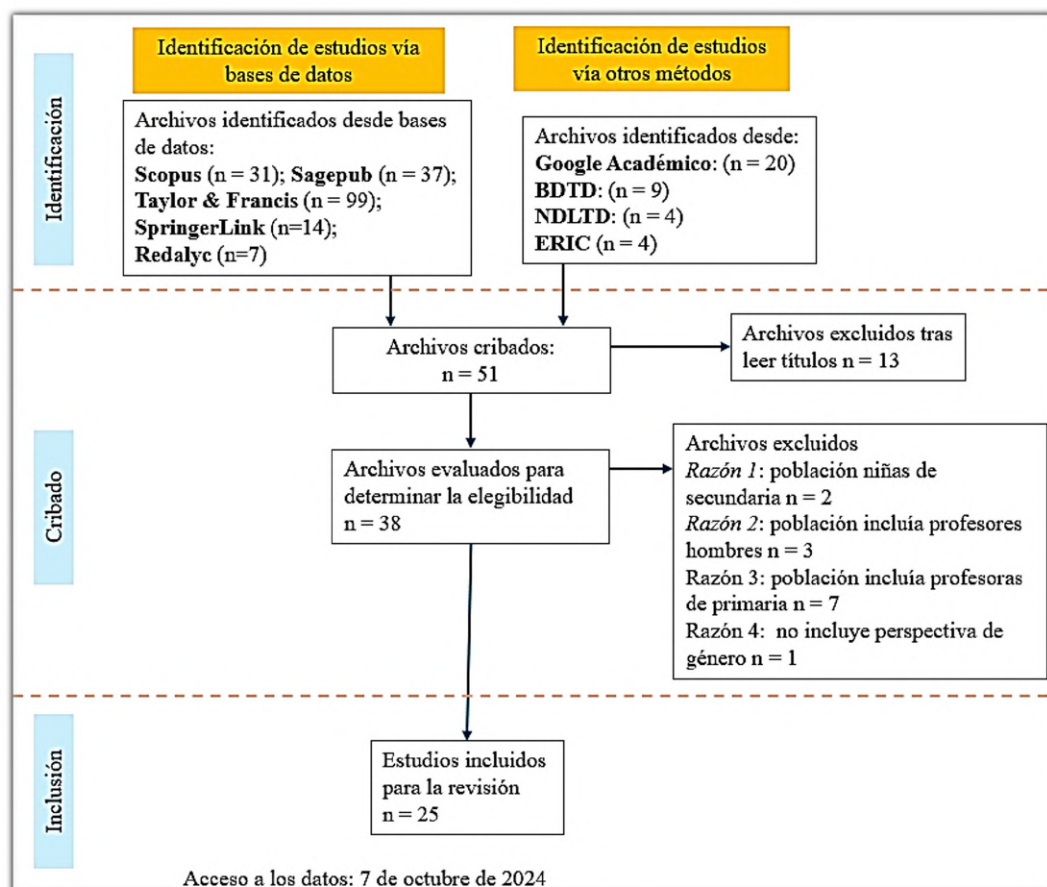
disciplinas (física, química, ciencias, ingeniería) en las que, si bien las matemáticas disciplinares aparecen como un componente relacional, reportan otros horizontes de investigación específicos. Otros casos de exclusión tuvieron que ver con investigaciones que se enfocan en examinar experiencias de profesoras de primaria enseñando matemáticas, debido a las condiciones ocupacionales y contextuales específicas de la educación preescolar y primaria. Además, algunas investigaciones incluían en la población a profesores masculinos que podrían enfatizar diferencias de género; uno de los propósitos lejanos a esta investigación.

En los criterios de inclusión se favorecieron investigaciones cuya población fueran estudiantes de pregrado de licenciatura en matemáticas o matemática pura, debido a que estas pueden incidir en la comprensión de las trayectorias académicas y profesionales en la docencia de las matemáticas, además de ser fuente para comprender la discriminación de género. Además, también se tuvieron en cuenta documentos que incluyeran una perspectiva de género y que fueran del campo de la educación. De los 225 archivos revisados en bases de datos y registros, 51 pasaron al proceso de cribado, luego de proceder a la lectura de títulos y descartar archivos repetidos. En el proceso de cribado, 13 fueron excluidos tras leer el resumen. De los 38 archivos restantes se descartaron 11 archivos, por tratarse en su mayoría de investigaciones con profesoras de primaria. En la Tabla 1 se presenta el proceso de selección donde se resume el proceso para llegar a los 25 archivos elegidos para esta revisión. De estos 25 documentos, 16 corresponden a artículos de investigación, 5 a tesis doctorales y 4 a tesis de maestría. Se decidió incluir una tesis doctoral que se recuperó en libro impreso (González Gutiérrez, 2020), por tratarse de una investigación específica sobre el tema en el contexto colombiano.

Tabla 1 – Criterios de inclusión y exclusión de documentos.

Criterios de inclusión	Criterios de exclusión
• Investigaciones cuya población incluya licenciadas en matemáticas o matemática pura (incluso estudiantes de pregrado en ambos casos). • Investigaciones con perspectiva de género definida o estudios sobre mujeres. • Investigaciones con enfoque narrativo. • Población de profesoras de matemáticas que enseñan matemáticas en bachillerato o universidad (En adelante se hablará de “mujeres matemáticas” para referirse a los criterios incluidos en esta tabla).	• Investigaciones que incluyeran población de áreas STEM (ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas) escolar o universitaria. • Investigaciones que incluyeran experiencias de enseñanza de matemáticas de profesoras de preescolar o básica primaria. • Investigaciones que incluyeran profesores de matemáticas de género masculino. • Investigaciones que incluyeran estudiantes de primaria o secundaria.

Fuente: Elaboración propia.

Figura 1 - Protocolo PRISMA para revisión sistemática.

Fuente: Elaboración propia a partir de PRISMA (2020).

3. RESULTADOS/DISCUSIONES

A continuación, se presenta un listado de los estudios incluidos para la revisión siguiendo los criterios de búsqueda. Para cada referencia se incluye una síntesis de la población objeto de estudio, los métodos empleados y los principales resultados.

- (Stage y Maple, 1996). Siete licenciadas en matemáticas estudiantes de doctorado en educación. Enfoque narrativo y análisis de contenido. Participación en matemáticas influenciada por sus padres; desafío entre elegir un doctorado en matemáticas o uno en educación matemática debido a las posibilidades profesionales futuras.
- (Anderson, 2001). Seis mujeres con doctorado en matemáticas o estudiantes de PHD en matemáticas. Historias de vida, análisis de contenido. Influencia temprana de familiares y profesores; autopercepciones identitarias positivas como factores determinantes.

- (Herzig, 2004). Seis mujeres estudiantes de doctorado en matemáticas. Conversaciones abiertas con entrevistas semiestructuradas. Sentirse invisibles y no reconocidas, falta de apoyo moral en particular de sus profesores de doctorado.
- (Rodd y Bartholomew, 2006). Cinco estudiantes de matemáticas de pregrado. Enfoque narrativo, entrevista narrativa, teoría fundamentada. Considerarse especiales por estudiar matemáticas; influencia de educación escolar; adaptación a través de estereotipos femeninos.
- (Fernandes, 2006). Cinco profesoras de matemáticas de secundaria. Enfoque narrativo, entrevista semiestructurada, análisis de contenido. Experiencias diferenciadas entre profesoras de diferentes generaciones; necesidad de crear redes de solidaridad.
- (De Freitas, 2008). Historia ficticia de una estudiante de matemáticas universitarias. Narrativa ficcional. Normas opresivas sobre el género y las matemáticas pueden volverse contingentes al ser contadas de otra forma.
- (Toney, 2008). Nueve mujeres graduadas de un doctorado en matemáticas. Inducción analítica, entrevistas semiestructuradas. Tres nuevas categorías de experiencia: el “yo” como académico; mi “enseñanza” y el “yo” futuro posible.
- (Herzig, 2010). Doce mujeres graduadas de tres departamentos de matemáticas. Etnografía institucional, entrevistas semiestructuradas. Tres temas sobre la experiencia: importancia de ser y tener modelos a seguir; resistencia contra estereotipos; incapacidad para centrarse en matemáticas.
- (Leavitt, 2010). Una profesora negra de secundaria. Contrahistoria desde la Teoría Crítica de la Raza. Necesidad de conceptualizar un docente integral que reconozca la humanidad colectiva que cada uno experimenta de forma diferente.
- (Solomon, 2012). Dos estudiantes de licenciatura en matemáticas. Autonarración heteroglósica. Individualismo, competitividad y agrupación de hombres pueden confrontar el ingreso de mujeres en las carreras de matemáticas, lo que genera nuevos espacios de identidad.
- (Braathe y Solomon, 2014). Una estudiante de máster en educación matemática. Autonarración heteroglósica. La identidad y la agencia como elementos centrales en la elección de una carrera de matemáticas.
- (Sumpter, 2014). Cuatro mujeres que finalizaron su PhD en matemáticas. Entrevista estructurada, narrativa colectiva. Trayectoria profesional ligada a experiencia académica desde la escuela; limitación de opciones luego de terminar una carrera de matemáticas; penalidad por maternidad como factor decisivo para ascender.
- (Piatek-Jimenez, 2015). Doce mujeres estudiantes de pregrado en matemáticas. Inducción analítica. Estímulo individual y reconocimiento por parte de los demás fundamentales para que las mujeres persistan en una carrera de matemáticas.

- (Carrasco y Sánchez, 2016). Veinte mujeres estudiantes de licenciatura en matemáticas. Análisis de contenido, entrevistas semiestructuradas. Factores que influyen para elegir estudiar una licenciatura en matemáticas: gusto por las matemáticas, apoyo de sus familias y la influencia de sus profesores.
- (Hall y Suurtamm, 2018). Una estudiante de máster en matemáticas. Entrevista semiestructurada, análisis de contenido. Para una mujer ser exitosa en matemáticas implica sobrellevar una carga de ansiedad, miedo y desconfianza sobre sus propias capacidades.
- (Johnson, 2018). Tres profesoras de matemáticas de secundaria. Contrahistoria desde el Feminismo Crítico de la Raza. A pesar de la falta de modelos femeninos negros en matemáticas, las profesoras destacan lo siguiente: actitud positiva hacia las matemáticas, entornos educativos diversos y la influencia de profesores y familias.
- (Castaño Giraldo, 2019). Tres profesoras universitarias: dos en licenciatura y la otra en matemáticas. Estudio de casos múltiples. Posibilidades de ejercer la docencia hacen evidentes jerarquías en las organizaciones académicas con las matemáticas; las mujeres son marginadas de algunas funciones.
- (González Gutiérrez, 2020). Dos mujeres matemáticas y una licenciada en matemáticas. Historia de vida, entrevista semiestructurada. La comunidad matemática colombiana invisibiliza la labor científica de las mujeres matemáticas; el agotamiento laboral no permite su proyección científica.
- (Ataide Pinheiro, 2021). Seis mujeres estudiantes de doctorado en matemáticas. Historia de vida, Teoría del Oprimido de Freire. Las mujeres en las matemáticas deben pasar por un momento de transformación (“piel gruesa”) para no abandonar la carrera o no sufrir mucho. Es más fácil para los hombres crear grupos alrededor de las matemáticas, situación que hace difícil la vida para las mujeres.
- (Aminadab Santos Brito, 2021). Cuatro profesoras de educación matemática. Cartografía. El mundo de las matemáticas constituye un régimen de verdad que provoca un desequilibrio entre hombres y mujeres, que involucra la construcción de identidades femeninas en matemáticas.
- (Audilia de Santi, 2021). Ocho profesoras de matemáticas. Historia Oral. El campo de la Educación Matemática es un espacio propicio para (de)construir las ideas de feminidad; para transgredir y que las mujeres puedan ocupar lugares privilegiados en posiciones jerarquizadas.
- (Alves de Almeida et al., 2022). Cinco profesoras de matemáticas universitarias. Historia Oral. Influencia positiva de familias y profesores; las matemáticas de educación superior no son un espacio exento de comentarios sexistas; penalidad por maternidad al aspirar a estudios más especializados.
- (Mkhize, 2022). Diez mujeres negras estudiantes de doctorado en matemáticas. Investigación cualitativa, teoría de la interseccionalidad. Sistemas interconectados de

opresión siguen influyendo en el ingreso, retención y progreso de mujeres en las matemáticas disciplinares.

- (Toillier, 2022). Una profesora de matemáticas. Historia Oral, narrativa biográfica. La reconstrucción de la biografía de una educadora matemática influyente permite visibilizar a su vez cómo se fue construyendo el campo de la educación matemática en su contexto local.
- (Sumpter, 2023). Nueve mujeres matemáticas que finalizaron un PhD. Análisis narrativo colectivo. Lucha con la autoidentidad en una estructura de género que incluía el poder implícito; ser positivas, a pesar de la exposición a la discriminación, gracias al deseo de trabajar con matemáticas aplicadas.

La investigación sobre la discriminación de género en la docencia de las matemáticas se sustenta en cuatro categorías recurrentes en todos los documentos revisados, aunque las cuatro se entrelazan en las narrativas reportadas en estas investigaciones. A continuación, se realiza una exposición de las ideas generales detectadas para cada una.

3.1 Experiencia

Es la categoría que más se manifiesta en todos los documentos. Son recurrentes las descripciones que se han reportado en la literatura relacionadas con la persistencia o el abandono por parte de mujeres matemáticas en alguno de los estudios para ser matemática o licenciada en matemáticas, o en estudios posgraduales. Estas descripciones se clasifican en 1) influencia de la comunidad, familia, compañeros de estudio o trabajo (Anderson, 2001; Ataíde Pinheiro, 2021; Carrasco y Sánchez, 2016; Fernandes, 2006; Solomon, 2012; Toillier, 2022); 2) visibilidad y orientación (Braathe y Solomon, 2014; Herzig, 2004; Rodd y Bartholomew, 2006; Sumpter, 2023); 3) apoyo moral y estímulo (De Freitas, 2008; Herzig, 2004; Piatek-Jimenez, 2015); 4) tutoría y modelos a seguir (Johnson, 2018); 5) calidad de la enseñanza recibida (González Gutiérrez, 2020; Sumpter, 2014); 6) equilibrio de roles (Aminadab Santos Brito, 2021; Leavitt, 2010) y 7) capacidad intelectual (Hall y Suurtamm, 2018; Stage y Maple, 1996). También se vuelven relevantes las descripciones que están relacionadas con la propia experiencia de ser estudiantes de un posgrado pero, al mismo tiempo, trabajar en proyectos de investigación, lo que propicia inclinarse hacia la investigación independiente; asimismo, la satisfacción de poder enseñar a otros sus aprendizajes, sin mencionar si el salario justificaba sus esfuerzos y, finalmente el equilibrio entre los futuros potenciales alrededor de la carrera que eligieron y sus roles en la vida cotidiana (Herzig, 2010; Audilia de Santi, 2021; Toney, 2008).

En algunas investigaciones se hacen menciones explícitas a actos discriminatorios recibidos en sus lugares de estudio o de trabajo, algunos de estos son los siguientes: discriminación por ser una mujer negra en una universidad con profesores blancos (Mkhize, 2022), sin posibilidades de ejercer o de ascender a mejores puestos, y la experiencia de una profesora negra en un vecindario blanco históricamente racista (Leavitt, 2010). Se reporta malestar a partir de insinuaciones sexuales no deseadas por parte del profesorado, comentarios sexistas públicos sumados a afirmaciones que cuestionan su inteligencia (Herzig, 2010), así como sospechas y rumores de que sus compañeros hombres opinan cosas negativas sobre sus desempeños pero nunca lo expresan en público (Fernandes, 2006). Por otro lado, la negativa prejuiciosa a aceptar a mujeres en clases de matemáticas por tener el prejuicio de que al final del semestre entregan los trabajos tarde y ruegan para que las aprueben (Piatek-Jimenez, 2015),

y las dificultades para ascender en mejores puestos en la jerarquía de una organización en matemáticas (Castaño Giraldo, 2019). La edad también se presenta como un factor que puede ser motivo de burlas entre los estudiantes o limitar oportunidades laborales (Fernandes, 2006; Mkhize, 2022), así como el país de procedencia puede influir en el estatus de las matemáticas aprendidas (Anderson, 2001). Por último, y también en la categoría de experiencia, es recurrente que las mujeres matemáticas tengan que demostrar sus capacidades constantemente, contrario a lo que pueden experimentar los hombres.

3.2 Representación

Las cuestiones identitarias y las formas en que las mujeres matemáticas se representan a sí mismas varían de acuerdo con el contexto del estudio. Cuando la investigación trató con profesoras negras, los estudios indican que estas mujeres reportaron la presencia de estereotipos y prejuicios de género al calificarlas como no aptas para las matemáticas (Mkhize, 2022), así como una doble subrepresentación: como mujeres en un mundo dominado por hombres, y como personas negras en una disciplina blanca (Herzig, 2010). Caso diferente cuando se trató de mujeres caucásicas y estadounidenses, para quienes se reporta una fuerte identidad matemática visible en cinco aspectos: fuerte motivación académica, autosuficiencia, naturaleza competitiva, ir contra la corriente y no identificarse con estereotipos de género (Piatek-Jimenez, 2015). Aunado a esto, algunas mujeres matemáticas indicaron su resistencia a los estereotipos, aspirando a ser reconocidas como hermosas al igual que inteligentes (Anderson, 2001); se identifican como luchadoras en el campo de las matemáticas, con un “cerebro masculino” que encaja en un mundo dominado por hombres (Solomon, 2012) o, simplemente, como mujeres muy inteligentes (Herzig, 2010).

Otro aspecto que se destaca acerca de la representación tiene que ver con las comparaciones propias de participar en un mundo masculinizado. Algunas mujeres matemáticas se autoidentifican con patrones que las distancian de lo que para ellas caracteriza el modo de ser de los hombres en matemáticas. Por esta razón, algunas aspiran a identificarse como menos racionales, menos exactas (Alves de Almeida et al., 2022), nada arrogantes, más solidarias, con más disposición a escuchar —a diferencia de los compañeros masculinos— (Fernandes, 2006), todo esto en un mundo rodeado de una gran colección de “fenómenos” (Herzig, 2010), en el que los matemáticos son vistos como personas locas que tienen dificultades para desenvolverse por sí mismos (Carrasco y Sánchez, 2016). Otras manifestaciones identitarias tienen que ver con las inseguridades al hablar en público, por temor de equivocarse (De Freitas, 2008); se consideran personas ansiosas y perfeccionistas, al tiempo que las personas más tontas de las clases (Hall y Suurtamm, 2018), o bien seres especiales pero invisibles (Rodd y Bartholomew, 2006). Por último, es relevante lo que comunican las mujeres sobre la forma en que sobrellevan múltiples roles: como mujer, madre, esposa, profesora, estudiante, lo que aparece en muchas autoidentificaciones al estar estrechamente relacionado con sus alcances académicos y profesionales.

3.3 Trayectoria

Debido a la inclusión de investigaciones con estudiantes de pregrado, las trayectorias académica y profesional se encuentran conectadas frente a las posibilidades o no de desarrollar una trayectoria esperada o idealizada. En relación con la trayectoria académica, son relevantes las historias de vida de las mujeres matemáticas desde su infancia, para conocer cómo

comenzó su gusto por las matemáticas, que en algunos casos no siempre lo tuvieron definido desde que eran muy niñas, sino que fue una decisión que apareció en sus estudios de secundaria. Sobre la influencia familiar se destaca si contaron o no con el apoyo de sus padres, en especial si ellos también se desempeñaban como profesores o en carreras afines a las matemáticas. En algunos casos fueron presionadas para continuar la profesión que ejercieron sus padres (Ataide Pinheiro, 2021). También se da cuenta de los grupos que conformaban en sus estudios universitarios, si se adaptaban a grupos de hombres o si decidían conformar grupos de mujeres para sobrellevar la carga de estudiar una carrera masculinizada.

En relación con la elección de la carrera, algunas mujeres narraron la importancia que tenía en sus vidas dedicarse a una profesión que les permitiera ayudar a las personas, donde el contacto humano fuera importante. Así, este aspecto fue determinante a la hora de elegir la licenciatura en matemáticas por encima de la carrera de matemáticas (Piatek-Jimenez, 2015). Sobre esta elección, las investigaciones se diferencian entre educación matemática (incluirla primaria y secundaria, y en la universidad a nivel de licenciatura); docente de matemáticas en un departamento de matemáticas, e investigadoras de matemáticas. Algunas de ellas narraron la poca información disponible acerca de las opciones laborales después de graduarse, lo que hizo que se resignaran a la docencia.

En el caso de las mujeres matemáticas que cursaban un doctorado, se reportaron los desafíos que enfrentaron entre seguir una línea de investigación en matemáticas, por las pocas posibilidades de ingreso en un campo dominado por hombres, y la educación matemática, que implicaría una pérdida de estatus (Toney, 2008). La penalidad por maternidad en algunos casos les dificultó la asistencia a eventos y congresos de matemáticas o educación matemática, lo que pudo influir en continuar la trayectoria idealizada. Ante las pocas posibilidades de ingreso a la investigación en matemáticas, algunas decidieron continuar especializándose en matemáticas aplicadas o estadística, campos que hoy en día se comienzan a considerar feminizados (Solomon, 2012). Las diferencias en relación con el estatus son marcadas entre desempeñarse en la docencia escolar, la docencia universitaria y la investigación en matemáticas. En otros casos se reportó la estrategia de poder trabajar en la misma institución donde se graduaron debido a la practicidad de conocer a los futuros compañeros docentes, así como el ambiente laboral.

3.4 Posicionamiento

Las formas de afrontar la discriminación de género en la docencia de las matemáticas reportadas en estas investigaciones pueden ubicarse desde el posicionamiento discursivo (Foucault, 2010); es decir, por las posiciones que a las mujeres matemáticas les es posible ocupar en este dominio. Los mecanismos de afrontamiento reportados en algunas investigaciones se narran a través del uso de metáforas: como tener que desarrollar una “piel gruesa” para manejar la opresión y protegerse de los grupos cerrados de hombres que estudian matemáticas (Ataide Pinheiro, 2021; De Freitas, 2008); o volverse “invisibles y especiales” como forma de protegerse de las miradas, refugiándose en los estereotipos femeninos para no ser cuestionadas o intimidadas, a pesar de ser mujeres matemáticas exitosas (Rodd y Bartholomew, 2006; Solomon, 2012). En otros casos, las mujeres matemáticas se han tenido que desempeñar como ayudantes o secretarías en los departamentos de matemáticas (Castaño Giraldo, 2019), o guardar silencio ante los rumores de acoso o maltrato entre profesores masculinos y otras estudiantes de doctorado (Sumpter, 2014). También, se reporta el aislamiento como mecanismo de protección ante la competitividad de otros compañeros que desean obtener una respuesta satisfactoria al resolver problemas matemáticos (Solomon, 2012).

Otra forma de posicionamiento discursivo tiene que ver con la consolidación de grupos, en especial de mujeres, para estudiar y hacer frente a la competitividad de grupos conformados por hombres. Son las mujeres quienes se caracterizan por organizar y colaborar en estos grupos, lo que las posiciona como personas más sociables, aunque esto tenga consecuencias de estatus al llegar a ser consideradas menos competentes (Ataide Pinheiro, 2021; Solomon, 2012). En otro, las mujeres matemáticas se alegran de no ser tomadas en cuenta para ocupar un cargo laboral mientras estudiaban su doctorado, porque pudieron sacar provecho de esta exclusión y dedicarle más tiempo al estudio (Mkhize, 2022).

3.5 Sobre feminismo y género

En estas investigaciones se presentan varias perspectivas de género que se podrían agrupar en seis tendencias. Primera, la ética del cuidado feminista desarrollada por autoras como Carol Gilligan y Nel Noddings, que defiende las diferencias morales y psicológicas entre hombres y mujeres, y pone a las mujeres en un lugar de privilegio para desarrollar actitudes ligadas al cuidado con respecto a los demás. En este caso, hay investigaciones que se centran en las diferencias de los juicios entre hombres y mujeres, y que influyen en el desempeño de las mujeres matemáticas (Stage y Maple, 1996). Asimismo, se plantea un modelo de cuidado que se esperaría que las mujeres matemáticas experimentaran en sus trayectorias académicas y profesionales (Herzig, 2004, 2010; Leavitt, 2010; Toney, 2008).

Segunda, se observa una influencia del feminismo marxista de autoras como Nancy Hartsock y Heleieth Saffioti, el cual persigue la igualdad de derechos y se posiciona desde las voces de los oprimidos, lo que genera que las mujeres tengan una experiencia privilegiada. Si bien tienen en cuenta que la dominación es común, esto no hace que se universalicen o unifiquen las experiencias. Al considerar que las mujeres matemáticas se encuentran en un dominio patriarcal, sus voces y puntos de vista se vuelven privilegiados para evaluar la inequidad (Anderson, 2001), o denunciar las desigualdades históricas de acceso a la educación entre niñas y niños (Fernandes, 2006).

Tercera, se presenta una tendencia hacia el feminismo de la diferencia mediante el desarrollo de la teoría de la interseccionalidad en aquellas investigaciones en las que el género se cruza con categorías como la clase o la raza, teniendo como referencias a Kimberle Crenshaw, Patricia Hill Collins, incluido el Feminismo Crítico de la Raza con autoras como Theodora Berry y Audrey Thompson. El feminismo de la diferencia persigue otros modos de estar en el mundo, por eso aparecen propuestas que procuran un sujeto docente de matemáticas diferente, solidario, atento a escuchar; un profesor como ser humano (Leavitt, 2010; Toney, 2008). Como cuarta tendencia, se rescata la historiografía feminista de Joan Scott en investigaciones donde las biografías de mujeres matemáticas tienen relevancia como sujetos históricos y permiten su visibilización. Esta tendencia tiene gran repercusión en estos estudios realizados en Brasil (Aminadab Santos Brito, 2021; Fernandes, 2006; González Gutiérrez, 2020; Audilia de Santi, 2021; Toillier, 2022). Quinta, una perspectiva que considera el género como una construcción social y que da cabida a la configuración de relaciones sociales, que funcionan para el análisis de organizaciones y la participación de sus integrantes. En ella se tiene como referencia a las autoras Raewyn Connell y Bjerrum Nielsen; y se examina el caso de mujeres matemáticas al cursar un doctorado (Sumpter, 2014, 2023).

Por último, la perspectiva del género como construcción social performativa ha sido trabajada por Judith Butler, una de las autoras más citadas en el área. Igualmente, se referencia la pedagogía queer de Deborah Britzman, que propone dar sentido a la diferencia sin

subsumir lo diferente, así como alejarse de la imitación del modelo masculino. No obstante, las referencias a la teoría de la performatividad de género son limitadas, y no se evidencia sobre ella un desarrollo significativo. A pesar de la variedad de perspectivas de género, todas se enmarcan en un modelo binario, y en ninguno de los documentos se mencionó la influencia de la orientación sexual en la discriminación de género en la docencia de las matemáticas.

3.6 Narrativa

La mayoría de las investigaciones se basan en entrevistas semiestructuradas o conversaciones abiertas que luego son examinadas por análisis de contenido (Carrasco y Sánchez, 2016; Castaño Giraldo, 2019; Fernandes, 2006; Hall y Suurtamm, 2018; Johnson, 2018; Mkhize, 2022; Piatek-Jimenez, 2015), y algunas se complementan con narrativas colectivas (Sumpter, 2014, 2023) o cartografía (Aminadab Santos Brito, 2021). Otras tomaron como metodología la Historia oral, pues realizaron entrevistas a profundidad que les permitieron centrarse en la subjetividad de las mujeres matemáticas (Alves de Almeida et al., 2022; Ataide Pinheiro, 2021; Audilia de Santi, 2021). También se empleó esta misma metodología, pero sustentada en Kathryn Anderson y Dana Jack, quienes profundizan la entrevista sobre las experiencias de las mujeres en sus propias palabras (Herzig, 2004). Dos investigaciones desarrollaron un ejercicio biográfico de mujeres matemáticas exitosas en ámbitos locales en Colombia (González Gutiérrez, 2020) y Brasil (Toillier, 2022). Las otras dos investigaciones que presentan similitudes en su enfoque narrativo se sustentaron en el espacio dialógico de Bajtín, en el que las entrevistadas recurren a significados pasados, presentes y futuros en un espacio de la entrevista polifónico y heteroglósico (Braathe y Solomon, 2014; Solomon, 2012).

Cada una de las demás investigaciones presenta un enfoque narrativo sustentado en autores reconocidos en el campo, de la siguiente manera: el análisis narrativo de Donald Polkinghorne, que parte de las narrativas de las participantes y progresa hacia temas comunes a través de las narrativas (Anderson, 2001), y combinado con la contrahistoria desde la Teoría Crítica de la raza (Leavitt, 2010). La propuesta de análisis tridimensional de Jean Clandinin y Michael Connelly se enfoca en las dimensiones temporal, social y espacial (Toney, 2008), y está asociada a la auto etnografía y la memoria autobiográfica. La perspectiva de Jerome Bruner —donde el tiempo narrativo fusiona elementos como la historia, la idea, el agente y la ética— crea aperturas hermenéuticas para el lector y el narrador (De Freitas, 2008; Stage y Maple, 1996).

También aparece la etnografía institucional que presta atención a cómo se organiza el entorno organizacional y cómo lo conocen sus participantes, basada en los planteamientos de Marie Campbell, Frances Gregor y Dorothy Smith (Herzig, 2010). El énfasis en las inversiones psíquicas de un individuo en posiciones de sujetos particulares, que permiten ubicar posiciones vulnerables de sí mismos en los hablantes a través de las entrevistas, desde los planteamientos de Wendy Hollway y Tony Jefferson (Rodd y Bartholomew, 2006). Por último, la narrativa ficcional como forma de narrativa que permite imaginarnos a nosotros mismos y a los demás de otra manera, basada en Homi Bhabha (De Freitas, 2008).

4. CONCLUSIONES/ REFLEXIONES / CONSIDERACIONES FINALES

Esta revisión sistemática involucró 25 investigaciones acerca de la discriminación de género en la docencia de las matemáticas con enfoque narrativo. Los resultados y la discusión arrojan que se pueden establecer cuatro categorías que engloban estas investigaciones:

experiencia, representación, trayectoria y posicionamiento. La articulación de estas categorías da cuenta de los obstáculos que desafían las mujeres matemáticas en diferentes momentos de su trayectoria académica o profesional. Debido a que estas investigaciones fueron realizadas en un lapso de casi 30 años, esto sugiere que la discriminación de género en la docencia de las matemáticas continúa siendo un tema que requiere especial atención por parte de la academia. Como se reportó en cada categoría, los actos discriminatorios junto con la presencia de estereotipos y prejuicios continúan estando presentes en el camino que deben atravesar las mujeres matemáticas, no solo en sus procesos de formación, sino también en el ejercicio de la docencia. Visibilizar los obstáculos que enfrentan estas mujeres exhibe prejuicios y conductas que la sociedad debe erradicar para promover una verdadera igualdad entre géneros. Se espera que se continúen produciendo textos en este tema, tanto dentro como fuera de la academia, para reducir las probabilidades de que futuras profesionales sufran esa misma alienación en las aulas de matemáticas

Las investigaciones reportadas en este artículo dan cuenta de los procesos de discriminación en la docencia de las matemáticas que se engloban en la subrepresentación de las mujeres en un campo históricamente masculinizado, solo por el hecho de ser mujeres. Las narrativas de estas mujeres dan cuenta de actos discriminatorios y que atentan contra sus derechos fundamentales, como insinuaciones sexuales no deseadas y comentarios sexistas por parte de sus colegas masculinos. En sus voces hay evidencia de que para ellas es común percibir conductas que apuntan a opiniones negativas sobre sus competencias de parte de hombres en su entorno laboral; opiniones que se “guardan” para espacios privados, pero son lo suficientemente evidentes como para causar malestar a quienes lo viven. También se hacen evidentes las dificultades de acceso a mejores puestos en las jerarquías matemáticas, donde influyen el país de procedencia y la constante demanda por demostrar sus capacidades ante sus compañeros hombres. Cada uno de estos aspectos requieren futuras investigaciones en los países de Latinoamérica para conocer de cerca cómo viven y experimentan las mujeres matemáticas los ambientes docentes e investigativos a nivel local y regional. Esto permitiría fortalecer las redes que puedan contribuir a erradicar la discriminación de género en esta profesión. Además, invita a investigar distintos ámbitos de desempeño de las mujeres matemáticas a nivel escolar, universitario e investigativo en conexión con categorías como la clase o la raza, como se ha investigado principalmente en Estados Unidos o Brasil.

Es de notar que la riqueza de perspectivas de género que sustentan estas investigaciones da cuenta de la influencia que los movimientos feministas y de género han tenido sobre la investigación en la docencia de las matemáticas. Las perspectivas de género presentes pasan por la ética del cuidado feminista, el feminismo marxista, de la diferencia, la historiografía feminista, y el género como construcción social y performativo; todas ellas enmarcadas en un modelo binario. En relación con el enfoque narrativo presente en estas investigaciones, la mayoría de ellas usó el análisis de contenido, y también se observaron varias tendencias dentro de la investigación narrativa, tales como la Historia oral, los estudios (auto)biográficos, el espacio dialógico, las narrativas ficcionales, la autoetnografía, la contrahistoria desde la Teoría Crítica de la raza y la etnografía institucional. Todos estos enfoques desde la investigación narrativa dan cuenta de las múltiples formas en que se han venido explorando las voces de mujeres matemáticas.

Se consideran cuatro recomendaciones para futuras investigaciones sobre el tema. Primera, considerar un énfasis sobre el posicionamiento narrativo que supere la idea de identidad fija y se centre en el análisis del discurso, más que en un ejercicio expositivo sobre el lugar que les es posible ocupar a las mujeres matemáticas desde el posicionamiento discursivo. Segunda, explorar aspectos relacionados con la teoría de la performatividad de género (Butler,

1988, 2006) podría ofrecer exámenes más rigurosos sobre las normas de género y formas en las que nos encarnan y nos hacen actuar; dado que no ha sido tan abordada, favorecería vincular la perspectiva de género con la investigación biográfico-narrativa desde el posicionamiento narrativo. Tercera, explorar otro tipo de discursos como las redes sociales, la televisión, la prensa, el cine, entre otros, donde las mujeres matemáticas sean protagonistas y permitan develar formas de representación y condiciones y posibilidades de acción en otros espacios diferentes a los considerados en estas investigaciones. Cuarto, se hace necesario explorar si la orientación sexual es un componente que contribuye a la discriminación de género en la docencia de las matemáticas y, de ser así, estudiar de qué forma se manifiesta discursivamente. Ninguna de las 25 investigaciones utilizadas reporta información al respecto.

Por último, esta revisión sistemática incita a personas investigadoras en educación matemática de Latinoamérica a centrar la mirada sobre los procesos de discriminación de género; y no solo en la docencia de las matemáticas, sino también a vincular el volumen de investigación que se ha realizado sobre el tema en la escuela y la universidad a nivel regional y mundial. Así, se invita a superar el sesgo que genera centrarse exclusivamente en los resultados cuantitativos en relación con la llamada “brecha de género” en matemáticas, en favor de las voces de niñas, niños, jóvenes y docentes, para comprender desde allí cómo viven y experimentan el mundo de las matemáticas.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

LABM desarrolló la conceptualización, investigación, metodología, redacción, revisión y edición de este artículo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la persona autora correspondiente, LABM, previa solicitud razonable.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alves de Almeida, D., Nogueira de Castro e Almeida, S. P. y Teixeira Amorim, M. M. (2022). Gênero, Discurso e Docência em Matemática no Ensino Superior: Um olhar para o Norte de Minas Gerais. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 36(73), 923-943. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n73a14>
- Aminadab Santos Brito, A. (2021). *Subjetivação e regime de verdade: Percurso que perpassaram as mulheres da educação matemática* [Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Pernambuco].
- Anderson, D. L. (2001). Voices of Women Mathematicians: Understanding Their Success Using a Narrative Approach to Inquiry. *Paper presented at the Annual Conference on Interdisciplinary Qualitative Studies*.
- Astorga Sandoval, C. J. (2016). *Diferencias de género en matemática escolar. Una perspectiva sociocultural* [Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Educación, Pontificia Universidad Católica de Chile].
- Ataide Pinheiro, W. (2021). Dismantling the ‘All-Boys Club’ A Narrative of Contradictions Women Experience in PhD Mathematics Programs: A Freirean Approach. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(3), Artículo em0652. <https://doi.org/10.29333/iejme/11090>
- Audilia de Santi, T. (2021). *Narrativas de vida de educadoras matemáticas paranaenses: Marcas de gênero em um diário de uma feminista* [Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista].

- Binet, A., y Simon, T. (1904). Méthodes nouvelles pour le diagnostic du niveau intellectuel des anormaux. *L'année psychologique*, 11(1), 191-244. <https://doi.org/10.3406/psy.1904.3675>
- Braathe, H. J., y Solomon, Y. (2014). Choosing mathematics: The narrative of the self as a site of agency. *Educational Studies in Mathematics*, 89(2), 151-166. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9585-8>
- Butler, J. (1988). Performative Acts and Gender Constitution: An Essay in Phenomenology and Feminist Theory. *Theatre Journal*, 40(4), 519-531.
- Butler, J. (2006). *Deshacer el género*. Paidós.
- Calvo, G. (2004). *La formación de los docentes en Colombia: estudio diagnóstico*. Universidad Pedagógica Nacional.
- Caro Cárdenas, C. J. (2017). *Posibilidades de acceso a la Universidad Pública Estudio interseccional con perspectiva de género sobre los perfiles de las personas aspirantes y admitidas a la Universidad Nacional de Colombia 2010-2017* [Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Estudios de Género, Universidad Nacional de Colombia].
- Carrasco Baltazar, L., y Sánchez Aguilar, M. (2016). Factores que favorecen la elección de las matemáticas como profesión entre mujeres estudiantes de la Universidad Veracruzana. *Perfiles Educativos*, 38(151), 123-138.
- Castaño Giraldo, J. E. (2019). *Las organizaciones académicas con las matemáticas: Relaciones de género construidas social y culturalmente* [Trabajo de grado para optar al título de Magíster en docencia de las matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional]. Congreso de la República de Colombia. (1933). *Decreto 1972 del 1 de diciembre de 1933*. Por el cual se modifican los Decretos números de 1487 de 1932 y 227 de 1993 (enseñanza secundaria y normalista). <https://www.suin-juriscol.gov.co/viewDocument.asp?id=1379213>
- De Freitas, E. (2008). Mathematics and its other: (Dis)locating the feminine. *Gender and Education*, 20(3), 281-290. <https://doi.org/10.1080/09540250801964189>
- Fennema, E., y Sherman, J. A. (1976). Fennema-Sherman Mathematics Attitudes Scales: Instruments Designed to Measure Attitudes toward the Learning of Mathematics by Females and Males. *Journal for Research in Mathematics Education*, 7(5), 324-326. <https://doi.org/10.2307/748467>
- Fennema, E., y Sherman, J. A. (1977). Sex-Related Differences in Mathematics Achievement, Spatial Visualization and Affective Factors. *American Educational Research Journal*, 14(1), 51-71.
- Fernandes, M. da C. V. (2006). *A inserção e vivência da mulher na docência de matemática: Uma questão de gênero* [Dissertação de Mestrado Federal da Paraíba].
- Foucault, M. (2010). *La arqueología del saber* (2a ed.). Siglo veintiuno editores.
- Gómez Rodríguez, A. (2014). *La estirpe maldita: La construcción científica de lo femenino*. Minerva Ediciones.
- González Gutiérrez, N. R. (2020). *Mujeres en la investigación matemática, escenarios de visibilización*. Editorial UPTC.
- González Gutiérrez, N. R., Sepúlveda Delgado, O. y Espejo Lozano, R. L. (2018). Formación matemática en Colombia: Una mirada desde una perspectiva de género. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación*, 8(2), 251-264. <https://doi.org/10.19053/20278306.v8.n2.2018.7519>
- Hall, J., y Suurtamm, C. (2018). Behind the “Success Story”: Exploring the Experiences of a Woman Mathematics Major. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 18(4), 342-354. <https://doi.org/10.1007/s42330-018-0032-1>
- Herzig, A. H. (2004). ‘Slaughtering this beautiful math’: Graduate women choosing and leaving mathematics. *Gender and Education*, 16(3), 379-395. <https://doi.org/10.1080/09540250042000251506>
- Herzig, A. H. (2010). Women Belonging in the Social Worlds of Graduate Mathematics. *The Mathematics Enthusiast*, 7(2-3), 177-208. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1183>

- Jiménez, A. (2018). Formación de profesores de matemáticas: El caso de la licenciatura más antigua de Colombia. *Praxis & Saber*, 10(22), 45-70.
- Johnson, P. N. (2018). *In Their Own Words: A Narrative Case Study Examining the Counterstories of Black Women in Mathematics Education* [In Partial Fulfillment of the Requirements for the Degree of Doctor of Philosophy in interdisciplinary Learning & Teaching, The University of Texas].
- Leavitt, D. R. (2010). "Meek, but not weak!" *A resilient Black female mathematics teacher composes a purposeful life* [Submitted as partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy in Curriculum and Instruction, University of Illinois].
- Levy, J. (1969). Possible Basis for the Evolution of Lateral Specialization of the Human Brain. *Nature*, 224(5219), 614-615. <https://doi.org/10.1038/224614a0>
- Mkhize, Z. (2022). "They are just women, what do they know?": The lived experiences of African women doctoral students in the mathematics discipline in South African universities. *Transformation in Higher Education*, 7. <https://doi.org/10.4102/the.v7i0.218>
- Moebius, P. (1900). *La inferioridad intelectual de la mujer*. Sempere y Compañía.
- Moher, D., Liberati, A., Tetzlaff, J., Altman, D. G., y The PRISMA Group. (2009). Preferred Reporting Items for Systematic Reviews and Meta-Analyses: The PRISMA Statement. *PLoS Medicine*, 6(7), Article e1000097. <https://doi.org/10.1371/journal.pmed.1000097>
- Monroe, W. S., y Engelbart, M. D. (1931). *A Critical Summary of Research Relating to the Teaching of Arithmetic*. University of Illinois.
- Montero Rojas, E., Moreira Mora, T. E., Zamora Araya, J. A., y Smith Castro, V. (2021). Una nueva mirada teórica y metodológica a diferencias de género en pruebas de matemática: Razonamiento, actitudes psicosociales y modelos multinivel. *Revista Electrónica Educare*, 25(1), 1-21. <https://doi.org/10.15359/ree.25-1.8>
- Montoya Palacio, S. E. (2012). *El papel de las escuelas normales en la feminización de la docencia en la educación básica en Colombia: 2001-2009* [Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Sociología]. Universidad Nacional de Colombia.
- Piatek Jimenez, K. (2015). On the Persistence and Attrition of Women in Mathematics. *Journal of Humanistic Mathematics*, 5(1), 3-54. <https://doi.org/10.5642/jhummath.201501.03>
- PRISMA. (2020). *PRISMA Flow Diagram*. <https://www.prisma-statement.org/prisma-2020-flow-diagram>
- Rodd, M., y Bartholomew, H. (2006). Invisible and special: Young women's experiences as undergraduate mathematics students. *Gender and Education*, 18(1), 35-50. <https://doi.org/10.1080/09540250500195093>
- Sánchez Botero, C. H. (2017). Género y matemáticas. Colombianas pioneras en el campo de las matemáticas. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 41(160), 381. <https://doi.org/10.18257/raccefyn.487>
- Sánchez Serrano, S., Pedraza Navarro, I., y Donoso González, M. (2022). ¿Cómo hacer una revisión sistemática siguiendo el protocolo PRISMA? Usos y estrategias fundamentales para su aplicación en el ámbito educativo a través de un caso práctico. *Bordón. Revista de Pedagogía*, 74(3), 51-66. <https://doi.org/10.13042/Bordon.2022.95090>
- Solomon, Y. (2012). Finding a voice? Narrating the female self in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1-2), 171-183. <https://doi.org/10.1007/s10649-012-9384-z>
- Stage, F. K., y Maple, S. A. (1996). Incompatible Goals: Narratives of Graduate Women in the Mathematics Pipeline. *American Educational Research Journal*, 33(1), 23-51. <https://doi.org/10.3102/00028312033001023>
- Sumpter, L. (2014). Four female mathematicians' collective narrative: Reasons to leave academia. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 28.

- Sumpter, L. (2023). «The Question Is Not Why I Don't Work in a Maths Department; The Question Is Why Should I? » Women Mathematicians' Experiences of Power Relations and Gender Symbols during Their PhD. *Education Inquiry*, 14(4), 427-441.
- Thurstone, L. L., y Thurstone, T. G. (1941). *Factorial studies of intelligence*. The University of Chicago Press.
- Toillier, J. S. (2022). *Lourdes de La Rosa Onuchic, educadora matemática: Um exercício biográfico* [Tese de Doutorado, Universidade Estadual Paulista].
- Toney, A. (2008). *Women with advanced degrees in mathematics in doctoral programs in mathematics education* [In Partial Fulfillment of the Requirements For the Degree of Doctor of Philosophy, University of Northern Colorado].
- Ursini, S. (2014). Afectos y actitudes de género en estudiantes de secundaria de bajo desempeño en matemáticas. *Educación Matemática*, 245-269.
- Walkerdine, V. (1990). Difference, Cognition, and Mathematics Education. *For the Learning of Mathematics*, 10(3), 51-56.
- Walkerdine, V. (1998). *Counting Girls Out. Girls and Mathematics*. RoutledgeFalmer.



INTEGRACIÓN DE MODELACIÓN MATEMÁTICA, INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA Y SITUACIONES DE APRENDIZAJE PARA LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO ESCOLAR

INTEGRAÇÃO DE MODELAGEM MATEMÁTICA, INTELIGÊNCIA ARTIFICIAL GENERATIVA E SITUAÇÕES DE APRENDIZAGEM PARA O ENSINO DO CÁLCULO ESCOLAR

Sebastián Saavedra Messina¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0004-9106-4719>

Adiel Silva Riveros²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0005-5323-5756>

Iván Pérez Vera³

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-2636-6521>

RESUMEN

Este estudio presenta una situación de aprendizaje diseñada para superar obstáculos en la enseñanza de la derivada en la educación secundaria. Basada en el experimento del plano inclinado de Galileo, la propuesta combina el ciclo de modelación de Borromeo (2010) y las fases de situaciones de aprendizaje de Balda (2022), integrando herramientas de inteligencia artificial generativa (IAG). La implementación incluyó actividades experimentales y tecnológicas que ayudaron a los estudiantes a conectar fenómenos físicos con conceptos matemáticos, como la tasa de cambio y la pendiente de la tangente. Los resultados mostraron avances significativos en la comprensión conceptual de la derivada y el desarrollo de habilidades del pensamiento computacional como la abstracción. No obstante, persistieron desafíos en la transición entre representaciones gráficas y analíticas, lo que resalta la importancia de equilibrar el uso de la IAG con estrategias que promuevan la autonomía y el pensamiento crítico.

Palabras clave: Derivada, Modelación matemática, Inteligencia artificial generativa, Situaciones de aprendizaje, Obstáculos.

1 Departamento de Matemática, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Chile. Correo electrónico saavedra2020@umce.cl

2 Departamento de Matemática, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Chile. Correo electrónico adiel.silva2020@umce.cl

3 Departamento de Matemática, Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación. Chile. Correo electrónico ivan.perez@umce.cl



RESUMO

Este estudo apresenta uma situação de aprendizagem projetada para superar os obstáculos no ensino da derivada no ensino médio. Baseada no experimento do plano inclinado de Galileu, a proposta combina o ciclo de modelagem de Borromeo (2010) e as fases das situações de aprendizagem de Balda (2022), integrando ferramentas de inteligência artificial generativa (IAG). A implementação incluiu atividades experimentais e tecnológicas que ajudaram os estudantes a conectar fenômenos físicos a conceitos matemáticos, como a taxa de variação e a inclinação da tangente. Os resultados mostraram avanços significativos na compreensão conceitual da derivada e no desenvolvimento de habilidades do pensamento computacional como a abstração. No entanto, persistiram desafios na transição entre representações gráficas e analíticas, o que destaca a importância de equilibrar o uso da IAG com estratégias que promovam a autonomia e o pensamento crítico.

Palavras-chave: Derivada, Modelagem matemática, Inteligência artificial generativa, Situações de aprendizagem, Obstáculos.

1. INTRODUCCIÓN

El aprendizaje del cálculo escolar en la educación secundaria chilena enfrenta desafíos complejos que afectan tanto a estudiantes como a docentes. Incorporado como parte del programa diferenciado de educación secundaria en los dos últimos años, el electivo “Límites, Derivadas e Integrales” busca promover una comprensión sólida de conceptos fundamentales del cálculo mediante el uso de tecnologías digitales, ejemplos contextualizados y actividades colaborativas (MINEDUC, 2019, 2021). Sin embargo, la enseñanza de tópicos como la derivada continúa presentando barreras significativas que dificultan su aprendizaje.

1.1 Obstáculos en la enseñanza y aprendizaje del cálculo

La investigación en educación matemática ha documentado numerosos problemas en el aprendizaje del cálculo, particularmente en torno al concepto de derivada. Este tópico requiere la integración de diversas perspectivas: gráfica, como la pendiente de una tangente a una curva; analítica, como el límite del cociente incremental; y puntual, en términos de cambios en intervalos específicos (Sánchez *et al.*, 2008). Aunque muchos estudiantes logran aplicar reglas de derivación, su comprensión del concepto sigue siendo limitada (Mercapide, 2018). Este fenómeno evidencia una brecha entre la capacidad operativa y el entendimiento conceptual, lo cual genera dificultades para conectar la derivada con su significado geométrico y su definición analítica (Sánchez *et al.*, 2008).

Los principales obstáculos asociados al aprendizaje del cálculo incluyen la dificultad para comprender la derivada como razón de cambio, la abstracción requerida para su conceptualización a partir del límite, y las barreras en la operación y simplificación de expresiones algebraicas (Gutiérrez *et al.*, 2017). Asimismo, muchos estudiantes carecen de flexibilidad para adaptar estrategias y enfrentar problemas que involucran la interpretación gráfica o la tabulación de funciones. Estas dificultades son reflejo de un problema más amplio: el reto de integrar herramientas matemáticas avanzadas en el currículo de enseñanza secundaria.

En Chile, el programa diferenciado busca superar estas barreras mediante una progresión estructurada en cuatro unidades. Inicialmente, los estudiantes trabajan con funciones como herramientas para modelar situaciones de cambio, lo que permite explorar su composición y reversibilidad. Posteriormente, abordan el concepto de límite a través de patrones y regularidades, lo que facilita una aproximación intuitiva. En la tercera unidad, se introduce la

derivada como razón de cambio y pendiente de la tangente, aplicándola en contextos geométricos, económicos y científicos. Finalmente, la integral se presenta como el proceso inverso de la derivada, con énfasis en aplicaciones prácticas, como el cálculo de áreas bajo curvas (MINEDUC, 2019, 2021).

1.2 La modelación matemática como metodología de enseñanza

La modelación matemática ha demostrado ser una metodología efectiva para abordar conceptos abstractos como los presentes en el cálculo, ya que vincula el conocimiento matemático con fenómenos reales. Este enfoque no solo facilita la contextualización de los conceptos, sino que también promueve competencias críticas y prácticas en los estudiantes (Mejía *et al.*, 2022). A través de etapas como la contextualización, la matematización y la interpretación de resultados, la modelación permite a los estudiantes construir modelos matemáticos relevantes para su entorno profesional y personal (Molina, 2017).

La implementación de tareas contextualizadas incrementa la motivación y el rendimiento académico al evidenciar la aplicabilidad de la matemática en la vida cotidiana (Bravo y Rodríguez, 2020). Además, estudios en contextos de ingeniería y arquitectura han destacado que la modelación fortalece el aprendizaje significativo al conectar los contenidos programáticos con problemas reales de las disciplinas (Peña y Morales, 2016). Este enfoque fomenta el desarrollo de competencias sociales y el trabajo colaborativo, así como la capacidad de tomar decisiones informadas en situaciones complejas.

Mejía *et al.* (2022) destacan que la modelación matemática promueve un desarrollo equitativo de habilidades en áreas como la interacción, la resolución de problemas y la interpretación de resultados. Estos beneficios subrayan la necesidad de un cambio gradual en las concepciones pedagógicas de los docentes y los estudiantes, hacia un enfoque más participativo y contextualizado. Para que la modelación sea efectiva, es crucial que los docentes experimenten este proceso durante su formación, de forma que identifiquen dificultades comunes y oportunidades para integrar tecnologías educativas (Zaldívar Rojas *et al.*, 2017).

1.3 Inteligencia artificial generativa en la educación matemática

La integración de la Inteligencia Artificial Generativa (IAG) en la educación matemática abre nuevas oportunidades para superar los desafíos en el aprendizaje del cálculo. La IAG, definida como un subcampo de la Inteligencia Artificial (IA) que genera contenido nuevo a partir de datos existentes, ha demostrado su utilidad en contextos educativos al personalizar el aprendizaje, proporcionar retroalimentación inmediata y generar ejemplos adaptados a las necesidades de los estudiantes (García *et al.*, 2024). Estas herramientas pueden facilitar la comprensión de conceptos complejos, como límites y derivadas, al ofrecer explicaciones detalladas y ejemplos prácticos (Wardat *et al.*, 2023).

Experiencias previas han mostrado que la IAG puede abordar problemas matemáticos de diversa índole, desde el cálculo de áreas hasta la resolución de ecuaciones y teoremas (Borba y Balbino, 2023). Sin embargo, estas tecnologías no están exentas de limitaciones. Si bien la IAG puede acelerar el aprendizaje, existe el riesgo de que los estudiantes dependan excesivamente de estas herramientas, y, por tanto, se reduzca su esfuerzo cognitivo (Santos *et al.*, 2023). Además, su eficacia en la resolución de problemas complejos aún está en desarrollo, lo que resalta la necesidad de una implementación cuidadosa y complementaria.

A pesar de estas limitaciones, la IAG tiene un gran potencial para enriquecer la enseñanza del cálculo. Puede complementar la modelación matemática al ofrecer recursos personalizados y dinámicos que facilitan la transición entre las distintas etapas del aprendizaje.

1.4 Problemática y objetivo de la investigación

En vista de los obstáculos documentados en el aprendizaje del cálculo escolar, esta investigación propone diseñar una situación de aprendizaje que aborde estas barreras desde un enfoque innovador. La propuesta combina la modelación matemática como metodología central con herramientas de IAG, aprovechando sus capacidades para personalizar y enriquecer el aprendizaje. El objetivo es desarrollar una experiencia educativa que permita superar las dificultades conceptuales y operativas en torno a la derivada, al tiempo que fomente competencias críticas y prácticas en los estudiantes.

La problemática de esta investigación radica en cómo diseñar una situación de aprendizaje que integre estos enfoques y herramientas para responder a las necesidades del cálculo escolar en el contexto chileno. Este diseño buscará no solo facilitar la comprensión de conceptos abstractos, sino también conectar la matemática con aplicaciones reales y relevantes para los estudiantes, para contribuir a una formación más integral y significativa.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS/ ELEMENTOS CONCEPTUALES/ ELEMENTOS HISTÓRICOS

2.1 La modelación matemática como enfoque metodológico

La modelación matemática es un proceso bidireccional que conecta el mundo real con las matemáticas, pues permite traducir fenómenos no necesariamente matemáticos a conocimiento matemático. Este enfoque ha demostrado ser una herramienta didáctica y metodológica eficaz en la construcción del conocimiento, ya que promueve aprendizajes significativos al relacionar los conceptos matemáticos con la realidad del estudiante (Huinchahue *et al.*, 2018).

En el aula, la modelación se interpreta de diversas formas: desde una estrategia para enseñar conceptos específicos hasta un catalizador de construcción colectiva del conocimiento matemático. Según Huinchahue *et al.* (2018), este proceso busca orientar el aprendizaje desde la realidad del estudiante hacia la comprensión de nociones fundamentales. Álvarez *et al.* (2024) proponen un esquema de modelación en cinco fases: planteamiento de situaciones del mundo real, problematización e interpretación, diseño de un modelo matemático, resolución matemática y validación de resultados, y finalmente, la comunicación del proceso y los hallazgos.

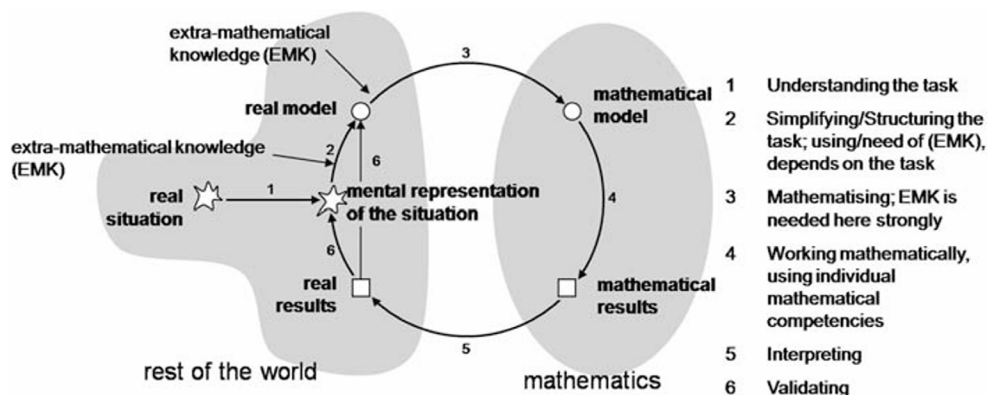
Existen múltiples perspectivas relacionadas con la modelación en contextos educativos. Villarreal y Mina (2013) describen enfoques como el uso de problemas reales para motivar el aprendizaje, el desarrollo de proyectos seleccionados por la persona docente o los estudiantes, y la resolución de problemas diseñados colectivamente. Por otro lado, Kaiser y Sriraman (2006) presentan una clasificación que incluye perspectivas realistas, contextuales, educativas, sociocríticas, epistemológicas y cognitivas, cada una con un énfasis particular en los objetivos de aprendizaje y la interacción entre las matemáticas y el contexto.

Borromeo (2010) desarrolló un ciclo de modelación que detalla las etapas cognitivas implicadas, desde la representación mental inicial de una situación real hasta la interpretación y validación de resultados matemáticos. Este ciclo enfatiza la importancia de la matematisación como puente entre el conocimiento extramatemático y el desarrollo de un modelo matemático, y destaca la relevancia de validar los resultados en el contexto original. El ciclo de modelación considera un desarrollo extramatemático y matemático, así como la transición entre estos. La autora propone los siguientes procesos:

- Entender la tarea: transición de una situación real a una representación mental de la situación.
- Simplificación y estructuración de la tarea: transición de una representación mental de la situación a un modelo real.
- Matematización: transición de un modelo real a un modelo matemático.
- Trabajo matemático: transición de un modelo matemático a resultados matemáticos.
- Interpretación: transición de los resultados matemáticos a resultados reales.
- Validación: transición de los resultados reales a una representación mental o un modelo real.

Es importante destacar que el ciclo de modelación puede experimentarse de manera flexible, sin necesidad de seguir estrictamente la secuencia presentada.

Figura 1- Ciclo de modelación con base en la perspectiva cognitiva.



Fuente. Adaptado de Borromeo (2010, p. 104)

Este enfoque no solo mejora la comprensión matemática, sino que también promueve habilidades críticas como el análisis, la toma de decisiones y la comunicación efectiva de resultados. Así, la modelación matemática se posiciona como una metodología esencial para

abordar problemas educativos y preparar a los estudiantes para enfrentar retos complejos de manera integral.

2.2 Inteligencia artificial generativa como herramienta del pensamiento computacional

El pensamiento computacional (PC) es un enfoque estructurado que permite abordar problemas complejos mediante habilidades como la abstracción, descomposición, identificación de patrones y diseño de algoritmos (Iglesias y Bordignon, 2020). Estas competencias—esenciales en el mundo digital— son pilares del desarrollo de habilidades del siglo XXI, dado que fomentan interacciones creativas y sistemáticas con tecnologías avanzadas, incluida la IAG (Roberts, 2019).

La IAG, subcampo de la IA, emplea modelos entrenados con datos previos para generar contenido adaptado a diversas situaciones. Herramientas como ChatGPT procesan texto y generan respuestas contextuales y coherentes; maximizan la capacidad de las máquinas para procesar información de manera rápida y precisa (García *et al.*, 2024). En el ámbito educativo, la IAG facilita la personalización del aprendizaje al proporcionar explicaciones detalladas, ejemplos adaptados y retroalimentación inmediata, por lo que fortalece habilidades como la visualización y la conexión entre conceptos abstractos y concretos (Wardat *et al.*, 2023).

El vínculo entre la IAG y el PC se manifiesta en la forma en que ambas potencian habilidades como la resolución de problemas y el diseño algorítmico. Según Curi *et al.* (2024), la interacción con herramientas generativas requiere estrategias como la ingeniería rápida o prompt engineering, que fomenta habilidades clave del PC, como la abstracción y la anticipación de resultados. Además, la IAG amplifica el alcance del PC al facilitar la transición entre diferentes representaciones y formatos de información, particularmente útil para abordar conceptos complejos como la derivada.

Sin embargo, su implementación en el aula debe ser cuidadosa para evitar dependencias que limiten el pensamiento crítico y la autonomía de los estudiantes (Borba y Balbino, 2023). Integrada reflexivamente, la IAG complementa metodologías como la modelación matemática; se trata de un recurso educativo valioso y adaptado a los desafíos del mundo actual.

2.3 Situaciones de aprendizaje y una estructura para su diseño.

Las situaciones de aprendizaje son actividades diseñadas para empoderar a los estudiantes en la construcción autónoma y responsable de competencias genéricas y específicas, dentro de un entorno colaborativo y comunicativo. En este enfoque, el estudiante es reconocido como un sujeto activo y protagonista de su aprendizaje, capaz de investigar, proponer soluciones, aceptar desafíos y trabajar en equipo de manera creativa. El rol del profesor, en cambio, se centra en actuar como mediador del conocimiento, guiando y facilitando el proceso en un marco flexible y adaptado a las necesidades del estudiante. Estas situaciones fomentan la discusión y construcción de saberes, y promueven el aprendizaje significativo y el desarrollo de competencias que responden al diseño curricular (Feo Mora, 2018).

En el contexto de la educación matemática, las situaciones de aprendizaje adquieren relevancia al articular estrategias didácticas que promueven la participación activa y el aprendizaje significativo. Balda (2022) establece que el diseño de estas situaciones debe partir de la problematización del saber y destaca su importancia como punto inicial en el desarrollo de

propuestas pedagógicas. Este enfoque reconoce la necesidad de estructurar las situaciones en fases que guíen el proceso de aprendizaje de manera progresiva y significativa.

2.4 Fases de una situación de aprendizaje

La estructura propuesta por Balda (2022) comprende cinco fases fundamentales para construir el conocimiento matemático de manera efectiva (ver Figura 1). Estas fases aseguran un proceso progresivo que integra contextos significativos, fomenta la interacción y garantiza la interiorización del conocimiento.

- **Introducción:** Reconstruir un contexto significativo para conectar un objeto matemático con la realidad del estudiante, mediante la selección de insumos y preguntas que despierten su interés.
- **Exploración:** Facilitar que el estudiante manipule, clasifique y organice información, fomentando discusiones y reflexiones que amplíen su comprensión.
- **Procedimental:** Integrar los conocimientos previos del estudiante, razonamientos y condiciones del entorno en la formulación de hipótesis y propuestas iniciales de solución.
- **Consolidación:** Evaluar y validar las construcciones realizadas, asegurando que el conocimiento se institucionalice en un marco colectivo, para promover la reflexión sobre las soluciones y su aplicabilidad.
- **Ejercitación:** Interiorizar reglas, procedimientos y algoritmos mediante su aplicación de forma significativa y práctica en diversos contextos.

2.5 Articulación, modelación, inteligencia artificial y situación de aprendizaje

La integración de la modelación matemática, la IAG y las situaciones de aprendizaje ofrece un enfoque pedagógico integral para abordar la enseñanza de conceptos matemáticos complejos. Basándonos en el ciclo de modelación de Borromeo (2010), nuestro diseño adoptará un proceso que conecta fenómenos del mundo real con el conocimiento matemático, por lo que facilita transiciones flexibles entre etapas como la matematización, la interpretación y la validación. Este enfoque permitirá a los estudiantes desarrollar habilidades críticas como la resolución de problemas y la abstracción.

Asimismo, incorporaremos las fases estructuradas propuestas por Balda (2022) para situaciones de aprendizaje: introducción, exploración, procedimental, consolidación y ejercitación. Estas fases garantizarán un aprendizaje progresivo, contextualizado y colaborativo para el estudiante, mediante la conexión de su realidad con los conceptos matemáticos.

La IAG se integrará como una herramienta del PC, proporcionando ejemplos personalizados, visualizaciones dinámicas y retroalimentación inmediata. Esto enriquecerá las fases de exploración y consolidación, donde los estudiantes podrán analizar datos y validar resultados de manera interactiva y adaptada.

En síntesis, diseñaremos una situación de aprendizaje de modelación matemática que combine la estructura de las fases de Balda (2022) con las etapas del ciclo de Borromeo (2010). Este diseño integrará actividades con herramientas de IAG, de forma que potenciará la comprensión matemática y promoverá el aprendizaje significativo en un entorno flexible y tecnológicamente avanzado. El desarrollo metodológico de esta propuesta se abordará en detalle en el siguiente apartado.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

La presente investigación se desarrollará bajo un enfoque cualitativo utilizando la metodología de investigación-acción, con el objetivo de diseñar e implementar una situación de aprendizaje que integre herramientas de IAG para abordar los obstáculos en la enseñanza de la derivada. Según Pérez van Leenden (2019), la investigación-acción permite articular la práctica profesional con la reflexión crítica en un proceso iterativo que busca transformar el entorno educativo. Este enfoque es particularmente adecuado para el contexto educativo, ya que facilita la mejora de prácticas a través de ciclos de planificación, acción, observación y reflexión (Pérez y Salazar, 2024).

3.1 Metodología cualitativa

La investigación adoptará un enfoque cualitativo que permitirá comprender en profundidad las experiencias y perspectivas de los estudiantes. Este enfoque se centrará en interpretar cómo los participantes interactúan con la situación de aprendizaje diseñada, sin manipular artificialmente el entorno, lo cual permitirá realizar un análisis holístico de las interacciones y los significados que emerjan (Hernández *et al.*, 2006). Además, se recopilarán datos sobre cómo los estudiantes experimentan y conceptualizan los fenómenos abordados en la actividad (Sánchez, 2005).

3.2 Investigación-acción

La investigación-acción se implementará como un proceso iterativo que combinará la planificación, acción, observación y reflexión, para diseñar y evaluar una situación de aprendizaje innovadora. Este enfoque permitirá integrar herramientas tecnológicas y fundamentos pedagógicos para transformar las prácticas educativas en torno al cálculo escolar (Pérez y Salazar, 2024). Se seleccionará una actividad discursiva del currículo escolar, basada en el experimento del plano inclinado de Galileo Galilei, que será adaptada a un enfoque experimental para explorar conceptos como velocidad, aceleración y derivada. A partir de esta adaptación, se diseñará una situación de aprendizaje estructurada que será posteriormente implementada y analizada.

3.3 Diseño del instrumento

La situación de aprendizaje constará de cuatro actividades basadas en el experimento del plano inclinado de Galileo, siguiendo los principios del ciclo de modelación de Borromeo (2010) y las fases propuestas por Balda (2022) para situaciones de aprendizaje. Cada actividad estará diseñada para fomentar el aprendizaje progresivo de la derivada, conectando conceptos

físicos y matemáticos mediante herramientas tecnológicas como el software Tracker y Chat-GPT (ver Tabla 1).

Tabla 1. Resumen de actividades de la situación de aprendizaje.

Actividad	Objetivo	Pregunta
Actividad 1	Comprender el experimento del plano inclinado de Galileo Galilei y sus conclusiones.	¿En qué consiste el experimento del plano inclinado de Galileo Galilei? ¿Cuáles son sus conclusiones?
Actividad 2	Recrear el experimento del plano inclinado y analizar el fenómeno con base en sus modelos.	¿Cómo recrear el experimento del plano inclinado? ¿Qué conclusiones se obtienen con base en el experimento y sus modelos?
Actividad 3	Relacionar la velocidad instantánea con la derivada de la posición respecto al tiempo en el contexto del experimento.	¿Cómo se relaciona la velocidad instantánea de la bola con la derivada de su posición respecto al tiempo?
Actividad 4	Resolver problemas que involucren la derivada.	¿Cómo se aplica la derivada para resolver problemas que involucren objetos en movimiento?

Fuente: Elaboración propia.

3.4 Implementación y recolección de datos

La implementación de la situación de aprendizaje se llevará a cabo en un curso de tercer año de enseñanza media, específicamente en el electivo “Límites, Derivadas e Integrales”. La muestra estará compuesta por estudiantes del curso completo, quienes trabajarán en equipos durante las actividades propuestas. El proceso de implementación se desarrollará en tres sesiones consecutivas de 90 minutos cada una, distribuidas de la siguiente manera:

Primera sesión: Análisis teórico y recreación del experimento del plano inclinado (actividades 1 y parte de la 2).

Segunda sesión: Análisis práctico del experimento mediante modelación matemática (actividades 2 y parte de la 3).

Tercera sesión: Relación entre la derivada y el experimento, y resolución de problemas aplicados (actividades 3 y 4).

Durante la implementación se recopilarán datos del curso, incluyendo registros escritos de las respuestas de los estudiantes, observaciones en notas de campo y reflexiones obtenidas mediante interacciones informales.

En este artículo, se emplea un enfoque diferenciado para el análisis de los resultados. En el apartado “Resultados de implementación de situación de aprendizaje”, se consideran las observaciones y aprendizajes recopilados de todos los grupos participantes. Por otro lado, en los apartados “Análisis de la situación de aprendizaje con base en el ciclo de modelación

propuesto por Borromeo (2010)” y “Análisis de la situación de aprendizaje con base en la superación de obstáculos y la incorporación de la IAG como herramienta del pensamiento computacional”, dicho análisis se enfoca exclusivamente en un grupo de trabajo seleccionado. Este enfoque responde a la necesidad de realizar un análisis más detallado y profundo, observando cómo dicho grupo vivió y transitó por el ciclo de modelación de Borromeo, así como su experiencia frente a los obstáculos del aprendizaje de la derivada y el uso de la IAG como herramienta complementaria.

3.5 Análisis de los datos

El análisis se centrará en las respuestas de un grupo específico de estudiantes, evaluando su capacidad para conectar el plano inclinado con conceptos matemáticos como velocidad, aceleración y derivada. Se analizarán la precisión y coherencia de las representaciones matemáticas y físicas generadas, así como la transferencia de estos conceptos a problemas aplicados, destacando cómo integran la teoría en contextos reales o simulados. Además, se incorporarán observaciones de las actividades, notas de campo y las interacciones entre estudiantes y facilitador, para ofrecer una visión integral del proceso de aprendizaje y sus avances.

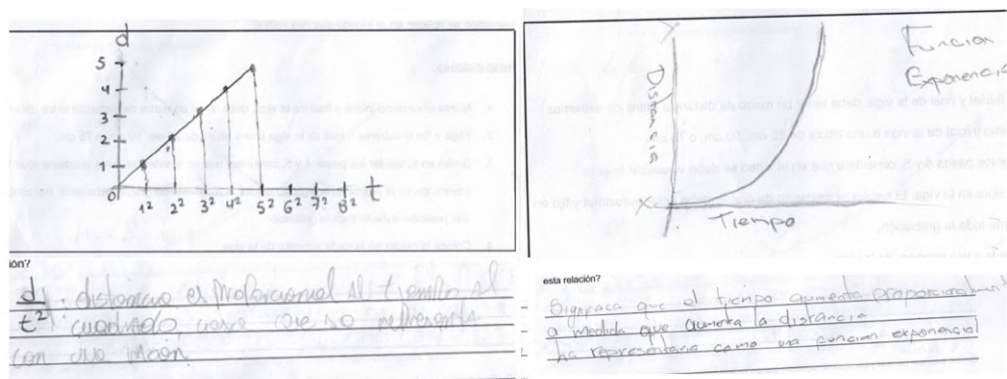
4. RESULTADOS

4.1 Resultados de implementación de situación de aprendizaje

Actividad 1: Comprensión del Experimento de Galileo. La primera actividad introdujo el experimento de Galileo, donde los estudiantes reflexionaron sobre la relación entre distancia y tiempo en un plano inclinado. Esta fase inicial buscaba activar conocimientos previos y conectar los conceptos matemáticos con el fenómeno físico. Las respuestas indicaron que tres grupos reconocieron que “si el tiempo o la distancia aumenta, la otra también debe aumentar”, aunque de manera limitada, ya que no lograron interpretar completamente la proporcionalidad cuadrática entre las variables. Otros grupos representaron la relación como lineal o incluso exponencial, lo cual refleja confusiones conceptuales.

Un ejemplo clave de estas confusiones es que cinco grupos utilizaron una función lineal para representar la relación entre distancia y tiempo, mientras que dos optaron por una función exponencial. Este hallazgo evidencia que, aunque la mayoría de los estudiantes logró establecer relaciones entre las variables, solo unos pocos identificaron correctamente el carácter cuadrático del movimiento en el plano inclinado (ver Figura 2).

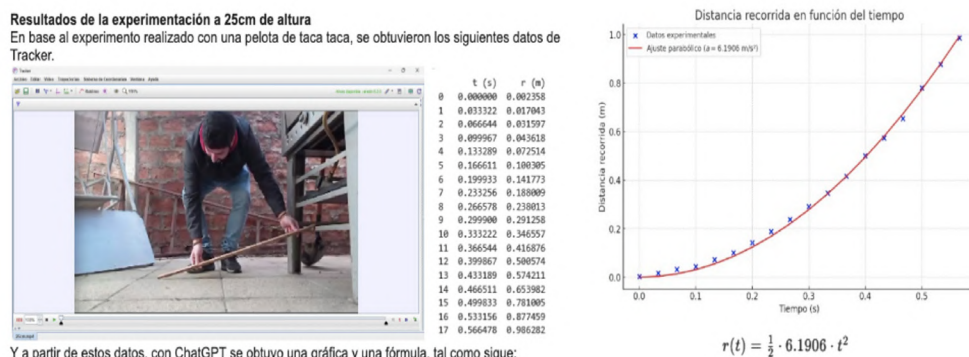
Figura 2-Respuestas de los estudiantes a la actividad 1.



Fuente: Evidencia de los estudiantes.

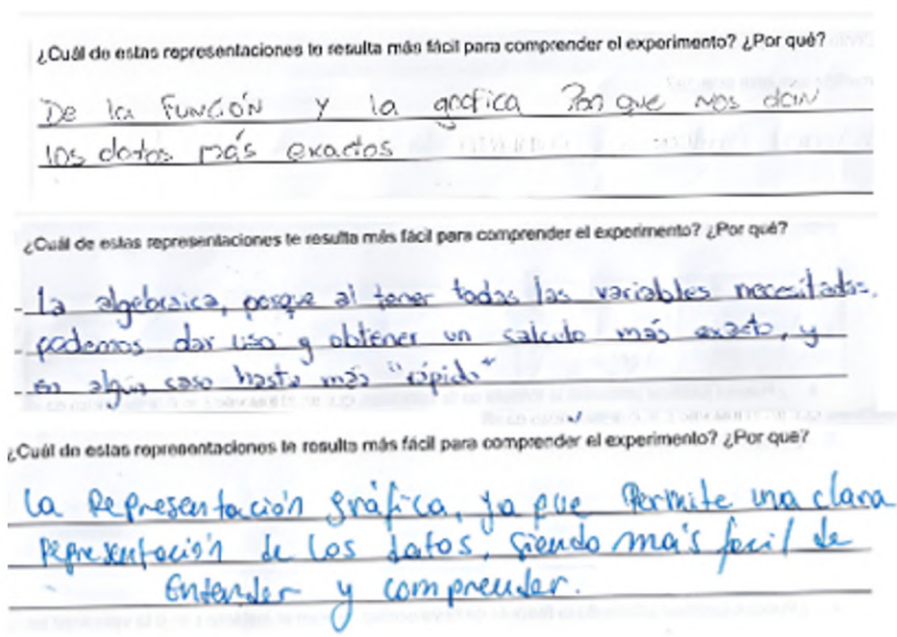
Actividad 2: Reproducción y Modelación del Experimento. En esta actividad, los estudiantes reprodujeron el experimento de Galileo, recolectaron datos utilizando el software Tracker y exploraron representaciones gráficas y algebraicas generadas con ChatGPT. Todos los grupos lograron predecir correctamente la distancia recorrida en un tiempo específico, utilizando las funciones cuadráticas generadas. Este logro refleja un avance significativo en la comprensión del fenómeno y en la capacidad de los estudiantes de aplicar modelos matemáticos al análisis del movimiento (ver Figura 3).

Figura 3-Resultados de la experimentación de la situación de aprendizaje.



Fuente: Evidencia de los estudiantes.

Respecto a la utilidad de las representaciones, cuatro grupos destacaron que las gráficas facilitaron su comprensión del experimento, debido a su claridad visual y su capacidad para representar tendencias. Otros dos grupos señalaron que la representación algebraica les permitió calcular de manera precisa valores específicos, lo cual demuestra una transición hacia un pensamiento más analítico. Un grupo indicó que ambas representaciones (gráfica y algebraica) son complementarias, mostrando una integración más completa de las herramientas matemáticas (ver Figura 4).

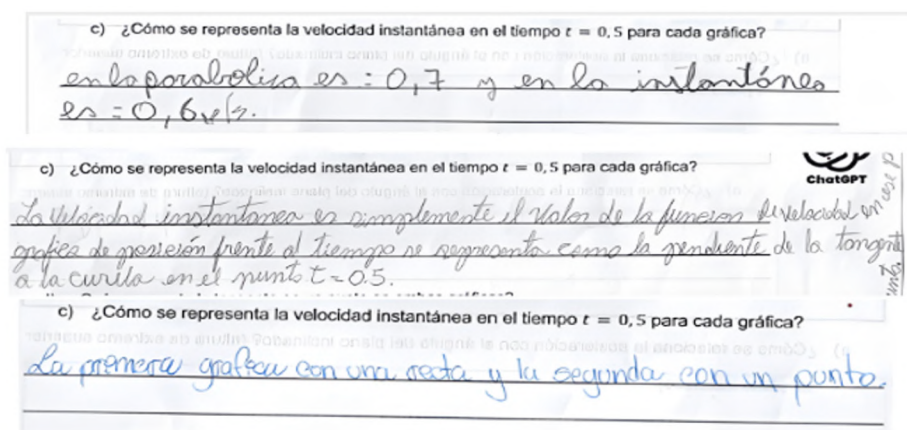
Figura 4-Respuestas de los estudiantes a la actividad 2.

Fuente: Evidencia de los estudiantes.

Actividad 3: Relación entre Velocidad y Derivada. En esta etapa, los estudiantes abordaron el concepto de velocidad instantánea como derivada de la posición respecto al tiempo. A través del cálculo de velocidades promedio en intervalos cada vez más pequeños, los estudiantes se aproximaron al concepto de límite y derivada. Sin embargo, surgieron dificultades en la conexión entre las gráficas y la interpretación conceptual. Aunque todos los grupos reconocieron que la velocidad aumenta con el tiempo, algunos tuvieron problemas para asociar la velocidad instantánea con la pendiente de la tangente en la gráfica de posición-tiempo.

Las respuestas a la pregunta sobre cómo se representa la velocidad instantánea mostraron que cuatro grupos entendieron correctamente que, en la gráfica de posición-tiempo, la tangente representa la velocidad en un punto dado. Sin embargo, otros grupos ofrecieron respuestas imprecisas; por ejemplo, identificar la velocidad instantánea únicamente como un valor numérico o representarla como una recta completa en lugar de una tangente (ver Figura 5).

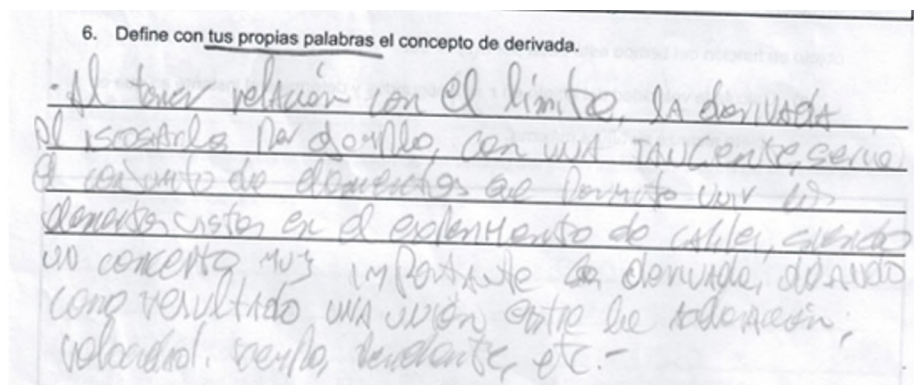
Figura 5-Respuestas de los estudiantes a la actividad 3.



Fuente: Evidencia de los estudiantes.

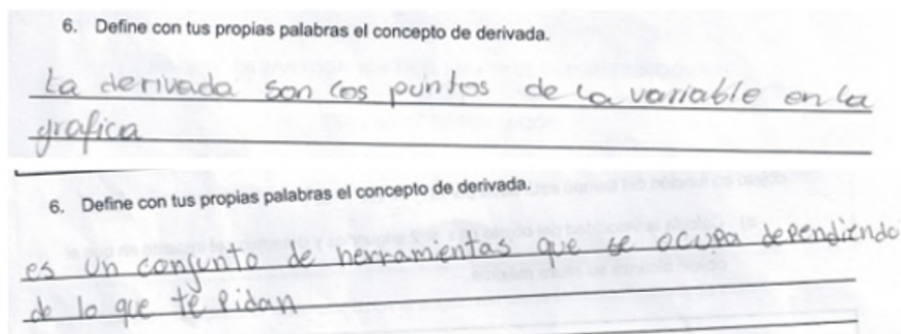
Actividad 4: Conceptualización de la Derivada. La última actividad se centró en la definición del concepto de derivada, basada en las experiencias previas y el uso del modelo del plano inclinado. Las respuestas de los estudiantes reflejan diferentes niveles de comprensión. Así, dos grupos definieron la derivada como la tasa de cambio, mientras que otros dos la asociaron con la pendiente de la tangente a una curva. Estas respuestas demuestran una comprensión adecuada del concepto desde perspectivas clave: cambio instantáneo y representación gráfica (ver Figura 6).

Figura 6-Respuestas del grupo de interés a la actividad 4.



Fuente: Evidencia de los estudiantes.

Sin embargo, otros grupos ofrecieron definiciones menos precisas o desconectadas del fenómeno estudiado. Por ejemplo, un grupo describió la derivada como "los puntos de la variable en la gráfica", mientras que otro la consideró "un conjunto de herramientas matemáticas". Aunque estas respuestas muestran una interpretación parcial, también reflejan una dificultad para integrar las experiencias prácticas con los conceptos abstractos (ver Figura 7).

Figura 7-Respuestas de los estudiantes a la actividad 4.

Fuente: Evidencia de los estudiantes.

Los resultados obtenidos de la implementación de la situación de aprendizaje reflejan avances significativos en la comprensión de conceptos matemáticos y físicos por parte de los estudiantes, aunque también evidencian desafíos conceptuales. A través de las cuatro actividades, los estudiantes fueron capaces de conectar fenómenos físicos con representaciones matemáticas, utilizando herramientas tecnológicas para modelar, analizar y predecir resultados. Sin embargo, las dificultades observadas —como la confusión en la interpretación de relaciones cuadráticas, la representación de la velocidad instantánea y la conceptualización de la derivada— indican que aún es necesario fortalecer la integración entre las experiencias prácticas y los conceptos teóricos. Estos hallazgos destacan el potencial de las estrategias de modelación para promover un aprendizaje significativo, al tiempo que subrayan la importancia de guiar y acompañar a los estudiantes en la transición hacia una comprensión más profunda de las matemáticas aplicadas.

4.2 Análisis de la situación de aprendizaje con base en el ciclo de modelación propuesto por Borromeo (2010)

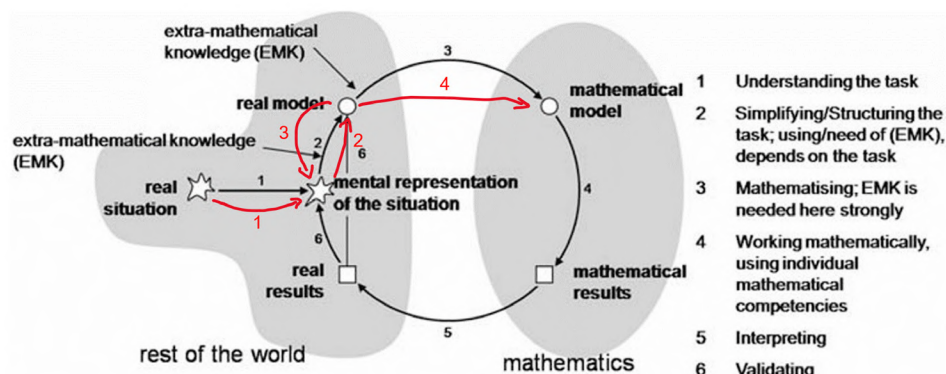
El análisis de la situación de aprendizaje se realiza considerando las tareas completadas por un equipo de trabajo que llevó a cabo las actividades 1, 2 y 3 en su totalidad, junto con la última pregunta de la actividad 4. Este análisis se fundamenta en el ciclo de modelación de Borromeo (2010), presentado en la Figura 1. A partir de las respuestas de los estudiantes y las observaciones realizadas, se mapean estas fases en el desarrollo de cada actividad, con el fin de ofrecer una perspectiva integral del ciclo de modelación como marco teórico para la enseñanza de conceptos matemáticos aplicados.

Durante la Actividad 1, los estudiantes transitaron desde una situación real, representada por el contexto histórico del experimento de Galileo en el plano inclinado, hacia una representación mental de la situación, donde imaginaron cómo las variables distancia y tiempo interactúan con el fenómeno. Este proceso inicial es consistente con la primera fase del ciclo de modelación de Borromeo (2010), en el que los estudiantes comienzan a construir una comprensión conceptual del problema basada en sus conocimientos previos y las instrucciones proporcionadas.

A medida que se entregó nueva información y se plantearon preguntas guiadas, los estudiantes oscilaron entre la representación mental y la construcción de un modelo real simplificado, como la idea de un plano inclinado con características esenciales. Según Borromeo (2010), este tipo de iteraciones son clave en la fase de simplificación y estructuración, ya que permiten a los estudiantes identificar los elementos relevantes del problema y omitir los irrelevantes, lo que facilita la transición hacia un modelo que capture la esencia del fenómeno sin perder su aplicabilidad.

En las respuestas finales de esta actividad, los estudiantes lograron transitar desde el modelo real hacia un modelo matemático, representando gráficamente y mediante funciones la relación entre la distancia recorrida y el tiempo transcurrido. Este paso marca el inicio de la formalización del problema en términos matemáticos, y corresponde a la matematización en el ciclo de Borromeo (2010). Aunque algunos estudiantes mostraron confusiones al interpretar la proporcionalidad cuadrática como lineal o exponencial, estas respuestas iniciales son esperables dentro del proceso iterativo de modelación, donde las ideas se refinan a través del trabajo matemático y la validación en fases posteriores (ver Figura 8).

Figura 8-Análisis actividad 1 con base en ciclo de modelación de Borromeo (2010).



Fuente: Adaptado de Borromeo (2010, p. 104).

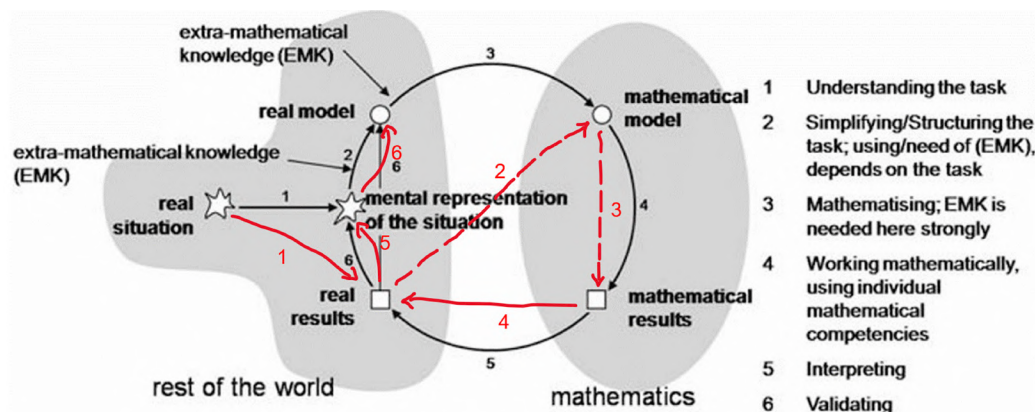
Para la actividad 2, los estudiantes transitaban desde una situación real hacia resultados reales a través de la experimentación directa y la recolección de datos utilizando el software Tracker. Este proceso es un ejemplo claro de cómo, según Borromeo (2010), la modelación matemática no sigue un proceso estrictamente lineal, sino que implica interacciones dinámicas entre diferentes fases del ciclo, permitiendo a los estudiantes construir y ajustar su comprensión del fenómeno en tiempo real.

Gracias al uso de ChatGPT, los estudiantes lograron avanzar desde los resultados reales hacia la construcción de un modelo matemático, traduciendo los datos experimentales en representaciones algebraicas y gráficas. Esta etapa refleja la importancia de la matematización en el ciclo de modelación, que, según Borromeo (2010), permite conectar el fenómeno observado con estructuras matemáticas formales que lo describen. Al generar resultados matemáticos a partir de este modelo, los estudiantes realizaron interpretaciones de estos resultados, proceso que, de

acuerdo con la autora, es fundamental para cerrar el ciclo al traducir las abstracciones matemáticas nuevamente en información relevante sobre la realidad estudiada (ver Figura 9).

De forma iterativa, los estudiantes utilizaron las representaciones proporcionadas por la IA para crear nuevas representaciones mentales y ajustar sus modelos reales, lo que ejemplifica el carácter no lineal y reiterativo del ciclo de modelación descrito por Borromeo (2010). Este enfoque les permitió refinar su comprensión del fenómeno y avanzar hacia una representación más completa y coherente del mismo, lo cual destaca el rol central de las herramientas tecnológicas en la exploración y validación de conceptos matemáticos aplicados.

Figura 9-Análisis de la actividad 2 con base en el ciclo de modelación de Borromeo (2010).



Fuente: Adaptado de Borromeo (2010, p. 104).

Para la actividad 3, los estudiantes trabajaron a partir de modelos matemáticos previamente generados y resultados matemáticos iniciales, los cuales interpretaron y ajustaron para desarrollar una nueva representación mental y un modelo real más refinado del fenómeno estudiado. Este proceso es consistente con el ciclo de modelación de Borromeo (2010), quien destaca la naturaleza iterativa y no lineal de la modelación, en la que los estudiantes revisan y reestructuran sus modelos conforme obtienen nuevos datos o resultados.

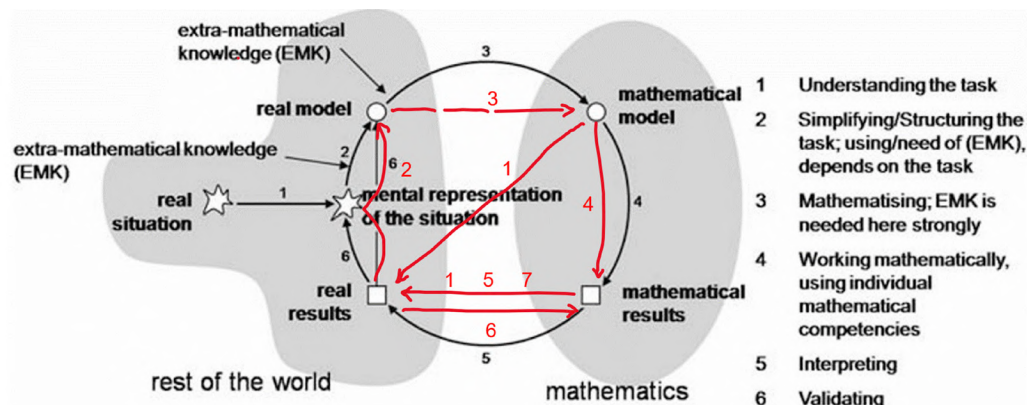
En esta actividad, los estudiantes transitaron nuevamente por las fases de matematización, trabajo matemático e interpretación, utilizando herramientas como ChatGPT para apoyar sus cálculos y análisis. La matematización permitió a los estudiantes traducir el modelo real ajustado a términos matemáticos, y su análisis se vio facilitado a partir de funciones y gráficas. Según Borromeo (2010), esta fase es crucial porque conecta directamente el fenómeno observado con el lenguaje matemático formal, y habilita el desarrollo de inferencias y predicciones (ver figura 10).

El trabajo matemático realizado con los modelos generados les permitió a los estudiantes derivar resultados matemáticos más detallados, como velocidades promedio e instantáneas. Estos resultados fueron interpretados para extraer conclusiones significativas sobre la relación entre tiempo y velocidad, y ejemplifican la transición desde los resultados matemáticos a los reales, fase central en el ciclo de modelación según Borromeo (2010), como se ha mencionado. Finalmente, los estudiantes validaron sus interpretaciones al compararlas con el

fenómeno físico representado, regresando así a los resultados reales en un esfuerzo por alinear sus modelos con la realidad observada.

Este análisis demuestra cómo los estudiantes no solo aplicaron, sino que también reconfiguraron sus representaciones mentales y modelos en respuesta a los datos obtenidos y las herramientas tecnológicas utilizadas. Se evidencia, por tanto, la flexibilidad y adaptabilidad inherentes al ciclo de modelación propuesto por Borromeo (2010).

Figura 10-Análisis de la actividad 3 con base en el ciclo de modelación de Borromeo (2010).



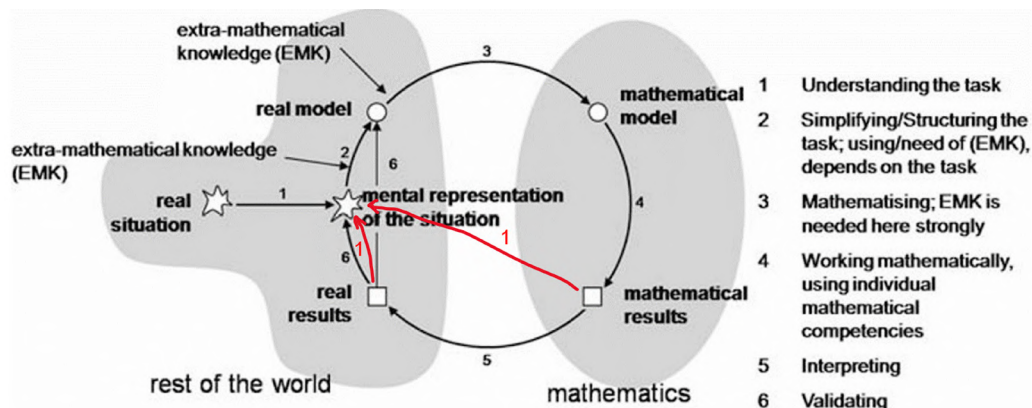
Fuente: Adaptado de Borromeo (2010, p. 104).

Para responder la pregunta final de la actividad 4, los estudiantes recurrieron tanto a resultados matemáticos como a resultados reales para construir una representación mental del concepto de derivada. Este proceso ilustra la transición desde representaciones formales hacia una comprensión conceptual más abstracta, y se alinea con la fase de interpretación descrita en el ciclo de modelación de Borromeo (2010) (ver Figura 11).

La derivada —presentada como la tasa de cambio o la pendiente de la tangente— permitió a los estudiantes establecer conexiones significativas entre los datos recolectados, los modelos matemáticos trabajados previamente y las propiedades del movimiento en el plano inclinado. Según Borromeo (2010), la interpretación es una fase crítica porque traduce los resultados obtenidos en ideas concretas y aplicables, de manera que fomenta una comprensión más profunda de los conceptos matemáticos.

Además, este proceso llevó a los estudiantes a validar su comprensión, mediante el contraste de sus representaciones mentales con los fenómenos físicos y las herramientas tecnológicas empleadas. Esta fase de validación, tal como señala Borromeo (2010), es clave para garantizar que las abstracciones matemáticas sean coherentes con la realidad estudiada, pues cierra el ciclo de modelación. En este caso, los estudiantes no solo utilizaron los resultados previos para definir la derivada, sino que también consolidaron su significado en el contexto del experimento, integrando teoría y práctica en su aprendizaje.

Figura 11-Análisis de actividad 4 con base en el ciclo de modelación de Borromeo (2010).



Fuente: Adaptado de Borromeo (2010, p. 104).

En síntesis, las cuatro actividades diseñadas en la situación de aprendizaje reflejan una implementación integral del ciclo de modelación de Borromeo (2010), destacando la interacción dinámica entre las diferentes fases y transiciones del proceso. Desde la comprensión inicial de la tarea, basada en el contexto histórico del plano inclinado de Galileo, hasta la conceptualización abstracta de la derivada, los estudiantes transitaron por fases de simplificación, matematización, trabajo matemático, interpretación y validación. Estas actividades no solo permitieron a los estudiantes conectar fenómenos físicos con modelos matemáticos, sino también iterar y refinar sus representaciones mentales y reales a medida que avanzaban en el análisis. Según Borromeo (2010), este carácter no lineal y reiterativo es fundamental para fomentar una comprensión profunda, ya que permite a los estudiantes construir y ajustar continuamente sus modelos a través de la integración de la teoría matemática con aplicaciones prácticas y herramientas tecnológicas. De este modo, el ciclo de modelación se consolidó como un marco teórico eficaz para guiar y evaluar el aprendizaje en contextos reales y experimentales.

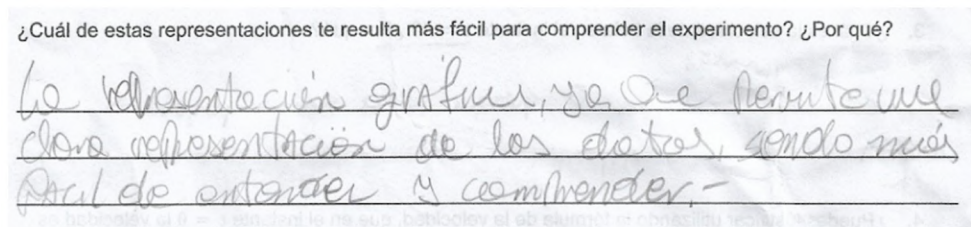
4.3 Análisis de la situación de aprendizaje con base en la superación de obstáculos y la incorporación de la IAG como herramienta del pensamiento computacional.

Sobre la superación de obstáculos. La experiencia de modelación matemática combinada con la integración de la IAG permitió a los estudiantes superar diversos obstáculos conceptuales asociados a la derivada, abordando su aprendizaje desde enfoques intuitivos, visuales y analíticos. Uno de los aspectos más destacados fue el uso de representaciones gráficas para facilitar la comprensión de la relación entre distancia y tiempo. Por ejemplo, en la actividad 2 los estudiantes utilizaron la herramienta Tracker para generar una gráfica que evidenció una relación cuadrática entre ambas variables.

Esta representación gráfica permitió observar de manera visual la tasa de cambio y ayudó, así, a superar barreras iniciales de abstracción. Un estudiante destacó que “la representación gráfica permite una clara representación de los datos, siendo más fácil de entender y

comprender”, comentario que evidencia cómo la visualización gráfica apoyó la construcción de un entendimiento más intuitivo (ver Figura 3 y 12).

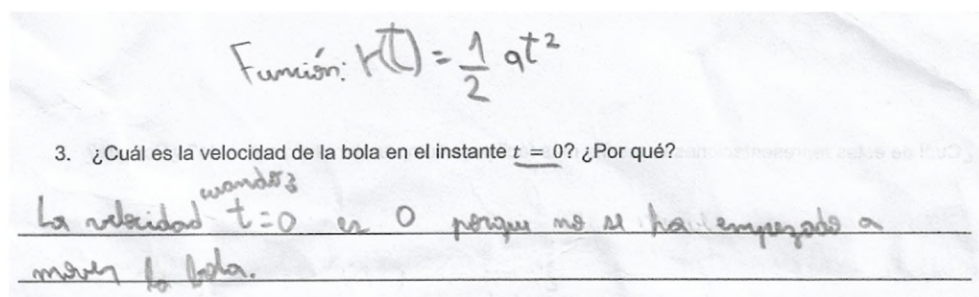
Figura 12-Respuestas del grupo de interés a la actividad 2.



Fuente: Evidencia de los estudiantes.

En la actividad 3, la IAG desempeñó un papel crucial al facilitar la conexión entre la derivada y la pendiente de la tangente en un punto específico. Los estudiantes utilizaron ChatGPT para calcular la pendiente en diferentes puntos de una curva, y lograron asociarla correctamente con la velocidad instantánea. Este análisis permitió superar obstáculos relacionados con la interpretación gráfica y matemática de la derivada, conectando la abstracción teórica con aplicaciones prácticas (ver Figura 13).

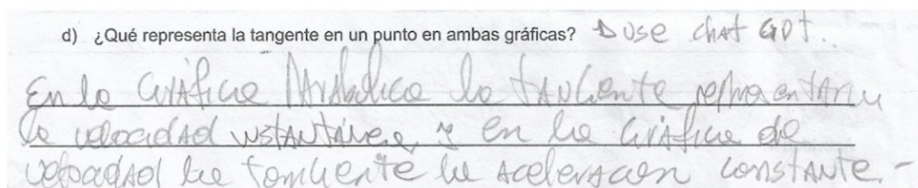
Figura 13-Respuestas del grupo de interés a la actividad 3, pregunta 3.



Fuente: Evidencia de los estudiantes.

Como ejemplo, un estudiante explicó que “en la cuadrática parabólica la tangente representa la velocidad instantánea, y en la gráfica de velocidad la tangente la aceleración constante”; otra evidencia de cómo las herramientas tecnológicas facilitaron la transición entre las diferentes representaciones de la derivada (ver Figura 14).

Figura 14-Respuestas del grupo de interés a la actividad 3, pregunta d.



Fuente: Evidencia de los estudiantes.

Otro avance significativo fue la interpretación de resultados matemáticos complejos, como el cálculo del límite en intervalos cada vez menores, también realizado en la actividad 3. Este ejercicio permitió a los estudiantes comprender cómo la velocidad promedio se transforma en velocidad instantánea, un paso crítico para entender el concepto de derivada. Con la guía de ChatGPT lograron conectar el análisis matemático con el fenómeno físico y describir que “representa la velocidad instantánea”. Esto evidencia cómo la interacción con la IAG ayudó a superar la desconexión entre el lenguaje matemático y su aplicación en el mundo real.

Finalmente, en la definición del concepto de derivada, la actividad 4 evidenció que los estudiantes lograron integrar elementos clave tales como el límite, la tangente, la aceleración y el tiempo; esta consolidación de saberes conllevó a una comprensión más holística del tema. En su respuesta final, un estudiante señaló que “la derivada, al asociarlas por ejemplo, con una tangente, sería el conjunto de elementos que permita unir los elementos vistos en el experimento de Galileo”. Esta definición refleja cómo la IAG permitió superar obstáculos iniciales en la abstracción del concepto al fomentar la conexión entre las representaciones visuales, matemáticas y fenomenológicas (ver Figura 6).

En conjunto, estas evidencias muestran cómo la experiencia de modelación y la incorporación de la IAG permitieron superar barreras conceptuales, y promovieron un aprendizaje significativo y práctico de la derivada. No obstante, el uso estratégico de estas herramientas resulta clave para evitar una dependencia excesiva y fomentar el pensamiento crítico en el proceso de aprendizaje.

Incorporación de la IAG como herramienta del PC. La integración de la IAG en la situación de aprendizaje no solo facilitó la superación de obstáculos conceptuales, sino que también actuó como una herramienta clave para desarrollar habilidades propias del PC. Este enfoque estructurado permitió a los estudiantes abordar problemas complejos relacionados con la derivada a través de procesos como la abstracción, la identificación de patrones y el diseño de algoritmos. Herramientas como ChatGPT, al procesar y contextualizar las respuestas en tiempo real, proporcionaron una plataforma adaptativa que fomentó la transición entre representaciones gráficas, tabulares y algebraicas. Esto no solo mejoró la comprensión de conceptos abstractos, como la pendiente de la tangente y el límite, sino que también alentó a los estudiantes a conectar estas representaciones con fenómenos físicos observados en el experimento.

El uso de la IAG reforzó las competencias del PC al facilitar la formulación de preguntas específicas mediante estrategias de prompt engineering, proceso que Curi *et al.* (2024) señalan como esencial para optimizar la interacción con herramientas generativas. Los estudiantes aprendieron a estructurar instrucciones claras y precisas para obtener respuestas que les ayudaran a resolver problemas de manera eficiente, lo que fomentó habilidades de descomposición y anticipación de resultados. Además, la IAG amplió el alcance del PC al permitir a

los estudiantes experimentar con múltiples representaciones del concepto de derivada, adaptadas a sus necesidades. Esto es especialmente relevante en el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos, donde la visualización y la personalización de explicaciones desempeñan un papel crucial.

En este contexto, la IAG se posiciona como una herramienta educativa que no solo proporciona soluciones inmediatas, sino que también promueve el desarrollo de competencias del siglo XXI, como el análisis crítico y la resolución creativa de problemas. Sin embargo, su implementación requiere un enfoque estratégico que equilibre su uso con actividades que fomenten la reflexión y el pensamiento autónomo. Este equilibrio es necesario para garantizar que los estudiantes no solo dependan de las respuestas generadas, sino que también interioricen los procesos detrás de ellas. En síntesis, la IAG, cuando se integra de manera reflexiva y estructurada, actúa como un puente entre la tecnología y el PC que potencia el aprendizaje significativo y adaptado a los retos del mundo digital actual.

5. CONCLUSIONES / REFLEXIONES / CONSIDERACIONES FINALES

Diseño de una situación de aprendizaje innovadora. La situación de aprendizaje diseñada demostró ser efectiva para abordar los desafíos conceptuales y operativos asociados al aprendizaje de la derivada. Basada en el experimento del plano inclinado de Galileo, esta propuesta permitió a los estudiantes transitar por diversas representaciones —gráficas, tabulares y algebraicas— mientras conectaban fenómenos físicos con conceptos matemáticos clave, como la tasa de cambio y la pendiente de la tangente. Este enfoque no solo superó las limitaciones del currículo tradicional, enfocado en procedimientos algorítmicos, sino que también promovió una comprensión más significativa y contextualizada del concepto de derivada.

Impacto de la implementación en el aprendizaje de los estudiantes. La implementación de la situación de aprendizaje reveló avances significativos en la comprensión de los conceptos asociados a la derivada. Los estudiantes lograron interpretar y analizar la relación cuadrática entre distancia y tiempo, comprender la derivada como velocidad instantánea y consolidar su significado como tasa de cambio. Sin embargo, también surgieron desafíos en la conexión entre representaciones gráficas y analíticas, lo que subraya la necesidad de seguir fortaleciendo estas transiciones en futuros diseños pedagógicos.

La IAG como herramienta para superar obstáculos conceptuales. La integración de herramientas de IAG, como ChatGPT, fue clave para superar barreras relacionadas con la abstracción y la transición entre diferentes representaciones matemáticas. La IAG permitió a los estudiantes visualizar conceptos complejos, recibir retroalimentación inmediata y construir representaciones personalizadas. Esto facilitó la comprensión de elementos abstractos, como el límite y la pendiente de la tangente, lo cual favoreció una aproximación más práctica y dinámica al aprendizaje de la derivada.

Desarrollo de competencias del pensamiento computacional. El uso de la IAG no solo enriqueció el aprendizaje matemático, sino que también potenció habilidades clave del PC, como la abstracción, la identificación de patrones y la formulación de algoritmos mediante estrategias de prompt engineering. Esto permitió a los estudiantes abordar problemas complejos con mayor autonomía y eficacia, y evidenció el potencial de la IAG como una herramienta educativa que fomenta competencias del siglo XXI.

Retos y oportunidades para futuras investigaciones. Si bien los resultados reflejan un impacto positivo en el aprendizaje, se identificó el riesgo de dependencia hacia la IAG, lo que podría limitar el desarrollo del pensamiento crítico y la autonomía de los estudiantes.

Esto resalta la importancia de diseñar estrategias pedagógicas que equilibren el uso de herramientas tecnológicas con actividades que promuevan la reflexión, la autoevaluación y el análisis crítico.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

Este artículo, basado en la investigación titulada Integración de la Inteligencia Artificial Generativa para la Superación de Obstáculos Asociados a la Enseñanza de la Derivada a Nivel Escolar, fue desarrollado por ASR y SSM bajo la orientación de IPV. La idea inicial fue planteada de forma conjunta, mientras que ASR y SSM se encargaron del marco teórico, la revisión bibliográfica, el diseño de la situación de aprendizaje y su implementación. La discusión y análisis de los resultados —así como la redacción final del artículo— fueron realizados de manera colaborativa por los tres autores.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio están disponibles en el repositorio de la Universidad Metropolitana de Ciencias de la Educación, en el vínculo de tesis de pregrado.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a todas las personas e instituciones que contribuyeron al desarrollo de esta investigación, brindando apoyo, orientación y recursos para su realización.

Agradecemos al Departamento de Matemática de la UMCE por su apoyo en la realización de esta investigación. También, expresamos nuestra gratitud al proyecto de vinculación con el medio “Red FerMat: modelación matemática y tecnología en el aula escolar”, (código V-25-4) y al proyecto de investigación “Superación de obstáculos en el cálculo escolar mediante modelación matemática y tecnologías digitales en la formación docente” (código 13-2025-IED), ambos fundamentales para el desarrollo de este trabajo.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Álvarez, M., Bodeman, Cafferata Ferri, S., Di Blasi Regner, M., Fasce, C., Morgada, M. E. y Santos, S. (2024). *Modelización matemática. Propuestas para su enseñanza*. Dunker. https://www.researchgate.net/publication/380066383_MODELIZACION_MATEMATICA_Propuestas_para_su_ensenanza_Editorial_dunkEn
- Balda Álvarez, P. A. (2022). Estructura para el diseño de situaciones de aprendizaje desde un enfoque socioepistemológico. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 7, 1–24. <https://doi.org/10.46618/iime.148>
- Bordignon, F. e Iglesias, A. A. (2020). *Introducción al pensamiento computacional*. Universidad Pedagógica Nacional. <https://biblioteca-repositorio.clacso.edu.ar/bitstream/CLACSO/2379/1/introduccion-pensamiento-computacional.pdf>
- Borromeo Ferri, R. (2010). On the Influence of Mathematical Thinking Styles on Learners' Modeling Behavior. *Journal Für Mathematik-Didaktik*, 31(1), 99–118. <https://doi.org/10.1007/s13138-010-0009-8>
- Bravo Viera, J. L., y Rodríguez Rivero, L. (2020). Formación del concepto de integral doble mediante la modelación matemática en la carrera de ingeniería informática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*,

- 33(1), 400–409. <https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1179501/Bravo-2020Formacion.pdf>
- Curi, M. E., Koleszar, V., Capdehourat, G., Pereiro, E., Lorenzo, B., y Folgar, L. (2024). *Construyendo Inteligencia Artificial para la educación*. Ceibal. <https://pensamientocomputacional.ceibal.edu.uy/wp-content/uploads/2024/06/Construyendo-Inteligencia-Artificial-para-la-educacion.pdf>
- García Peñalvo, F. J., Llorens Largo, F., y Vidal, J. (2024). La nueva realidad de la educación ante los avances de la inteligencia artificial generativa. *RIED - Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 27(1), 9–39. <https://doi.org/10.5944/ried.27.1.37716>
- De Carvalho Borba, M. y Rodrigues Balbino Junior, V. (2023). ChatGPT e educação matemática. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, 25(3), 142–156. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i3p142-156>
- Feo Mora, R. J. (2018). Diseño de situaciones de aprendizaje centradas en el aprendizaje estratégico. *Tendencias pedagógicas*, 31, 187–207. <https://doi.org/10.15366/tp2018.31.011>
- Gutiérrez Mendoza, L., Buitrago Alemán, M. R., y Ariza Nieves, L. M. (2017). Identificación de dificultades en el aprendizaje del concepto de la derivada y diseño de un OVA como mediación pedagógica. *Revista Científica General José María Córdova*, 15(20), 137–153. <https://doi.org/10.21830/19006586.170>
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., y Baptista Lucio, P. (2006). *Metodología de la investigación* (4a ed.). McGraw-Hill. <http://187.191.86.244/rceis/registro/Metodolog%C3%ADa%20de%20la%20Investigaci%C3%B3n%20SAMPIERI.pdf>
- Huincahue Arcos, J., Borromeo Ferri, R., y Mena Lorca, J. J. F. (2018). El conocimiento de la modelación matemática desde la reflexión en la formación inicial de profesores de matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 36(1), 99–115. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2277>
- Kaiser, G., y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM - Mathematics Education*, 38(3), 302–310. <https://doi.org/10.1007/BF02652813>
- Mejía Alemán, L. V., Gallo Águila, C. I., y Quintana Sánchez, D. J. (2022). La modelación matemática como estrategia didáctica para la resolución de problemas matemáticos. *Horizontes. Revista de Investigación en Ciencias de la Educación*, 6(26), 2204–2218. <https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v6i26.485>
- Mercapide Argüello, G. (2018). *Dificultades de aprendizaje del cálculo y enseñanza de la economía. Los conceptos de función y derivada* [Tesis de Maestría, Universidad de Cantabria]. <http://hdl.handle.net/10902/13733>
- MINEDUC. (2019). *Bases Curriculares: 3o y 4o medio*. Ministerio de Educación, Unidad de Currículum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-91414_bases.pdf
- MINEDUC. (2021). *Programa de Estudio Límites, Derivadas e Integrales 3o y 4o medio*. Ministerio de Educación, Unidad de Currículum y Evaluación. https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-140143_programa.pdf
- Molina Mora, J. A. (2017). Experiencia de modelación matemática como estrategia didáctica para la enseñanza de tópicos de cálculo. *Uniciencia*, 31(2), 19–36. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.31-2.2>
- Peña Páez, L. M. y Morales García, J. F. (2016). La modelación matemática como estrategia de enseñanza-aprendizaje: el caso del área bajo la curva. *Revista Educación en Ingeniería*, 11(21), 64–71. <https://educacioneningenieria.org/index.php/edi/article/view/637>
- Pereira Santos, R., de Carmago Sant'Ana, C. y Parolin Sant'Ana, I. (2023). O ChatGPT como recurso de apoio no ensino da Matemática. *Revemop*, 5, 1–16. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202303>
- Pérez Vera, I. E. y Salazar Cortez, P. (2024). Diseño de un curso de formación inicial para profesores, que integra la modelación matemática escolar con evaluación de tecnologías. *El cálculo y su enseñanza*, 20(1), 15–44. <https://doi.org/10.61174/recacym.v20i1.215>

- Pérez van Leenden, M. de J. (2019). La investigación acción en la práctica docente. Un análisis bibliométrico (2003-2017). *Magis, Revista Internacional de Investigación en Educación*, 12(24), 177–192. <https://doi.org/10.11144/Javeriana.m12-24.ncev>
- Roberts Molina, R. (2019). *Conceptos: Pensamiento Computacional y Ciudadanía Digital, en sus acepciones relativas a la educación escolar*. Biblioteca del Congreso Nacional de Chile. https://www.bcn.cl/asesorias-parlamentarias/detalle_documento.html?id=74486
- Sánchez Silva, M. (2005). La metodología en la investigación cualitativa. *Revista del Centro de Investigaciones Económicas, Administrativas y Sociales del Instituto Politécnico Nacional*, 1, 115–118. <http://hdl.handle.net/10469/7413>
- Sánchez Matamoros, G., García, M., y Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 11(2), 267–296. https://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1665-24362008000200005
- Pereira Santos, R., de Carmago Sant’Ana, C. y Parolin Sant’Ana, I. (2023). O ChatGPT como recurso de apoio no ensino da Matemática. *Revemop*, 5, 1–16. <https://doi.org/10.33532/revemop.e202303>
- Villarreal, M., y Mina, M. (2013). *Modelización en la formación inicial de profesores de matemática*. VIII Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática, Río Grande del Sur. https://www.researchgate.net/publication/263083171_MODELIZACION_EN_LA_FORMACION_INICIAL_DE_PROFESORES_DE_MATEMATICA
- Wardat, Y., Tashtoush, M. A., AlAli, R., y Jarrah, A. M. (2023). ChatGPT: A revolutionary tool for teaching and learning mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(7), 1–18. <https://doi.org/10.29333/ejmste/13272>
- Zaldívar Rojas, J. D., Quiroz Rivera, S. A. y Medina Ramírez, G. (2017). La modelación matemática en los procesos de formación inicial y continua de docentes. *IE Revista de investigación educativa de la REDIECH*, 8(15), 87-110.



PROCESOS MATEMÁTICOS EN PRÁCTICAS DE ESTUDIANTES DE PROFESORADO EN MATEMÁTICA Y FÍSICA

MATHEMATICAL PROCESSES IN THE PRACTICES OF STUDENT TEACHERS IN MATHEMATICS AND PHYSICS

Pablo Alejandro Wiernes¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0005-1736-194X>

Ricardo Fabián Espinoza²

 ORCID iD: 0000-0001-8921-6956

RESUMEN

Se analizan y caracterizan procesos matemáticos en prácticas realizadas por estudiantes del profesorado en Matemática y Física de la Universidad Nacional del Chaco Austral de Presidencia Roque Sáenz Peña, Chaco, Argentina. El marco teórico adoptado es la “Teoría de las Configuraciones Didácticas” perteneciente al Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática. Se elaboró un programa de investigación de tipo cuasiexperimental, con un diseño transeccional descriptivo, desarrollando un estudio de casos e indagando sobre procesos matemáticos al momento de resolver problemas algebraicos con ecuaciones de primer grado con una incógnita, así como sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas. Se siguieron los pasos principales de la investigación basada en diseño. Se confeccionó un instrumento de indagación, constituido por cinco situaciones-problema y se realizó un análisis a priori del mismo, empleando como herramienta la “configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos”. También, se analizaron las prácticas de los estudiantes a quienes se les suministró el instrumento, por medio de la herramienta mencionada.

Palabras clave: procesos matemáticos, resolución de ecuaciones lineales, resolución de sistemas lineales, configuración ontosemiótica, prácticas matemáticas.

ABSTRACT

Mathematical processes are analyzed and characterized within practices carried out by students from the Mathematics and Physics Teacher Training Program at the National University of Chaco Austral, located in Presidencia Roque Sáenz Peña, Chaco, Argentina. The theoretical framework adopted is the “Theory of Didactic Configurations,” which belongs to the Ontosemiotic Approach to Mathematical Knowledge and Instruction. A quasi-experimental research

1 Departamento de Ciencias Sociales y Humanísticas, Universidad Nacional del Chaco Austral, Presidencia Roque Sáenz Peña, Chaco, Argentina, C.P. 3700. Correo electrónico: pablowiernes@gmail.com

2 Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales y Agrimensura, Universidad Nacional del Nordeste, Corrientes, Argentina, C.P. 3400. Correo electrónico: rrfespinoza@exa.unne.edu.ar



program was developed with a descriptive cross-sectional design, involving a case study and focusing on mathematical processes during the resolution of algebraic problems involving first-degree equations with one unknown, as well as systems of two linear equations with two unknowns. The main steps of design-based research were followed. An inquiry instrument was developed, consisting of five problem-solving situations, and a priori analysis was conducted using the “ontosemiotic configuration of practices, objects, and processes” as an analytical tool. Furthermore, the students’ practices—after being given the instrument—were also analyzed using the same tool.

Keywords: mathematical processes, solving linear equations, solving linear systems, ontosemiotic configuration of practices, objects and processes, mathematical practices.

1. INTRODUCCIÓN

Este trabajo forma parte de una tesis doctoral, la cual se centra en el estudio de los procesos matemáticos desarrollados por estudiantes/ingresantes a las diferentes carreras de grado de la Universidad Nacional del Chaco Austral (UNCAus).

Exponemos aquí los resultados de una prueba piloto realizada con cinco estudiantes de 4° año de las carreras de los profesorados en Matemática y en Física, con el fin de evaluar el instrumento de recolección de información y estudiar los resultados obtenidos, tanto de los procesos matemáticos que quedan al descubierto como del funcionamiento del propio instrumento. Se desarrolló una investigación cualitativa, a través de un estudio de casos, empleando los pasos de la investigación basada en diseño (IBD), para identificar y caracterizar procesos matemáticos.

Existe una dificultad marcada en alumnos de diferentes instituciones educativas en la resolución de problemas algebraicos. Las estadísticas y resultados de evaluaciones sobre la enseñanza de las matemáticas (Dirección Nacional de Evaluación, Información y Estadística Educativa, 2022; NCTM, 2000; NCTM, 2002) indican que la resolución de problemas matemáticos y los procedimientos resolutorios son focos de conflicto preocupantes en los niveles medio y superior. A partir de las evidentes dificultades, vemos necesario profundizar sobre los procesos matemáticos implicados en la resolución de problemas, lo cual puede contribuir a la mejora educativa.

En este sentido, el enfoque ontosemiótico (EOS) señala la existencia de objetos y procesos matemáticos (Font et al., 2008). El análisis de la resolución de problemas algebraicos desde dicho enfoque nos permitirá evidenciar aquellos procesos que se presentan en la resolución de una situación-problema.

En este trabajo se utilizó la herramienta denominada configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos para analizar las prácticas de los estudiantes.

Por lo tanto, se planteó el problema de investigación de la siguiente manera: ¿Qué/cuáles procesos matemáticos elaboran los estudiantes de los profesorados en Matemática y Física de la Universidad Nacional del Chaco Austral (UNCAus), al momento de resolver problemas algebraicos?

El objetivo perseguido se dirige a identificar y caracterizar tales procesos desde el EOS.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

El EOS es un sistema teórico que articula diferentes modelos en la educación matemática. Este modelo epistémico y cognitivo resignifica constructos como objeto matemático,

significado y comprensión, y destaca los procesos de comunicación, interpretación y variedad de objetos en las prácticas matemáticas.

El EOS combina elementos ontológicos y semióticos para analizar y comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Se centra en cómo los significados matemáticos se construyen y se comunican en el aula, tanto desde lo que se espera que aprendan institucionalmente, como desde lo que pueden construir de manera personal (Espinoza, 2020; Godino, 2022).

Para el EOS existen objetos primarios y objetos a los que denominaremos secundarios (Godino et al., 2009; Godino et al., 2020; Godino, 2024). Los objetos primarios son situaciones-problema, elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, proposiciones y argumentos. De ellos surgen o se encuentran apareados procesos primarios como los siguientes: problematización, comunicación, definición, algoritmización, enunciación y argumentación.

Los objetos secundarios se presentan de manera dual: personal/institucional, ostensivo/no ostensivo, expresión/contenido, extensivo/intensivo, unitario/sistémico. De ellos surgen o se encuentran apareados procesos secundarios de personalización/institucionalización, materialización/idealización, representación/significación, particularización/generalización y unitarización/descomposición.

Los objetos primarios pueden ser analizados o contemplados desde las cinco dualidades presentadas antes, a modo de análisis complementario y con el fin de obtener un despliegue profundo de la actividad matemática al momento del desarrollo de una práctica matemática (Godino et al., 2009; Godino, 2024). Es decir, las dualidades son atributos contextuales aplicables a los distintos objetos primarios.

Para este trabajo se utilizó la herramienta “configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos” para realizar un análisis microscópico de la complejidad de la actividad matemática; o sea, de las prácticas matemáticas de estudiantes al momento de resolver situaciones-problemas. Llamaremos *configuración ontosemiótica epistémica* al análisis *a priori* realizado por el investigador como referencia para posteriores estudios de prácticas de alumnos. Mientras que llamaremos *configuración ontosemiótica cognitiva*, al análisis de las prácticas de los estudiantes (Burgos et al., 2021; Godino et al., 2020; Font et al., 2010).

2.1 Objetos/procesos primarios

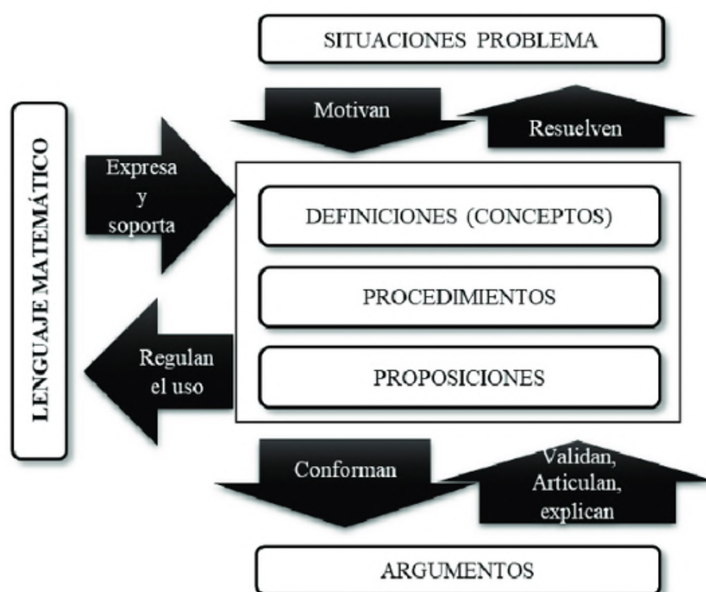
Los objetos matemáticos primarios surgen o son emergentes de los sistemas de prácticas como fenómeno complejo, a modo de objetos emergentes de las prácticas matemáticas. En un primer nivel de análisis propuesto por el EOS, surgen objetos matemáticos observables denominados primarios. Según Godino et al. (2009) y Aké, (2014) los objetos primarios son los siguientes:

- *Situaciones-problema*: son situaciones matemáticas, problemas, aplicaciones extra-matemáticas o intra-matemáticas, tareas, actividades y ejercicios que inducen a la actividad matemática.
- *Elementos lingüísticos*: como términos y expresiones matemáticas, notaciones, representaciones gráficas en sus diferentes tipos de registro como el escrito, el oral, el gestual, etc.

- *Conceptos*: entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición. Son introducidos a través de descripciones. Ejemplos: recta, punto, ecuación, función, etc.
- *Procedimientos*: técnicas de cálculo como algoritmos y operaciones. Son aquellos pasos por seguir para resolver un problema matemático; es el proceder de un resolutor para lograr su fin, sobre la base de ciertos argumentos que avalan dichos procedimientos.
- *Proposiciones*: son enunciados matemáticos o sobre conceptos, que necesitan ser validados. Son propuestas de resolución que necesitan ser demostradas.
- *Argumentos*: enunciados utilizados para validar o explicar las proposiciones y procedimientos, las deducciones, inducciones u otros.

Si consideramos como ejemplo plantear y resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, entonces aparecen conceptos, procedimientos y proposiciones, los cuales pueden generar argumentos, en el contexto del lenguaje matemático correspondiente, todo lo cual se enfoca en la resolución de un problema. Existe una determinada configuración (relaciones interconectadas) entre dichos objetos primarios, como lo representa la Figura 1.

Figura 1 - Configuración de objetos primarios.



Fuente: Font, et al. (2010).

En el caso concreto del análisis de la resolución de un problema (intra o extra-matemático), estos seis objetos primarios se interrelacionan y forman configuraciones epistémicas o

cognitivas que se construyen a partir del planteamiento y resolución de una situación-problema (Godino et al., 2009).

2.2 Objetos/procesos secundarios

La realidad actual nos muestra que la investigación en educación matemática y los currículos oficiales advierten tres características interesantes: a) existe una diversidad de conceptualizaciones del término proceso matemático, b) un determinado proceso puede ser descompuesto en otros procesos más simples o básicos, y c) existe una diversidad de procesos y términos para nombrarlos (Font y Rubio, 2017).

A pesar de la diversidad de conceptualizaciones del término, en el marco teórico del EOS

se considera que un proceso matemático es lo que podemos inferir que ha causado una cierta respuesta a una demanda dada. Es una secuencia de acciones que es activada o desarrollada, durante un cierto tiempo, para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea matemática (entrada). (Font y Rubio, 2017 p.2)

Por lo tanto, los objetos matemáticos pueden ser analizados o contemplados mediante ciertas dimensiones duales que intervienen en las prácticas, a modo de procesos considerados para el EOS como relevantes para la actividad matemática (Espinoza, 2020; Gallo et al., 2017; Font et al., 2010; Godino et al., 2009; Godino, 2024). Estos objetos, a los que denominamos secundarios, generan procesos secundarios que se describen a continuación.

- *Personal - Institucional*: el EOS atribuye a las prácticas matemáticas un doble carácter, esto es, personal (o individual) e institucional (o social). Es decir, pueden ser propias de un individuo o compartidas en el seno de una comunidad de práctica. Las personas están sujetas a formas de prácticas matemáticas, compartidas y provenientes de las comunidades a las que pertenecen. A su vez, los individuos aportan a las instituciones propuestas particulares y creativas, maneras de hacer matemática creadas por dichas personas. Es así como se articulan las dimensiones psicológica o cognitiva con la epistemológica o sociológica. Hablamos de objetos personales cuando los sistemas de prácticas son específicos de una persona, e institucionales cuando son compartidos en el seno de una institución. Los procesos que aparecen aquí, como dualidad, son la *personalización* y la *institucionalización*.
- *Ostensivo - No ostensivo*: son objetos ostensivos cuando son públicos y pueden ser mostrados a otros, o sea, elementos concretos; por ejemplo, gestos, notaciones, símbolos, representaciones gráficas, diagramas, bloques o figuras geométricas, artefactos materiales, objetos reales o concretos. Se trata de objetos matemáticos que son perceptibles y materiales, por lo que pueden ser observados y manipulados de manera directa. La función de los objetos ostensivos es permitir a los estudiantes interactuar directamente con el objeto matemático, lo que facilita su comprensión mediante la percepción sensorial. En cambio, son no ostensivos aquellos objetos considerados como constructos o creaciones discursivas de la actividad humana y no perceptibles por sí mismos, considerados ideales o mentales; es decir, aquellos pensados o imaginados por alguien. Por ejemplo, las ideas de número, funciones, teoremas, conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos, relaciones matemáticas, todas las cuales se comprenden mediante el razonamiento y la lógica, pero no se pueden observar físicamente. Un objeto ostensivo es usado para representar o visualizar un objeto no

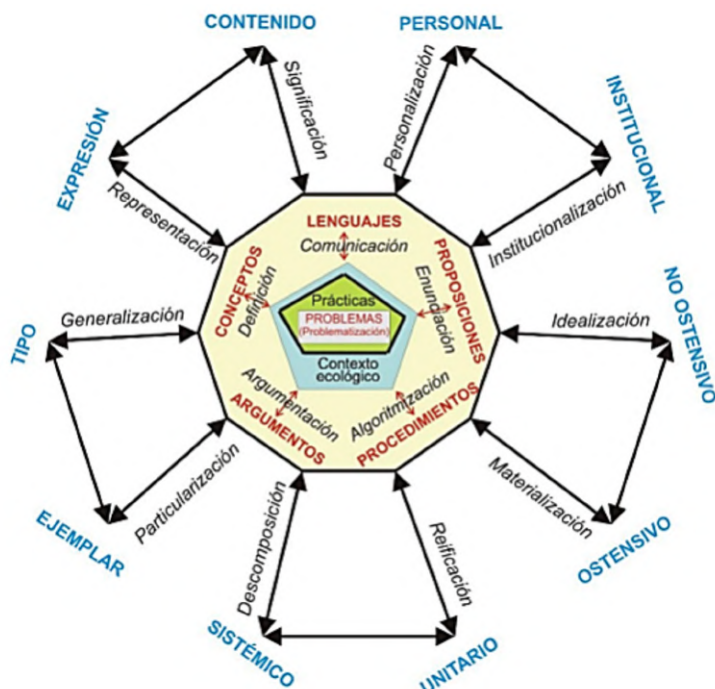
ostensivo. Por lo tanto, los objetos no ostensivos requieren de un determinado nivel de abstracción para su comprensión, para lo cual recibe la ayuda de los objetos ostensivos. La creación de objetos no ostensivos da lugar al proceso de idealización, y la creación de objetos ostensivos que materializan los no ostensivos da lugar al proceso de materialización. Los procesos que aparecen aquí -como dualidad- son la *materialización* y la *idealización*.

- *Expresión - Contenido*: están vinculadas con las correspondencias o relaciones de dependencia existentes entre el antecedente (o signifiante) y el consecuente (o significado), dadas por una persona o institución. Es la expresión concreta a través de símbolos y su correspondencia con el contenido o significado de dicha expresión. La expresión hace referencia a la forma de representación mediante símbolos de los diferentes objetos matemáticos. La función que cumple la expresión es permitir la visualización y manipulación de conceptos matemáticos. Por ejemplo, una función matemática puede ser expresada mediante una ecuación, un gráfico o una tabla de valores numéricos. El contenido hace referencia al significado o a la comprensión que una persona desarrolla sobre un objeto matemático. Como tal, es el resultado del proceso cognitivo que permite a dicha persona relacionar las diferentes expresiones de un objeto matemático con sus conocimientos previos y experiencias. Un ejemplo puede ser el de la función $f(x) = x^2$, expresión cuyo significado puede implicar la relación cuadrática entre variables independiente y dependiente, o el comportamiento de un parámetro en un problema particular de aplicación (contenido). Otro ejemplo puede ser la ecuación $2x + 3 = 7$, expresión de la que se puede deducir que debe encontrarse un valor numérico que satisfaga la igualdad, lo que implica comprender el concepto de solución de ecuaciones (contenido). Los procesos que aparecen aquí, como dualidad, son la *representación* y la *significación*.
- *Extensivo - Intensivo*: al momento de realizar un análisis de la actividad matemática, es necesario tener en cuenta ciertos procesos como los de particularización y generalización. Las dimensiones duales extensivo e intensivo (o ejemplar y tipo) refiere a un caso particular y su correspondiente expresión general que representa a todos los casos particulares considerados. Por ejemplo, una función lineal como $y = x + 3$ (extensivo) y su forma general de $y = ax + b$ (intensivo). O sea, es extensivo un ejemplo particular de una clase generalizada (intensivo) de ese ejemplo. El proceso de generalización se basa en identificar un patrón o una regularidad sobre la base de ciertos casos particulares. Por su parte, el proceso de particularización consiste en identificar, indicar o mostrar casos particulares que pertenecen a un determinado patrón. Los procesos que aparecen aquí, como dualidad, son la *particularización* y la *generalización*.
- *Unitario - Sistémico*: un objeto matemático puede ser considerado de manera elemental o unitaria, sin la consideración de las relaciones con otros; sin embargo, para ciertos fines, puede estudiarse el mismo desde el sistema de objetos en el que aparece compuesto y estructurado. Por ejemplo, para el estudio de la adición en cursos altos de instrucción, el objeto matemático “sistema de numeración decimal” (unidades, decenas, centenas, etc.) es considerado como algo conocido, como una entidad unitaria. Es decir, no es necesario desglosarlo en entidades más elementales, sino que se sintetiza ese objeto matemático para poder abordar el nuevo objeto que es la adición. Pero en cursos más bajos de instrucción, el mismo sistema de numeración decimal necesariamente debe ser considerado de manera sistémica; debe poder descomponerse

o analizarse en sus elementos más simples para poder comprenderlos, estudiarlos y aprenderlos. Tanto las configuraciones ontosemióticas como los objetos matemáticos pueden analizarse desde sus dos perspectivas: unitaria y sistémica, dependiendo del tipo de estudio que se realice. La unitarización (también denominada reificación) es el proceso que realiza una síntesis a partir de toda la información disponible sobre un objeto matemático; mientras que la descomposición realiza el análisis de los componentes de un sistema. Es decir, podemos considerar un problema general o global (sistémico) que puede descomponerse en problemas elementales o más simples. Luego, los conceptos y propiedades analizados pueden ser reificados o unitarizados, o sea, comprendidos como objetos unitarios a fin de aplicarlos a nuevos problemas. En la práctica, podemos descomponer un problema principal en sub-problemas y tratar a estos últimos como una unidad para luego plantearse una mirada integral sobre el primero. Podemos decir que el proceso de unitarización se inicia a partir del análisis de una entidad matemática sistémica y que, a los fines de eficiencia operativa y discursiva (o ahorro de energía), posteriormente se lo considera como una nueva entidad unitaria, que podríamos denominar proceso de objetivación. Más sencillamente, la unitarización consiste en el proceso de colecciones de objetos a un solo objeto. El proceso de descomposición será el contrario al anterior. Los procesos que aparecen aquí, como dualidad, son la *unitarización* y la *descomposición*.

En la Figura 2 se visualizan las relaciones entre los objetos primarios, los objetos secundarios y los procesos detallados antes, a modo de esquema o modelo ontosemiótico para el análisis de prácticas matemáticas.

Figura 2 – Configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos.



Fuente: Godino (2024).

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

3.1 Paradigma de investigación

El paradigma cualitativo en investigación educativa se enfoca en la comprensión de los procesos educativos desde una perspectiva subjetiva y contextualizada. Se basa en la interpretación de los datos y la construcción de significados a partir de ellos, y se centra en el diseño y exploración de innovaciones educativas a través de la construcción de instrumentos para tal fin (Bell, 2004; Hernández Sampieri et al., 2006; Muñoz, 2017; Quintero Saavedra, 2016).

Dicho paradigma apunta a la comprensión de los procesos educativos y a la exploración de las experiencias y percepciones de los individuos involucrados en estos procesos. Algunas de las características del paradigma cualitativo en investigación educativa son: el enfoque subjetivo, la contextualización, la flexibilidad ante procesos educativos y la interpretación de los datos. Esto se evidenció a través de la intervención del investigador para comprender e interpretar los datos recolectados durante el proceso de indagación.

Para identificar y caracterizar los procesos matemáticos que los estudiantes desarrollan al momento de resolver problemas algebraicos, son necesarios el análisis en profundidad, la contextualización de las situaciones-problema, la flexibilidad ante la obtención de respuestas disímiles y la interpretación de los datos para la posterior construcción de significados.

Se trabajó con la población de estudiantes de los profesorados en Matemática y Física de la UNCAus. En el presente estudio se presentan resultados de cinco estudiantes. El papel del investigador fue de participante; es decir, realizó interacciones escolares con sus alumnos. Dichas intervenciones se pudieron concretar sabiendo que la contextualización y la flexibilidad son características de los procesos educativos, los cuales fueron considerados en favor de los objetivos de la investigación.

3.2 Encuadre metodológico

Se desarrolló una investigación de tipo cuasi-experimental con un diseño transeccional descriptivo, trabajando a través de un estudio de casos y desde una perspectiva etnográfica, indagando sobre procesos matemáticos al momento de resolver problemas algebraicos con ecuaciones de primer grado con una incógnita y sistemas lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas.

La investigación basada en diseño se diferencia de la experimentación de corte clásico-positivista porque se realiza en contextos reales, no en laboratorios. Se inicia con un plan general y con materiales no necesariamente determinados de manera definitiva en sus inicios, sino que se van ajustando durante el proceso investigativo. No está orientado a demostrar una hipótesis, sino al desarrollo de un perfil que caracterice la práctica (Kelly et al., 2008; Brown, 1992; DBRC, 2003).

Además, dentro de las herramientas teóricas de análisis de las prácticas matemáticas del EOS, nos centramos en la identificación y caracterización de objetos y procesos matemáticos al momento de resolver problemas algebraicos.

3.3 Investigación basada en diseño (IBD)

La IBD se presenta como cierto tipo de aproximaciones metodológicas cuyo objetivo es el estudio del aprendizaje en contexto. Implica una interdependencia entre un posible diseño instruccional que se pueda elaborar para un fin determinado, y el proceso de investigación o indagación sobre la propia situación. La teoría, el diseño metodológico y la experimentación en un contexto escolar o áulico son componentes de un mismo camino de indagación.

La IBD trata de distanciarse y diferenciarse de la investigación empírica, cuantitativa o básica. Más bien se concentra en la articulación entre investigación, diseño, desarrollo y práctica, con el enfoque en la resolución de problemas prácticos y en la implicación de todos los actores institucionales al momento de indagar sobre una situación (De Benito et al., 2016).

Según Molina et al. (2011), la IBD establece el desarrollo de tres fases al momento de realizar un experimento de diseño: fase 1, preparación del experimento; fase 2, experimentación; y fase 3, análisis retrospectivo. Se detallan a continuación cada una de ellas, así como sus pasos correspondientes.

La fase 1 corresponde a una instancia previa a la realización del experimento. Se deben considerar aspectos como la indagación de los fines instruccionales (aunque estén marcados de antemano por los diseños curriculares), los conocimientos previos de los estudiantes y sus limitaciones, la delimitación de la propuesta que se está realizando, así como todo lo que implica la implementación del experimento, y el contexto teórico y metodológico en el cual se sitúa la experiencia. Esta primera fase de diseño implica pensar en todos los pasos a seguir para indagar sobre el problema, analizar la documentación existente, recabar información, diseñar y aplicar el instrumento de recolección de datos. La fase 2 corresponde a la experimentación o trabajo de campo y la fase 3 consiste en situar los datos recogidos en un contexto teórico más amplio, realizar el análisis de los datos y realizar una reconstrucción instructiva de la teoría.

3.4 Trabajo de campo

Dentro de la fase 1 (preparación del experimento), como primer paso se realizó un análisis de toda la documentación existente y vinculada con la enseñanza de los temas “ecuaciones” y “sistemas de ecuaciones”, tanto en el nivel secundario como universitario. Además, se indagó acerca de las metodologías de enseñanza que oficialmente se aplican en las carreras universitarias de la UNCAus. Es decir, se realizaron los siguientes procesos:

- *Lectura y análisis de los diseños curriculares:* tanto del nivel secundario como de las diferentes carreras universitarias. En general es documentación que se encuentra disponible en las instituciones educativas, incluso al alcance vía internet en sus diferentes sitios. Para el nivel secundario están disponibles los diseños curriculares jurisdiccionales de la provincia del Chaco. En este caso se analizaron tres orientaciones, por ser las más frecuentes en el ámbito educativo del nivel: orientación en Economía y Administración; orientación en Ciencias Naturales, orientación en Informática. Se indagó sobre la propuesta de formación del nivel y del ciclo orientado. Para el caso de las carreras de grado universitario, se analizó el diseño curricular de cada carrera que ofrece la UNCAus.

- *Análisis de propósitos y objetivos instruccionales:* a partir de la lectura de programas, planificaciones y diseños curriculares.
- *Análisis de las orientaciones metodológicas y didácticas:* indagando las utilizadas por los docentes como intención declarativa desde la documentación disponible oficialmente.
- *Análisis de programas y planificaciones:* tanto del último año del nivel secundario como del primer año universitario. Se analizaron proyectos áulicos del nivel secundario y programas y planificaciones de las carreras de los profesados y de otras carreras universitarias, a modo de comparación. Se analizaron especialmente los contenidos o saberes que figuran en dicha documentación, con el fin de tomar conocimiento de estos y seleccionarlos para elaborar, posteriormente, el instrumento de recolección de datos.
- *Selección de contenidos, problemas, saberes:* se realizó una primera lista o selección de temas para ser organizados e incorporados como material para el instrumento de recolección. Se contrastaron los contenidos del nivel secundario y del primer año universitario.

Como segundo paso, a través de la elaboración propia y contando con la información recabada en la etapa anterior, se realizó lo siguiente.

- *Pre-selección de problemas:* se seleccionaron una serie de situaciones-problema (entre veinte y veinticinco) para analizar sus formas de resolución y los diferentes pasos o procedimientos matemáticos y metodológicos, con el fin de lograr una diversidad y un desarrollo amplio en el espectro de caminos resolutorios. Esta primera selección permite al investigador profundizar en las técnicas matemáticas y en los pasos que pueden aplicarse para la resolución.
- *Elaboración del instrumento de recolección:* a partir del análisis anterior, se confeccionó el instrumento de recolección de datos, teniendo en cuenta el marco teórico, el buceo bibliográfico y la revisión de la documentación. Además, se elaboró una matriz de desempeño con el fin de registrar el tipo de resolución que los diferentes estudiantes podían realizar al momento de resolver los problemas propuestos. Se confeccionó el instrumento con un total de cinco situaciones-problema para que los estudiantes pudieran resolverlas.

Dentro de la fase 2 (experimentación) se realizó la aplicación del instrumento de recolección de datos a un grupo de cuatro estudiantes del profesado en Matemática y un estudiante del profesado en Física de la UNCAus, que se encontraban cursando el 4° año de dichas carreras. Se decidió trabajar con ellos para probar el instrumento con alumnos que cuenten con experiencia en el pasaje por la formación universitaria, a modo de reaseguro para posteriores aplicaciones con ingresantes, en el marco de la tesis doctoral en desarrollo.

En la fase 3 (de análisis retrospectivo) se realizó el análisis de las producciones realizadas por los estudiantes, a partir del marco teórico y de la observación realizada durante la aplicación del instrumento, tomando como referencia la configuración ontosemiótica epistémica, realizada con anterioridad a la aplicación del instrumento.

3.5 Instrumento de recolección

Uno de los propósitos de la presente experiencia fue poner a prueba el instrumento de recolección y establecer si es científicamente válido o si requiere modificaciones. Esto facilitó advertir sus aspectos positivos y posteriores mejoras, útiles tanto para el desarrollo de la tesis doctoral mencionada al inicio como para futuras investigaciones.

Retomando la preselección de problemas y la elaboración del instrumento de recolección (Fase 1), este se confeccionó a partir de una exhaustiva revisión de diseños curriculares y Núcleos de Aprendizaje Prioritarios (NAP), la consulta de libros de texto impresos y digitales, apuntes de cátedra y sitios de Internet. Además, se tomó referencia de entidades matemáticas como la Unión Matemática Argentina (UMA) y la Olimpiada Matemática Argentina (OMA), así como los sitios web de diversas universidades argentinas. El instrumento de recolección quedó conformado de la siguiente manera:

Problema N°1: *Resolver y verificar si el resultado es correcto:*

$$7. (w - 3) = 9. (w + 1) - 34$$

Problema N°2: *Resolver:*

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - 2y = -123 \end{cases}$$

Problema N°3: *Tres socios forman una sociedad. El primero aporta las 2/5 partes del capital; el segundo 1/3 del capital y el tercero \$2.000.000. Hallar el capital social y lo que aporta cada uno.*

Problema N°4: *En un examen tipo test de 30 preguntas se obtienen 0,75 puntos por cada respuesta correcta y se restan 0,25 por cada error. Si un alumno ha sacado 10,5 puntos ¿Cuántos aciertos y cuántos errores ha cometido?*

Problema N°5: *Una gasolinera vende gasolina regular a 2,2 dólares cada galón y gasolina premium a 3 dólares el galón. Al final de un día de trabajo se vendieron 280 galones de gasolina y se recibieron un total de 680 dólares. ¿Cuántos galones de cada tipo de gasolina se vendieron?*

Es importante mencionar que se realizaron varias modificaciones y mejoras a partir del instrumento original. En principio, se pensó en agregar solo problemas extra-matemáticos, luego se advirtió la importancia de conformarlo con situaciones-problema intra y extra-matemáticos. La decisión se justifica desde la concepción que Godino (2023) establece sobre la matemática educativa y la importancia de abordar problemas vinculados con la matemática pura y aplicada; es decir, abordar problemas del mundo extra-matemático como intra-matemático: “el objetivo/motivo de la matemática educativa es el estudio de las relaciones dialécticas entre la matemática pura y aplicada, entre los procesos de creación y aplicación de los conocimientos matemáticos, en cuanto deben ser objeto de enseñanza y aprendizaje” (p. 6).

Luego, se organizaron los cinco problemas, iniciando con los más simples de resolver, para continuar con los más complejos, con el objetivo de estudiar de manera progresiva y sistemática los procesos que surjan en todos ellos. El grado de complejidad de cada problema estuvo determinado por la estructura de los objetos y procesos, estudiados con anterioridad a través de la configuración ontosemiótica epistémica (Figura 2).

Para futuras modificaciones del instrumento, se puede evaluar la posibilidad de que los cinco problemas tengan una vinculación en sus enunciados, en lugar de ser presentados como

situaciones inconexas. Además, evaluar si el problema 5 puede adaptarse a los parámetros de mediciones del contexto (litros por galones y pesos por dólares, por ejemplo).

Si bien esta versión del instrumento no está corregida en función de las apreciaciones de pares expertos, ya fue enviada para su análisis y valoración a docentes e investigadores especialistas en la temática, de Argentina y del exterior.

3.6 Configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos

Hemos elaborado una configuración ontosemiótica epistémica (ver Figura 2) por cada problema, a fin de comprender y sostener teóricamente las posibles resoluciones de los estudiantes implicados en la investigación.

La elaboración de la configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos en el EOS implica una detallada y analítica construcción de los elementos matemáticos y cognitivos involucrados en una situación específica. Este proceso se enfoca en identificar y describir tanto los objetos como los procesos matemáticos que intervienen al abordar una tarea matemática particular. La configuración ontosemiótica epistémica se convierte en un marco teórico que posibilita el análisis y comprensión de la estructura y relación entre los objetos matemáticos, los procesos y las estrategias utilizadas por los estudiantes al enfrentarse a una tarea matemática específica. Este análisis minucioso proporciona información valiosa sobre las dificultades, los conflictos semióticos potenciales y las formas de resolución que los estudiantes pueden emplear. Dicha configuración no solo representa una herramienta teórica para la presente investigación, sino que guía y ordena el análisis.

La aplicación del instrumento de recolección se realizó en la primera semana de junio de 2024, con cuatro estudiantes del 4° año del profesorado en Matemática y un estudiante del profesorado en Física, todos de la UNCAus. Previamente, se les explicó que se iba a realizar la aplicación de un dispositivo, en el marco de una investigación relacionada con la resolución de problemas con ecuaciones y sistemas lineales.

Se les indicó que resolvieran los problemas y dejaran registrados en la hoja los desarrollos o procedimientos matemáticos. Recibieron el instrumento con los cinco problemas, los fueron resolviendo y, conforme finalizaron, se les entregó una segunda hoja con tres preguntas por problema para que respondieran acerca de cómo lo hicieron. Las respuestas complementaron el análisis de las resoluciones y nos brindaron información acerca de los procesos desplegados en las resoluciones.

El tiempo para resolver los problemas fue de aproximadamente una hora y media, y utilizaron veinte minutos para responder las preguntas posteriores. Solo una de las estudiantes tardó más tiempo para la resolución de todos los problemas. Se elaboraron las configuraciones de prácticas, objetos y procesos personal, para cada uno de los estudiantes y de los problemas planteados en el instrumento.

4. RESULTADOS

Como resultado de la aplicación del instrumento, obtuvimos una resolución por cada estudiante. Cada uno resolvió en su mayoría los cinco problemas propuestos, a partir de lo cual se generó el análisis de los objetos y procesos matemáticos implicados. El estudiante E2 pertenece al profesorado en Física y los demás al profesorado en Matemática.

Como se advierte, el volumen del análisis general fue significativo; demandó tiempo y profundización en el estudio de las prácticas resolutorias de cada uno de los alumnos. A continuación, representamos en un cuadro las dimensiones del análisis realizado, con el objetivo de ilustrar la tarea investigativa general, que no pretende sistematizar datos cuantitativos. La marcación con “X” significa que no se encontraron evidencias del proceso que corresponde a su columna en cuestión. La marcación con “✓” significa que se encontraron evidencias del proceso en la resolución del problema y del estudiante correspondiente.

Tabla 1 – Síntesis del estudio de las configuraciones de prácticas, objetos y procesos.

		Procesos primarios						Procesos secundarios									
		Problematización	Comunicación	Definición	Enunciación	Algoritmización	Argumentación	Personalización	Institucionalización	Materialización	Idealización	Representación	Significación	Particularización	Generalización	Unitarización	Descomposición
Estudiante E ₁	Problema 1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 3	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	Problema 4	✓	✓	X	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Estudiante E ₂	Problema 1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 4	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
	Problema 5	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
Estudiante E ₃	Problema 1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	X	✓	✓	X	X
	Problema 4	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 5	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Estudiante E ₄	Problema 1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X
	Problema 2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 4	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 5	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Estudiante E ₅	Problema 1	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 2	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 3	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
	Problema 4	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓
	Problema 5	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓	X	✓

Fuente: Elaboración propia.

Se observa que el estudiante E_2 solo logró resolver los primeros tres problemas, ya que en los problemas 4 y 5 no hubo escritura o registro de prácticas matemáticas. En cambio, los estudiantes E_3 , E_4 y E_5 pertenecientes al profesorado en Matemática lograron realizar desarrollos resolutorios de todos los problemas. El estudiante E_1 logró realizar desarrollos resolutorios de los problemas 1, 2, 3 y 4.

A continuación, en la Figura 3 presentamos la resolución del problema 5 del estudiante E_5 . Luego, en la Tabla 2 se expone el análisis de dicha resolución, representando primero los objetos/procesos primarios y luego los objetos/procesos secundarios identificados. Se decidió incorporar el análisis/resolución del estudiante E_5 por tratarse de uno de los más completos en cuanto a las prácticas resolutorias y las descripciones realizadas en el instrumento.

Figura 3 – Resolución del estudiante E_5 .

Problema N° 5:
Una gasolinera vende gasolina regular a 2,2 dólares cada galón y gasolina Premium a 3 dólares el galón. Al final de un día de trabajo se vendieron 280 galones de gasolina y se recibieron un total de 680 dólares. ¿Cuántos galones de cada tipo de gasolina se vendieron?

gasolina regular (x) a uso 2,2 c/galón
gasolina Premium (y) a uso 3 c/galón

$$\begin{cases} x + y = 280 & (1) \\ 2,2x + 3y = 680 & (2) \end{cases}$$

Resolvemos aplicando método de sustitución.
Despejando una variable de cada ecuación

$$\begin{aligned} (1) \quad x + y &= 280 \\ y &= 280 - x \end{aligned} \quad \begin{aligned} (2) \quad 2,2x + 3y &= 680 \\ 3y &= 680 - 2,2x \\ y &= \frac{680 - 2,2x}{3} \end{aligned}$$

Igualo ambas expresiones $y = y$

$$\begin{aligned} 280 - x &= \frac{680 - 2,2x}{3} \\ (280 - x) \cdot 3 &= 680 - 2,2x \\ 840 - 3x &= 680 - 2,2x \\ 840 - 680 &= -2,2x + 3x \\ 160 &= 0,8x \\ 160 : 0,8 &= x \\ 200 &= x \end{aligned}$$

Resemplazo en la ecuación original para encontrar la variable faltante.

$$\begin{aligned} x + y &= 280 \\ 200 + y &= 280 \\ y &= 280 - 200 \\ y &= 80 \end{aligned}$$

2da: Se vendieron 200 galones de tipo gasolina regular y 80 galones de tipo gasolina Premium

1) Plante que la gasolina regular sería 'x' y la premium 'y'. Ya que la suma de ambos nos darán el total de galones de gasolina. Podemos observar por los precios Se multiplica lo que vale un galón de gasolina regular sumado por lo que vale un galón de gasolina premium, dándonos así el Total.

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 2 – Configuración ontosemiótica de objetos y procesos: estudiante E₅.

Problema 5 <i>Una gasolinera vende gasolina regular a 2,2 dólares cada galón y gasolina premium a 3 dólares el galón. Al final de un día de trabajo se vendieron 280 galones de gasolina y se recibieron un total de 680 dólares. ¿Cuántos galones de cada tipo de gasolina se vendieron?</i>	
Objetos/Procesos	Estudiante E ₅
Problema/ Problematización	Se evidencia el proceso de problematización cuando el estudiante plantea un sistema lineal para modelizar el problema y resolverlo. También cuando selecciona un método de resolución, lo aplica siguiendo ciertos pasos y, por último, responde a la pregunta que plantea el problema.
Lenguajes/ Comunicación	Términos y expresiones: • Gasolina regular (x) a USD 2,2 c/galón. • Gasolina premium (x) a USD 3 c/galón. • Resolvemos aplicando método de Igualación, despejando una variable de cada ecuación. • Resuelvo algebraicamente hasta llegar al valor de la variable “x”. • Reemplazo en la ecuación original para encontrar la variable faltante. • Se vendieron 200 galones de gasolina regular y 80 galones de tipo gasolina premium. Notaciones: • $\begin{cases} x + y = 280 \\ 2,2 \cdot x + 3y = 680 \end{cases}$ • $x + y = 280$ $y = 280 - x$ • $2,2x + 3y = 680$ $y = \frac{680 - 2,2x}{3}$ • $280 - x = \frac{680 - 2,2x}{3}$ • $x = 200; y = 80$
Conceptos/ Definiciones	• Operaciones matemáticas básicas con números reales: adición, sustracción, multiplicación, división. • Operaciones con términos semejantes. • Propiedad uniforme. • “Igualo ambas expresiones, $y = y \dots$” (ecuaciones de 1er grado con dos incógnitas). • “Resolvemos aplicando el método de igualación” (sistema de ecuaciones lineales de 2x2). • “Igualo ambas expresiones y resuelvo algebraicamente hasta llegar al valor de la variable” (método de Igualación). “Reemplazo en la ecuación original para encontrar la variable faltante” (procedimiento de verificación para sistemas de ecuaciones).

Procedimientos/ Algoritmización	1. Leer el problema y establecer datos e incógnitas. 2. Conformar un sistema lineal de 2×2 que modelice el problema. 3. Resolver el sistema mediante el método de igualación. 4. Realizar la verificación del conjunto solución hallado. • De 1, 2 y 3, calcular los valores de “x” e “y”, que representan la cantidad de galones de cada tipo de gasolina que se vendieron, a través del método de Igualación. De 3 y 4, evaluar el resultado obtenido, según el propio enunciado del problema.
Proposiciones/ Enunciación	• Propiedad distributiva, aplicada para obtener el valor numérico de “x”. • Propiedad reflexiva, para igualar valores como $y = y$. • Propiedad conmutativa, para hallar los valores de las incógnitas. • Propiedad transitiva, al igualar los valores de “y” de ambas ecuaciones del sistema. • Propiedad uniforme, al despejar las incógnitas del sistema de ecuaciones.
Argumentos/ Argumentación	A partir de la lectura del enunciado del problema, el estudiante advierte que puede ser expresado mediante un sistema de ecuaciones lineales de 2×2, y resuelto a través del método de igualación, donde las incógnitas representan los galones de gasolina regular y premium que se vendieron. Utiliza los conceptos, propiedades y procedimientos detallados, para hallar los valores de las incógnitas y dar respuesta al problema.
Personalización/ Institucionalización	Se advierte el proceso de institucionalización en el procedimiento de resolución del problema, por ser típico de la enseñanza en la escolaridad formal.
Materialización/ Idealización	La escritura de números, letras, notaciones, símbolos y palabras que describen los pasos a seguir en la resolución, comprende la parte material u ostensiva que evoca la relación existente entre la cantidad total de galones de gasolina y los dos tipos de gasolina disponibles para vender, que conforman los constructos (no ostensivos). La escritura de cada una de las dos ecuaciones de 1° grado con una incógnita y del sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas del problema es la parte material u ostensiva que evocan los constructos (no ostensivos) del proceso de conformación de una ecuación de primer grado con una incógnita y de un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. La escritura de los precios de venta de cada tipo de gasolina y el total de dólares recibidos por una venta es la parte material u ostensiva que evocan los constructos (no ostensivos) de la relación entre la cantidad total de dinero recibido en una venta y los dos tipos de precios de cada gasolina (regular y premium).

Representación/ Significación	Las funciones semióticas entre dos elementos, uno antecedente y el otro consecuente, que se evidencian en la resolución, son: La expresión "$x + y = 280$" (antecedente), remite al contenido que establece que los 280 galones de gasolina son el resultado de la suma de los tipos de gasolina (consecuente). La expresión "$2,2x + 3y = 680$" (antecedente), remite al contenido que establece que los 680 dólares son el resultado del producto de cada tipo de gasolina por su valor por galón (consecuente). La expresión "igual ambas expresiones: $y = y$" (antecedente), remite al contenido que establece que la igualación de ambas incógnitas de "y" implica la igualación de sus segundos miembros, con lo cual puede hallarse el valor de "x" (consecuente).
Particularización/ Generalización	Formas particularizadas: $280 = x + y$ $\$680 = \$2,2 \cdot x + \$3 \cdot y$ $\begin{cases} x + y = 280 \\ 2,2x - 3y = 680 \end{cases}$ Se pueden identificar dos formas generalizadas: la cantidad total de galones vendidos es igual a la suma de galones de gasolina regular y premium; la cantidad total de dinero recibido es resultado de la sumatoria entre las multiplicaciones de cada cantidad de galones del tipo de gasolina por su precio por galón.
Descomposición/ Unitarización	Se descompone el problema en la venta de 280 galones de gasolina (entre regular y premium), y el monto de dinero obtenido en una venta particular, de los dos tipos de gasolina. Al dar respuesta al problema, hallando los galones de cada tipo de gasolina, se advierte el proceso de unitarización que el estudiante realizó, que le permitió una comprensión reificada del problema.

Fuente: Elaboración propia.

Ahora, en la Figura 4 presentamos el desarrollo resolutorio y el análisis del problema 4, del estudiante E1, consignando únicamente los procesos secundarios. Se incluyó la resolución de dicho estudiante por ser una práctica matemática inconclusa y con errores en los argumentos matemáticos, lo que nos permite contrastar procesos con el estudiante E5.

Figura 4 – Resolución del estudiante E₁.

Problema N° 4:
En un examen tipo test de 30 preguntas se obtienen 0,75 puntos por cada respuesta correcta y se restan 0,25 por cada error. Si un alumno ha sacado 10,5 puntos ¿Cuántos aciertos y cuántos errores ha cometido?

Datos:
Preguntas: 30 → lo denoto con C
Puntos sacados: 10,5
errores y aciertos: ?
puntos por respuestas correctas: 0,75 → lo denoto con A
puntos por cada error: 0,25 → lo denoto con B

establezco la siguiente ecuación

$$A + B = C$$

$$0,75 + 0,25 = 10,5$$

resolviendo

$$B = 30 - A$$

$$0,75 = 30 - 0,75$$

* No se sigue resolviendo

por otro lado se que

$$A + B = 30$$

$$0,75 + 0,25 = 30$$

Fuente: Evidencia de los estudiantes

El análisis de los procesos secundarios se expone en la Tabla 3.

Tabla 3 – Configuración ontosemiótica de objetos y procesos secundarios: estudiante E₁

Problema 4 En un examen tipo test de 30 preguntas se obtienen 0,75 puntos por cada respuesta correcta y se restan 0,25 por cada error. Si un alumno ha sacado 10,5 puntos ¿Cuántos aciertos y cuántos errores ha cometido?	
Procesos	Estudiante E ₁
Personalización/ Institucionalización	El estudiante E1 evidencia el proceso de institucionalización al momento de deducir los “datos” que contiene el problema y asignarle letras: “preguntas: 30; puntos sacados: 10,5; errores y aciertos: ¿?; puntos por respuestas correctas: 0,75; por cada error: 0,25.” El proceso de personalización se puede identificar al observar que supone: $10,5 = C$; $0,75 = A$ y $0,25 = B$, y modeliza mediante las ecuaciones: $A + B = C$; $A + B = 30$; $A + B = 30$.
Materialización/ Idealización	La expresión $A + B = C$ es la parte material (ostensiva) que evoca el constructo (no ostensivo) de la relación de igualdad entre los puntajes por respuestas correctas e incorrectas, y el puntaje obtenido por un estudiante en particular, a través de una ecuación de primer grado. La expresión $A + B = 30$ es la parte material (ostensiva) que evoca el constructo (no ostensivo) de la relación de igualdad entre los puntajes por respuestas correctas e incorrectas, y la cantidad total de preguntas del examen (aclaramos que no estamos analizando el valor de verdad de ambas ecuaciones sino los procesos).

Representación/ Significación	La expresión $A + B = C$ (antecedente), remite al contenido que establece que la suma de puntos correctos e incorrectos es igual a 10,5 (consecuente). Sin embargo, su significado no es el que se corresponde con la expresión. La expresión $A + B = 30$ (antecedente), remite al contenido que establece que la suma de puntos correctos e incorrectos es igual al total de preguntas (consecuente). Sin embargo, su significado no es el que corresponde al problema.
Particularización/ Generalización	La expresión $A + B = C$ expresa de manera general la relación entre puntos por respuestas correctas, por respuestas incorrectas y el total de puntos logrados por un alumno. Luego particulariza el puntaje total de dicho alumno, mediante la expresión $0,75 + 0,25 = 10,5$. De igual modo, realiza la deducción con las expresiones $B = 30$ y $0,75 + 0,25 = 30$.
Unitarización/ Descomposición	Al inicio de la resolución se advierte que el estudiante E1 analiza el problema y comienza a descomponerlo en sus partes más simples. Se observa la discriminación de datos, relaciones entre estos y algunos cálculos menores.

Fuente: Elaboración propia.

Comparando el análisis de las resoluciones escritas por los estudiantes E1 y E5, advertimos la importancia de la identificación de todos los procesos existentes, a fin de comprender los caminos resolutorios, aciertos y errores matemáticos que se presentan en una práctica matemática operativa y discursiva.

Por otra parte, señalamos la importancia de la identificación de la materialización, la particularización y la descomposición, que se presentan de modo evidente y concreto en las resoluciones, pero evocan o remiten a sus duales menos evidentes y abstractos (idealización, generalización y unitarización). Esto nos permite explicitar lo que no se observa a simple vista en la práctica matemática de un estudiante; es decir, la materialización, la particularización y la descomposición son los medios materiales concretos para analizar y profundizar procesos abstractos como la idealización, la generalización y la unitarización.

5. CONSIDERACIONES FINALES

Se ha realizado un análisis para identificar y caracterizar, desde el EOS, los procesos matemáticos primarios y secundarios de estudiantes de los profesorados en Matemática y Física de la UNCAus, en la resolución de problemas algebraicos.

Se diseñó y se aplicó el instrumento de recolección de información y, posteriormente se analizaron las prácticas matemáticas mediante la herramienta configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos por cada estudiante y por cada problema.

Respecto a los problemas que integran el instrumento, estos son típicos de la enseñanza en la escolaridad formal. Si bien algunos contienen parámetros o datos menos comunes, su resolución no requiere de prácticas matemáticas complejas. Se observó que los pasos desarrollados por los cinco estudiantes, en su mayoría, reflejan la institucionalización (prácticas matemáticas institucionales) de las resoluciones, es decir, se advierte la intervención escolar en dichos procedimientos.

Por un lado, los procesos primarios se presentaron en casi la totalidad de las prácticas matemáticas de los estudiantes. Esto puede explicarse a partir de que son los procesos más comunes y conocidos por los alumnos; en general, su uso es muy frecuente en la enseñanza. Los procesos de comunicación, enunciación y algoritmización aparecieron más que otros. El proceso de argumentación no se evidenció significativamente, lo que sugiere que existen dificultades para desarrollar argumentos matemáticos válidos.

El proceso de comunicación destacó como el más utilizado por los alumnos, específicamente a través de notaciones matemáticas, dado que mediante este lenguaje desarrollaron la mayoría de las prácticas matemáticas. En ciertas ocasiones, usaron términos y expresiones lingüísticas para justificar o indicar ciertas prácticas matemáticas.

Por otro lado, se observaron procesos secundarios que se presentaron de un modo más frecuente y evidente. Por ejemplo, la dualidad particularización-generalización se presentó en todas las prácticas matemáticas. Los estudiantes identificaron patrones sobre la base de ciertos indicios particulares observados en los problemas. A su vez, aplicaron a casos específicos determinados patrones matemáticos para desarrollar las resoluciones.

La dualidad idealización-materialización también estuvo presente en todos aquellos estudiantes que desarrollaron procedimientos o resolvieron exitosamente el problema. Los objetos ostensivos permitieron a los estudiantes interactuar directamente con el objeto matemático, lo que facilitó su comprensión mediante la percepción sensorial: números, letras, notaciones, símbolos y palabras que describen los pasos realizados, las ecuaciones y los sistemas, etc. Los objetos no ostensivos se hicieron evidentes al observar las resoluciones y la relación entre los objetos ostensivos y sus resoluciones exitosas. Esto representa los constructos o creaciones discursivas de los estudiantes, que no son perceptibles por sí mismos y se consideran ideales o mentales, implementados para lograr dichas resoluciones.

El proceso de institucionalización estuvo presente en todos los procedimientos matemáticos de los alumnos. El tipo de resolución en estos casos es típico de desarrollos enseñados y aprendidos durante la educación formal. Esto puede entenderse al considerar que todos los estudiantes se encontraban cursando el 4º año de los profesorados en Matemática y Física, sujetos a formas de prácticas matemáticas compartidas y provenientes de las comunidades a las que pertenecen. El proceso de personalización casi no se presentó; no hubo evidencias de desarrollos resolutorios donde alguno de los alumnos aporte propuestas particulares, creativas o no convencionales.

Uno de los aportes significativos del presente trabajo es la consideración del estudio de los procesos matemáticos, a fin de conocerlos, identificarlos y caracterizarlos en profundidad, con el objetivo de mejorar las prácticas matemáticas de los estudiantes. Otra contribución importante del abordaje de procesos concretos como la materialización, la particularización y la descomposición, que evocan o remiten a sus duales (idealización, generalización y unitarización), es que su análisis permite estudiar las prácticas de resolución de los alumnos. Esto nos ayuda a comprender y mejorar las prácticas de enseñanza de la resolución de problemas algebraicos.

Por último, la presente investigación nos permitió profundizar en la identificación, análisis e interpretación de procesos en las prácticas matemáticas de los estudiantes. Para ello, fue fundamental la triangulación de la información, analizar las resoluciones, interpretarlas a través de las referencias teóricas, y volver a identificar los objetos y procesos matemáticos. Contrastando los resultados con el marco teórico, advertimos que la propuesta del análisis de procesos del EOS es significativo y se presenta como una herramienta valiosa para estudiarlos en la práctica diaria.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

Este artículo forma parte de una tesis doctoral (Doctorado en Educación – Universidad Nacional del Nordeste) que se encuentra en desarrollo. Los resultados representan la aplicación realizada como pruebas piloto para evaluar y mejorar el instrumento de recolección.

RFE encuadró teóricamente el trabajo y orientó sobre los pasos generales a seguir para lograr los objetivos. PAW realizó la selección de los problemas, el trabajo de campo, el análisis y sistematización de los datos. RFE y PAW realizaron la configuración ontosemiótica de objetos y procesos, el recorte del marco teórico y el establecimiento de objetivos y la definición del problema de investigación. Los autores participaron en la discusión de los resultados y revisión del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos completos que respaldan la investigación se encuentran disponibles, previa solicitud razonable, a través de los correos electrónicos señalados en el artículo.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a las autoridades de la UNCAus, por habernos permitido realizar el trabajo de campo y utilizar sus instalaciones. Agradecemos a los estudiantes que han participado desinteresadamente en la investigación.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Aké Tec, L. P. (2014). *Evaluación y desarrollo del razonamiento algebraico elemental en maestros de formación*. [Tesis doctoral. Universidad de Granada]. https://www.ugr.es/~jgodino/Tesis_doctorales/Lilia_Ake_tesis.pdf
- Bell, P. (2004). On the theoretical breadth of design-based research in Education. *Educational Psychologist*, 4(39), 243-253. https://doi.org/10.1207/s15326985ep3904_6
- Brown, A. L. (1992). Design experiments: theoretical and methodological challenges in creating complex interventions in classroom settings. *Journal of the Learning Sciences*, 2(2), 141-178. https://doi.org/10.1207/s15327809jls0202_2
- Burgos, M., Bueno, S., Pérez, O., & Godino, JD (2021). Complejidad ontosemiótica de la integral definida. *Revista de Investigación en Educación Matemática*, 10 (1), 4-40. <https://doi.org/10.17583/redimat.2021.6778>
- DBRC (The Design Based Research Collective) (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational Researcher*, 32(1), 5-8. <https://doi.org/10.3102/0013189X032001005>
- De Benito Crosetti, B. y Salinas Ibáñez, J. M. (2016). La investigación basada en diseño en Tecnología Educativa. *RIITE Revista Interuniversitaria de Investigación en Tecnología Educativa*, 0, 44-59. DOI: <http://dx.doi.org/10.6018/riite/2016/260631>.
- Dirección Nacional de Evaluación, Información y Estadística Educativa (2022). *Informe Nacional de Indicadores Educativos: situación y evolución del derecho a la educación en Argentina*. Ministerio de Educación de la Nación.
- Espinoza, F. (2020). Herramientas de análisis didáctico de un proceso de estudio enmarcadas en el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Urania. Revista de divulgación cultural sobre la*

- formación docente en matemática, (7), 29-37. <https://sites.google.com/view/revista-urania/p%C3%A1gina-principal?authuser=0>
- Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 33-52. <https://doi.org/10.1007/s10649-008-9123-7>
- Font, V. M. y Rubio, N. V. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Universidad de Jaén <http://hdl.handle.net/10481/45154>
- Font, V., Planas, N. y Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática, *Infancia y Aprendizaje*, 33 (1), 89-105. <http://10.1174/021037010790317243>.
- Gallo, S., Etchegaray, S., y Markiewicz, M. E. (2017). Análisis ontosemiótico de un problema que promueve la puesta en funcionamiento del razonamiento conjetural. *Yupana. Revista de Educación Matemática de la UNL*, 11, 38-57. <https://doi.org/10.14409/yy.v0i11.8841>
- Godino, J. D. (2022). “Emergencia, estado actual y perspectiva del enfoque ontosemiótico en educación matemática. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática (REVIEM)*, 2 (2), Artículo e202201. <https://doi.org/10.54541/reviem.v2i2.25>
- Godino, J. D. (2023). Enfoque ontosemiótico de la filosofía de la matemática educativa. *Revista Paradigma Edição Temática: EOS. Questões e Métodos*, 7-33.
- Godino, J. D. (2024). *Enfoque ontosemiótico en educación matemática. Fundamentos, herramientas y aplicaciones*. Editorial Aula Magna. McGraw-Hill Interamericana de España, S. L.
- Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2020). El enfoque ontosemiótico: implicaciones sobre el carácter prescriptivo de la didáctica. *Revista chilena de educación matemática*, 12(2), 47-59. <https://doi.org/10.46219/rechiem.v12i2.25>
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., Baptista Lucio, P. (2006). “*Metodología de la investigación (4ª ed.)*”. McGraw-Hill.
- Kelly, A. E., Lesh, R. A., y Baek, J. Y. (2008). *Handbook of design research methods in education* (pp. 511-534). Routledge.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 29(1), 75-88.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2002). “*Normas y estándares para la evaluación*”. Grupo Editorial Iberoamérica S. A. de C. V.
- Quintero Saavedra, A.C. (2016). Reseña crítica de “El paradigma cualitativo en la investigación socio-educativa”. *Infancias Imágenes*, 15.



NARRATIVAS SOBRE LAS TRAYECTORIAS DE FORMACIÓN PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS

NARRATIVES ON TRAINING TRAJECTORIES FOR TEACHING MATHEMATICS

Yully Stefanny Jiménez Rodríguez¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0004-8904-6431>

Elizabeth Torres Puentes²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3642-0571>

RESUMEN

Este artículo de investigación se expone el análisis de las experiencias de cuatro profesores en formación de la Licenciatura en Educación Básica Primaria de la Universidad Pedagógica Nacional que desarrollaron sus prácticas pedagógicas enseñando matemáticas durante la pandemia. El objetivo principal de dicha investigación fue comprender los elementos que configuraron las trayectorias de formación desde las dimensiones biográfica, educativa e histórica, de ese grupo de maestros en formación.

El estudio de caso, fue acogido como metodología que permitió reconocer los acontecimientos que configuraron la experiencia de los entrevistados, y ayudó a identificar sus trayectorias de formación. Los principales hallazgos tienen que ver con las trayectorias de formación relacionadas con la formación didáctica; la formación en la práctica; prácticas innovadoras y la resistencia a prácticas tradicionales; y la identidad del profesor de básica primaria que enseñar matemáticas.

Palabras clave: Trayectorias de formación, Formación didáctica, Narrativas, Profesores de matemáticas, Prácticas educativas.

ABSTRACT

This research article presents an analysis of the experiences of four pre-service teachers in the Bachelor's Degree in Primary Basic Education at the National Pedagogical University who developed their pedagogical practices by teaching mathematics during the pandemic. The main objective of this research was to understand the elements that shaped the training trajectories of this group of pre-service teachers from the biographical, educational, and historical perspectives.

1 Licenciada en Básica Primaria. Estudiante de la maestría en tecnologías de la información, Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia. Código postal: 16486. Email: ysjimenezr@upn.edu.co

2 Doctora en Educación. Docente de la Facultad de Educación, Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, Colombia. Código postal: 16486. Email: etorresp@pedagogica.edu.co



The case study was adopted as a methodology that allowed for the recognition of the events that shaped the interviewees' experiences and helped identify their training trajectories. The main findings relate to training trajectories related to didactic training; training in practice; innovative practices and resistance to traditional practices; and the identity of the primary school teacher who teaches mathematics.

Keywords: Training trajectories, Didactic training, Narratives, Mathematics teachers, Educational practices.

1. INTRODUCCIÓN

El trabajo de grado que da a luz este artículo se vinculó a la investigación titulada *Identidades narrativas de profesores de matemáticas vinculados a programas de formación de la Universidad Pedagógica Nacional*, aprobada en la convocatoria 2022 del Centro de investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional –CIUP-. El título del trabajo de grado se tituló *Narrativas sobre las prácticas educativas en pandemia: trayectorias de formación en matemáticas para la básica primaria* (Jiménez y Herrera, 2023).

En el marco de dicha investigación y con el interés de rastrear las trayectorias de formación de un grupo de estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica Primaria de la misma universidad, se identificaron dos tensiones que configuraron el problema a investigar. La primera refirió al cambio abrupto de las estrategias de enseñanza en las prácticas educativas de los profesores en formación que se generó a partir de la pandemia por Covid 19, llevando al desarrollo de unas competencias que no se hubieran potenciado seguramente en una práctica educativas presenciales. Ese fenómeno marcó las trayectorias de formación de quienes se preparaban en ese momento para ejercer como profesor, en particular en la básica primaria.

La pandemia llevó al sistema educativo a replantear las prácticas de enseñanza y aprendizaje en las escuelas y por lo tanto se reconsideró la inmersión de los practicantes para profesor en las facultades que forman maestros. Esto implicó retos significativos, pues las prácticas educativas que pretenden formar a los profesores mayoritariamente están diseñadas para desarrollarse de manera presencial y no de manera virtual o a distancia (Cárdenas, Hernández y García, 2022).

La segunda tensión que configuró el problema hizo referencia precisamente a la afectación de la pandemia en las trayectorias de formación de los profesores en formación, particularmente en las prácticas educativas en el área de matemáticas, pues implicó pasar de la explicación verbal y la manipulación de materiales, recursos y juegos (Torres y Casallas, 2021), a pensar en diseños instruccionales mediados por tecnología que permitieran a los niños trabajar sobre los objetos matemáticos, procurando su comprensión, sin la intermediación de los profesores (Torres, Campos, Morales y García, 2021).

A partir de estas dos tensiones la pregunta que orientó nuestra investigación fue: ¿cuáles son las trayectorias de formación develadas en las narrativas de un grupo de estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica Primaria de la UPN que desarrollaron sus prácticas educativas en matemáticas durante la pandemia por Covid 19?

2. ELEMENTOS CONCEPTUALES

Para el desarrollo de la investigación comprendimos que trayectoria de formación es un concepto dinámico,

cuando se utiliza el término trayectoria no pretendemos establecer un curso o un destino fijos; no es un camino que se puede prever o del cual se puede trazar un mapa *a priori*, sino un movimiento continuo que tiene un impulso propio, además de un campo de influencias. (Cacho, 2004, p. 81)

Panes y Lazzaro (2018), plantean que las trayectorias de formación se relacionan con la experiencia en tanto que “la práctica docente y la orientación pedagógica de un profesor se definen a partir de una serie de acontecimientos, saberes, experiencias, creencias y valores que se desarrollan a lo largo de su formación” (p. 10). Por lo tanto, en una trayectoria de formación no solo se tiene en cuenta los conocimientos que se adquieren y construyen como parte de la formación de los estudiantes para profesor, sino todos aquellos conocimientos que constituyen y edifican el saber a través del tiempo ya que están dotadas de un componente temporal en tanto que enlazan el pasado, el presente y el futuro en aras de conformar y valorar con sentido la experiencia de formación.

Según lo planteado por Cacho (2004), las trayectorias se estructuran temporalmente a partir de tres dimensiones:

Dimensión del tiempo biográfico se establecen secuencias según los ciclos de vida; en la del tiempo educativo, según los ciclos y dinámicas escolares; y en la del tiempo histórico, se presentan diferentes oportunidades y limitaciones a partir del contexto social, de las políticas laborales y educativas. (p. 81)

De acuerdo con este autor, “el análisis de las trayectorias formativas permite reconstruir una parte del proceso de la configuración de la identidad profesional de los profesores, así como del imaginario sobre lo que implica ser docente” (p. 81), ya que brinda una perspectiva general de los conocimientos que se requieren dominar y poner en práctica en el aula de clase y también de los que se deben adquirir o transformar con el propósito de mejorar la práctica educativa. Con lo propuesto por Cacho (2004), afirmamos que la trayectoria de formación no se configura solo en el tiempo de preparación para ser profesor, pues no se puede escindir de las experiencias personales permeadas por la familia y la cultura en general, así como por los acontecimientos históricos que se consolidan como hitos.

En cuanto a las trayectorias de los profesores de matemáticas, Llinares (2007) recalca la importancia y necesidad de que los profesores que se preparan para enseñar matemáticas desarrollen su aprendizaje y además lo puedan poner en práctica en el aula de clase, ya que la experticia se va ampliando en la medida en la que se combina lo aprendido con lo implementado, para ello el autor considera necesario que exista un engranaje entre la formación inicial y la formación continuada con el fin de integrar y transformar el conocimiento de una manera sistemática, además de mirar las trayectorias en relación con la experiencia de la práctica educativa.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

El estudio del cual emerge este artículo se centró en la perspectiva cualitativa entendida según Cerrón (2019) como:

Una forma de investigación flexible, sistemática y crítica de las regularidades del comportamiento de los agentes educativos. Las formas de transproducir conocimientos y aprendizajes en su entorno natural, formas de enseñanza – aprendizaje, vida académica, etc., en la estructura social a la que pertenece. El maestro investigador cualitativo es un actor social, participa e interactúa con los investigados (agentes educativos), conoce sus representaciones para comprender, interpretar, criticar y ejecutar la mejora continua del sistema educativo a partir de las huellas pedagógicas. (p. 3)

La educación y en particular la educación matemática hace parte de las ciencias humanas y en el campo de la investigación existe un constante interactuar con las personas involucradas, no se trata de recoger simples datos y estadísticas, el propósito es poder interpretar el sentir de cada sujeto desde su contexto y a partir de ello, elaborar juicios que sirvan para entender un fenómeno o una situación específica, de ahí la potencia de las narrativas como una forma de acceder y comprender ciertos fenómenos, en este caso a las trayectorias de formación de profesores de básica primaria que enseñan matemáticas.

Se recabaron las narrativas de cuatro profesores en formación de la Licenciatura en Educación Básica Primaria de la UPN, a partir de su experiencia relacionada con las prácticas educativas en matemáticas durante la pandemia por Covid 19, la cual configuró de manera especial sus trayectorias de formación.

Lo anterior, permite ubicar el estudio de caso como método para el desarrollo de la investigación, entendiendo este como “una forma de abordar un hecho, fenómeno, acontecimiento o situación particular de manera profunda y en su contexto, lo que permite una mayor comprensión de su complejidad y, por lo tanto, el mayor aprendizaje del caso en estudio” (Duran, 2012, p. 121).

La riqueza de experiencias que a nivel narrativo ofrece un profesor a través de su proceso de formación en la universidad y en las actividades de práctica de las matemáticas, suministra un sinnúmero de escenarios e interpretaciones que a través de su análisis sirve para repotenciar su experiencia en la práctica, ver las dificultades en el desarrollo de las mismas, lo que se aprende en cada clase, distinguir las diferencias entre ser profesor en práctica virtual y presencial, y constatar las características que debe tener un profesor para afrontar un reto como fue el de la pandemia.

De acuerdo con lo anterior se recurrió a la entrevista narrativa, entendida como,

Una forma particular de la entrevista en profundidad (...) que resulta idónea para reconstruir procesos subjetivos que se desarrollan en el tiempo. Una diferencia importante entre la entrevista narrativa y la entrevista en profundidad o la entrevista es que no posee un guion de preguntas establecido de antemano y por lo tanto no se preocupa como aquellas, por determinar tres aspectos fundamentales de la interacción entre el entrevistador y su sujeto de investigación: 1) la selección de los temas; 2) el orden de las preguntas, y 3) el lenguaje utilizado. En la entrevista narrativa, la participación del entrevistador es mínima, y especialmente se deja hablar al entrevistado sobre su experiencia con sus propias palabras. Éstas son una vía privilegiada de acceso a procesos subjetivos de significación que a su vez se nutren de discursos sociales, normas y valores culturales. El relato de vida se dirige a otro. Por ello la calidad de la escucha es clave y ésta debe prevalecer sobre lo “sabido”. (Agoff y Herrera, 2019, p. 315)

En la entrevista narrativa emergen las experiencias de una persona “las cuales no son experimentadas por él como anónimas, sino como subjetivas y exclusivas” (Tonon, 2009, p.49).

Los datos se recabaron por medio de un guion de entrevista narrativa que permitió construir una conversación con los participantes. Dicho guion se validó en el marco de la investigación aprobada por el CIUP-UPN, con pares expertos. Se construyeron unas subcategorías y descriptores de acuerdo con el objetivo, que permitieron identificar las cláusulas narrativas asociadas, las cuales fueron organizadas en una matriz de sistematización de la información.

Tabla 1 – Categorías y subcategorías de análisis.

CATEGORÍAS	SUBCATEGORÍA	INDICADORES
1. Trayectoria de formación	1. Dimensión biográfica	Cuando el entrevistado alude a experiencias de formación fuera del contexto escolar. Dichas experiencias están permeadas por familiares, amigos o profesores de la básica primaria y/o bachillerato.
	2. Dimensión educativa	Experiencias que aluden a las experiencias en el programa LEBP, y particularmente en la formación que le da herramientas para enseñar matemáticas.
	3. Dimensión histórica	Se hace alusión a elementos de la política pública o a los sucesos ocurridos en la época en la que fue formado.

Fuente: Jiménez y Herrera (2021, pp.59-60).

Para la identificación de las cláusulas narrativas en el análisis se ha considerado un código, construido a partir de la identificación del estudiante (1, 2, 3 o 4), y luego el número de la frase donde se ubica la transcripción, por ejemplo, el código: Estudiante 3, 76-78, indica que esa cláusula narrativa corresponde al tercer estudiante entrevistado y se toma las frases 76 a la 78 de la transcripción de la entrevista (Jiménez y Herrera, 2021). Los criterios para la selección de los participantes, correspondió a su interés por participar en la investigación y al desarrollo de sus prácticas educativas enseñando matemáticas durante y después de la pandemia. Una vez se culminó la etapa del análisis se hizo devolución a los entrevistados, como una acción ética de la investigación narrativa (Rivas, et al. 2021)

3. RESULTADOS

Para la interpretación de los resultados se realizó una triangulación entre las narrativas de los profesores en formación, y las dimensiones de las trayectorias de formación planteadas por Cacho (2004), de tal forma que entendimos la dimensión biográfica como aquella que permite reconocer el impacto de factores externos a la academia como lo son, la familia, los amigos, el entorno, los profesores que marcan y los intereses, y habilidades particulares de cada estudiante para profesor; la dimensión educativa hace referencia a experiencias que se viven durante el desarrollo de las prácticas como estudiante de la Licenciatura en Educación Básica Primaria, en las cuales se enseñó matemáticas; y por último la dimensión histórica al fenómeno de la pandemia y el impacto que tuvo sobre las trayectorias de formación.

En las narrativas de los entrevistados que dan cuenta de la *dimensión biográfica* en las trayectorias de formación, se vincula la familia como otro escenario, además de la universidad, que permite la proyección como maestros. De esta forma encontramos que la familia o un miembro de ella pudo ser un ejemplo para optar por la docencia, tal como se evidencia en el siguiente relato.

No, yo no me arrepiento, yo creo que desde el principio yo siempre quería ser profe por lo mismo que le decía, mi mamá desde pequeña, ella siempre quiso

también ser profe, ella no fue profe, pero cuidaba bebés en la casa, entonces siento que es de ahí [que] nace mi vocación por ser maestra. (Estudiante 4, 88).

De acuerdo con el relato de la entrevistada la familia es una motivación que la proyecta en el futuro, con el ejemplo de vida, la mamá ofrece una experiencia de conocimiento que sirve como influencia para ir alimentando el deseo de ser maestra, a este respecto Delory-Momberger (2020) expone que,

el conjunto de conocimientos disponibles no se construye exclusivamente sobre la base de experiencias vividas personal y originalmente. Una gran parte del conocimiento disponible toma la forma de saberes implícitos que no están sujetos a la construcción experiencial y que, en las condiciones habituales de uso, escapan a la reflexividad individual. Estos saberes implícitos tienen su origen en lo social y son transmitidos por los adultos (padres, educadores) y por las instituciones socializadas en forma de hábitos, reglas, representaciones, valores. (p. 8)

La importancia de la familia en la trayectoria de formación de los docentes es vital, pues como lo explica Delory-Momberger (2020), el aprendizaje cultural es el primero al que se expone el sujeto, y es en la familia donde se detonan estos aprendizajes, en tanto es allí donde se dan las primeras interacciones sociales con adultos.

Por otra parte, en cuanto a la *dimensión educativa*, se analiza el impacto de la formación propia de la Licenciatura en Educación Básica Primaria -LEBP- de la Universidad Pedagógica Nacional, en la trayectoria de formación de los cuatro entrevistados. En dicha dimensión se reconocen elementos que configuran la trayectoria de formación: el uso del material didáctico, la gestión de las clases de matemáticas y el saber propio de las matemáticas.

En relación con la formación en la incorporación de material didáctico en las clases de matemáticas, la estudiante 4 relata lo siguiente,

En la LEBP, digamos, que mirar como todas esas estrategias pedagógicas para llegar a ese conocimiento. También lo que les decía de la utilización del material que me pareció muy importante (Estudiante 4, 32).

La entrevistada resalta el papel que juega la utilización de materiales didácticos en las estrategias que adopta para enseñar las matemáticas, denota lo importante de contar con esas herramientas para resignificar su quehacer.

Para los entrevistados, la implementación de material didáctico en las clases de matemáticas y la forma como enriquece la experiencia del conocimiento del estudiante no es un asunto menor. En relación con la anterior afirmación encontramos el siguiente relato:

Digamos ella [la profesora] nos explicaba cómo utilizar el material y uno lo utiliza uno mismo, pero ya cuando llega a repartirlo con los estudiantes (...) como que llegan a haber confusiones, entonces sería bueno que todo lo que ella nos explica del material lo pudiéramos implementar en una práctica experimental con nosotros mismos. (Estudiante 4, 58). [...] *Les decía entonces como que ellos siguen con eso, entonces siento que el haber implementado ese material de fracciones que nos lo enseñó la misma profesora en la LEBP ha sido como el momento más satisfactorio cuando cambiamos de la pandemia a presencialidad.* (Estudiante 4, 75)

En el relato de la estudiante 4, se evidencia cómo el material didáctico impactó su trayectoria de formación, pues considera que tiene ahora más elementos para enseñar de manera adecuada las matemáticas, y lo ha podido experimentar en su práctica pedagógica. Al respecto Rivera, Vélez y Pupo (2009) indican que “el uso del material didáctico abre día a día paso a la posibilidad de generar mejores espacios pedagógicos y didácticos usando este como un medio de fortalecer el saber escolar” (p. 12), lo que resalta la importancia de los materiales

didácticos como aspectos que repotencian el quehacer como profesor en la formación en la LEBP, particularmente en la formación del profesor que enseña matemáticas.

Es importante resaltar que en las narrativas de los entrevistados aluden a material didáctico y recursos como sinónimos, desconociendo que efectivamente que estos tienen significados distintos (Torres y Casallas, 2021).

Otro elemento que configura las trayectorias de formación de los entrevistados se relaciona con la gestión de la clase de matemáticas. La gestión la entendemos con López (2018), como

El conocimiento de las técnicas, estrategias e instrumentos adecuados para conducir de manera correcta un grupo; la adquisición de la capacidad, de las destrezas, de las actitudes, de los comportamientos personales y profesionales, por parte del docente en el aula y en las diferentes interrelaciones con sus alumnos, familias, compañeros, así como la gestión de estas relaciones entre los propios alumnos, determina, en gran medida, la calidad del proceso de aprendizaje-enseñanza (Sanz y López-Luján, citado en López, 2018, p. 59).

De acuerdo con lo anterior, la estudiante 4 expresa en su relato que efectivamente en su trayectoria se hizo presente la formación en la gestión del aula,

y pues ya las clases de matemáticas que nos daba la profe, que siento [necesario] seguir retomando todo lo que ella nos decía y todo lo que debemos aprender para poderle dar las clases bien a los niños (4 - 48). [...] Ella nos enseñaba cómo poder llegar a los estudiantes de una manera diferente, entonces siento que todo eso ha funcionado también para las prácticas después de la pandemia, porque se siguió el mismo recorrido con el material didáctico (Estudiante 4, 53).

Lo que aporta el anterior relato, refiere a que, en su trayectoria, la estudiante reconoce que es importante que la formen para la gestión en el aula, con el fin de tener resultados en el aprendizaje de sus estudiantes.

En relación con el saber en matemáticas, encontramos que para los entrevistados es necesario comprender de manera óptima los objetos matemáticos para poder enseñarlos de una manera distinta a la que ellos los aprendieron, muchas veces sin un sentido o aplicación relevante, tal como se observa en el siguiente relato,

entonces lo que es sumar, lo que es restar, el conteo, eso me ha servido mucho, todo lo que aprendemos en matemáticas es para nuestra vida como maestros, que es lo que nos enseñó la profesora y la LEBP; es para la vida (Estudiante 4, 86).

Al respecto, se reconoce que “enseñar matemáticas en educación básica primaria implica poseer un conocimiento de y sobre las matemáticas y un conocimiento del aprendizaje de las nociones matemáticas y su proceso de enseñanza” (García et al., citado por Osorio, 2016, p. 3). Tener claro los conceptos apropiados a lo largo del proceso de formación, implica que el profesor sepa diseñar actividades que le permitan construir con los niños esos conceptos de manera coherente y veraz. El hecho de que los entrevistados reflexionen sobre cómo el programa les ha aportado para desarrollar una clase innovadora, con un saber robusto y el uso de materiales, nos lleva a considerar que sus trayectorias de formación son fuertes en la didáctica de las matemáticas.

A su vez, en relación con la *dimensión histórica*, los entrevistados reconocen la pandemia como un hito histórico que impactó notablemente sus trayectorias de formación. Es indudable las enormes repercusiones que trajo en la educación particularmente en la formación de maestros en relación con sus prácticas pedagógicas.

La pandemia representó una serie de retos a nivel familiar y profesional que implicó reinventarse para poder cumplir con el deber de formarse para la enseñanza, particularmente

de las matemáticas, por ello aquí consideramos la metáfora del malabarista, para mostrar que durante la pandemia los practicantes también tuvieron que sostener en medio de la incertidumbre, muchos procesos educativos, entre ellos la práctica pedagógica virtual, para lo que no estaban preparados, un ejemplo de esto es el siguiente relato,

En un espacio como el que yo tengo, con tantos roles en el mismo espacio, era muy complicado entonces conectarme con las niñas del colegio, dictar mi clase, estar pendiente de que mi hijo tuviera su clase y que prestara atención, de que no se pusiera a jugar porque está muy pequeño, de que mi esposo estuviera también allá en su trabajo, cuando no le podían hacer ruido, de que mi otro bebé viniera y que necesitaba ir al baño, de que pasara el de la mazmorra y uno en clase. (Estudiante 3, 6)

Las implicaciones de la pandemia revelaron las vicisitudes de enseñar desde el espacio doméstico, donde las responsabilidades maternas y como practicantes se intersecaban. Ahora bien, aunque los sacrificios fueron grandes, también hubo aspectos destacables que permitieron adquirir nuevos conocimientos, implementar nuevas herramientas y rediseñar procesos en aras de mejorar la logística de lo que sucedía cada día en el desarrollo de la práctica pedagógica en la pandemia. Al respecto podemos ver esa particularidad en el siguiente relato,

aprendimos mucho, por ejemplo, nos dio la posibilidad a nosotros como practicantes seguir sin tener que aplazar. Entonces, empezar de seguir trabajando, digamos una asistencia de manera online de trabajar un observador de manera online, de empezar a hacer unos seguimientos en los formatos de manera online, tener que usar otros recursos para enseñar matemáticas como softwares, porque no podíamos usar material didáctico, porque los niños no lo iban a manipular. Sí, porque es una cantidad de información que uno a veces desaprovecha (...). (Estudiante 3, 36)

Como se ha analizado, las narrativas de los estudiantes para profesor entrevistados permitieron reconocer unas trayectorias de formación particulares, permeadas por la experiencia en la LEBP, con el aporte concreto de los tres cursos de matemáticas presentes en el currículo del programa, pero también permeada por la pandemia, como un punto de inflexión en su formación, reconocieron aprendizajes puntuales que, de otro modo, tal vez, no se hubieran construido, por ejemplo el uso de softwares, plataformas educativas, drives de autogestión, etc.

4. CONCLUSIONES

Una vez recogidas y analizadas las narrativas de los cuatro entrevistados a la luz de las dimensiones propuestas por Cacho (2004), se reconocieron cuatro tipos de trayectorias de formación.

La primera trayectoria, la llamamos *trayectoria de formación en didáctica*, la cual evidenció que para los estudiantes entrevistados fue importante como maestros practicantes, ofrecer representaciones de tipo manipulativo para una mejor comprensión de los objetos matemáticos, por lo cual tuvieron que refigurar el uso del material didáctico manipulativo, por el uso de recursos virtuales como softwares, y juegos en línea, que abordan algunos objetos matemáticos. Los entrevistados resaltan la necesidad de formarse en didáctica de las matemáticas, pues consideran que con ello garantizan una mejor enseñanza y por supuesto un mejor aprendizaje en los niños.

La segunda trayectoria se relaciona con la *formación en la práctica*, en la que se muestra que para los estudiantes entrevistados fue vital la práctica pedagógica virtual para acercarse a los escenarios escolares, y en particular para construir y afinar sus estrategias de enseñanza de las matemáticas, y así poder anticiparse a la solución de problemas propios de su profesión. Los entrevistados reconocen que la experiencia de la práctica pedagógica es vital para su formación como profesor, por ello rescatan que el haber enseñado matemáticas durante la pandemia, con los retos que ello implicó, les otorgó un plus en su formación.

La tercera trayectoria, se denominó *experiencias innovadoras y de resistencia*, en las que los entrevistados muestran que su formación los llevó a un compromiso con la transformación en la enseñanza de las matemáticas incluso de manera virtual, donde la innovación tomó relevancia, y donde se intentó renunciar a ser un profesor tradicional, y la pandemia se aprovechó para ello. En esta trayectoria se reconoce cómo los entrevistados asumen una identidad como profesores de básica primaria que enseñan matemáticas, que los empodera como agentes de transformación de la educación en general y de la educación matemática en particular. De acuerdo con esta identidad surge la última trayectoria.

La cuarta y última trayectoria la denominamos de *identidad del profesor que enseña matemáticas*, en las que se reconoce que el profesor en formación fue consciente de que es un educador matemático, se identifica como tal y se responsabiliza de ese rol.

Las trayectorias identificadas, permitieron comprender la manera en que los entrevistados constituyeron experiencias de formación como profesores de la básica primaria que enseñaron matemáticas durante la pandemia, y cómo dichas experiencias les aportó en la configuración de sus trayectorias profesionales a futuro.

Es importante recalcar que la formación de la Licenciatura en Educación Básica Primaria- LEBP- de la Universidad Pedagógica Nacional efectivamente marca la trayectoria de formación de los cuatro entrevistados. Reconocemos desde sus narrativas que su formación didáctica es robusta, al igual que la pedagógica, pero consideramos, desde el análisis de los relatos, que se requiere una formación en la disciplina más fuerte y enfocada a superar los vacíos que pueden presentar los estudiantes de esta licenciatura en el área de matemáticas, para que ellos luego puedan enseñar las matemáticas de una manera innovadora.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

Este artículo es producto de la investigación titulada Trayectorias De Formación En Matemáticas Para La Básica Primaria, desarrollada por YJR, y BHM y orientada por ETP. La investigación se articuló a la investigación desarrollada por dos docentes entre ellas ETP, que se tituló Identidades narrativas de profesores de matemáticas vinculados a programas de formación de la Universidad Pedagógica Nacional, en el marco de la convocatoria 2022 del Centro de investigaciones de la Universidad Pedagógica Nacional –CIUP–, cuyo objetivo general fue caracterizar las identidades y trayectorias de formación de un grupo de estudiantes para ser profesor de matemáticas. El trabajo de pregrado que se vinculó a dicha investigación nace de la necesidad de analizar las experiencias de un grupo de profesores en formación de la Licenciatura en Educación Básica Primaria de la Universidad Pedagógica Nacional, que desarrollaron sus prácticas educativas en matemáticas durante y después de la pandemia, para poder comprender los diferentes impactos que esta tuvo en sus trayectorias de formación. Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo, en una acción de devolución ética.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio están disponibles en el repositorio de la Universidad Pedagógica Nacional en el vínculo de tesis de pregrado, y en el repositorio del CIUP-UPN. Si se requiere información adicional se puede consultar con los autores correspondientes, YJR, y ETP, previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

A los estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica Primaria que aportaron con sus narrativas al objetivo general y específicos de la investigación.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Agoff, C. y Herrera, C. (2019). Entrevistas narrativas y grupos de discusión en el estudio de la violencia de pareja. *Estudios sociológicos*. 37(110), 309-338.: <https://doi.org/10.24201/es.2019v37n110.1636>.
- Cacho Alfaro, M. (2004). Profesores, trayectoria e identidades. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos* (México), XXXIV(3), 69-111: <https://www.redalyc.org/pdf/270/27034304.pdf>.
- Cárdenas, L., Hernández, J., y García-Díaz, J. (2022). Transformaciones de la práctica pedagógica durante la pandemia por COVID-19: percepciones de directivos y docentes en formación en educación infantil. *Formación universitaria*, 15(2), 21-40. <https://dx.doi.org/10.4067/S0718-50062022000200021> DOI: <https://doi.org/10.4067/S0718-50062022000200021>
- Cerrón, W (2019). La investigación cualitativa en educación. *Horizonte de la Ciencia*, vol. 9, núm. 17: <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7762065>.
- Delory-Momberger, C. (2020). Aprendizaje biográfico y formación. . *Márgenes: revista de educación de la Universidad de Málaga*, 1 (3), 6-15: <https://doi.org/10.24310/mgnmar.v1i3.9770>.
- Durán, M. (2012). El estudio de caso en la investigación cualitativa. *Revista nacional de administración*, 3(1), 121-134: <https://doi.org/10.22458/rna.v3i1.477>.
- Jiménez, Y., y Herrera, B (2023). Narrativas sobre las prácticas educativas en pandemia: trayectorias de formación en matemáticas para la básica primaria. Trabajo de grado para optar al título de Licenciados en Educación Básica Primaria. Universidad Pedagógica Nacional. <http://repositorio.pedagogica.edu.co/handle/20.500.12209/18628>
- Llinares, S. (2007). Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional. Conferencia invitada en la XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas – JAEM. Granada, Julio. https://core.ac.uk/outputs/16355011/?utm_source=pdf&utm_medium=banner&utm_campaign=pdf-decoration-v1
- López, E. (2018). Dimensiones para evaluar una buena práctica educativa: el cuestionario sobre competencias del profesorado (CCPES II). *Edetania*, (54), 53-71.: <https://riucv.ucv.es/bitstream/handle/20.500.12466/74/Art.%203.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.
- Osorio, A. M. (2016). El desarrollo profesional docente en educación básica primaria. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 12(1), 39-52: <https://repositorio.ucaldas.edu.co/handle/ucaldas/16452>.
- Panes, R., y Lazzaro-Salazar, M. (2018). Trayectorias formativas y la identidad profesional de futuros profesores de matemática. *UCMaule*, (54), 9-34: <http://revistaucmaule.ucm.cl/article/view/51>.
- Quintero Osorio, D. M. (2016). Influencia del desempeño de los docentes de matemáticas en el aula de clase en las actitudes de los estudiantes frente a su aprendizaje, del programa Licenciatura en matemáticas y física de la Universidad Tecnológica de Pereira. <https://repositorio.utp.edu.co/handle/11059/6652>.

- Reyes, L., Peña, J. y Arias, D. (2023). Trayectorias educativas de líderes sociales que han vivido el encarcelamiento en Colombia. *Revista Eleuthera*, 25(1), 15-31. <https://doi.org/10.17151/eleu.2023.25.1.2>
- Rivas, I., Prados, E., Leite, A., Cortés, P., Márquez, Calvo, P., Martagón, V., y Acuña, M. (2021) “Ética, responsabilidad y trabajo colectivo en la investigación narrativa”, *New Trends in Qualitative Research*. Oliveira de Azeméis, Portugal, 5, pp. 139–151. doi: 10.36367/ntqr.5.2021.139-151
- Rivera, C., Vélez, A. M. y Pupo, M. Y. (2009). Análisis de la utilización de material didáctico en la enseñanza de las matemáticas del grado primero de educación básica. (Doctoral dissertation, Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira): <https://repositorio.utp.edu.co/bitstream/11059/1411/1/37133R621.pdf>.
- Tonon, G. (2009). La entrevista semi-estructurada como técnica de investigación. Graciela Tonon (comp.), 46, 45-73. https://colombofrances.edu.co/wp-content/uploads/2013/07/libro_reflexiones_latinoamericanas_sobre_investigacin_cu.pdf#page=48.
- Torres, A., Campos, M., Morales, L. y García, O. (2021). Aprendizaje de las Matemáticas durante la pandemia del COVID-19: el actuar de alumnos y docentes ante la transición de lo presencial a on-line. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 63, 1-15: <http://funes.uniandes.edu.co/29818/1/Torres2021Aprendizaje.pdf>.
- Torres Puentes, E., y Casallas Rodríguez, L. A. (2021). Materiales, recursos y juego: una distinción y relación necesaria en el aula de matemáticas. *Infancias Imágenes*, 20(2), 206–215. <https://doi.org/10.14483/16579089.17590>



APLICACIÓN DE LAS REPRESENTACIONES SEMIÓTICAS EN CÁLCULO MULTIVARIABLE MEDIANTE LA CONSTRUCCIÓN DE UNA MONTAÑA RUSA FÍSICA Y VIRTUAL

APPLICATION OF SEMIOTIC REPRESENTATIONS IN MULTIVARIABLE CALCULUS THROUGH THE CONSTRUCTION OF PHYSICAL AND VIRTUAL ROLLER COASTER

Juan Carlos Ruiz Castillo¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2218-1442>

RESUMEN

Este trabajo presenta la aplicación de las representaciones semióticas en el cálculo multivariable, utilizando la construcción de una montaña rusa física y su modelado en GeoGebra como herramientas de aprendizaje. La investigación se realizó con estudiantes de ingeniería y permitió explorar cómo las ecuaciones paramétricas y las representaciones gráficas favorecen el tránsito entre lo abstracto y lo tangible. Surge así la pregunta de investigación: *¿cómo incide la aplicación de las representaciones semióticas, a través del uso de GeoGebra y la construcción física de una montaña rusa, en la comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo multivariable en estudiantes de ingeniería?* Para responderla, se plantea como objetivo general analizar cómo la aplicación de las representaciones semióticas mediante el uso de GeoGebra y la construcción física de una montaña rusa facilita la comprensión de los conceptos del cálculo multivariable en estudiantes de ingeniería. Se evidenció un interés marcado en los estudiantes, una comprensión profunda de las ecuaciones paramétricas y un uso eficaz de GeoGebra para visualizar modelos tridimensionales, lo cual promovió una mejor integración de conocimientos interdisciplinarios.

Palabras clave: cálculo multivariable, representaciones semióticas, GeoGebra, ingeniería, ecuaciones paramétricas.

ABSTRACT

This work presents the application of semiotic representations in multivariable calculus through the construction of a physical roller coaster and its modeling using GeoGebra as learning tools. The research was conducted with engineering students and explored how parametric equations and graphical representations help bridge the gap between abstract concepts and tangible understanding. The guiding research question is: *How does the application of semiotic representations—through the use of GeoGebra and the physical construction of a roller coaster—impact engineering students' understanding of fundamental multivariable calculus concepts?* To address this question, the general

¹ Catedra de Matemática Escuela de Formación de Profesores en Enseñanza Media, Universidad de San Carlos de Guatemala, Guatemala, Guatemala, código postal C. P. 01010. Correo electrónico: jcefpem@profesor.usac.edu.gt



objective is to analyze how the application of semiotic representations through the use of GeoGebra and the physical construction of a roller coaster facilitates the understanding of multivariable calculus concepts in engineering students. The study revealed significant student interest, a solid understanding of parametric equations, and effective use of GeoGebra for visualizing 3D models, promoting better interdisciplinary knowledge integration.

Keywords: multivariable calculus, semiotic representations, GeoGebra, engineering, parametric equations.

1. INTRODUCCIÓN

El cálculo multivariable desempeña un papel crucial en la formación de los estudiantes de ingeniería, ya que proporciona las herramientas matemáticas necesarias para modelar y resolver problemas complejos que involucran múltiples variables. Desde el diseño de estructuras hasta la simulación de trayectorias en sistemas físicos, este campo permite conectar los conceptos teóricos con aplicaciones del mundo real, pues conlleva a una comprensión integral del entorno tridimensional. La capacidad de interpretar y manipular funciones de varias variables resulta esencial para el análisis de fenómenos físicos y la optimización de procesos en diversas disciplinas de la ingeniería.

El presente trabajo se enfoca en la aplicación del enfoque de representaciones semióticas para facilitar el aprendizaje de conceptos fundamentales del cálculo multivariable. Este enfoque, basado en la traducción y coordinación entre distintos registros de representación, permite a los estudiantes desarrollar habilidades cognitivas para transitar entre lo algebraico, gráfico y físico. Una herramienta clave para este proceso es el software GeoGebra, el cual brinda un entorno visual y manipulativo donde los estudiantes pueden experimentar y validar sus conocimientos.

Ruiz Castillo (2022) destaca que el uso de GeoGebra para modelar trayectorias tridimensionales, combinado con la construcción física de modelos, no solo promueve un aprendizaje significativo, sino que también potencia la autonomía y motivación de los estudiantes. Esta integración de tecnología y práctica física facilita la comprensión de conceptos abstractos, como las ecuaciones paramétricas, la derivada en varias variables y las trayectorias espaciales. En este contexto, el diseño y simulación de una montaña rusa representa una actividad interdisciplinaria ideal para aplicar y consolidar los conceptos del cálculo multivariable, dado que involucra conocimientos tanto matemáticos como de ingeniería y física.

2. ABORDAJE METODOLÓGICO

Elementos teóricos y conceptuales

2.1 Enfoque teórico

El Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOCM) proporciona una base teórica robusta para analizar y mejorar la manera en que los estudiantes interpretan, integran y coordinan diversas representaciones semióticas en el proceso de aprendizaje. Este enfoque se centra en la interacción entre los objetos matemáticos y sus diversas representaciones, tales como expresiones algebraicas, gráficas, tabulares y representaciones físicas (Godino, Batanero

y Font, 2009). Al reconocer que las representaciones no son simples traducciones mecánicas entre registros, el enfoque ontosemiótico subraya la importancia de construir significados coherentes y estructurados.

Una de las bases fundamentales de este enfoque es la teoría de registros de representación de Duval (2006), la cual establece que la comprensión profunda de un concepto matemático no depende exclusivamente de su representación en un solo registro, sino de la capacidad de traducir y coordinar entre varios registros. Este proceso involucra tareas cognitivas complejas, como identificar invariantes entre representaciones y reconocer la relevancia de cada una según el contexto del problema. Guerrero Morales y Falk de Losada (2023) subrayan que esta capacidad de transición entre registros es fundamental en el cálculo multivariable, donde los estudiantes deben relacionar representaciones algebraicas de ecuaciones paramétricas con su interpretación gráfica y geométrica.

Duval (2006) destaca que el éxito en la resolución de problemas matemáticos radica en la coordinación interna entre los sistemas de representación, la cual implica no solo reconocer equivalencias entre representaciones, sino también comprender cómo estas se complementan y enriquecen mutuamente. Por ejemplo, en el contexto del cálculo multivariable, la interpretación geométrica de las ecuaciones paramétricas permite a los estudiantes visualizar trayectorias espaciales que resultarían difíciles de conceptualizar solo con expresiones algebraicas (Godino y Font, 2010).

En este sentido, herramientas tecnológicas como GeoGebra juegan un papel crucial. Este software permite una interacción directa con los objetos matemáticos mediante la manipulación de gráficas, puntos y vectores en el espacio tridimensional, lo que facilita el proceso de transición entre lo abstracto y lo concreto (Guachún Lucero y Espadero Faicán, 2021). La visualización gráfica en tiempo real permite que los estudiantes detecten errores, ajusten sus ecuaciones y comprendan mejor las implicaciones geométricas de los cálculos matemáticos. Además, GeoGebra fomenta un entorno de aprendizaje activo donde los estudiantes pueden explorar de manera autónoma y creativa (Hitt y Saboya, 2020).

El enfoque ontosemiótico también enfatiza el papel de la práctica social y colaborativa en la construcción del conocimiento matemático. La discusión en grupos permite validar y ajustar los significados asignados a las diferentes representaciones; crea un entorno donde los estudiantes construyen comprensiones compartidas (Godino, 2013). En este sentido, proyectos interdisciplinarios como la simulación de una montaña rusa facilitan la integración del conocimiento matemático, físico y computacional, al proporcionar un contexto real y desafiante que promueve la participación activa de los estudiantes (Ruiz Castillo, 2022).

En fin, el enfoque ontosemiótico –junto con la teoría de registros de representación– ofrece una guía esencial para diseñar actividades de aprendizaje donde la coordinación entre registros permita superar las dificultades inherentes al aprendizaje del cálculo multivariable. Estas actividades pueden mejorar la comprensión y retención de conceptos matemáticos complejos, especialmente cuando se apoyan en herramientas tecnológicas como GeoGebra y estrategias colaborativas.

2.2 Descripción del trabajo realizado

Este trabajo se llevó a cabo con un grupo de 12 estudiantes de ingeniería en el marco de un curso de cálculo multivariable, durante un semestre académico. El objetivo fue integrar conceptos teóricos y prácticos mediante el diseño y construcción de una montaña rusa tanto en su versión física como virtual, utilizando el software GeoGebra. En una primera etapa del

curso se desarrollaron los contenidos fundamentales del cálculo multivariable, tales como funciones de varias variables, ecuaciones paramétricas, derivadas parciales, gradiente, extremos y trayectorias en el espacio tridimensional. Una vez abordados estos temas desde el enfoque teórico, se dio paso a la implementación del proyecto como una estrategia de aplicación interdisciplinaria. La actividad se estructuró en varias fases interrelacionadas que fomentaron la colaboración entre los estudiantes y la aplicación de herramientas tecnológicas para resolver problemas reales. Cada fase permitió poner en práctica los contenidos del curso, lo que facilitó el tránsito entre los registros algebraico, gráfico y físico, conforme al marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática y la teoría de registros de representación de Duval.

Fase 1: Introducción y desarrollo de conceptos teóricos

Durante la primera etapa del proyecto se desarrollaron en clase los conceptos fundamentales del cálculo multivariable, los cuales fueron clave para la futura implementación del diseño de la montaña rusa. Participaron 12 estudiantes de ingeniería, quienes abordaron temas como funciones vectoriales, ecuaciones paramétricas, derivadas parciales, gradiente y visualización tridimensional.

Uno de los primeros tópicos fue el estudio de funciones vectoriales, que permitieron representar la posición de un objeto en el espacio tridimensional como una función del tiempo o de otro parámetro. Este conocimiento resultó fundamental para el trazado de trayectorias en el diseño de la montaña rusa. Posteriormente, se trabajó con ecuaciones paramétricas, las cuales fueron esenciales para modelar cada punto del recorrido de la estructura; especialmente en secciones como ascensos pronunciados, descensos suaves y bucles. Esto permitió representar con precisión la trayectoria del carrito.

Asimismo, se introdujeron las derivadas parciales, orientadas al análisis de velocidad y aceleración en distintas direcciones del espacio. Esto aportó una visión dinámica del movimiento y permitió a los estudiantes comprender el comportamiento del modelo en términos físicos, como los cambios de velocidad y la distribución de fuerzas. Finalmente, las representaciones tridimensionales apoyadas por software como GeoGebra facilitaron una visualización completa del recorrido, por lo que permitieron observarlo desde múltiples perspectivas antes de su construcción física.

Desde el punto de vista teórico, esta fase se enmarca en el enfoque de las representaciones semióticas según Duval (2006), quien sostiene que el aprendizaje matemático profundo exige no solo operar en un registro de representación (por ejemplo, algebraico o gráfico), sino lograr la conversión significativa entre distintos registros. En este sentido, el tránsito entre representaciones algebraicas (como las ecuaciones paramétricas) y gráficas (como el recorrido simulado) es crucial para que los estudiantes construyan un significado coherente del objeto matemático en estudio.

El desarrollo de esta fase también se fundamenta en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOCM), el cual enfatiza la interacción entre los objetos matemáticos, los significados personales de los estudiantes y los sistemas de representación involucrados (Godino, Batanero y Font, 2007, 2009). Según este enfoque, la comprensión del conocimiento matemático emerge de la coordinación de prácticas y significados en contextos específicos; como en este caso, la aplicación del cálculo multivariable en la construcción de una montaña rusa. El diseño de actividades centradas en esta coordinación entre registros y significados

permite identificar configuraciones epistémicas y cognitivo-afectivas relevantes para la enseñanza.

Durante esta fase los docentes también incorporaron actividades guiadas para enfatizar la importancia de las representaciones semióticas en la descripción del movimiento tridimensional. Se trabajaron ejemplos específicos de trayectorias paramétricas que luego serían replicadas o adaptadas por los estudiantes en el desarrollo del proyecto. Así, esta fase sentó las bases conceptuales y cognitivas para el tránsito hacia una aplicación interdisciplinar del cálculo multivariable, donde los saberes matemáticos comenzaron a contextualizarse mediante herramientas tecnológicas y situaciones reales.

Fase 2: Modelado matemático de la trayectoria

Durante la segunda fase del proyecto, los estudiantes trabajaron colaborativamente en grupos para diseñar el modelo matemático de la trayectoria de la montaña rusa. El objetivo fue construir representaciones algebraicas precisas que capturaran el recorrido completo de la estructura, haciendo uso de ecuaciones paramétricas que describieran la posición del carrito en función de un parámetro común, generalmente el tiempo. Se modelaron diversas secciones del recorrido —subidas, bajadas, giros y bucles— utilizando funciones de varias variables, priorizando la continuidad, suavidad y plausibilidad física del movimiento.

Cada grupo propuso un conjunto de ecuaciones que posteriormente fue revisado y ajustado con base en criterios tanto matemáticos como físicos. Entre los criterios evaluados se encontraban: la continuidad de la velocidad (evitar saltos abruptos entre tramos), la suavidad de las curvas (para garantizar trayectorias diferenciables), y el respeto de las condiciones de entrada y salida de cada segmento de la montaña rusa. Este proceso implicó que los estudiantes debieran realizar razonamientos analíticos sobre las condiciones iniciales y de borde, así como verificar el comportamiento global del sistema modelado.

Desde una perspectiva teórica, esta fase supuso un avance en el tránsito entre registros semióticos, al llevar a los estudiantes desde una comprensión visual e intuitiva del recorrido hacia una representación algebraica formal mediante ecuaciones paramétricas. Según Duval (2006), este tipo de conversión entre registros —en este caso, del gráfico o verbal al algebraico— es una de las operaciones cognitivas más complejas del aprendizaje matemático, y constituye una condición necesaria para la comprensión profunda de los conceptos involucrados.

Además, el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática permite interpretar este proceso como una construcción de significado donde las prácticas matemáticas (definir ecuaciones, verificar condiciones, interpretar resultados) están mediadas por objetos semióticos que representan la trayectoria (Godino, Batanero y Font, 2007, 2009). Cada expresión algebraica constituye no solo una herramienta operativa, sino también un signo que debe ser interpretado dentro del sistema de prácticas del aula y del proyecto. Así, los estudiantes no solo manipularon fórmulas, sino que comenzaron a articular un sistema de significados matemáticos coherente con los fenómenos físicos simulados.

El hecho de que cada grupo desarrollara su propio modelo también promovió la emergencia de configuraciones epistémicas diversas, al permitir múltiples formas válidas de describir una misma trayectoria. Esto fomentó discusiones intergrupales sobre la idoneidad, equivalencia y conveniencia de diferentes modelos, y abrió oportunidades para el desarrollo del pensamiento crítico y la metacognición matemática.

Fase 3: Simulación en GeoGebra

Una vez definidas las ecuaciones paramétricas para describir el recorrido de la montaña rusa, los estudiantes emplearon el software GeoGebra 3D como herramienta tecnológica para representar gráficamente sus modelos en un entorno tridimensional. Esta simulación permitió visualizar de manera dinámica la trayectoria completa, lo que facilitó la verificación y el ajuste de las ecuaciones desarrolladas en la fase anterior. La posibilidad de manipular los parámetros en tiempo real dentro del entorno virtual promovió una interacción directa con los objetos matemáticos, y permitió a los estudiantes explorar cómo pequeños cambios en los coeficientes o funciones modificaban la geometría del recorrido.

El uso de GeoGebra se constituyó como una instancia clave de traducción entre registros semióticos, particularmente entre el registro algebraico (las ecuaciones paramétricas) y el registro gráfico (la visualización 3D). De acuerdo con Duval (2006), estas transiciones son fundamentales en el aprendizaje matemático, ya que permiten al estudiante establecer correspondencias significativas entre distintas formas de representación de un mismo objeto. En este caso, visualizar cómo la modificación de una expresión algebraica repercute en la forma de la trayectoria refuerza la comprensión funcional y geométrica de los modelos.

Desde el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (Godino, Batanero y Font, 2007, 2009), esta etapa representa una configuración epistémico-tecnológica en la que el software actúa como instrumento semiótico que media entre el conocimiento matemático formal y su interpretación visual y contextualizada. GeoGebra no solo permite representar, sino también experimentar con los objetos matemáticos, de manera que fomenta una práctica exploratoria que impulsa la construcción activa del significado. En este sentido, el entorno tecnológico no se limita a ilustrar resultados, sino que habilita nuevas formas de razonamiento y validación.

Adicionalmente, el trabajo con GeoGebra favoreció el desarrollo de habilidades metacognitivas al permitir que los estudiantes compararan sus modelos con otros grupos, identificaran inconsistencias y reflexionaran sobre las decisiones tomadas en la formulación de sus ecuaciones. La retroalimentación inmediata proporcionada por la herramienta digital fortaleció la autonomía cognitiva de los estudiantes, dado que les permitió asumir un rol más activo en el proceso de verificación y mejora de sus propuestas matemáticas.

Descripción del modelo de la montaña rusa en GeoGebra

La montaña rusa modelada en GeoGebra es un ejemplo excelente de la aplicación de múltiples conceptos de cálculo multivariable, ya que integra ecuaciones paramétricas y geometría tridimensional. Se observa que el modelo está compuesto por curvas suaves, bucles, y pendientes ascendentes y descendentes, todos representados en un sistema tridimensional (x, y, z) .

Ecuaciones paramétricas y trayectorias

El corazón del diseño radica en las ecuaciones paramétricas, que definen el movimiento del carrito de la montaña rusa en función de un parámetro t . Este parámetro controla la posición del carrito en cada instante, especificando su ubicación en los ejes x, y, z .

Ejemplo conceptual de ecuaciones paramétricas:

- $x(t) = f(t)$ describe el movimiento horizontal a lo largo del eje x .
- $y(t) = g(t)$ indica la variación en la dirección lateral.

- $z(t) = h(t)$ representa la elevación del carrito a lo largo de la trayectoria.

En el modelo de la Figura 1, las curvas suaves y los bucles implican ecuaciones que varían en función de funciones sinusoidales o polinomiales, y aseguran continuidad y suavidad en el recorrido.

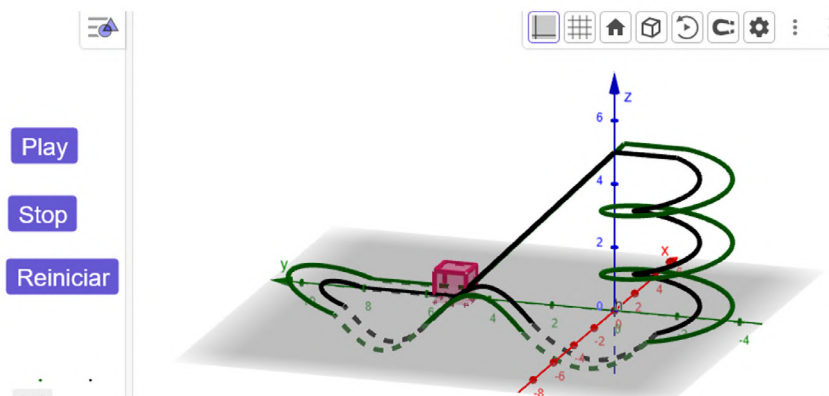
Aplicación de temas de cálculo multivariable

1. **Funciones de varias variables:** El modelo involucra funciones dependientes de múltiples variables, como el tiempo y la posición espacial. La interacción entre estas variables es clave para generar el movimiento continuo y fluido.
2. **Derivadas parciales:** Durante el diseño, las derivadas parciales permitieron analizar la velocidad del carrito en diferentes direcciones $\left(\frac{\partial x}{\partial t}, \frac{\partial y}{\partial t}, \frac{\partial z}{\partial t}\right)$, así como la aceleración resultante.
3. **Gradiente y derivadas direccionales:** El cálculo del gradiente se utilizó para determinar la dirección de mayor incremento de la altura (z), esencial para ajustar las pendientes y evitar cambios bruscos en la trayectoria.
4. **Extremos y optimización:** Se optimizó la forma de los bucles y curvas para garantizar que no existan puntos críticos donde la velocidad disminuya a cero, para evitar posibles detenciones no deseadas del carrito.
5. **Representaciones tridimensionales:** GeoGebra permitió visualizar cómo el carrito se desplaza en el espacio tridimensional, de forma que facilitó la comprensión geométrica de la trayectoria y permitió ajustes en tiempo real.
6. **Integrales múltiples:** Aunque implícitamente, se pueden calcular áreas y volúmenes bajo la curva de la montaña rusa o incluso energía potencial acumulada en las secciones más altas.

Simulación y validación

El botón de “play” visible en la interfaz de GeoGebra sugiere la simulación dinámica del movimiento del carrito. Durante la simulación los estudiantes pueden observar cómo los cambios en los parámetros afectan la trayectoria y ajustar las ecuaciones paramétricas en tiempo real (Figura 1). Esto fomenta un aprendizaje exploratorio y experimental.

Figura 1 – Representación de la montaña rusa en GeoGebra.



Fuente: Elaborado en GeoGebra.

Fase 4: Construcción física de la montaña rusa a escala

Tras la validación de las ecuaciones paramétricas mediante simulaciones en GeoGebra, los estudiantes procedieron a construir una versión física a escala de la montaña rusa. Para ello, utilizaron materiales accesibles como madera, tubos plásticos, cartón y piezas metálicas, lo que permitió materializar el modelo matemático diseñado previamente. Esta fase fue esencial para promover la conexión entre el conocimiento abstracto y su aplicación tangible, pues implicó que los estudiantes observaran y evaluaran directamente la correspondencia entre el comportamiento teórico del modelo y su desempeño físico real.

Durante el proceso constructivo surgieron diversos desafíos técnicos vinculados a la fricción, el peso de los materiales, las dimensiones físicas del prototipo y la estabilidad estructural. Estos factores obligaron a los estudiantes a ajustar sus modelos matemáticos, realizar nuevos cálculos y tomar decisiones basadas en consideraciones físicas y prácticas. Así, el modelo no fue simplemente replicado, sino que se reinterpretó y adaptó a condiciones del mundo real, lo que reforzó la comprensión interdisciplinaria del fenómeno.

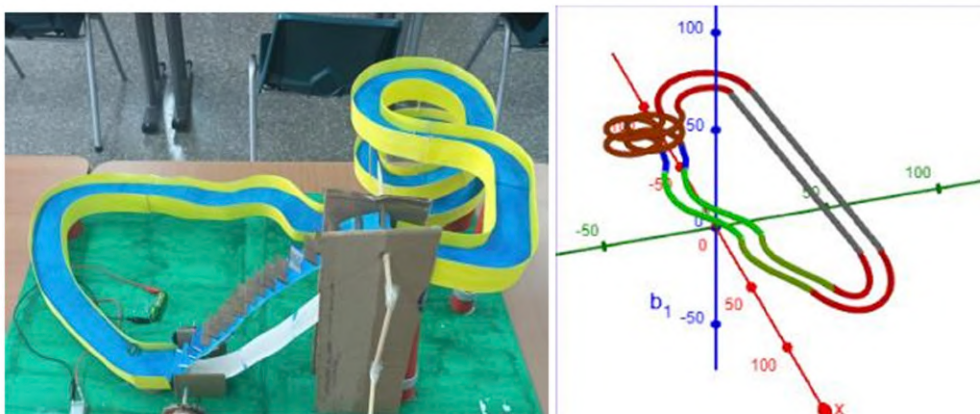
Desde una perspectiva teórica, esta fase constituye una instancia de traducción hacia el registro físico de representación, el cual Duval (2006) identifica como complementario a los registros algebraico, gráfico y tabular. Aunque menos formal, este registro es esencial para consolidar el significado de los objetos matemáticos en contextos concretos. La construcción tangible de la montaña rusa permitió a los estudiantes verificar la validez de sus representaciones anteriores, detectar inconsistencias, y ajustar parámetros para mantener la coherencia entre lo modelado y lo observado, lo cual favorece el desarrollo de una comprensión funcional y aplicada.

En el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (Godino, Batane-ro y Font, 2007, 2009), esta fase constituye un momento clave de práctica institucionalizada, en donde los objetos matemáticos adquieren sentido en la medida en que se integran a situaciones reales. El modelo físico no es únicamente una ilustración del contenido aprendido, sino una configuración epistémica que permite valorar la pertinencia del conocimiento matemático

al ser puesto en acción. El tránsito entre registros, más allá de una mera conversión simbólica, se convierte aquí en una práctica compleja de validación y ajuste semiótico, donde el estudiante asume un rol activo como diseñador, evaluador y recontextualizador de significados.

Además, esta etapa propició el trabajo en equipo, la resolución de problemas prácticos y la toma de decisiones colaborativas; contribuyó a la consolidación de habilidades transversales que fortalecen la formación integral del estudiante de ingeniería.

Figura 2 – Modelo físico.



Fuente: Elaboración propia de la montaña rusa construida con materiales reciclables y su construcción en GeoGebra.

Modelo físico y virtual de la montaña rusa

En la Figura 2 se presenta un modelo físico de una montaña rusa construido con materiales reciclables, junto con su correspondiente simulación digital en GeoGebra. El modelo físico incluye detalles estructurales como rieles curvados, elevaciones y descensos que simulan el recorrido de un carrito en movimiento. Los estudiantes utilizaron cartón, tubos de plástico y otros materiales reutilizables para crear una representación tangible del diseño matemático. Por otro lado, la construcción en GeoGebra permitió visualizar el modelo tridimensionalmente, con precisión en las trayectorias paramétricas y su correspondencia exacta en el espacio. Los rieles en verde y rojo representan las curvas paramétricas calculadas mediante funciones de varias variables, mientras que el entorno tridimensional facilita la observación de la dinámica del movimiento del carrito.

El proceso de diseño y construcción, tanto físico como digital, proporcionó a los estudiantes una experiencia integral de aprendizaje, dado que permitió conectar conceptos abstractos del cálculo multivariable con aplicaciones prácticas. Este enfoque también destacó la importancia de las representaciones semióticas, al traducir ecuaciones algebraicas en trayectorias físicas y visualizaciones interactivas.

Fase 5: Validación y análisis de resultados

Con el modelo físico construido, se llevó a cabo una fase de validación experimental con el propósito de comparar el comportamiento del prototipo con los resultados obtenidos mediante simulación virtual. Se realizaron diversas pruebas físicas para verificar la coherencia entre las ecuaciones paramétricas, las simulaciones en GeoGebra y el recorrido real de la montaña rusa. Los estudiantes recolectaron datos empíricos relacionados con la velocidad, aceleración y fuerza centrífuga en distintos tramos del trayecto. Estos datos se contrastaron con los valores teóricos previamente calculados, lo cual permitió identificar discrepancias y realizar ajustes al modelo, tanto en el plano físico como en sus representaciones matemáticas.

Esta etapa representó una instancia fundamental de validación entre registros. Según Duval (2006), el paso del registro algebraico (las ecuaciones) al gráfico (simulación) y, finalmente, al físico (prototipo) requiere una coordinación cognitiva compleja en la que los estudiantes deben reconocer invariantes semióticas entre representaciones que no comparten la misma estructura perceptiva ni simbólica. Este tipo de contraste favorece la detección de errores, la reconstrucción de significados y el refinamiento del modelo desde una perspectiva integradora.

Desde el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (Godino, Batanero y Font, 2009), esta fase permite reconocer la existencia de configuraciones epistémicas que se modifican a medida que el conocimiento se confronta con la realidad. La práctica de verificar, ajustar y reinterpretar modelos fortalece la construcción del significado matemático, al tiempo que promueve una mayor conciencia sobre los criterios de idoneidad didáctica, epistémica y tecnológica en la resolución de problemas. En este sentido, los estudiantes no solo validaron sus modelos, sino que también desarrollaron criterios de evaluación sobre la validez, precisión y aplicabilidad de los mismos.

Esta etapa también aportó elementos significativos al desarrollo del pensamiento crítico, al incentivar la reflexión sobre el error; no como falla, sino como una oportunidad para mejorar los modelos y profundizar la comprensión de las relaciones entre lo abstracto y lo concreto. Los estudiantes evidenciaron avances en su capacidad para analizar discrepancias entre teoría y práctica, así como para justificar modificaciones con base en argumentos matemáticos y físicos.

Fase 6: Reflexión final y presentación del proyecto

Al concluir el proyecto, cada grupo de estudiantes presentó sus hallazgos a través de un informe escrito y una exposición oral, en las cuales analizaron el proceso seguido y los resultados obtenidos durante las diferentes fases de trabajo. Estas presentaciones incluyeron reflexiones sobre cómo la articulación entre las representaciones semióticas —algebraica, gráfica y física— contribuyó a una comprensión más profunda de los conceptos del cálculo multivariable, tales como las ecuaciones paramétricas, las trayectorias espaciales y las derivadas parciales. Los estudiantes también subrayaron la relevancia de la colaboración grupal y el uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra en el desarrollo de sus competencias analíticas, creativas y comunicativas. Este espacio reflexivo promovió un ejercicio metacognitivo en el que se valoró no solo el producto final (la montaña rusa), sino también el proceso de aprendizaje que permitió conectar el conocimiento matemático abstracto con su aplicación tangible.

Desde el marco del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática, esta fase representa una instancia de consolidación de significados a través de la configuración

metadiscursiva del conocimiento matemático (Godino, Batanero y Font, 2009). La reflexión guiada permite identificar prácticas epistémicas y valorar la evolución del conocimiento personal y colectivo en un proceso que transforma las experiencias individuales en comprensiones compartidas. Asimismo, el reconocimiento explícito del papel de las representaciones semióticas responde a lo planteado por Duval (2006), quien enfatiza que el aprendizaje significativo no se limita a la producción de respuestas correctas; requiere que el sujeto justifique y explique sus procedimientos en distintos registros. La posibilidad de reflexionar sobre el tránsito entre lo algebraico, gráfico y físico permitió a los estudiantes identificar sus avances cognitivos, errores corregidos y estrategias adoptadas para resolver los desafíos del proyecto.

En suma, esta última fase no solo cerró el ciclo didáctico del proyecto, sino que abrió un espacio de evaluación formativa, autorregulación y toma de conciencia sobre el valor del conocimiento matemático como herramienta para resolver problemas reales. La combinación de simulación digital, construcción física y reflexión colaborativa se constituyó como una experiencia de aprendizaje activo, interdisciplinario y significativo, coherente con los principios de una educación matemática crítica y contextualizada.

3. RESULTADOS/DISCUSIONES

A partir de esta investigación sobre la aplicación de las representaciones semióticas en cálculo multivariable mediante la construcción de una montaña rusa física y virtual, se pueden generar diversas discusiones académicas y reflexivas en torno a los resultados, las metodologías y las implicaciones teóricas y prácticas del estudio. Estas discusiones pueden abordar desde cuestiones metodológicas y tecnológicas hasta aspectos cognitivos y didácticos relacionados con el aprendizaje de las matemáticas en entornos interdisciplinarios.

Una primera línea de discusión se centra en la eficacia del enfoque ontosemiótico en el aprendizaje del cálculo multivariable. El estudio se basa en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOCM), el cual enfatiza la importancia de traducir y coordinar entre diferentes registros de representación (algebraico, gráfico, físico y tabular) para desarrollar una comprensión profunda de los conceptos matemáticos. La discusión podría abordar en qué medida la coordinación entre registros semióticos facilita la comprensión de conceptos complejos como las ecuaciones paramétricas y las derivadas parciales, si este enfoque es más efectivo para temas específicos como el análisis vectorial y la interpretación geométrica de trayectoria, o si puede aplicarse de manera general en el aprendizaje del cálculo. También podría discutirse cómo mejorar la capacidad de los estudiantes para reconocer y coordinar registros semióticos mediante herramientas digitales como GeoGebra. Este análisis permitiría profundizar en el papel de las representaciones semióticas como elemento estructurante en la enseñanza de las matemáticas, y abriría nuevas líneas de investigación sobre cómo mejorar la coordinación entre registros en el aula.

Una segunda discusión relevante es la relación entre teoría y práctica en la enseñanza del cálculo multivariable. La investigación integra de manera innovadora la teoría matemática con una aplicación práctica mediante la construcción de una montaña rusa, lo que permite cuestionar qué tan efectivo es el aprendizaje basado en proyectos para mejorar la comprensión de conceptos abstractos como las ecuaciones paramétricas y las derivadas parciales. También podría analizarse cómo influye la manipulación física de una estructura real en la comprensión de las propiedades matemáticas de las trayectorias y las curvas en el espacio tridimensional, y hasta qué punto la práctica experimental mejora la capacidad de los estudiantes para interpretar y resolver problemas complejos en cálculo multivariable. Esta discusión permitiría

explorar cómo podría integrarse el aprendizaje basado en proyectos en el currículo general de cálculo multivariable para maximizar la comprensión teórica y práctica de los estudiantes.

El papel de las herramientas tecnológicas en el aprendizaje matemático representa otra línea de discusión. El uso de GeoGebra como herramienta de simulación y análisis gráfico fue un elemento clave en el éxito de la investigación. En este sentido, podría analizarse la influencia del uso de herramientas tecnológicas en la capacidad de los estudiantes para visualizar y analizar trayectorias complejas en el espacio tridimensional. Asimismo, se podría estudiar si GeoGebra es una herramienta suficientemente robusta para modelar situaciones físicas complejas, o si sería necesario incorporar software más especializado como MATLAB o Mathematica. También podría discutirse cómo afecta la interacción en tiempo real con un modelo gráfico tridimensional a la comprensión de las relaciones entre las ecuaciones paramétricas y su interpretación geométrica, así como cuáles diferencias se observan entre los resultados obtenidos mediante simulación en GeoGebra y los resultados experimentales obtenidos en el modelo físico. Esta discusión permitiría evaluar el papel de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas y explorar nuevas herramientas que podrían mejorar aún más el proceso de aprendizaje mediante simulación y modelado tridimensional.

Es importante reflexionar sobre los desafíos y limitaciones encontrados durante el desarrollo del proyecto, lo que podría llevar a una mejora tanto en la metodología como en la implementación futura de proyectos similares. Las discusiones en esta área podrían incluir cuáles fueron las principales dificultades que enfrentaron los estudiantes al diseñar y construir la montaña rusa, cómo se podrían ajustar las ecuaciones paramétricas para mejorar la estabilidad y el rendimiento del modelo físico, y cómo se podría mejorar la precisión de la simulación en GeoGebra para reflejar con mayor exactitud las condiciones físicas del modelo real. Además, podría analizarse qué factores externos (fricción, peso del material, errores de construcción) afectaron los resultados y cómo podrían controlarse en futuras investigaciones. Asimismo, hay espacio para plantear mejoras respecto a la retroalimentación y guía durante el proceso de diseño y construcción, para que la identificación y corrección de errores por parte de los estudiantes sea más eficiente. Esta discusión permitiría explorar nuevas estrategias para reducir las discrepancias entre los modelos teóricos y las implementaciones prácticas en futuros proyectos educativos.

El impacto en la motivación y la participación de los estudiantes constituye otra área de discusión importante. El proyecto se diseñó para promover un aprendizaje activo y participativo mediante la combinación de modelado matemático, simulación tecnológica y construcción física. La discusión podría abordar hasta qué punto la combinación de herramientas tecnológicas y actividades físicas mejora la motivación de los estudiantes para estudiar cálculo multivariable, qué diferencias en el nivel de participación se observaron entre las fases de modelado matemático, simulación y construcción física, y de qué manera influyó el trabajo colaborativo en la motivación y el rendimiento de los estudiantes. También podría explorarse cómo este enfoque integrador podría aplicarse en otros contextos académicos para mejorar la motivación y el compromiso de los estudiantes con las matemáticas. Esta línea de discusión abriría nuevas oportunidades para desarrollar metodologías activas y colaborativas que mejoren la motivación y la implicación de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas.

La transferencia de conocimientos y habilidades es otro aspecto clave de esta investigación. Un punto de discusión podría ser cómo influyó el proyecto en la capacidad de los estudiantes para aplicar conceptos de cálculo multivariable en otros problemas técnicos y de ingeniería, qué habilidades adquiridas durante el proyecto (como la resolución de problemas y el trabajo en equipo) pueden trasladarse a otros contextos profesionales y académicos, y de qué manera este enfoque podría replicarse o adaptarse en otras áreas de las matemáticas y la

ingeniería. También podría explorarse cómo influyó el desarrollo de la montaña rusa en la capacidad de los estudiantes para identificar y resolver problemas complejos mediante el análisis matemático. Esta discusión permitiría explorar el impacto a largo plazo de este enfoque metodológico en el desarrollo profesional y académico de los estudiantes.

Las implicaciones pedagógicas y metodológicas constituyen una última línea de discusión clave. El enfoque utilizado en esta investigación presenta importantes implicaciones para la enseñanza de las matemáticas en general. La discusión podría centrarse en cómo podría incorporarse este enfoque metodológico en el currículo de cálculo multivariable para maximizar el aprendizaje, de qué manera el uso de herramientas tecnológicas y modelos físicos puede facilitar el aprendizaje de otros conceptos matemáticos complejos y qué ajustes serían necesarios para replicar este proyecto en otros niveles educativos o en otros contextos culturales. También podría discutirse de qué manera este enfoque se podría combinar con otros métodos pedagógicos para crear un modelo de enseñanza más efectivo y significativo. Esta discusión abriría la puerta a nuevas investigaciones sobre la enseñanza de las matemáticas, mediante enfoques basados en proyectos, tecnología y construcción práctica.

Las discusiones generadas a partir de esta investigación ofrecen una oportunidad para profundizar en la relación entre teoría y práctica en la enseñanza del cálculo multivariable. Además, plantean nuevos desafíos y oportunidades para integrar la tecnología, la experimentación física y el análisis matemático en un proceso de aprendizaje más significativo e interdisciplinario.

4. CONCLUSIONES

El desarrollo del proyecto de la montaña rusa permitió evidenciar una serie de beneficios significativos en el proceso de aprendizaje de los estudiantes de ingeniería. Uno de los hallazgos más relevantes fue el alto nivel de interés y motivación demostrado por los participantes, quienes se involucraron activamente en cada fase del proyecto, desde la modelación teórica hasta la construcción física y validación experimental. Esta participación activa facilitó una comprensión profunda y sostenible de conceptos clave del cálculo multivariable, como las ecuaciones paramétricas, derivadas y trayectorias tridimensionales.

Un aspecto destacado fue la mejora significativa en la capacidad de los estudiantes para traducir entre diferentes representaciones semióticas (algebraicas, gráficas y físicas). Esta habilidad, esencial en el aprendizaje matemático, se logró gracias a la coordinación de actividades colaborativas y al uso de herramientas tecnológicas como GeoGebra, que permitieron a los estudiantes visualizar en tiempo real los efectos de sus decisiones matemáticas y ajustar sus modelos según las necesidades del proyecto.

La integración interdisciplinar también resultó clave. Al combinar conocimientos de matemáticas, física y tecnología, los estudiantes desarrollaron una comprensión más holística y aplicable de los conceptos teóricos. Esta experiencia interdisciplinaria no solo mejoró su capacidad de resolver problemas complejos, sino que también fomentó el desarrollo de habilidades blandas, como el trabajo en equipo y la comunicación efectiva al presentar y defender sus resultados.

El uso de GeoGebra se consolidó como una herramienta clave para la visualización y experimentación con modelos complejos. Su capacidad para ofrecer representaciones interactivas permitió que los estudiantes conectaran de manera directa las ecuaciones matemáticas con su interpretación gráfica y física, por lo que contribuyó a su comprensión conceptual y sus habilidades para realizar ajustes iterativos en los modelos. Además, se observó cómo el

entorno de aprendizaje tecnológico aumentó la autonomía de los estudiantes, quienes asumieron un papel más activo y crítico en su proceso de aprendizaje.

De cara a futuros trabajos, se recomienda la incorporación de más herramientas tecnológicas, como simuladores avanzados y aplicaciones de realidad aumentada, que puedan complementar el proceso de visualización y análisis. También sería beneficioso explorar proyectos interdisciplinarios adicionales que promuevan la aplicación de conceptos matemáticos en contextos reales e incentiven, así, el aprendizaje basado en la experimentación. La colaboración entre estudiantes de diferentes disciplinas podría enriquecer aún más el proceso, debido a la integración de nuevas perspectivas y enfoques.

El proyecto de la montaña rusa no solo logró sus objetivos de aprendizaje matemático, sino que también estableció un modelo efectivo de cómo las representaciones semióticas, el trabajo colaborativo y el uso de la tecnología pueden combinarse para generar un aprendizaje profundo y significativo en el ámbito de la ingeniería y otras ciencias aplicadas.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

Se declara lo que cada persona de la autoría desarrolló en el trabajo. Cada persona se abrevia con la inicial del nombre, iniciales de apellidos. Por ejemplo:

RFS y CPC concibieron la idea presentada. RFS desarrolló la teoría. RFS y CPC adaptaron la metodología a este contexto, crearon los modelos, realizaron las actividades y recopilaron los datos. RFS analizó los datos. Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por el autor, JCR (Juan Carlos Ruiz), previa solicitud razonable.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168. <https://skat.ihmc.us/rid=1JM80JJ72-G9RGZN-2CG/La%20habilidad%20para%20cambiar%20el%20registro%20de%20representaci%C3%B3n.pdf>
- Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2009). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Universidad de Granada*. https://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- Guachún Lucero, P. y Espadero Faicán, G. (2021). El software GeoGebra como recurso para la enseñanza de vectores: Una experiencia didáctica. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, 16(37), 46-60. <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/53/52>
- Guerrero Morales, L. y Falk de Losada, M. (2023). Una mirada a la teoría de representaciones semióticas de Duval desde el pensamiento manifestado por participantes en las olimpiadas colombianas de matemáticas. *South Florida Journal of Development*, 4(3), 1433-1453. <https://doi.org/10.46932/sfjdv4n3-030>
- Ruiz Castillo, J. C. (2022). La aplicación de herramientas digitales con el enfoque ontosemiótico y su influencia en el aprendizaje de funciones exponenciales y logarítmicas. *Revista Científica del SEP*, 5(1), 15-22. <https://revistasep.usac.edu.gt/index.php/RevistaSEP/article/view/92>



UNA DESCOMPOSICIÓN GENÉTICA PRELIMINAR PARA EL CONCEPTO DE LOGARITMO COMO NÚMERO REAL

A PRELIMINARY GENETIC DECOMPOSITION FOR THE CONCEPT OF LOGARITHM AS A REAL NUMBER

Kevin David Gómez Guillén¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0002-5415-4729>

Fabián Wilfrido Romero Fonseca²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-4472-963X>

RESUMEN

Este artículo aborda las dificultades en la comprensión del logaritmo como número real, un concepto clave en matemáticas, y propone una descomposición genética preliminar desde la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas). Mediante un enfoque cualitativo basado en el análisis teórico e histórico de la obra de John Napier, se identificaron estructuras y mecanismos mentales involucrados en su construcción. Los resultados destacan tres fases: manipulación de progresiones geométricas, desarrollo de un modelo discreto y su extensión a un modelo continuo. Esta propuesta no solo facilita la comprensión del logaritmo, sino que también proporciona herramientas pedagógicas que integran epistemología e historia, contribuyendo a una enseñanza más efectiva del concepto. Al explorar el desarrollo histórico y epistemológico de este concepto fundamental, se busca no solo comprender su esencia matemática, sino también comprender las complejidades cognitivas inherentes a su concepción.

Palabras clave: APOE, Logaritmo, Descomposición Genética, Historia, Epistemología.

ABSTRACT

This article addresses the difficulties in understanding logarithms as real numbers, a key concept in mathematics, and proposes a preliminary genetic decomposition based on the APOS theory (Actions, Processes, Objects, and Schemas). Through a qualitative approach grounded in theoretical and historical analysis of John Napier's work, the study identifies the mental structures and mechanisms involved in its construction. The results highlight three phases: manipulation of geometric progressions, development of a discrete model, and its extension to a continuous model. This proposal not only facilitates the understanding of logarithms but also provides pedagogical tools that integrate

1 Instituto de Investigaciones Psicológicas, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, código postal C. P. 11501-2060. Correo electrónico: kevin.gomezguillen@ucr.ac.cr

2 Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, código postal C. P. 11501-2060. Correo electrónico: fabian.romero@ucr.ac.cr



epistemology and history, contributing to a more effective teaching of the concept. By exploring the al and epistemological development of this fundamental concept, the study aims to deepen the understanding of its mathematical essence and the cognitive complexities inherent in its conception.

Keywords: APOS, Logarithm, Genetic Descomposition, History, Epistemology.

1. INTRODUCCIÓN

El logaritmo es un concepto esencial en matemáticas, utilizado en diversas áreas como la física, la ingeniería y las ciencias sociales. A pesar de su importancia, su enseñanza enfrenta numerosos desafíos, especialmente en el ámbito educativo de Costa Rica. Según el Programa de Estudio de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012), el logaritmo se aborda principalmente desde su relación con las funciones matemáticas. Sin embargo, este enfoque deja de lado su comprensión como número real, limitando su significado y dificultando la construcción de aprendizajes relacionados con conceptos posteriores, como la función logarítmica.

Alguacil et al. (2016) señalan que esta problemática afecta tanto a estudiantes como a docentes. Por un lado, los estudiantes suelen enfrentar dificultades al intentar comprender el concepto de logaritmo, lo que genera confusiones y desconexiones en su aprendizaje. Por otro lado, los docentes a menudo carecen de herramientas didácticas y metodológicas adecuadas para abordar estas dificultades, lo que perpetúa la brecha conceptual. Esta situación subraya la necesidad de replantear el modo en que se enseña y se conceptualiza el logaritmo en los entornos educativos.

La desconexión entre el significado del logaritmo como número real y su aplicación en contextos cotidianos y matemáticos se ha documentado ampliamente en investigaciones previas. Estas han señalado una brecha significativa entre la introducción inicial del logaritmo como un facilitador de cálculos numéricos y su posterior tratamiento como función matemática. Ferrari y Farfán (2001) describen esta desconexión como una especie de *dislexia* en el discurso matemático escolar, evidenciando la dificultad de integrar estas perspectivas de manera coherente.

Para abordar estas limitaciones, diversos estudios han propuesto analizar el desarrollo histórico y epistemológico del logaritmo como una estrategia para enriquecer su enseñanza. Investigaciones como las de Sanabria (2016), Gacharná (2012), Costa y Sanabria (2016) y Vargas (2020) han destacado la importancia de conocer el origen y la evolución del concepto de logaritmo, ya que esto permite identificar las ideas clave que subyacen en su construcción. Además, se ha resaltado la relevancia de integrar la historia, la epistemología y el uso de tecnologías de la información en los enfoques didácticos para mejorar su comprensión (Abrate y Pochulu, 2007; Panagiotou, 2010; Rizzo, 2014; Cachuay y Pino, 2013).

En este contexto, esta investigación surge como respuesta a la necesidad de comprender mejor las estructuras y mecanismos mentales que los estudiantes emplean al construir el concepto de logaritmo como número real. Para ello, se plantea como objetivo principal diseñar una descomposición genética preliminar del logaritmo, enmarcada en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas). Este marco teórico permite analizar y estructurar las construcciones mentales asociadas al concepto, ofreciendo una base para mejorar su enseñanza y aprendizaje.

Con esta propuesta, se busca no solo identificar las dificultades inherentes a la enseñanza del logaritmo, sino también generar herramientas prácticas que permitan a los docentes

abordar estas problemáticas de manera más efectiva. La descomposición genética preliminar presentada en este estudio constituye un primer paso hacia la articulación de un enfoque didáctico más robusto, que integre elementos históricos, epistemológicos y tecnológicos en el aprendizaje del logaritmo.

2. REFERENTE TEÓRICO: TEORÍA APOE

Cuando la teoría APOE se refiere a estructuras mentales, alude a aquellas que son relativamente estables y que permiten al individuo interpretar y dar sentido a las situaciones en el contexto matemático (Arnon et al., 2014). Estas estructuras no son estáticas; evolucionan y se desarrollan constantemente mediante los *mecanismos mentales*. En el marco de esta teoría, las estructuras fundamentales son: *acción*, *proceso*, *objeto* y *esquema*, mientras que los mecanismos asociados incluyen la *interiorización*, *encapsulación*, *coordinación*, *reversión* y *desencapsulación* (Dubinsky et al., 2005).

La construcción de un concepto matemático comienza con las *acciones*, que son transformaciones desencadenadas por estímulos externos. Las acciones son secuenciales y explícitas, lo que significa que cada paso debe realizarse de manera ordenada y sin omisiones, ya que cada uno es fundamental para el éxito del proceso. Por ejemplo, cuando un estudiante resuelve un problema matemático siguiendo instrucciones específicas, cómo aplicar un algoritmo o realizar un cálculo, está ejecutando una acción. Según Arnon et al. (2014), estas transformaciones están condicionadas por los estímulos recibidos y, aunque pueden ser repetitivas, sientan las bases para la construcción de estructuras más complejas.

El paso de una acción a un proceso se realiza mediante el mecanismo de *interiorización*. Este mecanismo implica que el individuo asimila la acción y la lleva al plano mental, de modo que puede imaginar y controlar los pasos necesarios sin ejecutarlos físicamente (Dubinsky et al., 2005). En esta etapa, el estudiante ya no necesita estímulos externos para realizar la transformación, sino que la operación ocurre de manera mental. Por ejemplo, un estudiante que ya no necesita escribir cada paso de un cálculo para resolverlo mentalmente ha logrado interiorizar esa acción. Además, esta etapa permite reflexionar sobre los resultados obtenidos, generalizar procedimientos y trabajar con casos abstractos o generales (Arnon et al., 2014).

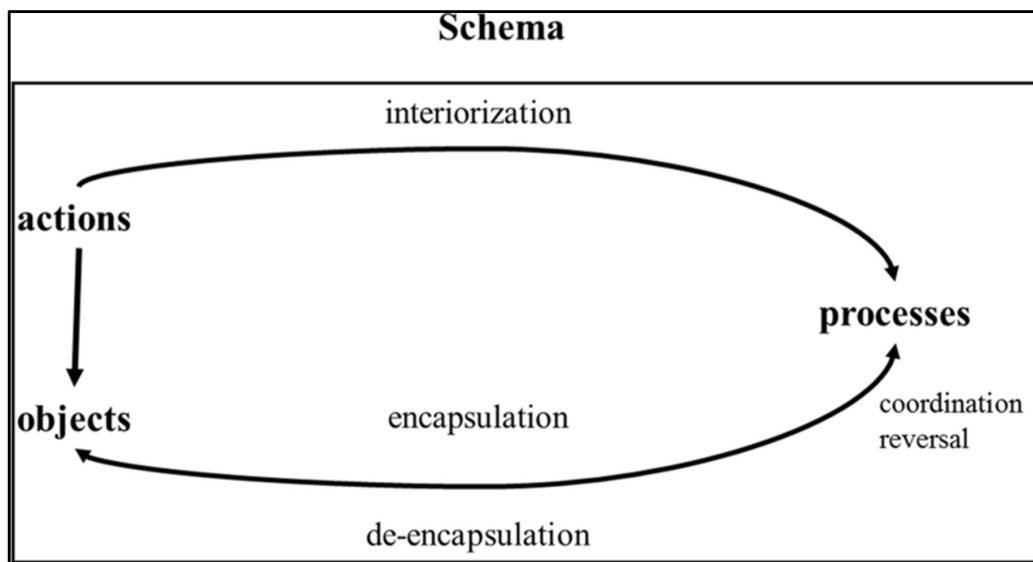
La transición de un proceso a un objeto ocurre mediante el mecanismo de *encapsulación*. Una vez que el estudiante deja de percibir los procesos como dinámicos y los concibe como estructuras estáticas, se dice que ha construido un *objeto*. Este objeto puede ser manipulado como un todo, lo que abre la posibilidad de realizar nuevas acciones sobre él. Por ejemplo, un estudiante que comprende el concepto de función no como un conjunto de puntos en un plano, sino como un objeto matemático que puede ser evaluado, transformado o combinado con otras funciones, ha logrado esta transformación. Según Dubinsky et al. (2005), la encapsulación es esencial para permitir que el individuo realice razonamientos abstractos y desarrolle conceptos más complejos.

Finalmente, el *esquema* representa el nivel más alto de organización en la teoría APOE. Un esquema es una estructura mental amplia y dinámica que integra acciones, procesos y objetos para abordar situaciones matemáticas complejas (Arnon et al., 2014). Los esquemas no son rígidos; se adaptan y evolucionan a medida que el individuo enfrenta nuevos problemas y experiencias. Según Dubinsky et al. (2005), un esquema puede describirse como un marco conceptual que permite al estudiante coordinar y organizar conocimientos previos para responder de manera eficiente a una variedad de contextos. Los esquemas desempeñan un papel

crucial en el aprendizaje matemático, ya que representan la culminación de la construcción conceptual y la base para resolver problemas complejos. Según Arnon et al. (2014), los esquemas no solo integran conocimientos, sino que también reflejan la capacidad del estudiante para relacionar conceptos aparentemente dispares, como funciones y derivadas, o progresiones aritméticas y geométricas.

Gráficamente Dubinsky (2002) resume el modelo teórico en la siguiente figura:

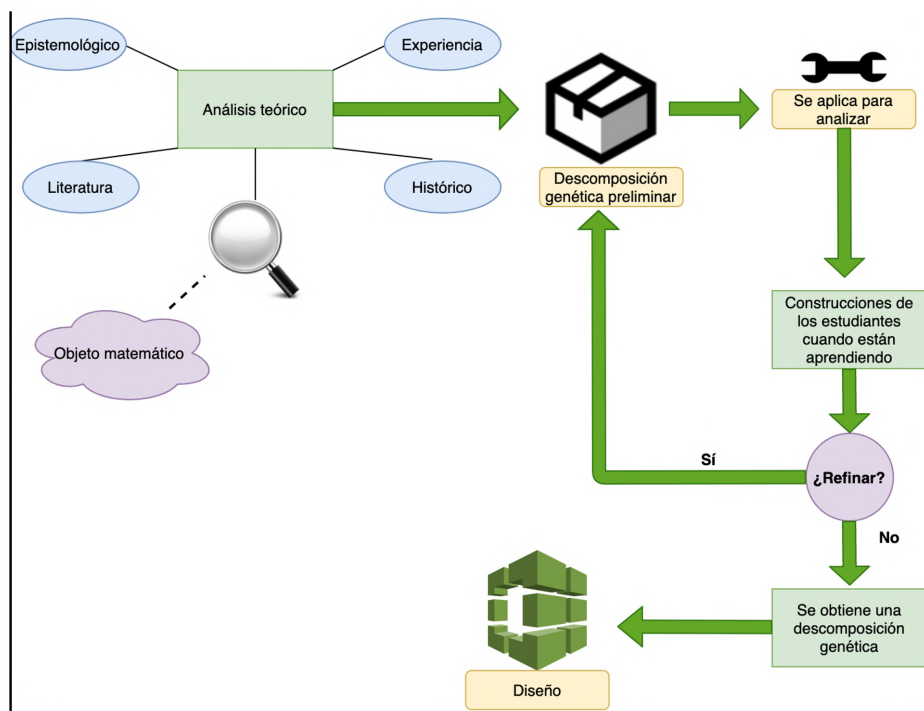
Figura 1- Representación gráfica de la Teoría APOE.



Fuente: (Dubinsky, 2002)

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

Para construir una descomposición genética, la teoría APOE plantea un esquema metodológico cíclico, como se muestra en la Figura 2. Este enfoque no solo permite avanzar en el análisis de los conceptos matemáticos, sino que también facilita la revisión y refinamiento de las etapas iniciales a partir de la implementación y evaluación de resultados. Es decir, después de aplicar y analizar los datos obtenidos, es posible regresar a la descomposición genética preliminar para corregir, ajustar y volver a aplicarla. Este carácter cíclico es crucial para garantizar la validez y utilidad del modelo propuesto (Dubinsky et al., 2005).

Figura 2- Ciclo de elaboración de la descomposición genética.

Fuente: (Brenes y Gómez, 2022).

Este ciclo de investigación tiene tres componentes principales: análisis teórico; diseño e implementación de la enseñanza; y recolección y análisis de los datos.

Representa el punto inicial y más relevante de este artículo, ya que se centra en la construcción de la descomposición genética preliminar. Este análisis implica un estudio detallado del desarrollo cognitivo relacionado con el concepto de interés, en este caso, el logaritmo como número real. El análisis considera múltiples perspectivas, incluyendo libros de texto, investigaciones previas, la experiencia docente y el desarrollo histórico del concepto. Este componente proporciona una base teórica sólida para guiar las etapas posteriores del esquema metodológico (Arnon et al., 2014).

Para el segundo componente, el de diseño e implementación de la enseñanza, se utiliza la descomposición genética preliminar como una guía para desarrollar actividades y estrategias de enseñanza. Estas deben estar orientadas a promover las construcciones mentales descritas en el modelo teórico. Aunque este artículo no se centra en esta etapa, su relevancia reside en probar la eficacia del modelo diseñado mediante su aplicación en contextos educativos específicos.

En caso de que dicha descomposición genética evidencie que es una buena aproximación al concepto matemático de interés, se presenta la tercera etapa, que corresponde a la recolección y análisis de los datos, la cual tiene como propósito principal la validación de la descomposición genética y su implementación en la enseñanza. Dentro de la implementación,

generalmente los datos recolectados para dar respuesta a las siguientes interrogantes: ¿Los estudiantes aparentemente realizan las construcciones mentales que se habían descrito en la descomposición genética? ¿Qué tan bien aprendieron los estudiantes el concepto en cuestión? (Serrano, 2019, p.5)

Es importante enfatizar que este artículo se limita al primer componente, el análisis teórico, para proponer una descomposición genética preliminar del logaritmo como número real. Las otras dos etapas del esquema metodológico —diseño e implementación de la enseñanza, y recolección y análisis de datos— no forman parte de este trabajo. Por otra parte, en relación con el análisis teórico, aunque existen múltiples fuentes que destacan su importancia en el marco de la teoría APOE, hay una escasez de investigaciones específicas que detallan qué elementos considerar al realizar un análisis histórico-epistemológico, particularmente de una obra original. Este vacío metodológico subraya la necesidad de profundizar en los enfoques que guían este tipo de análisis (Arnon et al., 2014; Dubinsky et al., 2005).

3.1 Selección de la obra original

El desarrollo histórico del concepto de logaritmo ha sido fundamental para comprender su construcción como número real. Este análisis histórico-epistemológico constituye la primera etapa de la descomposición genética preliminar, en la cual se identifican los textos originales que aportaron a la construcción del logaritmo.

El interés principal de este trabajo se centra en los aportes realizados por John Napier, considerado el inventor del logaritmo. Para ello, se seleccionó como referencia principal su obra *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (Descripción de las maravillosas tablas de logaritmos), publicada por primera vez en 1614 en Edimburgo, Escocia. Este texto es ampliamente reconocido como el punto de partida para la introducción del concepto de logaritmo, y su análisis resulta esencial para comprender las bases matemáticas y epistemológicas que subyacen en este concepto.

Para el desarrollo de este trabajo, se utilizó la versión traducida al inglés por Edward Wright en 1616, titulada *A Description of the Admirable Table of Logarithms*, publicada por la editorial Renacents Books. Esta traducción fue seleccionada debido a su accesibilidad y a la fidelidad con que preserva los elementos matemáticos originales del texto en latín, facilitando el análisis desde una perspectiva histórica y pedagógica.

La selección de esta obra se realizó considerando su relevancia histórica y su impacto en el desarrollo de las matemáticas, especialmente en el contexto de los cálculos aritméticos y geométricos de su época. Su análisis bajo la perspectiva de la teoría APOE permite identificar las acciones, procesos y objetos presentes en la construcción del logaritmo como número real, así como los mecanismos mentales implicados.

3.2 Construcción de cuestionamientos analíticos

Para diseñar una descomposición genética preliminar del logaritmo como número real, es necesario realizar un análisis histórico-epistemológico que permita identificar los elementos cognitivos subyacentes en su construcción. Ante la escasez de elementos metodológicos en la literatura para realizar este tipo de análisis (Arnon et al., 2014; Dubinsky et al., 2005), se formularon una serie de cuestionamientos analíticos basados en la teoría APOE, con el

propósito de reconocer en la obra original las estructuras y mecanismos mentales involucrados en la conceptualización del logaritmo.

La creación de estos cuestionamientos se fundamenta en los principios de la teoría APOE que explican cómo un concepto matemático se construye a partir de estructuras mentales progresivas y mecanismos de transformación. En este sentido, los cuestionamientos buscan evidenciar elementos clave de cada estructura y mecanismo, permitiendo una aproximación sistemática a la forma en que Napier desarrolló el concepto de logaritmo. Es así como se clasifica el análisis en las siguientes fases:

Fase 1: Identificar acciones

Dado que una acción se caracteriza por estar ligada a estímulos externos y realizarse de manera secuencial y explícita, los cuestionamientos en esta fase se centran en determinar si en la obra de Napier el desarrollo del logaritmo depende de instrucciones concretas, procedimientos estrictos o el uso de representaciones que guíen su construcción. Además, considerando que las acciones no permiten la omisión de pasos, se busca identificar si el concepto es presentado de manera rígida o si hay indicios de flexibilidad.

- ¿Qué procedimientos o algoritmos se realizan con el concepto o problema en estudio?
- ¿Necesita estímulos externos como resultados de investigaciones realizadas previamente de forma explícita para poder trabajar con el concepto?
- Únicamente se replican los procedimientos o algoritmos?
- ¿Realiza dibujos o representaciones gráficas para entender el problema o concepto?

Fase 2: Identificar el mecanismo de interiorización

La interiorización ocurre cuando una acción deja de depender de estímulos externos y el individuo puede ejecutarla mentalmente, omitiendo pasos explícitos sin perder precisión. Por ello, los cuestionamientos en esta fase buscan reconocer si en la obra de Napier hay evidencia de que los cálculos y justificaciones del logaritmo dejan de depender de procesos mecánicos y pasan a ser tratados de manera más flexible o conceptual. Algunas interrogantes que permiten identificar en ciertos contextos cuándo es que se da una interiorización son las siguientes:

- ¿Se cuestiona posibles cambios sobre los pasos (describe e invierte) los procedimientos o algoritmos?
- ¿Se evidencia resolución completa de un ejercicio o actividad sin necesidad de realizar todos los pasos del algoritmo?
- ¿Evidencia un dominio absoluto sobre las necesidades del problema y el camino que debe seguir para lograrlas?

Fase 3: Identificar procesos.

Cuando una acción se interioriza, se convierte en un proceso, lo que implica que el concepto puede manipularse sin una ejecución estricta de los pasos originales y permite generalizaciones. En este sentido, los cuestionamientos se centran en identificar si Napier muestra reflexiones sobre la validez general del logaritmo, si extrae conclusiones a partir de ejemplos particulares y si deja de depender de estímulos externos en su desarrollo.

- ¿El autor generaliza resultados obtenidos a partir de los casos específicos realizados? (En caso de pensar o plantearse casos generales se dice que se encuentra en una concepción de proceso).
- ¿Qué reflexiona el autor sobre el concepto?
- ¿Acepta un resultado para una cantidad infinita de objetos, después de verificar que se cumplen para varios de ellos?
- ¿Logra prescindir de los estímulos externos para dar solución a una actividad?

Fase 4: Identificar el mecanismo de encapsulación

La encapsulación se da cuando un proceso deja de percibirse como una serie de transformaciones dinámicas y pasa a considerarse un objeto matemático sobre el cual se pueden realizar nuevas manipulaciones. En este caso, los cuestionamientos buscan determinar si Napier trata el logaritmo como una entidad independiente y no solo como un procedimiento, permitiendo que se realicen operaciones sobre él sin necesidad de reconstruir su significado en cada caso.

- ¿El autor reflexiona sobre las acciones que se aplicaron en el Proceso viéndolo como un todo?
- ¿Cuáles son las operaciones o pasos que se aplicaron en el Proceso viéndolo como un todo?

Fase 5: Identificar objetos

El tratamiento de un concepto como objeto implica que el individuo reconoce su aplicabilidad en distintos contextos y su relación con otros objetos matemáticos. En esta fase, los cuestionamientos buscan evidenciar si Napier establece vínculos entre el logaritmo y otros conceptos matemáticos, así como su utilidad en distintos campos del conocimiento.

- ¿Qué reflexiona el autor sobre las acciones aplicadas a los Procesos, toma conciencia del proceso como un todo? ¿Cómo traslada el concepto a otros contextos?
- ¿Cuáles resultados previos intervienen en el trabajo con el concepto en estudio?

- ¿Cuáles aplicaciones del concepto en estudio identifica en otras áreas del conocimiento y su importancia del concepto en otros campos?
- ¿Cuáles nociones propias del concepto se coordinan en el texto?

Es importante mencionar que el proceso de análisis descrito es de naturaleza cíclica, lo que implica que cada fase no es definitiva, sino que puede ser revisada y ajustada conforme se identifican nuevas relaciones en el estudio del concepto. La depuración iterativa de estas etapas permite afinar la identificación de estructuras y mecanismos, asegurando una mayor precisión en la construcción de la descomposición genética preliminar.

Por otro lado, la estructura esquema no se considera en este análisis debido a que, según la teoría APOE, un esquema es una organización compleja que coordina múltiples objetos, procesos y acciones, permitiendo al individuo operar con ellos en distintos contextos de manera flexible y automática (Arnon et al., 2014). En este estudio, el objetivo es identificar los mecanismos que subyacen en la construcción inicial del concepto de logaritmo como número real, sin evaluar su integración en esquemas de conocimiento más amplios. La inclusión del esquema requeriría un análisis posterior centrado en la aplicación del concepto en contextos educativos y su interrelación con otros conocimientos matemáticos.

4. RESULTADOS

El análisis realizado sigue un proceso cíclico en el que, en una primera instancia, se identificaron las acciones presentes en la obra de Napier. Posteriormente, se analizaron los procesos derivados de estas acciones, seguidos por la identificación de objetos matemáticos. A lo largo del estudio, cada estructura fue revisada y depurada, permitiendo ajustar y refinar la interpretación de los mecanismos involucrados en la construcción del logaritmo como número real.

4.1 Acciones

A continuación, se describen y analizan los hallazgos identificados en la obra de Napier que permiten responder a las preguntas formuladas en la metodología, con el propósito de reconocer las acciones fundamentales en la construcción del concepto de logaritmo como número real y su relación con otros conceptos matemáticos.

Presencia de estímulos externos ante factores previos

En cuanto al hallazgo de estímulos externos, se busca dar respuesta a la pregunta: ¿Necesita estímulos externos como resultados de investigaciones realizadas previamente de forma explícita para poder trabajar con el concepto? En este sentido, se destaca que Napier fue impulsado por la necesidad de simplificar cálculos aritméticos, lo cual surge como un estímulo externo derivado de la dificultad y tedio en realizar operaciones matemáticas extensas.

Además, se encontró que el desarrollo de los logaritmos estuvo influenciado por conocimientos previos, entre ellos:

- El uso de tablas trigonométricas, que proporcionaban valores numéricos para cálculos matemáticos complejos.
- Los resultados obtenidos por Michael Stifel, quien exploró relaciones entre progresiones numéricas y exponentes.

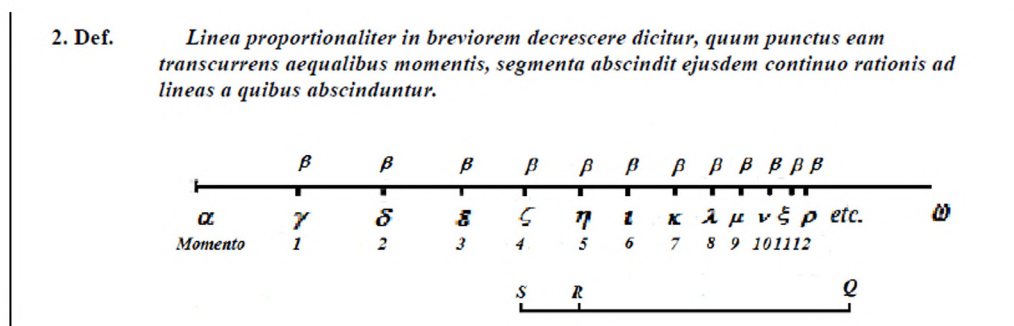
- El manejo de progresiones geométricas y aritméticas, lo que permitió a Napier establecer conexiones entre estos patrones matemáticos y la construcción de su sistema logarítmico.

Estos elementos constituyen factores externos clave que facilitaron el desarrollo de los logaritmos como números reales, demostrando que su construcción no surgió de manera aislada, sino como resultado de una necesidad contextual y una acumulación de conocimientos matemáticos previos.

Dibujos o representaciones gráficas

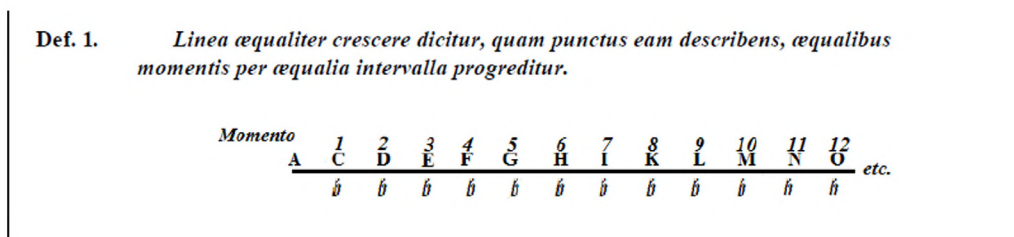
Otro aspecto fundamental en la identificación de acciones es la presencia de dibujos y representaciones gráficas utilizados por Napier para explicar la naturaleza de las progresiones geométricas y aritméticas. Las Figuras 8 y 9 muestran representaciones visuales de estas progresiones, lo que permite visualizar de manera clara las ideas fundamentales del concepto de logaritmo.

Figura 3- Representación gráfica de progresión geométrica.



Fuente: (Jiménez, 2018).

Figura 4- Representación gráfica de progresión aritmética.



Fuente: (Jiménez, 2018).

La figura 3 ilustra gráficamente la idea de una progresión geométrica, donde se observa el decrecimiento proporcional de los valores. Por otro lado, la figura 4 presenta una representación gráfica de una progresión aritmética, resaltando la constancia en el crecimiento de los

valores. Si bien las definiciones presentadas por Napier no coinciden exactamente con las contemporáneas, estas representaciones gráficas desempeñan un papel fundamental en la conceptualización del logaritmo. Mediante el uso de imágenes, Napier facilita la comprensión de la relación entre progresiones geométricas y aritméticas, mostrando cómo estos patrones pueden ser utilizados para simplificar cálculos numéricos.

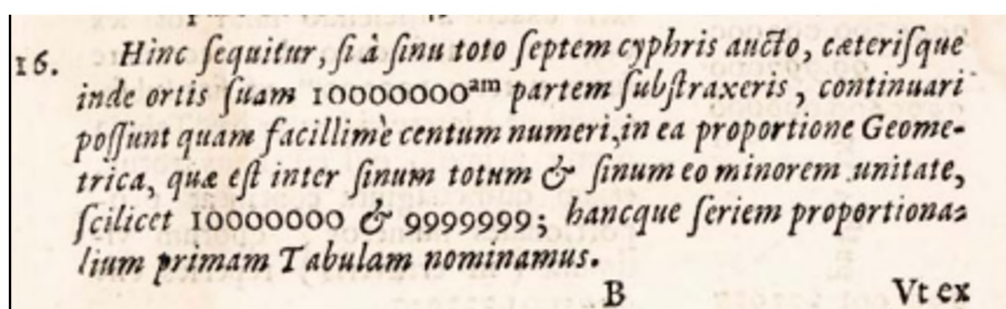
El uso de representaciones gráficas también permite analizar la influencia de la teoría matemática de la época en la construcción del concepto. La inclusión de ilustraciones en la obra de Napier sugiere que su intención no era solo presentar un nuevo sistema de cálculo, sino también ofrecer una herramienta visual para describir de manera más clara las estructuras matemáticas subyacentes. Es así, cómo estas representaciones gráficas se convierten en herramientas valiosas para entender y describir los fenómenos matemáticos y físicos relacionados con los movimientos aritméticos y geométricos.

Procedimientos y algoritmos

En su construcción del logaritmo como número real, John Napier desarrolló un procedimiento fundamentado en el uso de progresiones geométricas, buscando específicamente que estas se ajustaran a las tablas trigonométricas de senos conocidas en su época. El autor se basa en la relación encontrada por Stifel, quien sugiere que, para multiplicar dos números de una progresión geométrica, se puede hallar el número correspondiente de la progresión geométrica que se encuentra en la posición correspondiente a la suma de los números de la progresión aritmética asociados a los factores del producto.

Napier se propone construir una progresión geométrica para la cual sus términos se acerquen a los valores de las tablas de senos. Para lograr esto, realiza diversos cálculos para determinar diversos elementos, como la razón de proporcionalidad para la progresión geométrica, asegurando que sea decreciente y con un valor inicial de $\frac{1}{2}$. En la figura 5 se muestra el cálculo de la razón de proporcionalidad, donde se expone que, al restar su 10000000-ésima parte del radio con siete cifras, se obtiene una razón que permite la continuación geométrica entre 10000000 y 9999999.

Figura 5- Cálculo de la razón de proporcionalidad.



Fuente: Napier, 1614).

Napier decide utilizar una razón de proporcionalidad $r = 1 - 10^{-7}$ en la construcción de la progresión geométrica, como se detalla en la figura 10. Esto se traduce en la fórmula moderna $s_n = s_0 r^n$, donde s_0 es el primer término de la progresión y r la razón de proporcionalidad. Para referirnos a este cálculo se utilizará *Resultado 1*. Esta elección no fue arbitraria,

sino que respondió a la necesidad de garantizar una progresión suficientemente densa para aproximar valores intermedios con precisión. Sin embargo, al contrastar su modelo con las tablas trigonométricas de referencia, Napier observó que, aunque los valores iniciales muestran un ajuste cercano, la discrepancia aumenta significativamente para los valores subsiguientes, como se evidencia en las Figuras 6 y 7.

Figura 6- Verificación del ajuste con las tablas trigonométricas.

Prima Tabula.

10000000.00000000

1.00000000

9999999.00000000

9999999

9999998.00000001

9999998

9999997.00000003

9999997

9999996.00000006

continuan-
do vsq: ad
9999900

9999900.0004950

Vt ex sinu toto aucto septem cy-
phris (majoris accuracionis gratiâ)
sic 10000000.00000000 aufer 100-
00000 , sient 9999999.00000000 :
ex quibus aufer 9999999 , sient
9999998.00000001 ; & sic prosequa-
ris ut à latere , donec centum creave-
ris proportionalia , quorum ulti-
mum (si rectè computaveris) erit
9999900.0004950.

Estos resultados pusieron de manifiesto las limitaciones de su construcción inicial, señalando la necesidad de introducir ajustes para alcanzar un modelo más robusto y generalizable.

4.2 Interiorización

La interiorización en los escritos de Napier se evidencia en su búsqueda de una progresión geométrica *densa* que se ajuste a las tablas trigonométricas. En lugar de simplemente replicar algoritmos existentes, Napier demuestra en este punto un dominio absoluto al reconocer las limitaciones de las relaciones aritméticas y geométricas convencionales, buscando realizar diversos cambios y extensiones para satisfacer sus necesidades. Napier demostró un dominio conceptual al reconocer que una razón de proporcionalidad cercana a 1 era esencial para generar una progresión geométrica con intervalos reducidos entre sus términos, facilitando así una aproximación más fina a los valores trigonométricos.

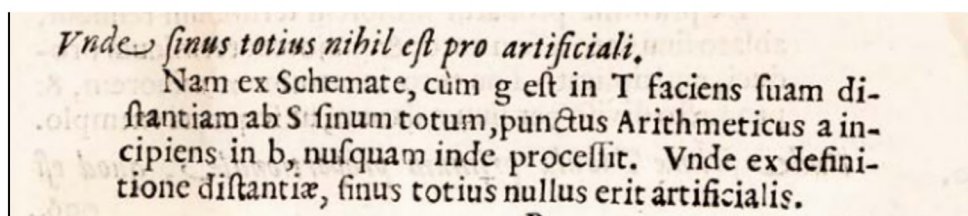
Esta comprensión no surgió de manera inmediata, sino como resultado de un proceso reflexivo en el que Napier evaluó críticamente los resultados de su modelo inicial. Al identificar las discrepancias en su ajuste a las tablas de senos, no solo cuestionó sus pasos previos, sino que utilizó estos hallazgos como base para reformular su enfoque. Este comportamiento refleja claramente el mecanismo de interiorización descrito en la teoría APOE, donde las acciones externas y repetitivas dan paso a operaciones mentales flexibles y generalizables. La capacidad de Napier para adaptar su método y buscar soluciones alternativas subraya un nivel avanzado de razonamiento matemático, en el que la comprensión del problema permitió la evolución de sus herramientas conceptuales y prácticas.

4.3 Procesos

Generalización de resultados a partir de casos específicos

El análisis de la obra de Napier revela un claro proceso de generalización matemática, donde el autor trasciende los casos particulares para establecer principios más amplios. A partir de las progresiones desarrolladas en el *Resultado 1*, Napier realiza una validación sistemática de sus propiedades fundamentales. Un ejemplo paradigmático es su verificación de que el valor 10^7 en la progresión aritmética corresponde exactamente a 0 en la progresión geométrica, como se muestra en la Figura 8. Esta comprobación no solo sirvió como prueba de concepto, sino que le permitió establecer los cimientos teóricos de su sistema logarítmico.

Figura 8- Verificación de la característica inicial.



Fuente: (Napier, 1614).

La Figura 8, que ilustra esta verificación inicial de las características fundamentales del sistema, demuestra cómo Napier partió de casos concretos para inferir propiedades generales. Sin embargo, como se detalló en la sección de *Procedimientos y algoritmos*, el autor mostró una notable capacidad crítica al reconocer las limitaciones de precisión en su modelo, particularmente evidentes en la tabla comparativa de la Figura 7. Este reconocimiento de las discrepancias no constituye un fracaso metodológico, sino que representa una fase esencial en el proceso de generalización, donde la identificación de casos particulares problemáticos impulsa refinamientos teóricos.

Lo más significativo de este proceso es cómo Napier logró extraer principios generales a partir de estos casos específicos, tanto de confirmación como de discrepancia. Su metodología refleja un pensamiento matemático maduro, donde la generalización no se realiza mediante simple inducción, sino a través de un análisis crítico que distingue entre patrones fundamentales y artefactos del modelo particular. Esta capacidad de navegar entre lo específico y lo general, manteniendo simultáneamente el rigor conceptual y la flexibilidad para ajustar el modelo, constituye uno de los aspectos más sofisticados de su contribución al desarrollo del concepto de logaritmo.

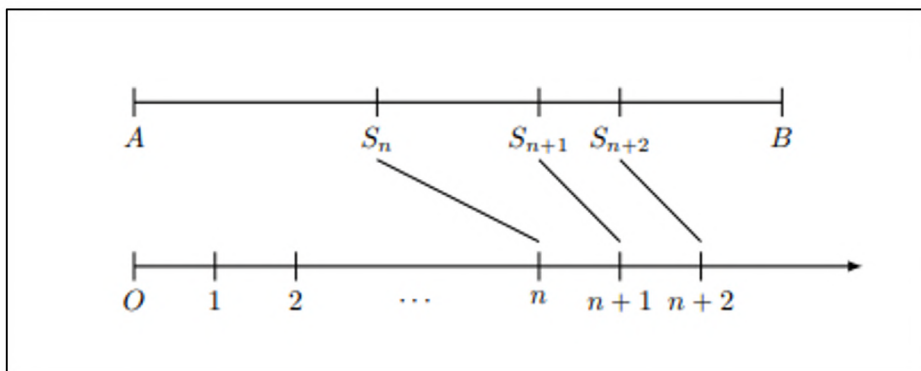
Reflexiones sobre resultados previos

A lo largo de la construcción, Napier demuestra una reflexión profunda frente a los resultados iniciales de su primera progresión geométrica, principalmente al no considerar estos resultados como un fracaso, sino más bien como una fuente de aprendizaje que le permite mejorar. En esta línea, Jiménez (2018) subraya este proceso como un salto hacia el futuro, resaltando la capacidad de Napier para avanzar hacia ideas innovadoras en una época que precede al desarrollo de la cinemática y al surgimiento posterior de Newton. La capacidad de Napier para aprovechar sus errores como insumos para el progreso es evidente en su construcción de lo que se va a denominar *modelo discreto*.

Para el modelo discreto, Napier decide partir de la idea de progresión geométrica, de modo que, partiendo de dicha definición y los insumos recopilados en *Resultado 1*, crea una nueva progresión geométrica. Para elaborar la construcción, describe que debe considerar un segmento AB cuya longitud es 10^7 unidades, ahora, se debe considerar un punto arbitrario sobre el segmento AB el cual se desplaza desde A hacia B, de modo que dicho punto al desplazarse tiene las características de un movimiento geométrico.

La clave en la nueva progresión construida está en considerar cada uno de los puntos que se desplazan de A hacia B, en una correspondencia con un número natural n , de manera que cada uno de ellos pueda ser numerado y dotado de una característica basada en la definición de progresión geométrica (como se observa en la figura 9). De este modo, se puede considerar cada uno de los puntos mencionados, como S_n y su caracterización está descrita por la relación $s_n = S_n B$, de modo que es posible caracterizar el desplazamiento de cada punto en términos de la progresión construida previamente por Napier, ya que s_n corresponde con la progresión presentada en el *Resultado 1*.

Además, para evidenciar la relación entre la progresión geométrica y aritmética, el mismo toma una semirrecta de origen O sobre la cual avanza un punto a través de momentos o intervalos de tiempo igualmente espaciados (es decir la representación gráfica de una progresión aritmética). Así, cuando dicho punto se encuentra en un momento n , se puede establecer la relación con la posición del término S_n sobre el segmento AB. Para evidenciar geoméricamente el resultado descrito anteriormente, Jiménez (2018), presenta gráficamente el modelo, como se muestra en la figura 9.

Figura 9- Modelo discreto de Napier.

Fuente: (Jiménez, 2018).

Resultados para una cantidad infinita de objetos

Napier muestra una clara disposición para aceptar resultados que abarquen una cantidad infinita de objetos, especialmente al trabajar con la densidad de la progresión en la construcción de su *modelo discreto*. Su elección de una razón de proporcionalidad cercana a uno implica un desplazamiento continuo de puntos sobre el segmento AB, permitiendo de esta manera hablar de una progresión *densa*. La relación establecida en el *modelo discreto*, $s_n = S_n B$, revela la aceptación de resultados para una cantidad infinita de objetos, ya que establece una conexión indefinida entre los términos de la progresión S_n y los de una progresión aritmética sin restricciones en cuanto a su alcance. Al diseñar un sistema donde los términos de la progresión geométrica pueden hacerse arbitrariamente cercanos entre sí, Napier estaba operando con lo que hoy se conoce como un conjunto *denso*, anticipándose así a conceptos que posteriormente serían formalizados en el análisis matemático.

Es particularmente revelador cómo Napier maneja el movimiento continuo de un punto a lo largo del segmento AB en su construcción geométrica. Esta representación dinámica, donde el punto puede ocupar infinitas posiciones intermedias, muestra una comprensión intuitiva pero profunda de la naturaleza infinita y continua del sistema numérico real. Su capacidad para extrapolar propiedades verificadas en casos finitos a este contexto infinito no solo evidencia su genio matemático, sino que también marca un hito en la transición entre las matemáticas discretas del Renacimiento y el cálculo infinitesimal que emergería posteriormente.

Prescinde de estímulos externos

El desarrollo del modelo discreto por parte de Napier representa un notable ejercicio de abstracción matemática donde trasciende la dependencia de estímulos externos concretos. En esta fase de su trabajo, los conceptos matemáticos fundamentales (particularmente las progresiones aritméticas y geométricas) dejan de ser meras herramientas de cálculo para convertirse en elementos estructurales de un sistema coherente. Lo más destacable es cómo Napier logra articular estos conceptos matemáticos con principios físicos fundamentales, particularmente aquellos relacionados con el movimiento, el tiempo y el espacio, creando así un marco teórico autosuficiente.

Es esencial resaltar que el modelo discreto no surge únicamente de procesos algebraicos o construcciones geométricas, sino que se basa en un entendimiento profundo de fenómenos físicos. La construcción gira en torno a describir las relaciones entre una progresión geométrica inicial y un modelo discreto que reestructura estos conceptos en términos de definiciones matemáticas y fenómenos físicos. Esta reestructuración se expresa gráficamente para describir los fenómenos y relaciones existentes, destacando la habilidad de Napier para encapsular y combinar diferentes áreas del conocimiento en su construcción del logaritmo.

4.4 Encapsulación

El verdadero genio matemático de Napier se revela en su capacidad para encapsular las complejas relaciones del modelo discreto y transformarlas en un modelo continuo unificado. Este proceso de encapsulación va más allá de la simple generalización: representa una auténtica síntesis conceptual donde las acciones y procesos anteriores se integran en una estructura coherente que puede manipularse como un todo.

Al reflexionar sobre su propio proceso constructivo, Napier logra abstraer las propiedades esenciales del sistema, prescindiendo de los detalles particulares que caracterizan las etapas iniciales. Esta capacidad de considerar el conjunto de operaciones y transformaciones como una entidad única es particularmente evidente en la transición hacia el modelo continuo, donde las relaciones discretas dan paso a una concepción fluida del logaritmo como número real.

La encapsulación se manifiesta no solo en la integración de conceptos matemáticos, sino también en la forma en que Napier articula diferentes dominios del conocimiento. Su modelo final representa una perfecta síntesis de consideraciones algebraicas, geométricas y físicas, demostrando una comprensión profunda de las interrelaciones entre estas áreas. Este logro va más allá de la mera aplicación de herramientas matemáticas, revelando un verdadero dominio en la construcción teórica y la abstracción conceptual.

Reflexiona sobre las acciones que se aplicaron en el proceso

La extensión del modelo discreto a uno continuo por parte de Napier se basa en cimientos sólidos que involucran una reflexión profunda sobre las acciones aplicadas en el proceso. En primer lugar, destaca la habilidad del autor para generalizar y extender conceptualmente su construcción, superando las ideas iniciales planteadas por Stifel. La reflexión se centra en la manipulación de números en sentido discreto y relaciones específicas, destacando la necesidad de llevar estas ideas al ámbito continuo. Lo notable es cómo Napier transformó lo que en Stifel eran meras observaciones sobre progresiones particulares en un sistema coherente y generalizable.

La articulación conceptual que Napier desarrolló durante este proceso revela un manejo de varios niveles de abstracción. No se limitó a extender mecánicamente las operaciones discretas al caso continuo, sino que construyó un nuevo marco teórico donde estas operaciones adquirieron un significado más profundo y general. Como señala Jiménez (2018), esta transición representó mucho más que una simple ampliación del dominio numérico, sino que constituyó la creación de una nueva herramienta matemática con potencial para revolucionar el cálculo numérico. Esta construcción, denominada por autores como Jiménez (2018) como un modelo continuo, representa el logro final de Napier al proporcionar una construcción del logaritmo como número real. Así, la extensión inicialmente buscada se materializa a través de la reflexión, la generalización y la articulación coherente de conceptos.

La reflexión sobre estas acciones resulta particularmente relevante para la educación matemática contemporánea, pues revela cómo el pensamiento avanzado en matemáticas implica constantes procesos de revisión, generalización y reconfiguración de ideas iniciales. El caso de Napier muestra que los conceptos matemáticos fundamentales no surgen completamente formados, sino que son el resultado de prolongados procesos de refinamiento conceptual donde las acciones iniciales son continuamente reinterpretadas a la luz de nuevas comprensiones.

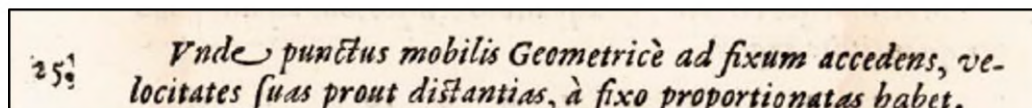
4.5 Objetos

En cuanto a la identificación de objetos respecta, Napier reflexiona sobre las acciones y conceptos aplicados en el proceso, considerándolos como un conjunto integral. La búsqueda de respuestas para articular nociones alrededor de la estructura Objeto impulsa la identificación de objetos en la construcción del logaritmo como número real.

Operaciones o pasos que se aplicaron en el proceso viéndolo como un todo y nociones coordinadas

En este análisis, se profundiza en la reflexión del autor sobre las acciones aplicadas a los procesos, destacando la percepción del proceso en su integridad. La transición del modelo discreto al continuo se examina en detalle, siendo fundamental para comprender las propuestas de Napier. La proposición clave, presentada en la Figura 10, establece una conexión crucial entre los modelos discreto y continuo al afirmar que las velocidades son proporcionales a las distancias.

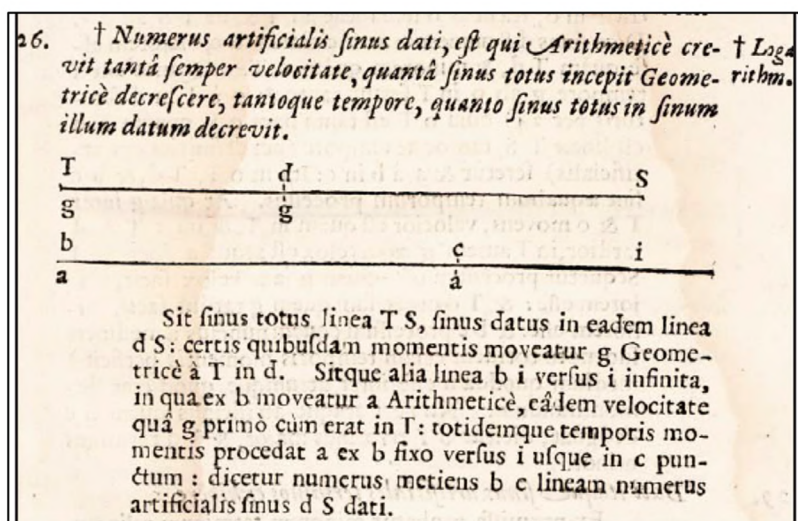
Figura 10- Proposición que caracteriza el movimiento geométrico en términos de distancia y velocidad.



Fuente: (Napier, 1614).

Por otra parte, la proposición 26 enuncia que: El logaritmo de un número dado (seno para efectos de la definición descrita), corresponde a un número que ha aumentado aritméticamente, con la misma velocidad con la cual el radio (segmento TS de longitud 10^7 comenzó a disminuir de manera geométrica, y que al mismo tiempo que el radio ha disminuido hasta el número (seno) en cuestión.

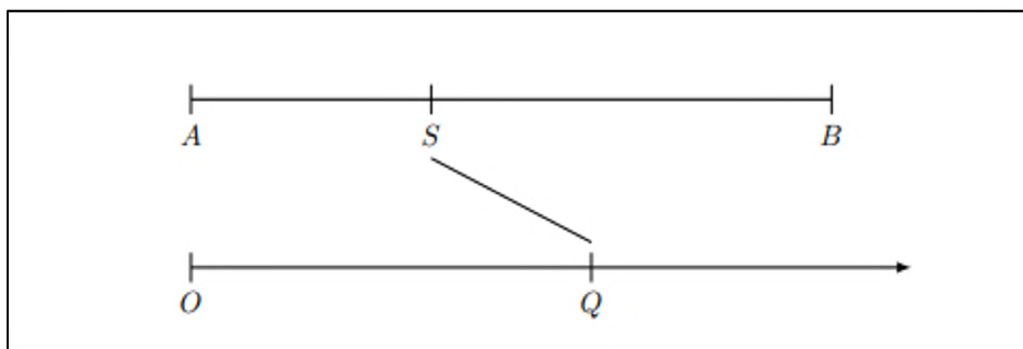
En su descripción, se detalla la construcción per se, donde menciona que TS tiene un punto, d , el cual mueve hacia abajo con velocidad decreciente (una progresión geométrica decreciente), mientras que la línea bi tiene un punto que se mueve hacia abajo con velocidad constante (y una progresión aritmética creciente) (Ver Figura 11).

Figura 11- Definición del modelo cinemático de Napier.

Fuente: (Napier, 1614).

A través de la proposición 26 de Napier (figura 11) se logra observar la coordinación de nociones y conceptos alrededor de la construcción del logaritmo como número real, ya que dicha proposición presenta la extensión del modelo discreto al modelo continuo (basado en las ideas de cinemática) y define el logaritmo como número real, pero además se puede notar que en dicha extensión existen prevalentemente las nociones coordinadas de progresiones aritméticas y geométricas relacionadas y caracterizadas (en una coordinación de nociones más) mediante fenómenos cinemáticos (movimiento, distancia y tiempo).

En la figura 12 se visualiza este modelo cinemático continuo, enfatizando la coordinación de movimientos entre un punto en una semirrecta (Q) y otro en un segmento (S). La relación entre el tiempo y la velocidad instantánea se establece con claridad.

Figura 12- Modelo cinemático continuo.

Fuente: (Jiménez, 2018).

El logaritmo, definido en la proposición 26, se revela como un elemento clave que vincula la distancia entre puntos con el tiempo transcurrido. En este contexto, se evidencia la coordinación conceptual que involucra directamente los conceptos presentados desde la cinemática y las nociones de movimiento geométrico en términos de desplazamiento, tiempo, distancia y velocidad. Este análisis exhaustivo destaca la riqueza de las ideas de Napier al explorar la interconexión de progresiones geométricas, progresiones aritméticas, cinemática y logaritmos, proporcionando una visión holística de su pensamiento matemático avanzado.

Aplicaciones del concepto en estudio que se identifica en otras áreas del conocimiento y la importancia del concepto en otros campos

En la obra de Napier, se evidencia cómo el logaritmo como número real, no se limita al ámbito matemático puro, sino que se ilustra su aplicación en la resolución de cálculos prácticos. Napier no solo presenta el concepto, sino que también ejemplifica su utilidad mediante casos concretos, especialmente al construir tablas de logaritmos. El propósito fundamental de este esfuerzo va más allá de la matemática pura; Napier aspira a traspasar fronteras disciplinares. Inicialmente, la construcción del logaritmo se orienta a simplificar cálculos relacionados con arcos de circunferencias, notoriamente cuando los radios son considerablemente extensos, como ejemplificado con un radio de longitud 10000000.

En el ámbito del conocimiento, autores como Jiménez (2018) subrayan las aplicaciones iniciales del logaritmo en la astronomía y la navegación. En estas disciplinas, donde los cálculos con magnitudes significativas eran comunes, el logaritmo emergió como una herramienta esencial para agilizar procesos numéricos. Según Impellizzere de Córdoba (2021), en la época de Napier, la invención del logaritmo no solo aceleró los cálculos, sino que también se convirtió en una valiosa herramienta computacional, liberando tiempo para investigaciones más profundas en diversos campos científicos.

Aunque en la era actual los logaritmos no se utilizan de la misma manera gracias a los avances tecnológicos, su construcción como número real dejó un legado trascendental. La utilidad histórica del logaritmo persiste, y su impacto se expande más allá de las matemáticas, influyendo en la física cinemática y, posteriormente, dando origen al logaritmo como función en el análisis matemático.

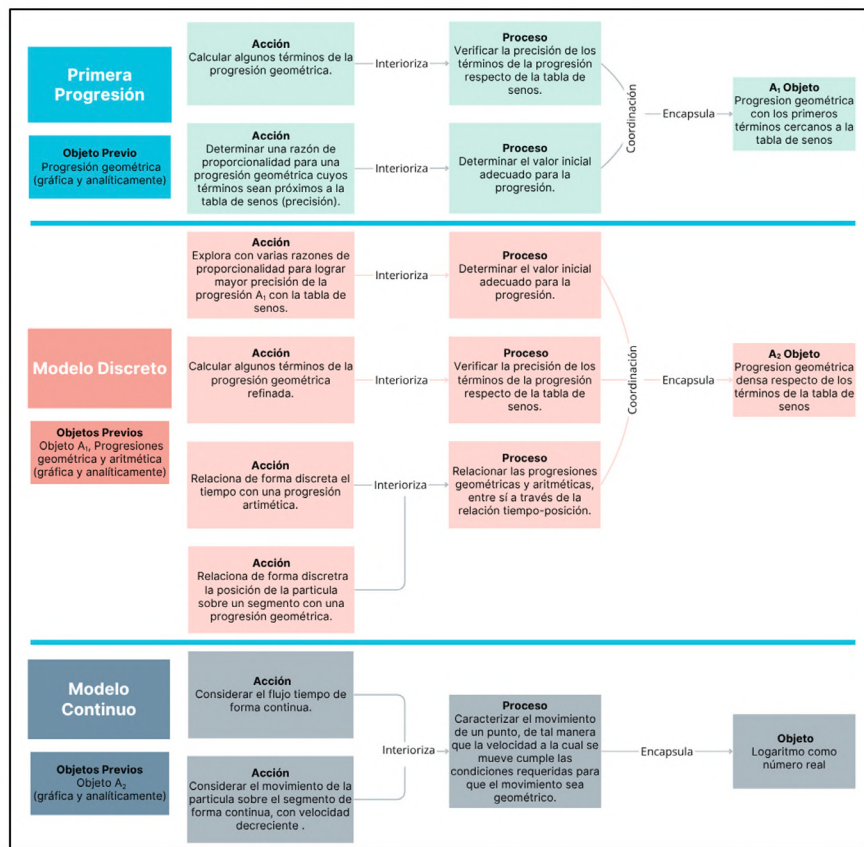
Descomposición genética preliminar del logaritmo como número real

La secuencia descrita anteriormente tiene en cuenta las ideas fundamentales que organizan el significado que constituye el logaritmo como número real desde un análisis epistemológico y la vinculación existente en las progresiones geométricas, aritméticas y demás resultados discutidos anteriormente. De este modo, es importante destacar que la construcción del logaritmo como número, desde los textos originales y la visión histórica de dicha construcción, se pueden ver articulados a través de tres fases, que son las siguientes:

1. Construcción y manipulación de la primera progresión geométrica y el paso a la densidad.
2. Construcción del modelo discreto y el paso a la continuidad.
3. Construcción del modelo continuo y definición del concepto de logaritmo.

La figura 13 muestra la descomposición genética preliminar construida a partir de los resultados obtenidos.

Figura 13- Descomposición genética preliminar del logaritmo como número real.



Fuente: Construcción propia.

5. CONSIDERACIONES FINALES

Este estudio ha permitido reconstruir la génesis del concepto de logaritmo como número real a través de un análisis histórico-epistemológico fundamentado en la teoría APOE. Los resultados revelan un proceso de construcción cognitiva que va desde acciones concretas con progresiones numéricas hasta la formación de esquemas complejos que integran conceptos matemáticos y físicos. Este patrón de desarrollo coincide con lo documentado en investigaciones previas sobre la construcción de conceptos matemáticos avanzados, confirmando la pertinencia del marco teórico adoptado para este tipo de análisis.

Un hallazgo particularmente relevante fue identificar cómo la noción de densidad, lograda mediante el uso de una razón de proporcionalidad extremadamente cercana a 1, sirvió como un enlace conceptual entre el modelo discreto planteado inicialmente y su posterior extensión continua. Este resultado adquiere especial significado al contrastarlo con las dificultades de aprendizaje que suelen presentar los estudiantes al abordar el concepto de logaritmo,

donde frecuentemente persiste una visión puramente discreta que limita su comprensión profunda. La construcción histórica analizada anticipa estas dificultades, sugiriendo que el tratamiento didáctico actual podría beneficiarse de enfatizar esta transición conceptual.

La fase final de encapsulación, donde se integran conceptos matemáticos abstractos con principios físicos concretos, constituye otro aspecto destacable de los resultados. Este proceso no solo valida hallazgos previos sobre la importancia de los contextos interdisciplinarios para la comprensión matemática, sino que además plantea interrogantes significativos sobre cómo podrían replicarse estas conexiones en el aula. La capacidad de Napier para articular dominios que parecen alejados sugiere que la enseñanza actual del logaritmo podría enriquecerse incorporando explícitamente estas relaciones conceptuales.

Sin embargo, en el análisis se enfrentaron limitaciones importantes, particularmente en la reconstrucción de los procesos heurísticos que llevaron a llevó a Napier a dar ese salto al futuro como lo llamaron historiadores como Boyer y alcanzar el modelo continuo. Esta brecha entre el registro histórico y la inferencia cognitiva plantea algunos desafíos metodológicos fundamentales para este tipo de investigaciones.

Como resultado del análisis fue posible presentar una descomposición genética que conjetura la naturaleza de las estructuras cognitivas y del razonamiento descrito por el autor en las obras originales mediante diferentes formas de conocer los elementos matemáticos y considerando los mecanismos de construcción del conocimiento. De esta manera y como ya se ha indicado, la descomposición genética presentada se articula a través de tres fases:

- Construcción y manipulación de la primera progresión geométrica y el paso a la densidad.
- Construcción del modelo discreto y el paso a la continuidad.
- Construcción del modelo continuo y definición del concepto de logaritmo.

La descomposición genética del concepto de logaritmo como número real se apoya en la epistemología del concepto y en los resultados de las investigaciones previas sobre los procesos mentales necesarios para comprenderlo que se han obtenido a través de diversas investigaciones en educación matemática. La descomposición genética del objeto logaritmo como número se describe a través de los mecanismos de construcción: interiorización, coordinación y encapsulación. Se reflexiona para ello sobre los vínculos con otras nociones matemáticas; progresión geométrica, progresión aritmética y conceptos de cinemática.

Desde la perspectiva educativa, los resultados obtenidos tienen implicaciones concretas para la enseñanza del logaritmo. La secuencia identificada en la descomposición genética sugiere la necesidad de reexaminar la progresión didáctica tradicional, privilegiando un desarrollo más natural del concepto que considere el trabajo con progresiones, enfatice las transiciones entre representaciones y recupere las conexiones interdisciplinarias. Esto requeriría no solo ajustes curriculares, sino también una formación docente que enfatice la comprensión profunda de estas estructuras conceptuales. Cabe destacar que, esta propuesta de descomposición genética, es solamente un camino de los posibles a plantear; con ella se pretende analizar las construcciones mentales que tienen que hacer los alumnos para construir este concepto teniendo en cuenta tanto la epistemología del concepto como los resultados de investigaciones centradas en la comprensión de los alumnos.

En conclusión, este estudio busca trascender el mero análisis histórico al establecer conexiones significativas entre la construcción epistemológica del logaritmo. Los resultados no

solo validan la utilidad del marco APOE para este tipo de investigaciones, sino que además abren nuevas líneas de indagación tanto teóricas como aplicadas. Particularmente, resulta relevante la posibilidad de desarrollar materiales didácticos que, inspirándose en el desarrollo histórico, faciliten a los estudiantes la construcción de una comprensión más profunda y conectada de este concepto fundamental en matemáticas.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

Todos los autores participaron activamente en la concepción de la idea presentada, el desarrollo de la teoría, la adaptación de la metodología, el análisis de las obras originales, la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos sinceramente al Lic. Edwin Brenes Cambronero por su valiosa colaboración durante el desarrollo de este estudio.

En memoria de Christian Víctor Contreras, cuya pasión y compromiso acompañaron los inicios de esta investigación. Su huella permanece en este trabajo.

6. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Abrate, R., y Pochulu, M. (2007, Junio). Ideas para la clase de logaritmos. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (10), 77-94. Recuperado de http://www.fisem.org/www/union/revistas/2007/10/Union_010_011.pdf
- Alguacil, M., Boqué, M. y Pañellas, M. (2016). Dificultades en conceptos matemáticos básicos de los estudiantes para maestros. *INEAD*, 419-129.
- Anron, L., Cottrill, J., Dubinsky, E., Okaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., y Weller, K. (2014). *APOS Theory*. Springer.
- Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (1991). *A history of mathematics*. New York: Wiley. https://books.google.co.cr/books/about/Historia_de_la_matem%C3%A1tica.html?id=MWbUwAEACAAJ&source=kp_book_description&redir_esc=y
- Brenes, E. & Gómez, K. (2022). Análisis histórico epistemológico del logaritmo como número real desde la teoría APOE. *Universidad de Costa Rica*.
- Cachuay, Y., y Pino, Z. (2013). Aprendizaje de funciones exponenciales y logarítmicas utilizando el software educativo Derive en estudiantes de quinto de Secundaria-Huancayo. *Universidad Nacional del Centro del Perú*. <http://repositorio.uncp.edu.pe/bitstream/handle/UNCP/2540/Cachuay%20Bonifacio-%20Jorge%20Pino.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Costa, A. y Sanabria, M. (2016). Una propuesta didáctica para el estudio del concepto logaritmo en el marco de la teoría antropológica de lo didáctico. *Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional de la Plata*. https://www.researchgate.net/publication/309240251_UNA_PROPUESTA_DIDACTICA_PARA_EL_ESTUDIO_DEL_CONCEPTO_LOGARITMO_EN_EL_MARCO_DE_LA_TEORIA_ANTROPOLOGICA_DE_LO_DIDACTICO
- Dubinsky, E. (2002). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95–126). Springer Netherlands. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1_7

- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M., & Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 335–359. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-2531-z>
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M., & Brown, A. (2005b). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS-based analysis: Part 2. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 253–266. <https://doi.org/10.1007/s10649-005-0473-0>
- Dubinsky, E., Weller, K., Stenger, K. y Vidakovic, D. (2008). Infinite iterative processes: The Tennis Ball Problem. *European Journal of Pure and Applied Mathematics* 1 (1), 99 – 121.
- Farfán, R., y Ferrari, M. (2001). Una visión socio epistemológica. Estudio de la función logaritmo. <http://funes.uniandes.edu.co/6323/>
- Gacharná, O. (2012). Algunas consideraciones didácticas sobre el concepto de logaritmo y de función logarítmica y sus posibilidades en la educación básica y media. *Universidad Nacional de Colombia*.
- Impellizere de Córdoba, S. B. (2021). La invención de los logaritmos. *Revista De Educación Matemática*, 18(1). Recuperado a partir de <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/REM/article/view/10853>
- Jiménez, D. (2018). Descubrimiento Neperiano de los logaritmos. UNEXPO. https://www.academia.edu/37228900/Descubrimiento_neperiano_de_los_logaritmos
- MEP. (2012). Programa de Estudios de Matemáticas. San José: *Ministerio de Educación Pública*.
- Napier, J. (1616). *A Description of the Admirable Table of Logarithms* (E. Wright, Trans.). Renacents Books. (Original work published 1614).
- Panagiotou, E.N. (2011). Using History to Teach Mathematics: The Case of Logarithms. *Sci & Educ* 20, 1–35. <https://doi.org/10.1007/s11191-010-9276-5>
- Rizzo, K. (2014). El desafío de enseñar Funciones Exponenciales y Logarítmicas con tecnología. Implementación del modelo 1 a 1. Congreso Iberoamericano de ciencia, tecnología, innovación y educación. Buenos Aires, Argentina. www.oei.es/historico/congreso2014/memoriactei/425.pdf
- Sanabria, D. (2016). El concepto de logaritmo: una revisión histórica, bibliográfica y una propuesta didáctica en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *UNCPBA*. <https://www.ridaa.unicen.edu.ar/xmlui/bitstream/handle/123456789/599/Tesis%20Final%20Sanabria%2C%20Daniela%20.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Serrano, H. (2019). Construcción del concepto de función desde la Teoría APOE: La coordinación entre representaciones como apoyo. *XV CIAEM-IACME*.
- Vargas Hernández, J. . (2020). Una revisión de la literatura en enseñanza y aprendizaje de los logaritmos (2000 – 2013): historia y epistemología. *Revista Boletín Redipe*, 9(8), 52–82. <https://doi.org/10.36260/rbr.v9i8.1041>



THE USE OF ADAPTIVE DIGITAL TECHNOLOGIES IN TEACHING MATHEMATICS TO STUDENTS WITH SPECIAL EDUCATIONAL NEEDS IN SPAIN AND ECUADOR

EL USO DE TECNOLOGÍAS DIGITALES ADAPTATIVAS EN LA ENSEÑANZA DE MATEMÁTICAS PARA ESTUDIANTES CON NECESIDADES EDUCATIVAS ESPECIALES EN ESPAÑA Y ECUADOR

Celia Gallardo Herrerías¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-5515-1269>

RESUMEN

Este estudio examina el impacto de la tecnología digital adaptativa en la enseñanza de las matemáticas para estudiantes con necesidades educativas especiales (NEE) en España y Ecuador. Evalúa modelos de educación inclusiva basados en el capital tecnológico mediante un enfoque de métodos mixtos. Los objetivos son: (1) evaluar el impacto del software adaptativo en el aprendizaje y la participación de los estudiantes con NEE, (2) examinar los desafíos y las oportunidades en diferentes contextos de aprendizaje, y (3) hacer recomendaciones sobre la formación del profesorado y la mejora de la accesibilidad. La evidencia confirma que estas herramientas mejoran considerablemente la capacidad y la independencia matemática, con impactos a largo plazo. Sin embargo, el éxito depende de la formación del profesorado, la inversión en infraestructura y un apoyo político equilibrado. La investigación recomienda una estrategia inclusiva para garantizar el máximo uso de estas herramientas y ofrecer una educación inclusiva y de calidad al alumnado con NEE.

Palabras clave: Tecnologías Adaptativas, Inclusión Educativa, Enseñanza De Matemáticas, España, Ecuador.

ABSTRACT

This study examines the impact of adaptive digital technology on teaching mathematics for special educational needs (SEN) students in Spain and Ecuador. It assesses technology capital-based inclusive education models using a mixed-methods approach. The objectives are: (1) to assess the impact of adaptive software on SEN students' learning and engagement, (2) to examine challenges and opportunities across different learning contexts, and (3) to make recommendations on teacher training and accessibility enhancement. Evidence confirms that these tools improve mathematical capability and independence considerably, with long-term impacts. Success is, however, dependent on teachers' training, investment in infrastructure, and balanced policy support. Research recommends an inclusive strategy to ensure the maximum utilization of these tools and offer quality and inclusive education to SEN students.

¹ Departamento de Educación, Universidad de Almería, Almería, España: cgh188@inlumine.ual.es



Keywords: Adaptive Technologies, Educational Inclusion, Mathematics Teaching, Spain, Ecuador.

1. INTRODUCTION

Technological advancements have changed the nature of how instruction is delivered, allowing for more flexible and tailored approaches in various fields, such as math education. Technological accommodations have been discovered to be a powerful mechanism for maximizing students with special educational needs' access to and the quality of learning in inclusive education (Collins & Halverson, 2018). Due to this, Spain and Ecuador have developed means of adopting adaptive technologies in the math curriculum regarding how they can tailor education for different learning paces and learning styles.

Despite education technology, there remains a problem with the effective utilization of the tools, particularly in mathematics education for SEN students. More recent studies indicated that interactive websites, artificial intelligence, and virtual reality can enhance students' conceptual understanding and motivation (Rebelo & Castro, 2021). But the effectiveness of these interventions is dependent on several factors, such as access to technology, professional development of instructors, and material adjustment to special requirements (Molin & Sorbring, 2022).

The importance of this research is that it adds to the existing knowledge about the application of technology in special education, and it provides evidence-based facts upon which improved educational policies and teaching practices should be developed. In a world where education is still being digitized by each passing second, it is crucial to identify how such a tool can help in making learning mathematics easier (UNESCO, 2023).

Digital technologies enabled the development of new pedagogic instruments that facilitate students' SEN to learn. For example, artificial intelligence (AI) in education has enabled the development of the software that can automatically adapt to students' levels of comprehension, delivering more dynamic and effective learning (Luckin, Holmes, Griffiths, & Forcier, 2016). The technologies have been most beneficial in mathematics education, where cognitive difficulties could be a primary learning barrier (Mayer, 2021).

The greatest challenge in teaching math to SEN students may be discovering ways that will allow the comprehension of abstract concepts. Augmented reality and virtual reality technologies have also been discovered to be appropriate tools in this instance, as they provide interactive visualizations of mathematical problems in an effort to facilitate knowledge construction through experimentation (Merchant et al., 2014). The use of such resources has been shown to increase motivation and participation among students, which are fundamental drivers of the learning process (Schunk & DiBenedetto, 2021).

The digitization of learning in Spain and Ecuador in particular has progressed at different levels, depending on the technological infrastructure, public policy, and teacher training. Spain has seen an attempt to integrate technology into learning by means of the Escuela 4.0 program, digital skills training for teachers, and the usage of adaptive software to provide support in mathematics (Ministerio de Educación y Formación Profesional de España, 2022). In Ecuador, although programs have been framed similarly, the digital divide continues to be a significant barrier, especially in rural areas where there is limited hardware and connectivity (Inter-American Development Bank, 2022).

Another determining variable of the effect of adaptive digital tools in mathematics education is instructor training. Literature has established that instructor training on the use

of technological tools is a determinant variable for successful adoption in the classroom (Koe-hler & Mishra, 2009). In the absence of training, technology use in teaching can contribute to the superficial usage of tools, which limits their effect on student learning (Castañeda & Selwyn, 2018).

And also a key element to enable these study methods to function is fair access to technology. To this end, UNESCO has highlighted public policies for the promotion of digital inclusion so that all students, regardless of their socioeconomic status, can benefit from the possibilities provided by education technologies (UNESCO, 2023). However, the execution of those policies relies on massive investment in human capital and infrastructure and, as such, it is a limiting factor for budget-restrained countries like Ecuador (OECD, 2021).

The role of digital technologies in the mathematics education of SEN students is also related to the individualization of learning. Websites such as Khan Academy, Smartick, and Matific have also designed algorithms that individualize exercises and material based on student performance to enable learning to be more tailored (Pane et al., 2014). This feature has been particularly beneficial for students who have learning difficulties such as dyscalculia since they can learn at their own pace and solidify concepts incrementally (Butterworth, 2018).

With regard to the assessment of learning, technology has enabled the gathering and analysis of data on student performance and facilitated informed, evidence-based decision-making for teachers. Learning analytics has been identified as one of the most innovative trends in education due to its capability of identifying learning issues early enough and establishing better intervention practices (Siemens & Long, 2011). Still, the utilization of such systems comes with privacy and ethical concerns since dealing with sensitive data needs well-defined rules and proper protection mechanisms (Williamson, 2019).

Whereas technology in the teaching of mathematics to SEN students is valuable, its effective implementation needs to be understood as being dependent upon a composite policy of technology, pedagogy, and relevant education policies. Lessons from Spain and Ecuador indicate that technology alone does not lead to learning improvement, but it has to be combined with sound pedagogical practices and an institutional commitment to inclusive education (Fullan, 2013).

Finally, the development of educational technology to learn mathematics for SEN students makes one ponder seriously about the future of inclusive education. The research on the subject is a continuous process, and one needs to continue observing the application of digital technology in different learning environments to realize its full potential and reduce current disparities (Selwyn, 2022).

To tackle this research, the hypothesis is that the application of adaptive digital technologies in learning mathematics significantly improves accessibility and the attainment of mathematical skills among SEN students in Spain and Ecuador. In this regard, the guiding question for the study is: In what ways do adaptive digital technologies facilitate the learning of mathematics among SEN students in Spain and Ecuador?

With the aim of creating empirical evidence to guide more effective education policy and pedagogical practice, the following objectives are established:

1. To analyze the impacts of adaptive digital technologies on the teaching of mathematics to SEN students.

2. To assess their performance and their ability to adapt learning and compensate for different cognitive rates and learning styles.
3. Investigate the barriers and possibilities that their usage poses to the Spanish and Ecuadorian education systems.

As the digitization of education is an imminent reality, it becomes necessary to understand how such technologies may be harnessed to enhance the learning of mathematics in a way that moves towards inclusive and equitable education (UNESCO, 2023). On this assumption, the study investigates the uses of artificial intelligence, augmented reality, and interactive platforms in education and the requirements to enable them to succeed, i.e., teacher training, access to technology, and curriculum alignment.

2. METHOD

With a view to ensuring scientific coherence and methodological depth, a mixed-methods design was used in this research, integrating quantitative and qualitative methodologies. This is in response to the need to have comprehensive knowledge regarding the impact of adaptive digital technologies on the teaching of mathematics for students with special educational needs (SEN) in Spain and Ecuador. While quantitative measures allow assessment of the effect of these tools according to objective criteria such as academic performance and frequency of technology use, qualitative measures provide contextual information that allows for the interpretation of data, investigation of students' and teachers' experiences, perceptions, and issues in utilizing these technologies.

The research was conducted in 10 schools, five Spanish and five Ecuadorian, which were selected based on their experience in the utilization of digital technologies in inclusive educational contexts. Schools were selected according to variability criteria in order to include urban and rural schools with varied access to technological infrastructure. This way, a broader representation of the variety of contexts in which these tools are used, representing different realities in both countries, was made possible.

The sample included 200 SEN students and 50 inclusive education teachers. The respondents were sampled on the basis of purposive sampling considering factors such as the presence of students with an official SEN diagnosis, availability of technological facilities at the institution, and teaching experience in adaptive strategies. The variability within the sample in terms of age, type of SEN, and educational level enabled us to consider the effects of digital technologies on different subgroups of students and allow patterns and variations in the effect to be investigated.

Standardized questionnaires were used to measure students' and teachers' use of digital technology, the degree of personalization of learning, and teaching efficiency in mathematics. The questionnaires consisted of 1 to 5 Likert scales that allowed the measurement of perceived ease of use of the technological tools and their impact on understanding mathematical concepts.

Questionnaires were derived from literature on inclusive education and technology in an iterative manner so that the questions fit and suited the purposes of the study. Some pilots were conducted on students and teachers to gauge the clarity of the questions and the consistency of responses. Pilots helped have some of the items reworded to eliminate ambiguities and make the tool clear to everyone being surveyed.

Classroom observation provided firsthand evidence of the incorporation of digital technology into the teaching-learning process. An observation guide was designed with such parameters as students' technology interaction, independence in mathematics problem-solving, and content modification according to the needs of each individual. The move was toward pattern-seeking in incorporating the digital tools and alignment with academic performance and motivation of learners.

Observations were made at various points in the school year to observe variations in technology use at various stages of the learning process. Each school was observed multiple times to enhance the validity of the data and prevent observations from being skewed by unusual circumstances, like special events or short-term technical problems with digital technology.

In addition, semi-structured interviews with special education and technology experts were also conducted with the aim of further investigating challenges and opportunities from using these tools in mathematics teaching. The interviews were recorded and thematically coded, with overarching themes being access barriers to technology, teacher training, and curriculum adaptation.

In order for the interviews to be representative and to represent a plurality of perspectives, experts with different backgrounds were selected, including teachers with experience in inclusion, designers of online learning environments, and public education policy makers. This diversity allowed the research to be constructed from various perspectives, adding depth to the analysis with pedagogical, technological, and administrative perspectives.

To reduce to the barest minimum the possibility of bias in information collection and analysis, some methodological safeguards were observed. First, data triangulation was achieved by combining different sources of information (interviews, observations, and questionnaires), through which findings were compared and contrasted and an objective impression derived. In addition, diversified sampling was applied, including schools with various technological provision and pupils with varying SEN conditions, in order to provide a better sample of the study population. Through this, differences in the effectiveness of digital technology by context were pursued without prior generalization from a homogeneous sample.

But the risk of biases in the methodology is acknowledged. One of the major risks is response bias in questionnaires, as the students and educators may overestimate or underestimate the impact of digital technologies on learning. For minimizing this risk, indirect questions have been designed, and control items have been added to monitor response consistency.

Another threat is one of observation bias, as having the researcher in the class might influence participants' behavior and produce a Hawthorne effect. This was mitigated by making observations across several sessions and at various points throughout the school year, observing more spontaneous interaction. Teachers were also asked to keep to their normal dynamics during observation sessions, with very little external control over pedagogy.

Quantitative data analysis was conducted through descriptive and inferential statistical procedures. Normality tests were conducted to determine data distribution, and analysis of variance (ANOVA) was conducted to examine significant differences between groups. Multiple linear regression was also conducted to examine the correlation of the usage of digital technology with students' mathematics performance.

Qualitative data were analyzed thematically, and NVivo software was employed to search for patterns and relationships across participants' responses. Patterns emerged that

were linked with perceived benefits of adaptive technologies, barriers to their use, and recommendations for improving their use in inclusive education.

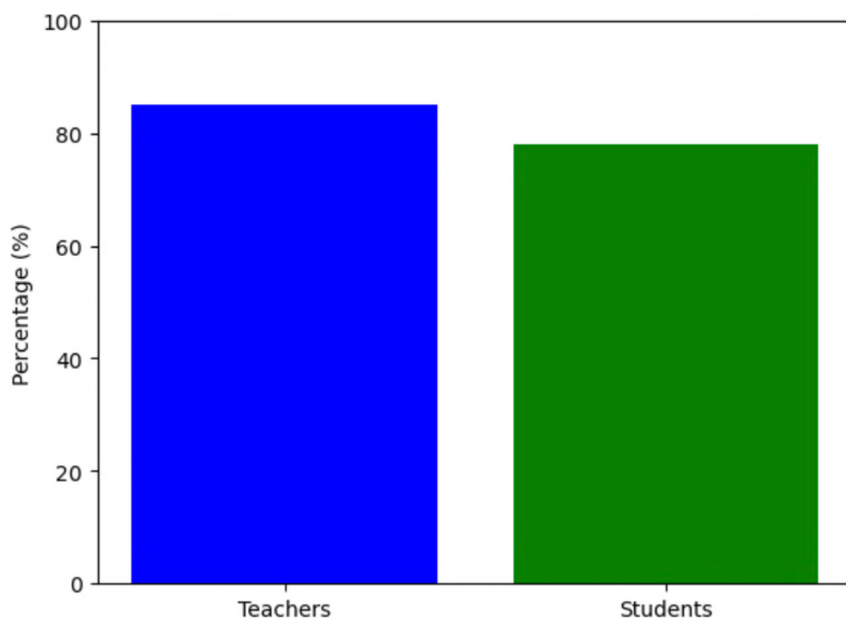
3. RESULTS

The findings of the research reveal the impact of adaptive digital technology in the mathematics instruction process among students with special educational needs in Spain and Ecuador. Through analysis, the dominant trends in conceptual construction, fostering students' engagement and motivation, and enhancing regular and focused monitoring were brought to light. However, the study also reveals that there are firm barriers to the use of such tools, most particularly in teacher training and technology support shortages in some learning contexts, particularly in Ecuador.

3.1 Impact on mathematical conceptual understanding

Adaptive digital technology influences math conceptual understanding by the way the learner is permitted to access material at his/her own pace. Questionnaires from students and teachers yield evidence that 85% of the teachers believed that there was significant improvement in their students' capacity to understand mathematical concepts upon using these instruments. Likewise, 78% of the students believed that the use of digital platforms allowed them to better understand mathematics through interactive visualization of abstract concepts that were otherwise difficult to interpret (See Figure 1).

Figure 1- Improvement in mathematical understanding.



Source: Prepared by the authors.

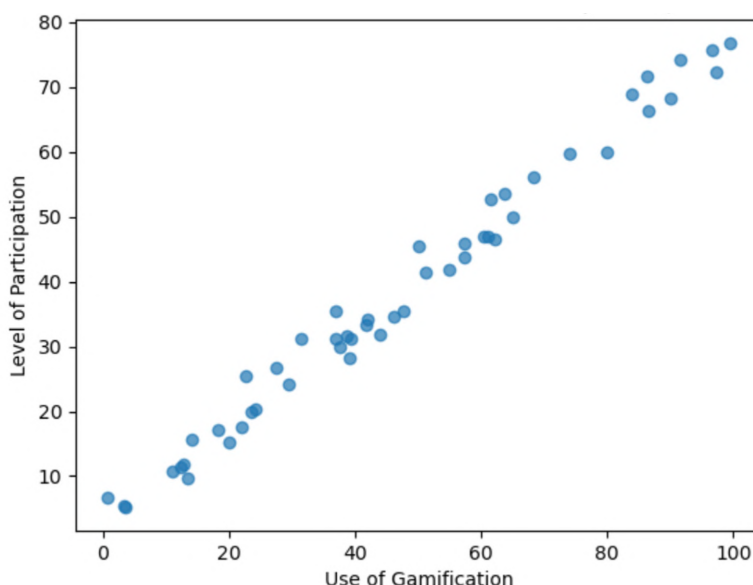
Analysis of variance (ANOVA) indicated that significant differences in students' performance in mathematics existed both before and after the implementation of adaptive technologies, with $p < 0.05$, and indicated that the effect of the resources has a positive impact on pedagogy. Classroom observation showed that students achieved greater autonomy in conducting mathematics exercises with software that provided instant feedback, enabling them to correct themselves in real time and self-realign learning approaches without reliance on teacher intervention alone. Furthermore, interfaces that incorporated visual tools such as interactive diagrams and 3D models facilitated understanding of abstract processes, particularly for dyslexic and dyscalculic learners, who enjoyed a remarkable reduction in their errors when completing exercises.

Qualitative study of interviews with special education experts and teachers reveals that SEN pupils were less apprehensive about maths when they learned using these technologies since they had the ability to learn at their own pace without comparison. As described by one of the more than 10-year-experienced inclusive education Spanish teachers: "Technology not only simplifies maths but also transforms the way students learn mathematics. They no longer consider it as a barrier but as a challenge that can be overcome with proper guidance."

3.2 Enhancement of student engagement and motivation

Higher student engagement and interest in mathematics after applying adaptive technologies are also identified through this study. 82% of the educators reported higher active student participation within class, while 76% of the learners reported mathematics becoming easier and fun to learn when using these technologies. Student participation was strongly linked with gamification elements on websites through multiple linear regression analysis with a correlation coefficient $r = 0.72$ and $p < 0.01$ significance (See Figure 2).

Figure 2- Correlation between gamification and participation.



Source: Prepared by the authors.

Classroom observation indicated that students were more active when they used reward for achievement app, math game, and progress tracking. Kahoot and Matific were best at keeping students active and fostering friendly competition in class as they facilitated collaborative learning. As quoted by one Ecuadorian teacher: “Gamification has allowed us to grab learning difficulty students by the neck. Before, they would avoid becoming part of a class; now, they don’t get right and on time math problems and do so cheerfully.”

3.3 Continuous assessment and personalized feedback

Computer technologies with adaptive capacities have also optimized continuous and adaptive learning test and feedback so that teachers can make timely changes as per the performance of the students. 88% of the teachers reported that they are able to identify early learning problems with the aid of digital platforms, while 79% of the students enjoyed the immediate feedback from the digital platforms. Data analysis unveiled that the mathematical effectiveness of the SEN students was considerably enhanced in the continuous groups of assessment using online media compared to the traditional methods of assessment, $p\text{-value} < 0.05$.

Classroom observations uncovered that technology resources with automated data analysis enabled teachers to determine trends in students’ learning so that they could make use of differentiated pedagogy. Those students who were provided with immediate feedback on their errors were able to improve the precision in practicing at a higher level than those students who were only corrected after completing a study module. One of the Spanish instructors described how precious this instrument is, continuing as follows: “Before, it would take months or weeks to realize that there was a specific learning issue with a pupil. Now, through our online platform comments, we can respond immediately and fill in the gap where it originated.”

3.4 Barriers to Implementation

While there were advantages attained through the research, the study further uncovers important barriers to using adaptive digital tools. The biggest barriers among these include a lack of training in digital tools by teachers, where 67% of the teachers asserted that they were ill-trained on how best to use the tools within the classroom. Up to 82% of them was found in Ecuador, where there was explicitly evidence of a great gap in training when compared with Spain.

Special education experts interviewed stated that the lack of training creates teacher resistance, who perceive the implementation of technology as an additional workload rather than a way of augmenting pedagogy and learning. As one Ecuadorian teacher describes: “We know that technology is good, but we are not aware of how to use it in the correct manner. We need special training and provision of adapted pedagogical materials.” Poor training has direct implications for the operation of digital technologies, since their capacity depends to a large degree on how they are used in class.

The second obstacle to be overcome is the absence of technology infrastructure in certain schools. In Ecuador, 74% of the teachers indicated that their schools lacked adequate devices to provide all students with equal access to digital platforms. Additionally, 58% of the students indicated that they suffered from connectivity issues at home, making it hard to apply such equipment outside the classrooms and lowering its effectiveness on independent learning.

Ecuadorian school studies found that there were times when teachers needed to translate online activity into written format because of insufficient access to computers, reducing the interactive potential of online spaces. As one Ecuadorian school manager in rural areas put it: “We would like to add more technological tools, but the truth is that our budget is not infinite. Without machinery and a reliable internet connection, digitization of schooling is an excellent challenge.”

4. DISCUSSION

Findings of the current study agree with previous research in the highlighting of the positive contribution of adaptive digital technology towards the instruction of mathematics among special educational needs students. Bouck et al. (2018) and Azevedo et al. (2020), for instance, have demonstrated that the use of technological devices improves conceptual understanding as well as student motivation among those with learning disabilities. Azevedo et al. (2020) also point out, similarly, that technology-supported learning environments allow for the adjustment of instructional pace to meet student needs, agreeing with the findings of this study on personalized learning through interactive platforms.

Also, the student growth of engagement observed in this research corroborates Lee and Cherner (2021), who affirm that gamification and interactive features in websites enhance students’ commitment and self-determination in learning. Specifically, the correlation coefficient found in this research ($r = 0.72$, $p < 0.01$) corroborates these authors’ findings on the positive relationship between the use of gamified features and students’ motivation.

There are, however, certain findings with varied results regarding the success of technology in inclusive education. Certain studies, such as those by Fleischer (2019), warn that the adoption of digital materials will not automatically boost learning unless training for teachers is specifically incorporated. This is also consistent with the barrier found in this study, where 67% of teachers overall and 82% from Ecuador reported that they were not trained to utilize adaptive technologies. In this case, literature shows that the effectiveness of such tools is greatly reliant on teacher training and the ability to effectively implement them in the classroom (Tondeur et al., 2017).

However, another limitation identified in previous research is the technology gap. According to Escueta et al. (2020), limited connectivity and infrastructure also reduce the effects of educational technologies, especially in socioeconomically disadvantaged settings. This is corroborated by findings obtained in Ecuador, where 74% of the teachers reported the lack of devices and 58% of the students reported shortages in connectivity, limiting access to digital learning on an equal footing.

5. CONCLUSIONS

Technologies that respond to learners’ needs have proved to be an effective solution in improving the teaching of mathematics for students with special educational needs (SEN) in Spain and Ecuador. They ensure individualized learning, tailored to the specific needs of each learner, to increase their activity and goal orientation in learning. The ability of technology to control various content and teaching styles in order to accommodate a variety of learning types and rates makes digital technology particularly suited for SEN pupils who will most likely be disadvantaged under ordinary classroom instruction.

But for adaptive digital technologies to be effectively utilized, teachers need to be adequately trained on how they can use these technologies. Training of teachers should not only encompass the technical process of using technology but also pedagogical and effective methods of using it in the classroom. An adequately trained teacher who uses adaptive digital tools can improve the quality of pedagogy, facilitate inclusion and active participation of all students, including those with SEN.

In the meantime, technology access can no longer be portrayed as a challenge for teachers but rather as an infrastructure that requires significant capital investment. For the majority of learning spaces, particularly in rural or low-resource environments, students lack the hardware and connectivity needed to make the possibilities offered by digital technologies a reality. Therefore, it is of utmost importance to increase investment in Spanish and Ecuadorian technology infrastructure such that all students, irrespective of their level of socioeconomic status, have the same to benefit through the medium of digital courseware.

And for full adoption of adaptive digital technologies in the learning systems of these two countries, it is highly important that education policy turns towards digital inclusion. This involves offering access to technology but also developing regulatory frameworks that facilitate the use of digital technologies in learning to support all students, including those with SEN. Digital inclusion needs to be regarded as a fundamental right to ensure equal opportunities and access to quality learning.

Adaptive digital technologies are an area with great potential to improve mathematical instruction for students with SEN. But if their deployment is to be effective, then there needs to be an interdisciplinary solution that involves teacher training, investment in technological infrastructure, and the design of educational policy with a digital inclusion orientation. This integrated solution will assist in creating a more inclusive and equitable education system that can address the needs of all students and improve their achievement.

STATEMENTS OF CONTRIBUTIONS BY THE AUTHORS

This work is the result of the doctoral thesis with international recognition entitled “Analysis of the educational response to students with autism spectrum disorder comorbid with attention deficit hyperactivity disorder in the province of Almería and the city of Guayaquil: a case study”.

6. REFERENCES

- Azevedo, R., Bouck, E. C., & otros autores relevantes. (2020). The impact of adaptive digital technologies on mathematics education for students with special educational needs. *Journal of Special Education Technology*, 35(3), 123-135. <https://doi.org/10.1177/0162643420912102>
- Bouck, E. C., Park, J., & Flanagan, S. (2018). Assistive technology for students with learning disabilities: A systematic review. *Learning Disabilities Research & Practice*, 33(2), 70-82. <https://doi.org/10.1111/ldrp.12173>
- Butterworth, B. (2018). *Dyscalculia: From science to education*. Routledge.
- Castañeda, L., & Selwyn, N. (2018). More than tools? Making sense of the ongoing digitizations of higher education. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, 15(1), 22.
- Collins, A., & Halverson, R. (2018). *Rethinking education in the age of technology: The digital revolution and schooling in America*. Teachers College Press.

- Escueta, M., Quan, V., Nickow, A. J., & Oreopoulos, P. (2020). Education technology: An evidence-based review. *Journal of Economic Literature*, 58(4), 897-996. <https://doi.org/10.1257/jel.20191551>
- Fleischer, H. (2019). Challenges and opportunities in implementing digital tools in special education. *International Journal of Inclusive Education*, 23(7-8), 789-803. <https://doi.org/10.1080/13603116.2019.1624845>
- Fullan, M. (2013). *Stratosphere: Integrating technology, pedagogy, and change knowledge*. Pearson.
- Koehler, M. J., & Mishra, P. (2009). What is technological pedagogical content knowledge? *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, 9(1), 60-70.
- Lee, J., & Cherner, T. S. (2021). Gamification in education: A systematic review of the literature. *Journal of Educational Technology Systems*, 50(1), 5-36. <https://doi.org/10.1177/00472395211033845>
- Luckin, R., Holmes, W., Griffiths, M., & Forcier, L. B. (2016). *Intelligence Unleashed: An argument for AI in Education*. Pearson.
- Mayer, R. E. (2021). *Multimedia learning* (3rd ed.). Cambridge University Press.
- Merchant, Z., Goetz, E. T., Cifuentes, L., Keeney-Kennicutt, W., & Davis, T. J. (2014). Effectiveness of virtual reality-based instruction on students' learning outcomes in K-12 and higher education: A meta-analysis. *Computers & Education*, 70, 29-40.
- Pane, J. F., Griffin, B. A., McCaffrey, D. F., & Karam, R. (2014). Effectiveness of cognitive tutor algebra I at scale. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 36(2), 127-144.
- Shunk, D. H., & DiBenedetto, M. K. (2021). Motivation and social cognitive theory. *Contemporary Educational Psychology*, 60, 101- 132.
- Selwyn, N. (2022). *Education and technology: Key issues and debates* (3rd ed.). Bloomsbury Academic.
- Siemens, G., & Long, P. (2011). Penetrating the fog: Analytics in learning and education. *EDUCAUSE Review*, 46(5), 30-40.
- Tondeur, J., van Braak, J., Ertmer, P. A., & Ottenbreit-Leftwich, A. (2017). Understanding the relationship between teachers' pedagogical beliefs and technology use in education: A systematic review. *Educational Technology Research and Development*, 65(3), 555-575. <https://doi.org/10.1007/s11423-016-9481-2>
- Williamson, B. (2019). *Big data in education: The digital future of learning, policy and practice*. SAGE Publications.



INTEGRACIÓN DE METODOLOGÍAS ACTIVAS E INTELIGENCIA ARTIFICIAL EN LA ENSEÑANZA DEL TEMA DE SUCESIONES Y SERIES: UNA EXPERIENCIA DE CLASE EN UN CURSO SEMPRESCENCIAL DEL INSTITUTO TECNOLÓGICO DE COSTA RICA

INTEGRATION OF ACTIVE METHODOLOGIES AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE IN TEACHING SEQUENCES AND SERIES: A CLASSROOM EXPERIENCE IN A BLENDED COURSE AT THE COSTA RICA INSTITUTE OF TECHNOLOGY

Reiman Yitsak Acuña Chacón¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0094-3282>

Marcela Marrero Calvo²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6008-7078>

RESUMEN

Este trabajo describe una experiencia educativa desarrollada en un curso universitario de Cálculo, centrada en la enseñanza de sucesiones y series. Con el fin de fortalecer la comprensión conceptual y práctica de estos temas, se implementaron metodologías activas como la Enseñanza Justo a Tiempo (JiTT) e Instrucción entre Pares (PI), apoyadas con herramientas de Inteligencia Artificial (IA). Se compararon dos grupos: uno experimental, que integró estas metodologías con IA, y otro de control, con un enfoque tradicional. Los resultados evidenciaron mejoras en el razonamiento matemático, la colaboración y el desempeño académico del grupo experimental. Esta experiencia, además de ser replicable, destaca el potencial de integrar metodologías activas y tecnologías emergentes en la educación matemática universitaria, en concordancia con tendencias internacionales.

Palabras claves: metodologías activas, inteligencia artificial, sucesiones, series, enseñanza matemática universitaria.

ABSTRACT

This work describes an educational experience developed in a college Calculus course, focused on the study of sequences and series. Two active methodologies were implemented in order to strengthen the conceptual and practical understanding of those topics: Just-in-Time Teaching (JiTT) and Peer Instruction (PI), both supported by Artificial

¹ Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica, 159-7050. reiacuna@itcr.ac.cr

² Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica, 159-7050. mmarrero@itcr.ac.cr



Intelligence (AI) tools Two groups were compared: an experimental group, which integrated these methodologies with AI, and a control group, with a traditional approach. The results showed improvements in mathematical reasoning, collaboration and academic performance in the experimental group. This experience, in addition to being replicable, highlights the potential of integrating active methodologies and emerging technologies in university mathematics education, in accordance with international trends.

Keywords: active methodologies, artificial intelligence, sequences, series, university mathematics education.

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de sucesiones y series en el nivel universitario representa un desafío significativo en los cursos de Cálculo, debido a su naturaleza abstracta y su complejidad teórica. Este tema exige que los estudiantes dominen no solo los procedimientos técnicos, como hallar límites y analizar convergencias, sino que también comprendan profundamente los fundamentos teóricos que sustentan estos conceptos. En un contexto educativo moderno, donde las competencias digitales y la resolución de problemas interdisciplinarios son fundamentales, resulta crucial adoptar enfoques pedagógicos que potencien tanto el aprendizaje conceptual como las habilidades prácticas.

Diversas investigaciones han demostrado que las metodologías activas y el uso de tecnologías emergentes pueden aumentar la motivación y mejorar el aprendizaje en áreas abstractas, proporcionando a los estudiantes herramientas efectivas para abordar temas complejos (Mazur, 1997; Novak et al., 1999). Este trabajo describe y analiza una experiencia de aula que integra la Enseñanza Justo a Tiempo (JiT), la Instrucción entre Pares (PI) y herramientas de Inteligencia Artificial (en adelante IA) en el estudio de sucesiones y series.

La propuesta se clasifica como una experiencia de aprendizaje y tiene como propósito compartir una implementación concreta, los fundamentos pedagógicos utilizados y los resultados obtenidos (Crouch y Mazur, 2001). La pregunta de investigación que orientó esta experiencia fue la siguiente: ¿cómo influye la integración de JiT, PI y herramientas de IA en la comprensión y el desempeño de los estudiantes en el tema de sucesiones y series?

El objetivo general fue evaluar el impacto de esta estrategia en el rendimiento académico de los estudiantes y en el desarrollo de habilidades clave, como la argumentación lógica y la comunicación matemática, y resaltar la relevancia de estas metodologías en la educación matemática contemporánea.

Estudios recientes (Zawacki Richter et al., 2019; Holmes et al., 2019) han demostrado el impacto positivo del uso de la IA en entornos educativos, particularmente cuando se integra con estrategias activas centradas en el estudiante. Sin embargo, la evidencia sobre su aplicación en la enseñanza de temas abstractos —como las sucesiones y series— aún es limitada, especialmente en contextos semipresenciales universitarios. Este estudio contribuye a llenar ese vacío, articulando enfoques metodológicos innovadores con tecnologías emergentes.

En el contexto de la educación matemática contemporánea resulta imprescindible renovar las estrategias didácticas, de forma que permitan atender la diversidad de estilos de aprendizaje y fomentar un pensamiento matemático más crítico y autónomo. La incorporación de metodologías activas y tecnologías emergentes, como la inteligencia artificial, se presenta como una vía favorable para lograrlo.

2. CONTEXTO

El Instituto Tecnológico de Costa Rica (TEC) ofrece cursos presenciales, semipresenciales y virtuales en sus diferentes ciclos. Durante el verano 2024-2025, uno de los autores tuvo la oportunidad de impartir un curso semipresencial de Cálculo y Álgebra Lineal, y el otro autor de manera presencial, por lo que se tomó la decisión de hacer un trabajo relacionado con metodologías activas. Esto debido a que los cursos de verano mantienen los contenidos y programas establecidos, pero permiten ajustes en la evaluación. Esta modalidad permitió comparar diferentes experiencias y analizar su impacto en el aprendizaje.

En este contexto, se propuso a la dirección de la Escuela de Matemática que dos grupos (uno presencial y otro semipresencial) compartieran las mismas evaluaciones en los exámenes, pero con diferentes ponderaciones:

- Grupo 2 (control): 100% exámenes.
- Grupo 4 (experimental): 45% exámenes, 45% trabajos grupales con IA, 10% trabajo grupal en video.

En el grupo experimental, el tema de sucesiones y series se abordó durante las dos primeras semanas con actividades divididas entre temas desarrollados en clases tradicionales y trabajos grupales mediados por IA. En la Tabla 1 se presentan los temas y actividades evaluativas utilizadas en el estudio, y se resalta la integración de la IA en el grupo experimental.

Tabla 1 - Distribución de temas y actividades evaluativas.

Fecha	Temas tradicionales (explicados por el docente o de estudio independiente)	Trabajos grupales con Inteligencia Artificial
Martes 10 de diciembre del 2024	Sucesiones (introducción), sucesiones recurrentes: definición, ejemplos y cálculo de algunos términos. Teoremas de convergencia de sucesiones	Monotonía de sucesiones y Convergencia de sucesiones (Primer trabajo grupal con un valor de 2,5% con respecto al total del curso)
Miércoles 11 de diciembre del 2024	Definición de serie infinita de números reales y Sumas parciales	Definición de convergencia y divergencia de series y Condición necesaria para convergencia de series (Segundo trabajo grupal con un valor de 2,5%)
Jueves 12 de diciembre del 2024	Serie geométrica y Serie telescópica (presencial)	Criterio de la integral, P-series y Serie armónica (Tercer trabajo grupal con un valor de 2,5%)
Viernes 13 de diciembre del 2024	Criterios de convergencia para series de términos positivos, comparación directa y comparación en el límite (estudio independiente)	

Fecha	Temas tradicionales (explicados por el docente o de estudio independiente)	Trabajos grupales con Inteligencia Artificial
Martes 17 de diciembre del 2024	I Parcial (hasta lo visto el jueves 12 de diciembre)	
Miércoles 18 de diciembre del 2024	Criterio de la Razón, Criterio de la Raíz y Series alternadas (presencial)	Criterio de Leibnitz y aproximación de series (teorema de la cota del error) (Cuarto trabajo grupal con un valor de 2,5%) Convergencia condicional y absoluta (Quinto trabajo grupal con un valor de 2,5%)
Viernes 20 de diciembre del 2024	II Parcial (hasta lo visto el miércoles 18 de diciembre)	

Fuente: Elaboración propia.

De esta forma, el planteamiento de las clases en el grupo experimental estuvo diseñado de tal manera que en la primera hora y media de clases se hizo una exposición de los contenidos, y en la siguiente hora se formaron grupos aleatorios de tres o cuatro personas. Es importante señalar que los estudiantes contaban con conocimiento previo de los ejercicios. Se contó, además, con la ayuda incondicional de dos asistentes (estudiantes del docente que ya habían aprobado el curso). Es importante indicar que, en este tiempo, los estudiantes debían hacer en grupo un estudio escrito con la evidencia, la cual debían digitalizar y colocar en la plataforma institucional conocida como TEC Digital. Por otro lado, el grupo control mantuvo clases magistrales 100%, donde la docente expuso los temas con pequeños espacios en los cuales los estudiantes podían intervenir en la resolución de algunos ejercicios, o bien con dudas.

3. LA ENSEÑANZA JUSTO A TIEMPO EN EL CURSO EXPERIMENTAL

Según Simkins y Maier (2010), la enseñanza justo a tiempo (JiT) promueve la participación en clase mediante asignaciones previas realizadas en línea. Estas tareas permiten al docente diseñar actividades adaptadas a la comprensión de los estudiantes. Para el éxito de esta metodología, es crucial la motivación estudiantil y la preparación previa de materiales por parte del docente.

En esta experiencia se asignaron lecturas y videos relacionados con sucesiones y series, que fueron revisados antes de las clases. Aunque no todos los estudiantes participaron, quienes lo hicieron mostraron un mayor entusiasmo y comprensión durante las actividades grupales. Los temas para este desarrollo fueron los criterios de convergencia para series de términos positivos y comparación directa y en el límite. Incluso se abarcaron los temas de series alternadas, convergencia absoluta y condicional.

Es importante destacar que se incentivó el estudio individual de los ejercicios presentados a los estudiantes antes del trabajo grupal, y que el docente del curso indicó el repaso de la materia por medio de videos de clases anteriormente hechas.

4. LA INSTRUCCIÓN ENTRE PARES EN EL CURSO EXPERIMENTAL

La Instrucción entre Pares (PI) —propuesta por Mazur (1997)— fomenta la discusión en pequeños grupos mediante preguntas conceptuales. En esta metodología, los estudiantes:

1. Responden individualmente una pregunta.
2. Discuten sus respuestas con compañeros.
3. Reciben retroalimentación del docente; además, este último proporciona explicaciones sobre la respuesta correcta.

La PI se implementó mediante trabajos grupales estructurados en tres fases: 1) resolución individual, 2) discusión colaborativa con inteligencia artificial, y 3) retroalimentación guiada por el docente. Cada sesión incluyó preguntas validadas con Mathematica u otro programa de la misma naturaleza para asegurar coherencia temática. Los estudiantes conocían previamente las preguntas planteadas y, en equipo, colaboraron para discutir y presentar la solución de los ejercicios. Este enfoque integró el análisis y la escritura de soluciones, y utilizó la inteligencia artificial como soporte para desarrollar y perfeccionar sus respuestas.

5. EL USO DE LA INTELIGENCIA ARTIFICIAL

La inteligencia artificial (IA) adquiere cada vez mayor relevancia en el ámbito educativo, pues ofrece oportunidades para la personalización de la enseñanza y la retroalimentación inmediata al estudiantado, lo que resulta especialmente útil en la formación matemática (Holmes et al., 2019; Zawacki Richter et al., 2019). Además, la capacidad de la IA para analizar grandes volúmenes de datos y proponer estrategias de resolución impulsa el desarrollo de competencias clave como el razonamiento lógico, la resolución de problemas y la toma de decisiones informadas (Jordan y Mitchell, 2015). No obstante, se enfatiza la importancia de adoptar estas herramientas de manera responsable y equitativa, garantizando el acceso a todos los estudiantes y evitando sesgos que perpetúen desigualdades (UNESCO, 2021). Por ejemplo, el caso de estudiantes que usan IA permite acceder a un conocimiento de uso inmediato lo cual pone en desventaja a aquellos que sí. En el caso de esta experiencia, se garantizó y revisó que existiera acceso a internet en el aula y que al menos uno de los miembros del grupo formado tuviera acceso a una IA. El docente indicó la importancia y necesidad de valorar las respuestas con diferentes IAs para generar insumos en las evidencias de cada trabajo grupal.

Es importante indicar que, a pesar de los avances documentados en el uso de metodologías activas en matemáticas, la articulación efectiva entre estas herramientas e IAs aún representa un campo emergente de estudio. Esta investigación busca aportar evidencia empírica sobre los beneficios de dicha integración, particularmente en contextos semipresenciales.

6. SOBRE LAS INSTRUCCIONES GENERALES PARA LOS TRABAJOS GRUPALES

Esta sección describe el diseño y desarrollo de preguntas que guiaron los trabajos grupales relacionados con sucesiones y series. A continuación, se detallan y explican cada uno de los apartados:

6.1. Tema del Día

Se define el contenido específico que los estudiantes trabajarán durante la sesión, enfocado en un aspecto particular del tema de sucesiones y series. Por ejemplo, en una sesión podrían abordar el criterio de la integral o el criterio de comparación. El propósito es asegurar que los ejercicios estén alineados con los contenidos clave del curso y que los estudiantes profundicen en el tema central del día.

6.2. Objetivos del Ejercicio

Cada ejercicio tiene objetivos claros y bien definidos, que buscan desarrollar habilidades específicas. Por ejemplo:

1. Comprender la convergencia o divergencia de sucesiones o series.
2. Aplicar criterios de convergencia.
3. Justificar resultados utilizando lenguaje y notación matemática formal.

El propósito es establecer metas claras y ayudar a mantener el enfoque del grupo, de forma que se pueda evaluar de manera objetiva el logro de los aprendizajes esperados.

6.3. Dinámica del Grupo

1. Formación de grupos aleatorios: Los estudiantes se agrupan en equipos de 2 a 4 personas de manera aleatoria para fomentar la interacción entre compañeros que usualmente no trabajan juntos. El propósito es promover el trabajo colaborativo y habilidades interpersonales, además de evitar que se formen grupos de afinidad preestablecidos.
2. Propuesta inicial con IA: Cada grupo utiliza una herramienta de inteligencia artificial (por ejemplo, ChatGPT) para generar una solución inicial al problema planteado. La idea es aprovechar la IA como punto de partida para explorar la solución y reflexionar sobre sus limitaciones.
3. Discusión grupal: Tras obtener la propuesta inicial, los estudiantes deben:
 - Analizar si la solución de la IA es correcta.

- Identificar errores y explicar por qué ocurren.
- Justificar cada paso usando lenguaje matemático formal.

El objetivo en este paso es fomentar el pensamiento crítico, la identificación de errores y la precisión matemática, además de consolidar el conocimiento a través de la discusión.

6.4. Metodología de Trabajo

1. Instrucción entre Pares: Cada miembro debe explicar sus ideas y razonamientos al resto del grupo. Esto asegura que todos los integrantes comprendan la solución. La idea es promover la comunicación efectiva y el aprendizaje mutuo.
2. Enseñanza Justo a Tiempo: Cuando surjan dudas, los estudiantes pueden pedir ayuda al asistente o docente para recibir orientación específica en el momento en que lo necesiten. Además, el ejercicio se presentó un día antes a los estudiantes para un estudio previo. El propósito es evitar que los grupos queden estancados y facilitar la comprensión oportuna.
3. Aprendizaje Cooperativo: Cada integrante aporta sus fortalezas y conocimientos para trabajar en conjunto en la resolución del ejercicio. Con ello se fortalece la colaboración y se resalta la importancia de la diversidad en el aprendizaje.

Este diseño permitió comparar de forma controlada el impacto de las metodologías activas apoyadas por IA en el rendimiento académico y en la percepción del aprendizaje por parte del estudiantado.

6.5. Aspectos a Evaluar

Durante el desarrollo de los ejercicios se evaluaron los siguientes aspectos:

1. Calidad de la discusión y colaboración: La interacción entre los estudiantes y su capacidad para trabajar de manera efectiva como equipo.
2. Uso adecuado del lenguaje matemático: La formalidad y precisión con la que justificaron las soluciones.
3. Capacidad de identificar y corregir errores: La habilidad para analizar críticamente las propuestas de la IA, reconocer errores y explicar cómo corregirlos.

Para ello, tanto el docente como los asistentes utilizaron una lista de cotejo, con el fin de evaluar objetivamente estos aspectos. Esta lista de cotejo se subió a la plataforma institucional TEC Digital, donde tanto los estudiantes como los asistentes tuvieron acceso. La descripción de la lista de cotejo se hace en la sección 8.

6.6. Entrega del Ejercicio

Al final de la sesión, los grupos debían presentar su solución al resto de la clase, o bien entregarla de manera escrita por medio de la plataforma. Las presentaciones debían incluir:

1. Una solución final bien justificada.
2. Una reflexión breve sobre:
 - El proceso seguido en el grupo.
 - La experiencia de usar inteligencia artificial como herramienta de apoyo.

En casos específicos, los estudiantes entregarían solo una hoja con la solución y el profesor se encargaría de brindar retroalimentación de forma individual.

En este punto, la idea es promover que los estudiantes reflexionen sobre su aprendizaje, compartan sus resultados y reciban retroalimentación para mejorar sus habilidades.

Figura 1 – Ejemplo de instrucciones para el primer trabajo grupal.

Instrucciones Previas para los Ejercicios

Tema del día: Monotonía de sucesiones y convergencia de sucesiones

Objetivo del Ejercicio

- Resolver problemas relacionado con la monotonía y la convergencia de sucesiones.
- Utilizar inteligencia artificial para obtener y analizar soluciones.

Dinámica del Grupo

1. Se harán grupos de 2-4 estudiantes de forma aleatoria.
2. Cada grupo trabajará en un ejercicio asignado, para lo cual, utilizando una herramienta de IA, deberá proponer una solución inicial (por ejemplo, ChatGPT).
3. Después de obtener la solución de la IA, discutan en grupo para:
 - Analizar si la solución es correcta.
 - Identificar posibles errores y explicar por qué ocurren.
 - Justificar cada paso utilizando lenguaje matemático adecuado.

Metodología de Trabajo

- **Instrucción entre Pares:** Cada miembro del grupo debe explicar su razonamiento a los demás y asegurarse de que todos comprendan la solución.
- **Enseñanza Justo a Tiempo:** Si surgen dudas, pidan ayuda al asistente para recibir orientación específica en el momento adecuado.
- **Aprendizaje Cooperativo:** Resuelvan el ejercicio en conjunto, aprovechando las fortalezas de cada miembro del grupo.

Aspectos Para Evaluar

Durante el ejercicio, se evaluarán los siguientes aspectos:

1. La calidad de la discusión y la colaboración dentro del grupo.
2. El uso adecuado del lenguaje matemático.
3. La capacidad de identificar y corregir errores en las soluciones propuestas por la IA.

Para ello, los asistentes y el docente tendrán una lista de cotejo para caracterizar todos estos aspectos. Puede ver la lista de cotejo respectiva en el TEC Digital

Entrega del Ejercicio

Al final de la sesión, cada grupo presentará su solución al resto de la clase. Incluyan una breve reflexión sobre el proceso y el uso de la inteligencia artificial. En algunos casos solo se pedirá en una hoja la solución y el profesor hará una retroalimentación.

Fuente: Elaboración propia.

Este enfoque metodológico integra tecnologías emergentes, trabajo colaborativo y evaluación formativa, y tiene la ventaja de brindar a los estudiantes una experiencia completa para aprender temas abstractos de manera dinámica y efectiva.

7. SOBRE LAS PREGUNTAS ASOCIADAS A LOS TRABAJOS GRUPALES EN EL TEMA DE SUCESIONES Y SERIES

Para cada trabajo grupal se generaron 12 preguntas haciendo uso de la inteligencia artificial; la misma desarrolló una serie de ejercicios diversos relacionados con el tema del día, los cuales fueron revisados por el docente y sus asistentes para asegurar su congruencia y corrección. Por ejemplo, en el primer trabajo se le solicitó a la IA: “genere 12 ejercicios sobre monotonía y convergencia de sucesiones conforme a las indicaciones previas”. La IA presentó un borrador que fue revisado y corregido antes de solicitar su conversión a formato LaTeX, para posteriormente compilarlo en un documento PDF disponible en la plataforma institucional.

Figura 2 – Ejercicios diseñados para el primer trabajo grupal.

Ejercicios

1. Demuestra si la sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ es monótona. ¿Es creciente o decreciente? Utiliza IA para verificar tu resultado y explica tu razonamiento.
2. Determina si la sucesión $b_n = (-1)^n \cdot \frac{1}{n}$ converge. Discute con tu grupo si esta sucesión es monótona y justifica tu respuesta.
3. Dada la sucesión $c_n = \frac{2n+3}{3n+1}$, ¿es convergente? Utiliza IA para encontrar el límite y explica si la sucesión es creciente o decreciente.
4. Investiga si la sucesión $d_n = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ es monótona y si converge. Comprueba tu resultado utilizando una herramienta de IA.
5. Sea $e_n = \frac{n^2}{n^2+1}$. ¿Esta sucesión es monótona? Si es así, ¿es creciente o decreciente? Justifica tu respuesta y confirma con IA.
6. La sucesión $f_n = \ln(n) - \ln(n+1)$ es monótona. Determina si es creciente o decreciente. Utiliza IA para verificar tu análisis y explica con lenguaje matemático.
7. Considera la sucesión $g_n = \left(\frac{-1}{n}\right)^n$. Discute si es monótona y si converge. Usa IA para obtener una representación gráfica y analizar su comportamiento.
8. Analiza la convergencia de la sucesión $h_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$. Utiliza IA para encontrar el límite y compara con los resultados de tu grupo.
9. Demuestra que la sucesión $i_n = \frac{n!}{n^n}$ converge a cero. Utiliza IA para realizar cálculos numéricos y explica tu razonamiento paso a paso.
10. Dada la sucesión $j_n = \left(\frac{3}{2}\right)^n$, determina si es monótona y si converge. Usa IA para visualizar la sucesión y justifica con argumentos matemáticos.
11. Sea $k_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^2}$. ¿Es esta sucesión monótona? ¿Converge a un valor finito? Utiliza IA para explorar el comportamiento de la suma parcial.
12. Analiza la sucesión $l_n = \frac{\cos(n)}{n}$. Determina si converge y discute con tu grupo si es monótona. Usa IA para graficar la sucesión y comprobar tus conclusiones.

Fuente: Elaboración propia.

Es pertinente señalar que los ejercicios fueron evaluados por el docente mediante software especializado como Mathematica o GeoGebra, con el propósito de verificar su viabilidad en relación con el tema del día.

La propuesta grupal presentada a los estudiantes estableció que, dentro de una hora, se debían analizar los aspectos solicitados en las instrucciones señaladas en la Figura 1. Es importante indicar que a cada grupo le correspondió trabajar un ejercicio diferente.

8. SOBRE LA EVALUACIÓN IMPLEMENTADA PARA EL TEMA DE SUCESIONES Y SERIES

Para cada uno de los trabajos grupales indicados, la calificación fue atendida por los dos estudiantes asistentes y supervisada por el docente. Para ello, se utilizó una lista de cotejo donde se tomaron en cuenta los siguientes aspectos:

- Todos los miembros participaron activamente.
- Se respetaron las opiniones y turnos de palabra.
- Se llegó a un consenso fundamentado para resolver el ejercicio.
- Se identificaron y discutieron errores o dudas durante la actividad.
- Se utilizó terminología matemática adecuada.
- Las explicaciones fueron claras y precisas.
- Se presentó una justificación correcta del procedimiento.
- Se utilizó una herramienta de IA para resolver el ejercicio.
- Se identificaron errores o aciertos en las soluciones generadas por la IA.
- Se reflexionó sobre las limitaciones o fortalezas del uso de la IA.

Recalcando que cada grupo realizó un ejercicio diferente, los asistentes verificaron su seguimiento de acuerdo con las pautas establecidas. Cualquier duda se dirigía al docente, quien supervisaba y guiaba a los estudiantes. A pesar de que se generaron 12 ejercicios, solo se formaron 11 grupos de cuatro personas; algunos tuvieron tres miembros, ya que la matrícula en el grupo experimental fue de 43 personas.

A continuación, en la Figura 3 se presentan ejemplos del trabajo realizado por los estudiantes en el grupo experimental, y se evidencia la aplicación de la IA en la resolución de ejercicios matemáticos.

Figura 3 – Evidencias del trabajo del 10 de diciembre.

Fuente: Elaboración propia.

En las Figuras 4 y 5 se presentan evidencias de los trabajos grupales con el uso de IA.

Figura 4 – Evidencia de una respuesta de uno de los trabajos grupales con el uso de IA en convergencia de series.

5. Analiza la convergencia de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

Utiliza IA para aplicar el criterio de la integral y determinar si la serie converge o diverge.

En primera instancia, los cuatro integrantes le preguntamos a Chat GPT que la resolviera utilizando el criterio de la integral, ya que como la serie es continua, positiva y decreciente, se puede utilizar la integral, ya que su convergencia o divergencia van a ser los mismos mientras x sea mayor o igual al contador.

Por tanto, primero evaluamos la monotonía de la función:

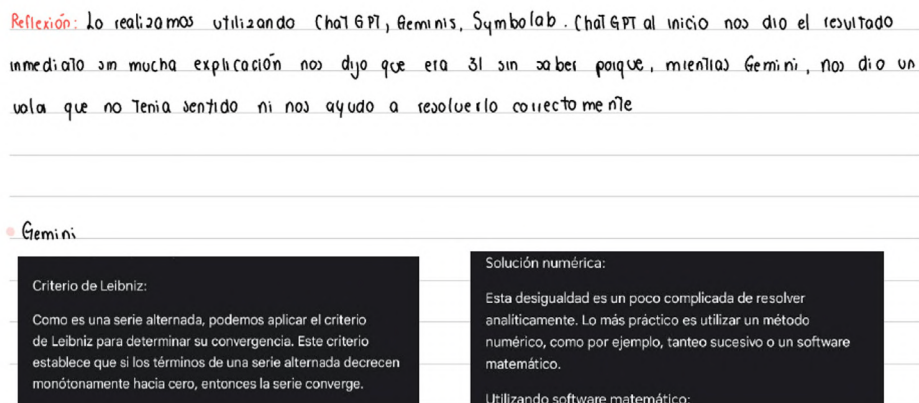
Para analizar la monotonía de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$, debemos centrarnos en su término general:

$$a_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}.$$

La monotonía se refiere a si a_n es decreciente o no. Para verificar esto, podemos estudiar el signo de la diferencia $a_{n+1} - a_n$, o alternatively, usar derivadas para la función continua correspondiente $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$.

Fuente: Elaboración propia.

Figura 5 – Evidencia de una respuesta de uno de los trabajos grupales con el uso de IA en la cota del error de una serie alternada.



Fuente: Elaboración propia.

Es importante destacar que en el tema de sucesiones y series se realizaron cinco trabajos, donde la mayoría de los grupos lograron cumplir con todas las instrucciones establecidas. Además, se dejó evidencia escrita que refleja tanto la discusión como la polarización de ideas entre los integrantes.

Con el objetivo de cuantificar la viabilidad de la metodología, el primer parcial se aplicó de forma individual, en la misma fecha y hora, tanto para los estudiantes del grupo control como del grupo experimental. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

Grupo control (Presencial)

- **Distribución de Notas:**

$N < 60$: 20 estudiantes.

$60 \leq N < 70$: 6 estudiantes.

$N \geq 70$: 15 estudiantes.

- **Nota Promedio:** 60 (redondeado con 41 personas).

- **Notas Altas:** 1 estudiante con 100 y 2 con 90.

Grupo Experimental (Semipresencial)

- **Distribución de Notas:**

$N < 60$: 12 estudiantes.

$60 \leq N < 70$: 9 estudiantes.

$N \geq 70$: 22 estudiantes.

- **Nota Promedio:** 66 (redondeado con 43 personas).
- **Notas Altas:** 2 estudiantes con 100 y 4 con 90.

A partir de la información, se observa que el grupo experimental (semipresencial) presenta, en general, un mejor desempeño que el grupo control (presencial). En particular, puede indicarse:

1. Menor cantidad de estudiantes con nota menor a 60: En el grupo experimental hay 12 estudiantes con calificaciones por debajo de 60, mientras que en el grupo control hay 20. Esto, proporcionalmente, es un indicador de que hubo menos reprobaciones o calificaciones muy bajas en el grupo experimental.
2. Mayor cantidad de estudiantes con calificaciones mayores o iguales que 70: El grupo experimental cuenta con 22 estudiantes en este rango, frente a 15 en el grupo control. Este dato indica que más participantes del grupo experimental obtuvieron notas sobresalientes o satisfactorias.
3. Promedio más alto: La nota promedio en el grupo experimental (66) supera en 6 puntos a la del grupo control (60). Aunque no se trata de una diferencia significativa, sí resulta consistente con la mayor proporción de notas altas y la menor proporción de calificaciones deficientes.
4. Más estudiantes con notas muy altas (mayores o iguales a 90): En el grupo experimental hay dos estudiantes que alcanzan 100 y cuatro que logran 90; en cambio, en el grupo control se registra un estudiante con 100 y dos con 90. Esto refuerza la tendencia de mejores calificaciones en el grupo experimental.

En conjunto, estos datos sugieren un mejor desempeño académico en el grupo experimental, que podría atribuirse a las particularidades de la modalidad semipresencial y a los factores pedagógicos específicos de ese grupo (por ejemplo, uso de tecnologías de apoyo, metodologías activas, etc.). Los exámenes desempeñaron un papel importante en la evaluación tanto de la comprensión escrita como la conceptual.

Es importante aclarar que los instrumentos de evaluación utilizados, como las listas de cotejo y los exámenes, fueron validados previamente por los docentes responsables y contrastados con criterios similares utilizados en experiencias previas de evaluación formativa. Esto garantiza la posibilidad de replicación de esta estrategia en contextos análogos.

9. OPINIONES DE LOS ESTUDIANTES

Otro aspecto que fue considerado para el grupo experimental fue la opinión de los estudiantes; por tal motivo se les pasó una serie de cuestionarios en formato digital. En la semana 3 del curso aplicó uno de los cuestionarios a los estudiantes para conocer su opinión sobre las metodologías implementadas. Es importante indicar que los estudiantes habían realizado ya dos pruebas parciales en las semanas anteriores. La encuesta constó de 10 preguntas, donde

las primeras se centraron en datos generales como nombre, apellido y carné. Los siguientes apartados hacen referencia a las restantes preguntas dirigidas a los estudiantes.

9.1. Acceso al material del curso

En la cuarta pregunta, la cual fue de múltiple respuesta se preguntó: “¿Cómo accedió al material del tema de sucesiones y series?” De las 41 respuestas recopiladas se presenta a continuación su interpretación:

- 39 estudiantes indicaron que utilizaron los videos del profesor (38%).
- 32 mencionaron la revisión del material asincrónico a través del TEC Digital (31%).
- 17 accedieron al material compartido por el grupo de Telegram (17%).
- 12 usaron material proporcionado por otros docentes (12%).
- 2 personas recurrieron a otras fuentes, como videos en Internet (2%).

9.2. Comprensión del tema

En la quinta pregunta, mediante una escala de Likert (nivel 1: Deficiente - nivel 5: Excelente), se evaluó: “¿Cómo califica su comprensión sobre el tema de sucesiones y series?” Los resultados promedio fueron de 4.24, con las siguientes distribuciones:

- 13 estudiantes indicaron nivel 5.
- 25 estudiantes indicaron nivel 4.
- 3 estudiantes indicaron nivel 3.

9.3. Uso de la IA en trabajos grupales

En la sexta pregunta, también con escala de Likert, se consultó: “¿Cómo considera el uso de la IA en los trabajos grupales para el tema de sucesiones y series?” El promedio fue de 4.78, con los siguientes resultados:

- 33 estudiantes marcaron el nivel 5.
- 7 estudiantes marcaron el nivel 4.
- 1 estudiante marcó el nivel 3.

9.4. Experiencia con la IA en trabajos grupales

En la séptima pregunta: “Describa con sus palabras su experiencia con los trabajos grupales en los que se usó alguna IA para el tema de sucesiones y series”, los estudiantes compartieron diversas opiniones. Entre los comentarios destacamos los siguientes:

- “Me parece una buena forma de utilizar una herramienta como la IA más como apoyo del curso en lugar de ‘satanizarlo’, como se suele decir.”
- “La verdad enseñó bastante sobre cómo usar la IA de manera correcta y crítica, porque siempre hay que analizar lo que estamos viendo.”
- “Para mí excelente, creo que es una manera que se debe seguir implementando para la enseñanza en general. Pues, además de tener apoyo virtual, el trabajo en grupo permite aprender de una manera activa. De hecho, para mí que estoy repitiendo el curso, hasta ahora puedo decir que voy comprendiendo bien la materia.”
- “La inteligencia artificial puede ser una muy buena herramienta para encontrar diferentes maneras de resolver un problema. Sin embargo, con el CAL puede alejarse de los temas del curso, por lo que es muy importante dar instrucciones específicas. En general, mi experiencia fue muy buena, porque con las resoluciones paso a paso se podía encontrar la fuente de error que impedía al grupo llegar a la respuesta correcta.”
- “Muy bonito y se aprende mucho. Usar la IA de modo crítico permite analizar mejor la materia, y el proceso de asegurarse de que la respuesta de ChatGPT sea correcta hace que uno como estudiante investigue bien los temas.”

9.5. Sentir sobre el curso semipresencial

En la octava pregunta: “¿Cuál es su sentir como estudiante en el curso semipresencial?”, los estudiantes expresaron opiniones variadas. Algunos comentarios destacados incluyen los siguientes:

- “Me siento cómodo con el profesor y las evaluaciones, pero al ser mi primera vez siento que debo estudiar aún más. Y al ir el curso muy rápido, cuesta más ese aspecto.”
- “Que sea semipresencial facilita la comprensión de los temas, porque permite estudiar con mayor calma, contrario a clases que podrían ir contra tiempo y ver los temas más rápidos.”
- “Pienso que es una modalidad bastante flexible, ya que el estudiante puede organizar su propio tiempo, y la revisión de la materia se vuelve más dinámica que en clases magistrales.”
- “Que el curso sea semipresencial brinda espacio al estudiante para tomar las clases asincrónicas con calma y practicar a su ritmo. Las clases presenciales ayudan mucho a resolver dudas de forma inmediata, ya que se cuenta con el conocimiento del profesor

y los asistentes. En general, creo que es una buena combinación, pero el resultado final siempre dependerá del tiempo y esfuerzo que le dediquen los estudiantes.”

- “Bastante cómodo, el horario es bastante bueno. Las dudas del estudio independiente se pueden abarcar a mayor profundidad durante las lecciones presenciales.”

9.6. Comprensión general de la materia

En la novena pregunta se evaluó: “¿Cuál ha sido su comprensión de la materia en términos de una escala general?”, utilizando una escala de Likert. El promedio fue de 4.56, con los siguientes resultados:

- 24 estudiantes seleccionaron el nivel 5.
- 16 estudiantes seleccionaron el nivel 4.
- 1 estudiante seleccionó el nivel 3.

9.7. Sugerencias para la metodología

Por último, en la décima pregunta: “Sugerencias o comentarios para la metodología implementada en el curso”, los estudiantes ofrecieron las siguientes ideas:

- “Tal vez recibir alguna o algunas clases virtuales sincrónicas.”
- “Repaso de algunos temas muy importantes vistos con el uso de IA, por parte del profesor, para evacuar dudas.”
- “Tal vez sería dar una introducción muy pequeña sobre el tema que se va a ver en los trabajos grupales.”
- “Hacer un plan para cursos semestrales en los que se aplique la metodología de los trabajos.”
- “Dar un poco más de guía sobre los temas que se estudian al desarrollar actividades con IA, ya que, si un estudiante no tiene conocimiento del tema, no tiene el criterio para cuestionar los resultados dados por las IA.”

Por otro lado, se aplicó un cuestionario al grupo control (modalidad presencial), conformado por una matrícula inicial de 43 estudiantes, de los cuales 34 completaron el instrumento al finalizar el curso.

El formulario diseñado para este grupo abarcó siete dimensiones de análisis: comprensión de los temas, técnicas de estudio, utilización de recursos digitales, sugerencias y comentarios, perfil de los estudiantes, asistencia a clases y desempeño del docente. No obstante, para garantizar una triangulación metodológica efectiva con los resultados del grupo experimental,

se focalizó la interpretación de los datos en tres dimensiones clave: comprensión de los temas, técnicas de estudio y utilización de recursos digitales.

Los siguientes apartados describen las tres dimensiones mencionadas.

9.8. Comprensión de los Temas

Para el tema de Sucesiones y series se evaluó utilizando una escala de Likert y la pregunta: “¿Cómo califica su comprensión del tema de Sucesiones y Series?” El promedio de las respuestas fue de 4.

- 13 estudiantes seleccionaron el nivel 5.
- 9 estudiantes seleccionaron el nivel 4.
- 8 estudiante seleccionaron el nivel 3.
- 3 estudiantes seleccionaron el nivel 2.
- 1 estudiante seleccionó el nivel 1.

Se les pidió, además, que comentaran “¿Cómo justifica su desempeño en la prueba?” A continuación, se destacan los siguientes comentarios:

- “Entendí perfectamente los temas vistos y practiqué lo suficiente para apoyar lo explicado en clase.”
- “Los primeros temas de series tienen muchos conceptos y no lo practiqué lo suficiente.”
- “Como la profesora sube todas las notas puedo concentrarme en prestar atención y comprender el tema en lugar de andar intentando anotar todo.”
- “El método de estudio me ayudó bastante, estudiar todos los días, así la materia no se me olvida, solo en series que me costó un poco entender, pero más que todo porque llevé CDI hace mucho y me costó recordar derivación e integración.”

9.9. Técnicas de Estudio

Se les preguntó “¿Qué técnica o técnicas de estudio utilizó para este tema?” Algunos comentarios son los siguientes:

- “Repasar la materia el mismo día que la vimos, rehacer los ejercicios de la clase y tratar de comprenderlos y luego intentar algunos ejercicios extra por mi cuenta.”
- “Práctica de ejercicios y ver videos, hacer resúmenes del material de cátedra.”

- “Realmente no acostumbro a aplicar alguna técnica específica, pero lo que me sirve es revisar ejercicios desarrollados por otra persona o ver videos de personas resolviendo ejercicios, de esta manera puedo adquirir los conocimientos y procedimientos necesarios, luego de interiorizar dichos procedimientos realizo un ejercicio y avanzo al siguiente tema, más tarde buscaría hacer otro ejercicio de manera mental para ver qué tanta información almacené.”
- “Creé mis propios resúmenes durante la clase y los estudié constantemente.”

9.10. Recursos digitales utilizados

Se les preguntó si hicieron uso de algún recurso adicional para estudiar. Algunos de los comentarios son los siguientes:

- “Algunos videos de YouTube por si tenía dudas en algún ejercicio.”
- “ChatGTP cuando no entendía algo.”
- “ChatGTP, YouTube, GeoGebra, Symbolab.”
- “Material de clase, notas del TEC Digital, Internet y otros recursos tecnológicos.”

Por tanto, la mayoría de los estudiantes indicaron que los recursos digitales empleados fueron: ChatGPT, Symbolab, videos, libros y herramientas digitales como tabletas.

10. PERCEPCIÓN DE LOS ASISTENTES

Es importante destacar que a los asistentes del curso experimental se les pasó también una encuesta con una serie de preguntas. Se destacan las siguientes con algunos de sus comentarios:

10.1. Comente cómo percibió el trabajo de los estudiantes con el uso de IA

Ante esta pregunta, los asistentes comentaron:

- “Agradable, aunque tal vez muy sencillo para 4 o 3 estudiantes juntos”
- “En el ámbito de los trabajos en clase (haciendo referencia a los ejercicios a realizar), a mi parecer fueron un poco “suaves”, pero a la vez eso se entiende dado a que se tuvo que considerar el factor del tiempo para la realización de los ejercicios. En la parte del cómo los estudiantes trabajaron en los ejercicios, si bien el propósito de las IAs es la ayuda en la resolución de los ejercicios, algunos estudiantes simplemente “copiaban y pegaban” lo que les decía/daba la IA, sin considerar si lo que arrojaba estuviese bien o mal. Además, no había un razonamiento en lo que se realizaba, solo se hacía sin cuestionar. Aunque, cabe mencionar, que esto puede deberse más a un factor de compromiso y dedicación por parte del estudiantado por su educación (el estudio independiente), más que por la metodología del curso.”

10.2. Comente qué tan importante considera fue el uso de IA en el curso

Ante esta pregunta, los asistentes comentaron:

- “Bastante, pues los estudiantes se pueden dar una idea de cómo estudiar, así como verificar pasos en los problemas asignados.”
- “La implementación de las IAs en cursos de matemática suele, o solía ser, algo arriesgado dado a que pueden ocurrir errores de cálculos y/o interpretación de las preguntas; dejando eso, el uso de IA funcionaría, según mi criterio, como una ayuda al “cómo entrarle” y “qué sigue” de un ejercicio. En ese aspecto considero que la IA es demasiado útil para la resolución de problemas matemáticos, pero para la realización completa y que solo se “copie y pegue” siento que no es lo mejor.”

10.3. Comente, ¿cómo vivió esta experiencia?

Ante esta pregunta, los asistentes comentaron:

- “Como asistente me gustó que los estudiantes tuvieran nuevas opciones de formas de estudio, aunque para esto los estudiantes deben tener conciencia en la forma que usan las IAs.”
- “La manera en la que se implementó esta metodología fue algo interesante y nuevo en el ITCR (al menos de mi conocimiento), aún así, logró ser algo bueno con sus detalles que pulir (rúbrica más flexible).”

10.4. Comente qué tan satisfactorio o engorroso fue el trabajo que le asignó el profesor

Ante esta pregunta, los asistentes comentaron:

- “Pues que el curso fue en el período de verano, los trabajos no se consideran de tanta carga, sin embargo, el hecho de tener que calificar rápidamente los trabajos genera cierta presión, pero me gustaron mucho los trabajos, pues sirven para recordar detalles de los temas del curso”
- “Si bien el calificar mediante rúbrica no es demasiado complicado, la parte que más cuesta, al menos en mi caso particular, es la calificación de los aspectos cualitativos de cada estudiante a la hora de la adaptación de la IA junto con la asignación del puntaje en la sección de participación; esto debido a la variedad de grupos a calificar y ayudar en las dudas que tengan. Pero en general, no es trabajo del otro mundo y es algo logable.”

10.5. Comente qué tan importante es el rol de la asistencia en una actividad como esta.

Ante esta pregunta, los asistentes comentaron:

- “Considero que bastante, pues solamente el profesor no podría solo con 40 estudiantes, pues conlleva tiempo, sin contar los trabajos extras del profesor, por lo tanto, el asistente colabora mucho con los trabajos en clase y calificación de estos.”
- “Al ser varias personas en los cursos de matemáticas, al menos en el ITCR, el calificar a todos una sola persona (docente) es algo casi imposible de realizar en menos de una hora, por lo que el papel de persona asistente es demasiado importante para la agilización del proceso.”

10.6. ¿Qué recomendaciones tiene sobre la lista de cotejo implementada y su viabilidad? Explique

Ante esta pregunta, los asistentes comentaron:

- “Considero que se deberían revisar los criterios de calificación, añadiendo más opciones en lugar de una evaluación binaria de ‘sí’ o ‘no’, como, por ejemplo, una escala porcentual. También sería importante considerar la obligatoriedad de la asistencia según la metodología del curso. Además, se podría evaluar la posibilidad de que los estudiantes pierdan más puntos por ciertos motivos específicos. Respecto a los trabajos grupales, sugiero reducir su peso en la calificación final y aumentar la cantidad de problemas asignados, de modo que haya al menos un problema por estudiante dentro del grupo.”
- “Lo que recomendaría yo, tomando como referencia a la experiencia, sería la utilización de una rúbrica que no sea binaria; además de la implementación de una parte de calificación individual para asegurar “forzar” el trabajo de todos, sin que la falla de un individuo afecte significativamente al grupo.”

11. DISCUSIÓN GENERAL

11.1. Resultados de los Trabajos Grupales con IA

Los estudiantes ofrecieron opiniones variadas sobre los trabajos grupales en los que se utilizó una IA para el tema de sucesiones y series. Se destacan los siguientes temas principales:

1. Valoración Positiva de la IA como Herramienta de Apoyo

- La IA fue útil para verificar resultados, identificar errores y brindar explicaciones detalladas.

- Permite analizar el razonamiento y detectar incongruencias, por lo que fortalece el aprendizaje.

2. Fomento del Trabajo en Equipo

- La colaboración grupal facilitó el aprendizaje activo y la resolución de dudas.
- Las discusiones y el intercambio de ideas enriquecieron la comprensión de los temas.

3. Limitaciones y Recomendaciones

- Algunos estudiantes encontraron inconsistencias en las respuestas de la IA, lo que requirió análisis adicional.
- Se enfatizó la necesidad de instrucciones claras para el uso de la IA como complemento.
- Se sugirió incluir una introducción previa por parte del profesor para contextualizar los temas antes de pasar al uso de IA.

4. Impacto en el Aprendizaje

- Los estudiantes valoraron las explicaciones paso a paso proporcionadas por la IA. La combinación de JiTT y PI potenció un aprendizaje autónomo, lo que coincide con hallazgos de Novak et al. (1999). Sin embargo, la dependencia en IAs para resolver ejercicios reveló limitaciones en la autorregulación, un desafío documentado por Holmes et al. (2019) en contextos de implementación tecnológica en el aula.
- El uso de IA —combinado con las discusiones grupales— facilitó la comprensión de conceptos complejos, como los criterios de convergencia y divergencia.

5. Experiencia General

- La mayoría de los estudiantes describieron la experiencia como enriquecedora, útil y productiva.
- Algunos mencionaron que la metodología ayudó a consolidar conocimientos y aumentar la confianza en sus habilidades.

Los hallazgos muestran que las metodologías activas junto con el uso de IA permiten mejorar la comprensión conceptual de los estudiantes. Sin embargo, se identificaron desafíos como la dependencia en la IA para resolver ejercicios, lo que destaca la importancia de fomentar el pensamiento crítico en su uso.

11.2. Resultados del Curso Semipresencial

En cuanto al sentir de los estudiantes sobre el curso semipresencial, se identificaron los siguientes atributos.

11.2.1. Opiniones Positivas

1. Flexibilidad y Organización del Tiempo

- Los estudiantes valoraron la libertad para organizar su tiempo de estudio.
- Facilitó el equilibrio entre el aprendizaje y otras responsabilidades.

2. Equilibrio entre Clases Presenciales y Asincrónicas

- La combinación de sesiones presenciales y contenido asincrónico permitió abordar dudas en persona mientras avanzaban al ritmo propio.

3. Accesibilidad

- Estudiantes que viven lejos apreciaron evitar traslados diarios, reduciendo costos en transporte y alimentación.

4. Mayor Comprensión

- La presión de realizar actividades constantes motivó un estudio más regular, lo que conllevó a una mejora en la comprensión de los temas.

11.2.2. Sugerencias y Áreas de Mejora

1. Ritmo Acelerado

- Algunos mencionaron que la rapidez del curso requirió un esfuerzo adicional.

2. Material Adicional

- Se destacó la importancia de contar con grabaciones de clases y recursos adicionales.

3. Importancia de las Clases Presenciales

- Las sesiones presenciales fueron consideradas fundamentales para resolver dudas y consolidar conceptos.

11.2.3. Metodología y Resultados Académicos

El enfoque metodológico implementado se reflejó tanto en las opiniones de los estudiantes como en sus resultados académicos. En términos cuantitativos, se observó una mejora moderada en el rendimiento del grupo experimental, atribuida a la integración de metodologías activas y al uso pedagógico de herramientas de s. Estas estrategias permitieron:

- Un aprendizaje más profundo.
- Una mejor comprensión de conceptos complejos.
- Un mayor nivel de participación y colaboración grupal.

En la comparación entre ambos grupos, se observó una tendencia favorable en el grupo experimental, no solo en el promedio general de calificaciones, sino también en la proporción de estudiantes que superaron satisfactoriamente los criterios de evaluación. Estos resultados preliminares, si bien no fueron sometidos a pruebas estadísticas inferenciales, permiten plantear la hipótesis de que la combinación de JiTT, PI e IA contribuye positivamente al rendimiento académico.

Se suma a esto el hecho de que los estudiantes valoraron positivamente las estrategias implementadas, aunque también ofrecieron sugerencias para optimizar la experiencia formativa. Entre ellas, destacaron la importancia de contar con instrucciones más claras desde el inicio del curso y una mayor diversidad de recursos didácticos. El apoyo en herramientas tecnológicas aplicado a la combinación de Enseñanza Justo a Tiempo (JiTT) e Instrucción entre Pares (PI) demostró ser un enfoque eficaz para la enseñanza de la matemática en modalidad semipresencial.

El rol de los asistentes académicos fue particularmente relevante. Su cercanía con los estudiantes permitió identificar necesidades específicas de mejora. Entre sus propuestas más destacadas se encuentran la implementación de listas de cotejo estandarizadas para evaluar los trabajos grupales —ajustables a partir de la retroalimentación recibida— y el aumento progresivo en la cantidad de ejercicios por equipo. No obstante, esta última medida debe ser cuidadosamente equilibrada con la disponibilidad de tiempo en clase, para evitar que una mayor carga de actividades comprometa la calidad del aprendizaje o la profundidad de los enfoques pedagógicos.

A partir de las sugerencias del estudiantado, de los asistentes académicos y de la reflexión de los autores, se consideró fundamental definir un conjunto de instrucciones iniciales que orienten a un uso efectivo de la IA en los trabajos grupales.

Instrucciones para el diseño de prompts con IA

Un *prompt* es una instrucción inicial que se introduce en un sistema de inteligencia artificial para generar una respuesta específica. Para apoyar el trabajo de los estudiantes, se pueden ofrecer lineamientos básicos para formular prompts de manera clara, eficiente y pedagógicamente útil. Se enfatizan cuatro recomendaciones principales:

1. Claridad y precisión: formular solicitudes específicas; es decir, evitar preguntas vagas o generales.

2. Evitar ambigüedades: redactar los prompts de forma que no den lugar a múltiples interpretaciones o respuestas erróneas.
3. Proporcionar contexto: incluir información relevante sobre el tema matemático, como el tipo de serie o sucesión que se desea analizar.
4. Experimentar y refinar: probar diferentes formulaciones hasta obtener una respuesta clara, útil y alineada con los objetivos del ejercicio.

A través de estas instrucciones, los estudiantes no solo utilizaron la IA como una herramienta de apoyo técnico, sino que también desarrollaron habilidades para formular preguntas adecuadas, evaluar críticamente las respuestas generadas y mejorar la claridad de sus propias explicaciones. Este enfoque buscó que los trabajos grupales no se limitaran a reproducir respuestas automatizadas, sino que promovieran la reflexión crítica y la construcción colaborativa del conocimiento matemático.

Ejemplo de un prompt aplicado por los estudiantes

Durante el trabajo grupal correspondiente al criterio de la integral, uno de los equipos formuló el siguiente prompt para interactuar con ChatGPT:

“Explica paso a paso cómo aplicar el criterio de la integral para determinar si la serie $\sum(1/(x \ln(x)))$ desde $x = 2$ hasta ∞ es convergente. Justifica cada paso matemáticamente.”

A partir de esta solicitud, el modelo generó una explicación detallada del procedimiento, que fue analizada críticamente por el grupo. Los estudiantes evaluaron la validez de cada paso, identificaron posibles errores en la interpretación del límite impropio e integraron sus propios razonamientos para construir una versión corregida y argumentada de la solución, que luego subieron como evidencia a la plataforma institucional.

Este tipo de interacción promovió un uso responsable de la IA y contribuyó al desarrollo de habilidades metacognitivas como la verificación de resultados, el uso preciso del lenguaje matemático y la capacidad de justificar con claridad cada procedimiento realizado.

En comparación con estudios recientes sobre el uso de IA en educación superior matemática, los hallazgos de esta experiencia coinciden con las tendencias internacionales que promueven la autonomía del estudiante, el aprendizaje autorregulado y el pensamiento crítico (Jordan y Mitchell, 2015; UNESCO, 2021). Sin embargo, este trabajo aporta un enfoque metodológico más integral al combinar tecnologías emergentes con estrategias activas consolidadas, lo que representa un valor añadido para la comunidad educativa.

Además, a partir de las recomendaciones que surgieron del trabajo con estudiantes y asistentes, se propuso generar instrucciones claras para el uso de la IA, incluyendo la redacción de prompts efectivos. Un ejemplo práctico es el siguiente:

“Explícanos, como si fueras un docente universitario que imparte un curso de Cálculo y Álgebra Lineal del TEC, cómo aplicar el criterio de la integral paso por paso para determinar si la serie $\sum(1 / (\ln(x)))$ desde $x = 2$ hasta ∞ es convergente o divergente. Justifica cada paso matemáticamente e indica sugerencias de revisión bibliográfica.”

A partir de este tipo de interacciones, se puede promover un uso reflexivo y crítico de la IA que permita favorecer el desarrollo de habilidades metacognitivas, argumentativas y de validación matemática.

12. CONCLUSIONES

La integración de la Enseñanza Justo a Tiempo, la Instrucción entre Pares y el uso pedagógico de herramientas de IA se presenta como una estrategia efectiva para fortalecer el entendimiento profundo de sucesiones y series en estudiantes universitarios. Esta experiencia evidenció mejoras en el rendimiento académico, en la argumentación matemática y en la motivación para el aprendizaje, en línea con tendencias internacionales en educación STEM. Su replicabilidad, bajo condiciones similares, la convierte en una alternativa valiosa para la enseñanza de temas complejos.

Estos hallazgos coinciden con estudios previos que evidencian el impacto positivo de las metodologías activas en la comprensión matemática (Crouch y Mazur, 2001), y complementan las perspectivas emergentes sobre el uso pedagógico de la inteligencia artificial en entornos de educación superior (Zawacki Richter et al., 2019; Holmes et al., 2019).

Considerando que los datos obtenidos muestran un impacto moderado tras la implementación de esta metodología, se recomienda profundizar en su aplicación y evaluación en futuros estudios. En tal caso, las futuras investigaciones pueden indagar en muestras más amplias, así como en estudios cualitativos longitudinales que permitan observar la evolución de la autonomía y la motivación de los estudiantes al enfrentarse a temas abstractos de matemática universitaria. Además, la replicación de esta metodología en otros cursos (por ejemplo, Ecuaciones Diferenciales o Cálculo en una variable) sería de gran valor para comprobar la consistencia de los resultados.

DECLARACIONES

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

RAC y MMC concibieron la idea presentada. RAC y MMC indagó en la teoría. RAC y MMC adaptaron la metodología al contexto del curso semipresencial, diseñaron las actividades, recopilaron los datos y supervisaron su implementación. RAC y MMC analizaron los datos y redactaron la versión inicial del manuscrito. MMC colaboró en la revisión crítica y estructuración del texto final. Ambas personas autoras participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo completo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por las personas autoras correspondientes, RAC y MMC (Reiman Acuña Chacón y Marcela Marrero Calvo), previa solicitud razonable.



AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al Instituto Tecnológico de Costa Rica y a la Escuela de Matemática por facilitar el contexto de aplicación, los espacios de docencia y la colaboración de los asistentes académicos que participaron en el desarrollo de la experiencia educativa aquí documentada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Crouch, C. H. y Mazur, E. (2001). Peer Instruction: Ten years of experience and results. *American Journal of Physics*, 69(9), 970-977. <https://doi.org/10.1119/1.1374249>
- Holmes, W., Bialik, M. y Fadel, C. (2019). *Artificial Intelligence in Education: Promises and Implications for Teaching and Learning*. Center for Curriculum Redesign.
- Jordan, M. I. y Mitchell, T. M. (2015). Machine learning: Trends, perspectives, and prospects. *Science*, 349(6245), 255–260. <https://doi.org/10.1126/science.aaa8415>
- Simkins, S. P. y Maier, M. H. (2010). *Just-in-Time Teaching: Across the Disciplines, and Across the Academy*. Stylus Publishing.
- Mazur, E. (1997). *Peer Instruction: A User's Manual*. Prentice Hall.
- Novak, G. M., Patterson, E. T., Gavrin, A. D., & Christian, W. (1999). *Just-in-Time Teaching: Blending active learning with web technology*. Prentice Hall.
- Zawacki Richter, O., Marín, V. I., Bond, M. y Gouverneur, F. (2019). Systematic review of research on artificial intelligence applications in higher education – where are the educators? *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, 16(39), 1–27. <https://doi.org/10.1186/s41239-019-0171-0>
- UNESCO. (2021). *AI and education: Guidance for policymakers*. UNESCO. <https://doi.org/10.54675/PCSP7350>



DISEÑO E IMPLEMENTACIÓN DE UNA INTERVENCIÓN FORMATIVA CON EDPuzzle PARA PROMOVER EL APRENDIZAJE AUTÓNOMO EN UN CURSO UNIVERSITARIO DE MATEMÁTICA GENERAL

DESIGN AND IMPLEMENTATION OF A FORMATIVE INTERVENTION WITH EDPuzzle TO PROMOTE AUTONOMOUS LEARNING IN A UNIVERSITY GENERAL MATHEMATICS COURSE

Rita Díaz-Flores¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-7493-738X>

Marianella Bolaños-Barquero²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-6747-7597>

RESUMEN

Este estudio tiene como objetivo diseñar, implementar y valorar una intervención formativa basada en el uso de la aplicación Edpuzzle, orientada a promover el aprendizaje autónomo en estudiantes de primer ingreso del curso de Matemática General. Asimismo, se analiza la percepción de los estudiantes sobre el uso de esta herramienta en el contexto de la metodología de aula invertida. Es un estudio de tipo descriptivo con enfoque cualitativo aplicado. En un curso compuesto por 25 estudiantes se integraron videos interactivos, actividades prácticas y evaluaciones para promover el aprendizaje autónomo. Los datos se recolectaron mediante observación, evaluación sumativa y un cuestionario sobre la percepción de Edpuzzle. La triangulación de datos aseguró la validez y profundidad de los resultados. El uso de Edpuzzle permitió a los alumnos estudiar y practicar de manera autónoma y superar errores comunes en ejercicios algebraicos. La evaluación sumativa reflejó resultados muy positivos. Asimismo, el cuestionario mostró que la mayoría encontró la herramienta útil, fácil de usar e innovadora, y destacaron su apoyo al aprendizaje interactivo y autónomo. Sin embargo, se mencionaron dificultades como el acceso a internet, la duración de los videos y la falta de retroalimentación interactiva. El uso de la herramienta en el aula invertida demostró ser efectiva para fomentar el aprendizaje autónomo, dado que mejoró la comprensión de conceptos matemáticos. Los estudiantes valoraron positivamente la herramienta por su interactividad e innovación, y destacaron su impacto en la concentración y el aprendizaje activo. Aunque se identificaron áreas de mejora, Edpuzzle representa una alternativa valiosa para combinar tecnología y métodos tradicionales de enseñanza.

Palabras clave: Edpuzzle, aula invertida, videos educativos, enseñanza de la matemática, tecnología digital.

1 Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Costa Rica. Correo electrónico: rita.diaz.flores@una.cr

2 Escuela de Matemática, Universidad Nacional, Costa Rica. Correo electrónico: marianella.bolanos.barquero@una.cr



ABSTRACT

This study aims to design, implement, and evaluate a formative intervention based on the use of the Edpuzzle application, aimed at promoting independent learning among first-year students in a General Mathematics course. Additionally, it analyzes students' perceptions of this tool within the context of the flipped classroom methodology. This is a descriptive study with an applied qualitative approach. In a class of 25 students, interactive videos, practical activities, and assessments were integrated to promote autonomous learning. Data were collected through observation, summative assessment, as well as a questionnaire on students' perceptions of Edpuzzle. Data triangulation ensured the validity and depth of the results. The use of Edpuzzle enabled students to study and practice autonomously while overcoming common mistakes in algebraic exercises. Summative assessment reflected highly positive results. The questionnaire showed that most students found the tool useful, easy to use, and innovative, highlighting its support for interactive and autonomous learning. However, challenges such as internet access, video length, and lack of interactive feedback were mentioned. Overall, Edpuzzle's use in the flipped classroom setting proved effective in fostering autonomous learning, as it improved the understanding of mathematical concepts. Students valued the tool for its interactivity and innovation, emphasizing its impact on concentration and active learning. Although areas for improvement were identified, Edpuzzle represents a valuable alternative for integrating technology with traditional teaching methods.

Keywords: Edpuzzle, flipped classroom, educational videos, mathematics education, educational technology.

1. INTRODUCCIÓN

Desde hace ya varios años, la tecnología forma parte integral de nuestra vida cotidiana en múltiples ámbitos. Sin embargo, con la llegada de la pandemia por COVID-19 en el año 2020, su relevancia en el ámbito educativo se intensificó notablemente, sobre todo debido a la implementación de clases virtuales y el uso de videos para abordar diversas temáticas.

En los distintos contextos educativos la tecnología fue indispensable para desarrollar las clases, mismas que con el tiempo se volvieron monótonas, pasivas y sin gusto para muchas personas, pues carecían de la dinámica y el intercambio real que caracterizan a las clases presenciales. Como docentes universitarias, nos correspondió impartir clases virtuales y compartir grabaciones o videos con los estudiantes, con la limitante de no poder constatar, realmente, si estos los visualizaban.

Posterior a la pandemia, algunas instituciones costarricenses de educación superior han mantenido cursos virtuales, a partir de sus necesidades e intereses. En el caso de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica (en adelante UNA), la mayoría de los cursos volvieron a la presencialidad. Así, algunos mantienen en su programación clases virtuales esporádicas, pero siempre con un alto porcentaje destinado a las evaluaciones presenciales, el cual ronda el 75% o más. (UNA, 2024).

En el caso particular del curso Matemática General, código MAT001, uno de los primeros cursos que deben llevar los estudiantes de primer ingreso, el 100% de la evaluación se destina a pruebas presenciales: con 4 pruebas de 25% cada una en la evaluación del I ciclo 2024. Al estudiantado se le brinda la posibilidad de repetir una de las pruebas. (UNA, 2024).

Pese a que la educación siempre ha tenido y tendrá retos, en la actualidad los roles del profesor y del estudiante están pasando por transformaciones; el profesor está pasando de actor principal, donde transmitía conocimientos, a facilitador o guía; igualmente, el estudiante está pasando de receptor pasivo de información a ser el protagonista de su propio aprendizaje. Unido a ese reto también está la interrogante de cuáles estrategias metodológicas son las más apropiadas para el aprendizaje de las diversas disciplinas o áreas, pues cada una tiene sus propias particularidades.

Para las generaciones de estudiantes universitarios post pandemia, acostumbrados al uso constante de la tecnología, de una u otra forma poseen expectativas de una educación donde las tecnologías digitales sean utilizadas. Por otro lado, la experiencia como docentes de matemática a nivel universitario permite apreciar la carencia de conocimientos previos que tienen los estudiantes al ingresar a este nivel educativo, así como el poco tiempo del que se dispone para desarrollar todos los contenidos curriculares.

La opción del video educativo surge como una herramienta que le permite al estudiante no solo repasar conocimientos previos, sino adquirir otros nuevos, de forma que reduce el tiempo destinado para esto en la clase. En investigaciones como las de Rodríguez Licea et al. (2017) se obtuvieron resultados muy favorables con respecto al uso de videos, los cuales demuestran una mejor comprensión de los contenidos conceptuales tratados, así como un enriquecimiento el aprendizaje de los estudiantes.

Medina Molina (2008), por ejemplo, menciona las siguientes ventajas del uso del video educativo:

- El estudiante controla la reproducción del video, puede pausar, retroceder, adelantar y verlo las veces que necesite.
- Los videos contienen el audio con la explicación del propio profesor, lo que viene a complementar los apuntes del estudiante u otros materiales como los libros.
- Es una herramienta de bajo costo que le permite al estudiante enriquecer su estudio.
- Permite crear material adicional al que se imparte en clase.
- Como es un material multimedia que puede ser visto en la televisión, el ordenador, dispositivos móviles, etc., hace que el estudio sea más llevadero, en comparación con el uso de apuntes de clase y libros de texto.

Esto último concuerda con Jordan Lluch et al. (2014), quienes afirman que, para el estudiantado promedio actual, los videos resultan más cercanos que cualquier libro de texto, por más llamativo que este sea. En caso de que el libro sea indispensable, se recomienda complementarlo con videos.

La herramienta Edpuzzle permite insertar preguntas estratégicas dentro de los videos, de manera que limita el avance de este hasta que las mismas sean contestadas. De este modo, no solo se puede comprobar la visualización y el rendimiento académico obtenido, sino también proporcionar retroalimentación a las respuestas erróneas.

Con el uso de Edpuzzle, Mazcuñán Navarro (2015) redujo el número de dudas planteadas por los estudiantes en clase, y las realizadas fueron más directas. Esto permitió evacuarlas de manera más eficiente y rápida, y evidencia el aprendizaje autónomo de los alumnos.

Además, Pueo et al. (2017) observaron una relación entre los objetivos alcanzados por el estudiante y las veces que este visualizaba el video; concluyeron que cuando se aplica la herramienta Edpuzzle los resultados son mejores. También determinaron que la clase invertida donde se utiliza esta herramienta es percibida positivamente por los estudiantes.

En este contexto, el Informe Estado de la Educación (2021) destaca la importancia de fomentar un rol más activo y autónomo por parte del estudiantado, mediante estrategias como el modelo de aula invertida y la evaluación del impacto de diversas tecnologías en el

aprendizaje de las matemáticas. Estas recomendaciones enmarcan la necesidad de explorar propuestas didácticas innovadoras que integren recursos tecnológicos de forma intencionada en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Siguiendo lo anterior, este estudio pretende diseñar, implementar y valorar una intervención formativa basada en el uso de la aplicación Edpuzzle, orientada a promover el aprendizaje autónomo en estudiantes de primer ingreso del curso de Matemática General. Asimismo, se analiza la percepción de los estudiantes sobre el uso de esta herramienta en el contexto de la metodología de aula invertida.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

Este estudio se fundamenta en tres focos de interés: el uso del video educativo como una alternativa más para el aprendizaje; la herramienta Edpuzzle que permite, entre otras cosas, editar videos y, por ende, personalizarlos; y la estrategia de clase invertida junto al aprendizaje autónomo, como elemento pedagógico.

2.1 Videos educativos

La Real Academia Española (2024) define el concepto *multimedia* como “aquello que utiliza conjunta y simultáneamente diversos medios, como imágenes, sonidos y texto, en la transmisión de una información”. Al respecto, Mayer (2002) realizó un estudio sobre el aprendizaje multimedia; considera que el término multimedia se refiere a la presentación de material mediante palabras e imágenes, y su premisa es que los estudiantes pueden comprender mejor una explicación cuando se presenta con palabras e imágenes, que cuando se presenta solo con palabras. Encontró que los estudiantes aprenden mejor con palabras e imágenes presentadas a la vez debido a que tienen la posibilidad de construir modelos y conexiones entre ellos, proceso que no sucede cuando se emplea únicamente el sistema textual. Para este autor, los mensajes multimedia se describen en términos del medio de entrega (como la pantalla de la computadora), el modo de presentación del video (palabras e imágenes) o modalidades sensoriales (auditiva y visual).

Con respecto al concepto de *video*, la Real Academia Española (2024) lo define como “un sistema de grabación y reproducción de imágenes, acompañadas o no, de sonidos, mediante cinta magnética u otros medios electrónicos”. Lacruz Alcocer (2002) expresa que el video puede poseer únicamente un uso instruccional, pero para que adquiera una orientación educativa debe estimular el interés del alumno por los contenidos. Esta modalidad tiene la ventaja de que el estudiante puede revisarlo tantas veces como lo desee, total o parcialmente, hasta comprenderlo.

En esta línea, Serrano (2023) indica que los videos educativos deben priorizar problemas de la cotidianidad del estudiantado para tener más impacto, así como evidenciar roles más participativos de parte de estos. Sin embargo, Medina Molina (2008) hace un llamado sobre la importancia de que, cuando el alumno disponga de este tipo de material, esto no lo lleve a pensar que es sustitutivo de las clases y deje de asistir a estas. Para ello, reitera que el docente debe dar un enfoque participativo a sus clases.

2.2 Acerca de Edpuzzle

Edpuzzle es una herramienta de software gratuita creada por programadores y profesores de Barcelona. Está disponible en versión web y aplicación y con dos tipos de cuenta: docentes y estudiantes.

Permite compartir videos elaborados por terceros, o bien elaborados por el propio docente del curso. Esta herramienta permite editar partes del video, insertar notas de voz, incluir preguntas abiertas o de selección múltiple (con imágenes o enlaces); también notas aclaratorias, con la posibilidad de utilizar texto matemático. Tiene entre otras ventajas como la mencionada anteriormente; al intercalar las preguntas dentro de los videos, evita que los estudiantes avancen si no contestan adecuadamente. Incluso, permite que ellos retrocedan el video las veces que necesiten, en caso de que no hayan entendido o contesten de manera errónea, por lo que pueden retomar el contenido las veces que deseen (Jiménez et al., 2023). Además, al insertar actividades dentro del video permite al estudiante reflexionar, fomentar su autoaprendizaje y relacionar la nueva información, con lo que se convierte en una estrategia óptima para una mejor comprensión.

Debido a que Edpuzzle permite editar los videos, estos adquieren el carácter de videos personalizados de acuerdo con las necesidades de cada docente; bien podría decirse que se convierten en lecciones personalizadas. Además, la inclusión de cuestionarios intercalados –los cuales serán calificados por la misma herramienta– permite al docente, por un lado, liberarse de la calificación, pero sobre todo permite observar el nivel de dificultad que se le presentó al estudiante al adquirir los conceptos (Pueo et al., 2017).

2.3 Aprendizaje autónomo y clase invertida

2.3.1 Aprendizaje autónomo

La Real Academia Española (2025) define el término *aprendizaje* como “acción y efecto de aprender algún arte, oficio u otra cosa” y el término *autónomo* como “que trabaja por su propia cuenta”, por ende, se puede expresar que el aprendizaje autónomo es la acción de aprender algo (arte, oficio, etc.) por cuenta propia. En el ámbito educativo, se consideran autónomas las actividades del estudiante que implican la resolución de ejercicios por sí mismo, así como la sugerencia de otras; investigar, analizar, discutir temas en particular y otras tareas elaboradas fuera del horario de clase y sin el apoyo del docente (Moreno y Martínez, 2009).

Estas definiciones permiten apreciar la importancia de que los estudiantes trabajen o, en este caso, estudien por cuenta propia y adquieran los conocimientos necesarios que les permitan no solamente aprobar un curso, sino también adquirir habilidades intrínsecas como investigar, razonar, resolver, proponer. Estas competencias son necesarias y prioritarias en un mundo que cambia vertiginosamente y donde se requiere solucionar problemas de diversa índole con inmediatez.

2.3.2 Clase invertida

El término *clase invertida* o *flipped classroom* fue acuñado por Bergmann y Sams, quienes empezaron a grabar sus clases y distribuir sus videos entre los estudiantes que

faltaban por algún motivo, pues se percataron de que, además de ofrecer esa ayuda, conseguían más tiempo para atender las necesidades educativas de los estudiantes (García Barrera, 2013).

Esta estrategia puede ayudar a solventar retos actuales, ya que tiene como sustento el aprendizaje autónomo del estudiante antes de la clase presencial, de manera que el aula se convierta en un lugar para profundizar conceptos, aclarar dudas y discutir ejercicios; a partir de esto, el estudiantado adquiere un papel protagonista. Ellos deben estudiar no solo previo a las clases o para el examen, sino de manera continua y a lo largo del curso para favorecer la adquisición de conocimientos por más tiempo; pues requieren llegar al aula conociendo el tema para poder profundizar en este y resolver ejercicios, lo que vuelve la clase más dinámica y participativa. El docente, por su parte, apoya guiando y procurando un trabajo más colaborativo (Jiménez et al., 2023).

En el caso específico del área de matemática, se buscan estrategias metodológicas adecuadas a estos nuevos roles; para Guerrero Salazar et al. (2018) las estrategias metodológicas deben promover el desarrollo de competencias y una mejor comprensión, sin llegar a la memorización de definiciones o propiedades. La idea es que el estudiante pueda aplicar los conocimientos en la resolución de problemas.

En relación con esto, García Barrera (2013) asegura que la metodología activa del aula invertida fomenta el pensamiento crítico, dado que los estudiantes pueden reflexionar en sus casas sobre las temáticas expuestas por el docente en los videos, y luego exponer esas reflexiones a sus compañeros e intercambiar opiniones para llegar a soluciones conjuntas. Todo esto propicia un ambiente de aprendizaje cooperativo en el aula (González, 2020). Así, este modelo favorece la creación de un entorno flexible y una cultura de aprendizaje. Sin embargo, es claro que su efectividad depende de la planificación del docente y del compromiso real del estudiantado (Blasco et al., 2016).

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

Este estudio se enmarca en la investigación cualitativa y corresponde a un estudio de caso. Baxter y Jack (2008) afirman que un estudio de caso es una investigación contextual de un fenómeno, y que el diseño de un estudio de caso depende del propósito general del estudio. A partir de la naturaleza de esta investigación, el estudio de caso corresponde al descriptivo, ya que busca ilustrar y describir algo en el contexto en el que ocurrió (describir el uso de la aplicación Edpuzzle y conocer la percepción del estudiante en relación con una nueva metodología en su curso de matemática). La ventaja del estudio de caso es que puede acercarse a situaciones de la vida real y comprobar ideas en relación directa con el fenómeno a medida que se desarrolla en la práctica (Durán, 2012).

Además, esta investigación analiza la transición de métodos de enseñanza convencionales hacia estrategias que favorecen una participación más activa del estudiantado. En este enfoque, el alumno construye su aprendizaje a su propio ritmo integrando de manera fundamental las tecnologías digitales, especialmente a través de la herramienta Edpuzzle.

3.1 Contexto y participantes

La experiencia se llevó a cabo en la Universidad Nacional de Costa Rica, una de las cinco universidades públicas del país. El estudio involucró a un grupo de la cátedra de Matemática General, conformado por 25 estudiantes del I ciclo del año 2024, los cuales recibieron

clases de manera tradicional y también bajo la modalidad de clase invertida con Edpuzzle. La edad de los alumnos comprende entre 17 y 21 años, en su mayoría de primer año universitario, todos con acceso a internet en sus domicilios y dispositivos móviles para visualizar videos en línea. La selección de este grupo fue por conveniencia, debido a que una de las investigadoras tenía a cargo el grupo mencionado.

3.2 Descripción del procedimiento

La experiencia se fundamenta en la aplicación parcial de la metodología de aula invertida y el uso de recursos digitales en ciertas clases, porque la universidad mantiene un formato predominantemente presencial; aun así, los académicos pueden optar por impartir algunas sesiones de forma asincrónica en modalidad virtual. Las clases presenciales posteriores a la estrategia del aula invertida fueron dedicadas exclusivamente a actividades prácticas y consulta de dudas.

Para implementar el uso de la herramienta Edpuzzle, se inició con la selección de los temas por desarrollar, priorizando aquellos que representaban mayores desafíos para el estudiantado debido a su nivel de complejidad. En estos casos, se optó por la grabación de videos instructivos, con el fin de que las personas estudiantes pudieran consultarlos de manera autónoma cuando lo necesitaran.

Se produjeron materiales audiovisuales enfocados en dos temáticas principales: ecuaciones con radicales y elementos básicos de funciones. En particular, el tema de ecuaciones con radicales se abordó con mayor profundidad, con el objetivo de explorar la efectividad de la intervención formativa en la promoción del aprendizaje autónomo. Para este propósito, se aplicó una evaluación sumativa cuya descripción se detalla más adelante.

El trabajo con los videos se organizó en los siguientes pasos:

1. La docente elaboró tres videos educativos sobre el tema de ecuaciones con radicales, con duraciones de 14 a 21 minutos.
2. Las personas estudiantes debían visualizar cada video durante la sesión de clase correspondiente, resolviendo las actividades propuestas conforme avanzaban en la comprensión de los contenidos, con la posibilidad de repetir la visualización cuantas veces fuera necesario.
3. El progreso del estudiantado fue monitoreado mediante los reportes que genera la aplicación, los cuales indicaron quiénes habían visualizado los videos, cuántas veces lo hicieron y el tiempo dedicado a cada uno. Las preguntas cerradas fueron corregidas automáticamente por la plataforma, mientras que las respuestas abiertas fueron revisadas manualmente por la docente.

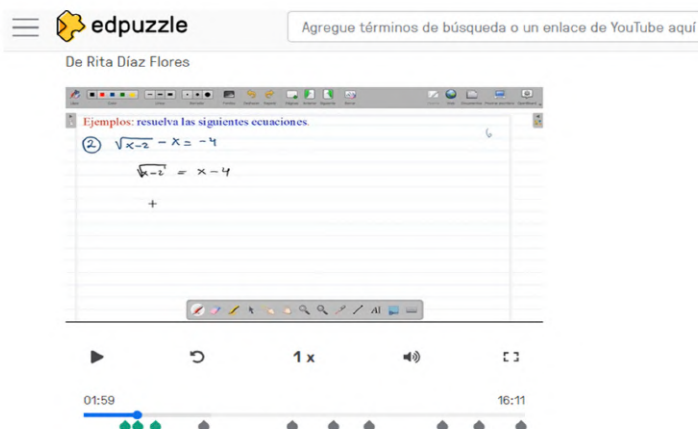
En cuanto al contenido de los videos, se elaboraron tres materiales audiovisuales. Los dos primeros se centraron en la resolución de ecuaciones con un solo radical (raíces de índice dos y tres), procurando que las explicaciones fueran claras y concisas para evitar una duración excesiva. El tercer video abordó ecuaciones con dos radicales, lo que implicó un mayor nivel de complejidad. En los tres casos se explicaron temas fundamentales como las propiedades de los radicales, ecuaciones lineales y cuadráticas, operaciones básicas de álgebra (suma y resta de monomios, multiplicación de polinomios), así como distintos métodos de factorización (por inspección, factor común y fórmula general), entre otros conocimientos necesarios para el desarrollo de esta temática.

Se optó por la grabación de los videos, aunque también existía la opción de utilizar videos ya disponibles en plataformas como YouTube, Khan Academy o Crash Course. Una vez elaborados los materiales audiovisuales, se llevó a cabo la edición mediante la incorporación de distintos elementos interactivos: se agregaron preguntas de diversos tipos, notas aclaratorias en formato de texto y audio, y configuraciones para impedir a los estudiantes adelantar el video. Además, cuando fue necesario, se incluyó retroalimentación para cada pregunta insertada, lo cual contribuyó a facilitar una comprensión más detallada de los conceptos abordados.

Finalmente, se creó una clase en la plataforma Edpuzzle, se subieron los respectivos videos elaborados por la docente del curso y se compartió el enlace o el código de acceso con los estudiantes, lo que les permitió ingresar a la clase y trabajar con los contenidos de manera autónoma. Este proceso proporcionó un recurso accesible y adaptable, promovió la interacción activa de cada estudiante con el material y facilitó su aprendizaje a través de medios digitales.

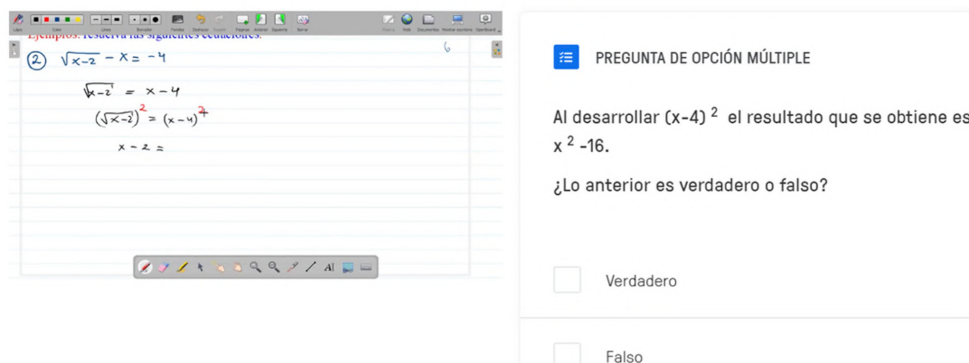
En la Figura 1 se muestra uno de los videos editados, tal y como los estudiantes lo visualizaron.

Figura 1 – Video editado.



Fuente: Tomado de la cuenta Edpuzzle de la docente (2024).

En la imagen anterior se aprecian marcas en forma de gota; cada una representa una actividad, ya sea una pregunta o una nota aclaratoria. En la Figura 2 se muestra una de las actividades de uno de los videos de Edpuzzle, en este caso una pregunta de verdadero o falso.

Figura 2 – Actividad de verdadero o falso.

Fuente: Tomado de la cuenta Edpuzzle de la docente (2024).

Edpuzzle permite al estudiante verificar si su respuesta es correcta o no. En caso de error, la aplicación ofrece la opción de reproducir el video nuevamente, de forma que brinda al estudiante una nueva oportunidad para responder adecuadamente. El estudiante puede retroceder el video, mas no puede adelantarlos, si el docente previamente lo ha configurado así. Las respuestas se califican automáticamente en la cuenta del docente (excepto las preguntas abiertas). Los resultados aparecen tal y como se muestra a continuación en la Figura 3.

Figura 3 – Calificaciones obtenidas automáticamente.

The screenshot shows the Edpuzzle dashboard. At the top, there is a search bar and a "Tareas" (Tasks) button. Below, a table lists assignments. The table has columns for the assignment name (represented by a green bar), the score (e.g., 83/100), the number of attempts (e.g., 1), the date (e.g., 4 abr.), and the status (e.g., ✓ 4 de abril, 19:19 or ⓧ No entregado).

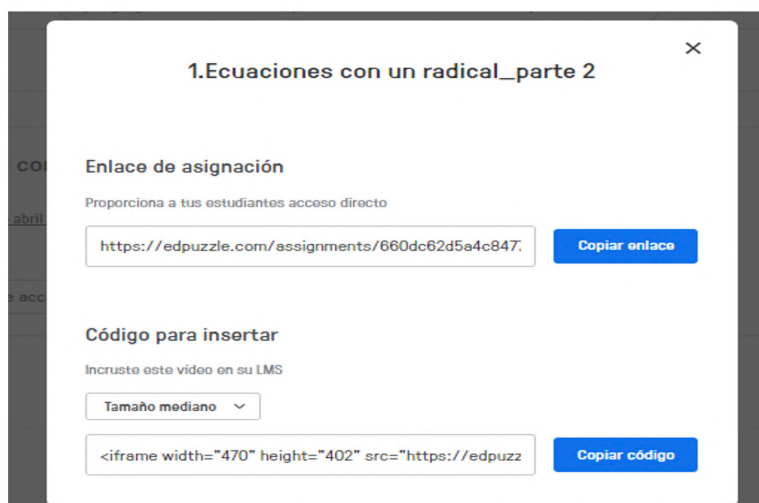
Asignación	Puntuación	Intentos	Fecha	Estado
[Barra Verde]	83/100	1	4 abr.	✓ 4 de abril, 19:19
[Barra Verde]	83/100	1	4 abr.	ⓧ No entregado
[Barra Verde]	83/100	1	9 abril.	✓ 5 de abril, 12:02 a. m.
[Barra Verde]	83/100	1	3 de mayo.	ⓧ No entregado
[Barra Verde]	83/100	1	30 abril.	✓ 30 de abril, 18:25 horas
[Barra Verde]	83/100	2	27 abril.	ⓧ No entregado
[Barra Verde]	100/100	1	7 abril.	✓ 7 de abril, 23:43
[Barra Verde]	100/100	1	11 abril.	✓ 5 de abril, 16:22
[Barra Verde]	100/100	1	7 abril.	✓ 4 de abril, 20:11
[Barra Verde]	100/100	1	4 abr.	ⓧ No entregado
[Barra Verde]	100/100	1	8 abril.	ⓧ No entregado
[Barra Verde]	100/100	1	23 abril.	✓ 4 de abril, 12:04 p. m.
[Barra Verde]	100/100	1	5 abril.	✓ 5 de abril, 4:19 am
[Barra Verde]	100/100	1	4 abr.	ⓧ No entregado

Fuente: Tomado de la cuenta Edpuzzle de la docente (2024).

Nota. En la imagen se han ocultado los nombres de los participantes para salvaguardar su privacidad.

Como se mencionó anteriormente, el video se puede asignar de dos maneras: por medio de un enlace directo o un código de inserción. En la Figura 4 se observa cómo el docente visualiza las dos maneras de compartir la tarea con sus estudiantes.

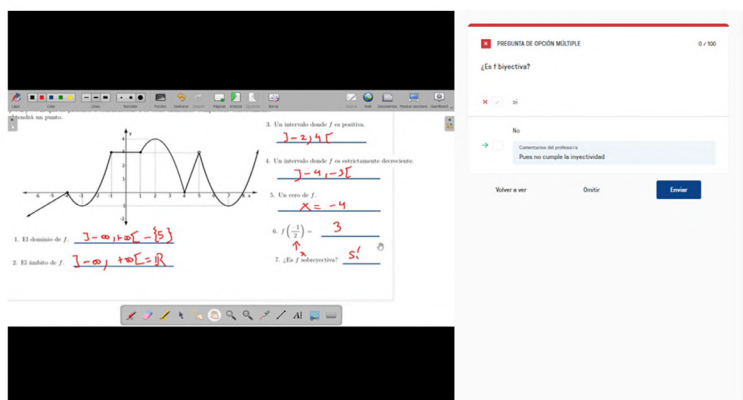
Figura 4 – Formas de compartir la tarea.



Fuente: Tomado de la cuenta Edpuzzle de la docente (2024).

La aplicación le indica al estudiante si acertó o no en su respuesta. El docente puede insertar preguntas brindando retroalimentación, tal como se puede ver en la Figura 5. Como se mencionó, la aplicación también brinda la posibilidad de que el estudiante pueda volver a visualizar el contenido en caso de que tenga dudas al responder; esto se puede ver en la misma imagen, donde se describe la retroalimentación.

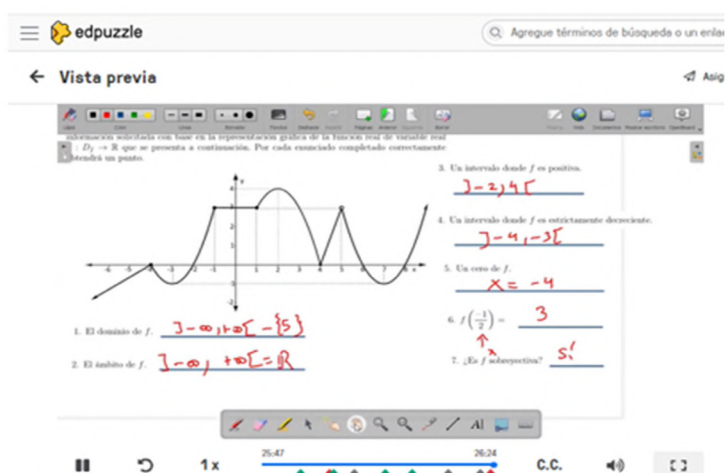
Figura 5 – Retroalimentación a una pregunta en el video editado.



Fuente: Tomado de la cuenta Edpuzzle de la docente (2024).

En la Figura 6 se muestra un ejemplo de cómo visualizan los estudiantes el video. Como se dijo, las gotas poseen distintos colores; cada color tiene un significado y representa una actividad (pregunta de opción múltiple, un falso o verdadero, una nota escrita o de audio). El color verde significa que el estudiante contestó correctamente la pregunta; el color rojo, que la respuesta fue incorrecta; por último, el color blanco puede representar una nota del profesor o bien que el estudiante omitió la pregunta.

Figura 6 – Actividades realizadas en el video editado.



Fuente: Tomado de la cuenta Edpuzzle de la docente (2024).

De este modo, el procedimiento contempla la integración de Edpuzzle como parte de la metodología de aula invertida, con el objetivo de promover el aprendizaje autónomo mediante recursos digitales interactivos.

3.3 Recolección y análisis de la información

Para esta investigación se utilizaron los siguientes instrumentos de recogida de información.

3.3.1 La observación no participante

Se tomó en cuenta esta técnica, ya que la investigadora permaneció ajena a la situación que se observó, sin inmiscuirse en el grupo, lo que facilitó una mayor imparcialidad (Niño Rojas, 2011). Mediante esta técnica se pretendió explorar el contexto del trabajo en clase de los estudiantes después de haber estudiado los videos de forma autónoma. Se observó qué tan bien trabajaban sin la necesidad de consultar constantemente a la docente y qué tan acertadamente. Además, se pretendió observar las conductas de los educandos, las distintas relaciones que surgían entre estos, consigo mismo, con sus compañeros y con la docente.

Para llevar a cabo lo anterior, se diseñó una guía de observación no estructurada con algunos indicadores generales, que permitieran registrar aspectos clave del comportamiento del estudiantado durante las clases. Entre los aspectos observados se incluyeron los siguientes: la autonomía para resolver ejercicios sin solicitar ayuda inmediata, la precisión en el desarrollo de las actividades propuestas, el nivel de colaboración entre pares, la determinación de posibles errores y la actitud frente a estos, y la interacción con la docente. Se tomaron notas de campo durante las sesiones, registrando ejemplos representativos de las dinámicas observadas. Estos registros se utilizaron para complementar el análisis de la efectividad de la estrategia de aula invertida con apoyo de Edpuzzle.

El entorno en el cual se desarrollaron las clases observadas consistió en una única aula donde las sesiones se impartían regularmente dos veces por semana, para un total de cinco horas de contacto semanales.

Durante las sesiones posteriores a la asignación de los videos, las clases en el aula se designaron únicamente a prácticas, donde la docente asumió un rol principalmente como observadora. Su papel consistió en supervisar individualmente el trabajo de los estudiantes mientras resolvían las ecuaciones o practicaban los temas correspondientes.

3.3.2 Evaluación sumativa

Esta fue diseñada por la cátedra del curso MAT001 y fue aplicada a la muestra sujeto de estudio. En el segundo parcial se evalúan ecuaciones e inecuaciones algebraicas, y dentro de este, el tema de ecuaciones con radicales. Este tema fue elegido por su dificultad, con el objetivo de evaluar los conocimientos adquiridos por los estudiantes y, a la vez, poder conocer los alcances que se obtuvieron al aplicar esta estrategia metodológica de estudio autónomo.

Para esto se seleccionó el ejercicio “resuelva la ecuación $\sqrt{x+18} - \sqrt{3x+31} = -1$ ”, el cual tuvo un valor de 10 puntos.

Si bien la evaluación de este ítem no formaba parte directa de los objetivos principales de este estudio, su inclusión permitió obtener información complementaria sobre la efectividad de la estrategia empleada en relación con el fomento del aprendizaje autónomo.

3.3.3 Cuestionario aplicado a los estudiantes sobre la percepción del uso de Edpuzzle

Se aplicó una encuesta de satisfacción para conocer el criterio de los estudiantes sobre la herramienta Edpuzzle en las distintas temáticas aplicadas. El cuestionario estaba compuesto por 7 preguntas cerradas relacionadas con datos demográficos, experiencia de Edpuzzle y clases desarrolladas sin mediación tecnológica. Con respecto a las cuatro preguntas abiertas, estas se enfocaron en aspectos positivos, negativos o dificultades encontradas durante el uso de la herramienta Edpuzzle, así como sugerencias en cuanto al uso de la herramienta en futuros cursos universitarios.

En cuanto al rigor y la confiabilidad de los datos recolectados en este trabajo, se aplicó la triangulación de fuentes y tipos de datos, una estrategia clave en la investigación de estudios de caso. Esta técnica permite analizar y explorar los fenómenos desde diversas perspectivas, lo que enriquece la comprensión y fortalece la validez de los resultados (Baxter y Jack, 2008).

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1 Resultados obtenidos de la observación no participante

En este caso particular, la docente optó por mantenerse distante de la enseñanza tradicional, con el objetivo de evaluar la comprensión de los estudiantes únicamente a partir de su estudio independiente. Aunque su intervención fue mínima, respondió de manera puntual a las pocas dudas planteadas por los estudiantes, como lo mencionan Jiménez Hernández et al. (2023).

Durante estas clases destinadas a practicar, se observó que los estudiantes enfrentaron errores comunes que suelen presentarse en ejercicios algebraicos. Por ejemplo, dificultades al desarrollar expresiones como el cuadrado de un binomio; es decir, $(A \pm B)^2$, errores en la aplicación de la regla de signos o al elevar al cuadrado solo un lado de la igualdad ($A=B \Rightarrow A^2=B$). En estos casos, la docente corrigió los errores puntualmente, evitando involucrarse en explicaciones extensas, para retomar su rol de observadora.

Las reacciones de los estudiantes antes estas correcciones reflejaron, en su mayoría, que dichos errores respondían a olvidos superfluos y no a un desconocimiento del procedimiento como tal; por ejemplo, fueron común expresiones como “Ah, sí, profe, es cierto” o “Uy, sí”. Posteriormente, los alumnos continuaban su trabajo de forma correcta y fluida.

Luego del espacio designado a la práctica, los ejercicios se revisaron en conjunto en la pizarra, con la excepción de las ecuaciones con radicales. Este tema fue excluido de la revisión colectiva con la intención de evaluar en el examen qué tan bien se desempeñaban en este tema, contando únicamente con el material proporcionado en los videos. Con respecto a los otros temas abordados mediante videos, la docente tuvo mayor participación en las explicaciones dadas en el aula, debido a que el desempeño en estas temáticas en el examen no es objeto de estudio en esta investigación, pero es relevante para el rendimiento del curso MAT001.

4.2 Resultados obtenidos de la evaluación sumativa

En el ejercicio que evaluó el tema de ecuaciones con radicales se obtuvieron resultados muy favorables, pues solo 8 estudiantes obtuvieron menos de la mitad del puntaje asignado, como se observa en la Tabla 1. Además, 17 estudiantes (68%) lograron obtener más de la mitad de los puntos. Respecto a esto, se reitera la importancia del compromiso real del estudiante, como lo afirman Blasco et al. (2016).

Tabla 1 – Puntos obtenidos por los estudiantes, en el ejercicio II prueba MAT001 (IC, 2024).

Puntaje obtenido	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Cantidad estudiantes	1	1	2	1	3	0	5	1	1	0	10

Fuente: Elaboración propia.

El promedio de notas para este ejercicio fue de 6.60, donde 12 estudiantes (de 25 en total) obtuvieron calificación igual o superior a 7. Cabe resaltar que 10 estudiantes realizaron el ejercicio de forma correcta, detallada, amplia y minuciosa, incluyendo la respectiva comprobación de los valores numéricos encontrados.

Se pueden observar en la Figura 7 dos resoluciones de dos estudiantes, donde cada uno opta por distintas estrategias de resolución; obsérvese como cada uno de ellos desarrolla la fórmula notable.

Figura 6 – Resolución correcta del ejercicio, II prueba MAT001 (IC, 2024).

Left Solution (Binomial Expansion):

$$\begin{aligned} \sqrt{x+18} - \sqrt{3x+31} &= -1 \\ (\sqrt{x+18} - \sqrt{3x+31})^2 &= (-1)^2 \\ x+18 + 3x+31 - 2\sqrt{(x+18)(3x+31)} &= 1 \\ 4x+49 - 2\sqrt{(x+18)(3x+31)} &= 1 \\ 4x+48 &= 2\sqrt{(x+18)(3x+31)} \\ 2x+24 &= \sqrt{(x+18)(3x+31)} \\ (2x+24)^2 &= (x+18)(3x+31) \\ 4x^2 + 96x + 576 &= 3x^2 + 93x + 558 \\ x^2 + 3x + 18 &= 0 \\ x &= -2, -9 \end{aligned}$$

Verification:

$$\begin{aligned} \text{For } x = -2: \sqrt{-2+18} - \sqrt{3(-2)+31} &= \sqrt{16} - \sqrt{25} = 4 - 5 = -1 \\ \text{For } x = -9: \sqrt{-9+18} - \sqrt{3(-9)+31} &= \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

Right Solution (Product of Conjugates):

$$\begin{aligned} \sqrt{x+18} - \sqrt{3x+31} &= -1 \\ (\sqrt{x+18} - \sqrt{3x+31})(\sqrt{x+18} + \sqrt{3x+31}) &= (-1)(\sqrt{x+18} + \sqrt{3x+31}) \\ x+18 - 3x-31 &= -\sqrt{x+18} - \sqrt{3x+31} \\ -2x-13 &= -\sqrt{x+18} - \sqrt{3x+31} \\ 2x+13 &= \sqrt{x+18} + \sqrt{3x+31} \end{aligned}$$

Verification:

$$\begin{aligned} \text{For } x = -2: \sqrt{-2+18} - \sqrt{3(-2)+31} &= \sqrt{16} - \sqrt{25} = 4 - 5 = -1 \\ \text{For } x = -9: \sqrt{-9+18} - \sqrt{3(-9)+31} &= \sqrt{9} - \sqrt{4} = 3 - 2 = 1 \end{aligned}$$

Fuente: Evidencias de los estudiantes.

En la imagen del lado izquierdo, el desarrollo de la fórmula notable se hace por dominio de esta; es decir, con el desarrollo del cuadrado de la suma de A y B, es igual a A al cuadrado más 2 veces AB más B al cuadrado, lo cual es $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$. En el lado derecho, se resuelve mediante el producto respectivo; o sea, el cuadrado de la suma de A y B es igual a A más B multiplicado por A más B, esto es, $(A+B)^2 = (A+B)(A+B)$. Es importante recalcar el no uso de la calculadora para la resolución de la ecuación cuadrática que surge dentro del mismo proceso algebraico, esto se evidencia en los videos asignados. Sin embargo, como se aprecia en la Tabla 1, hubo estudiantes que, a pesar de tener el recurso disponible de forma permanente para estudiar y aprender el tema previo al examen, no lograron adquirir el conocimiento necesario para resolver la ecuación.

4.3 Resultados obtenidos del cuestionario sobre la percepción del uso de Edpuzzle

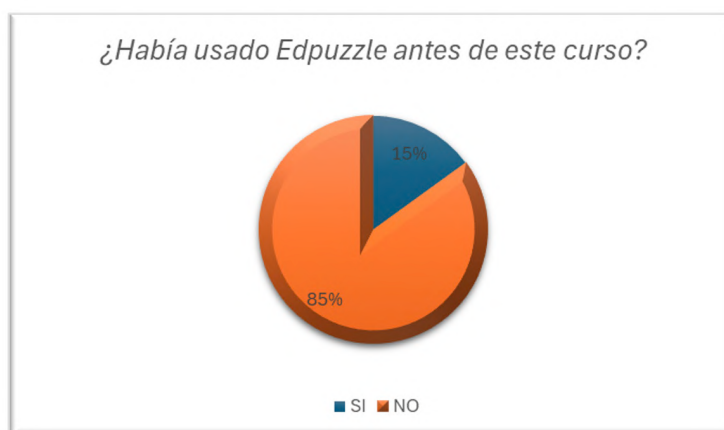
Posterior al uso de la herramienta Edpuzzle, a los estudiantes se les consultó acerca de la misma. De la primera parte (preguntas cerradas) se extrae la siguiente información.

Como se mencionó anteriormente, el grupo de MAT001 estuvo conformado por 25 estudiantes, de los cuales 20 accedieron a contestar el cuestionario. De estos estudiantes, la

edad promedio fue de 18.9 años; compuesto en partes iguales por mujeres y hombres. En su mayoría son estudiantes de primer año universitario (80%); solamente 2 estudiantes están en segundo año y 2 en tercer año.

Un alto porcentaje del estudiantado no había utilizado antes la herramienta Edpuzzle, tal como se observa en el gráfico de la Figura 8.

Figura 8 – Uso previo de Edpuzzle por los estudiantes.

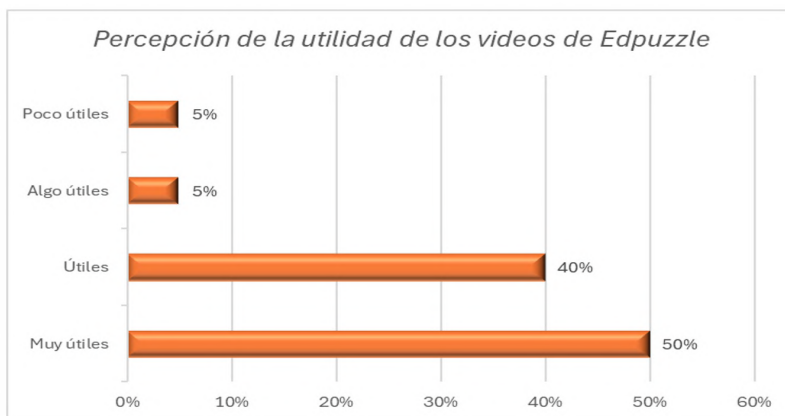


Fuente: Elaboración propia.

Aun así, más de la mitad (el 70%) de los estudiantes indicó que le resultó fácil o muy fácil usar esta herramienta.

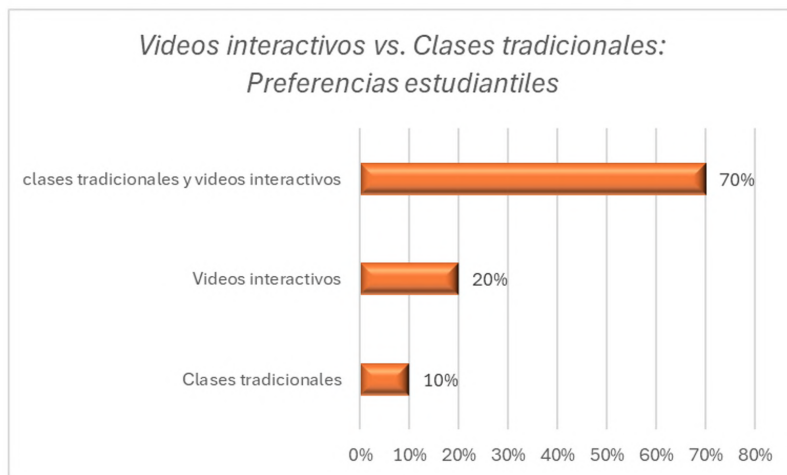
Con respecto a la inclusión en los videos de preguntas o notas interactivas, un 70% de los estudiantes afirmó que definitivamente les ayudó a reforzar su aprendizaje, mientras que un 30% mencionó que solo en cierta medida. Sin embargo, al 100% del estudiantado le gustaría que Edpuzzle se utilice en el desarrollo de otros temas.

En la Figura 9 se presentan los resultados de la percepción del estudiantado en relación con la utilidad de esta herramienta para comprender temas con contenido matemático, como por ejemplo el de ecuaciones con radicales.

Figura 9 – Percepción de la utilidad de los videos editados con Edpuzzle.

Fuente: Elaboración propia.

Adicionalmente, el 100 % consideró que la calidad de los videos fue buena, muy buena o excelente. Nuevamente, un alto porcentaje de los jóvenes señalaron su preferencia por el aprendizaje con videos interactivos, en concordancia a lo expresado por Jordan Lluch et al. (2014) sobre la preferencia por estos junto con las clases tradicionales (aula y pizarra). Los resultados se muestran a continuación en la Figura 10.

Figura 10. Preferencia estudiantil sobre modo de aprendizaje.

Fuente: Elaboración propia.

Referente a la percepción de si aprendió mejor cierto tema con el apoyo de Edpuzzle comparado con otros desarrollados de forma tradicional, más de la mitad (60%) indicó que sí

obtuvo mejor aprendizaje, en concordancia también con lo mencionado por Rodríguez Licea et al. (2017).

De las preguntas abiertas, relacionadas con los aspectos positivos, negativos o dificultades del uso de Edpuzzle, los estudiantes consideraron diversas situaciones que se resumen en la Tabla 2.

Tabla 2 – Resumen de la percepción del estudiantado sobre el uso de Edpuzzle .

Aspectos positivos	Aspectos negativos o dificultades
• Es dinámica, interactiva e innovadora. • Los videos pueden verse varias veces y llegar con dudas a clase. • Las preguntas evalúan el conocimiento durante el video. • La herramienta promueve el aprendizaje autónomo y eficaz, como señala Medina Molina (2008). Menciones textuales de los estudiantes: • “Es una herramienta para lograr aprender de una manera más personalizada, y así no se siente el terror a hacer preguntas que muchas veces la gente siente”. • “Es muy interactiva y me permite estar más concentrada porque no sé qué me van a preguntar luego”.	• El limitado acceso a internet. • Larga duración de los videos. • Sin opción de adelantar el video. Menciones textuales de los estudiantes: • “La necesidad de estar conectado a internet”. • “No poder corregir las respuestas erróneas a las preguntas”.

Fuente: Elaboración propia.

Es importante agregar que un 35% del estudiantado manifestó no haber encontrado ningún aspecto negativo o dificultad asociado al uso de Edpuzzle.

Asimismo, los sujetos de investigación añaden algunas sugerencias para mejorar el uso de esta aplicación tecnológica en futuros cursos: que la explicación sea más lenta; mayor implementación de la herramienta; subir los videos de acuerdo con las prácticas de examen y temas complicados; mejorar el audio y calidad de video; y mayor vinculación entre clases virtuales y presenciales. Otras actitudes adicionales mencionadas por los estudiantes son las siguientes: “excelente iniciativa”, “excelente app” y “me gustó utilizar esta herramienta”.

Se pudo apreciar que la mayoría de los estudiantes –además de tener la condición de primer ingreso universitario– no había empleado la herramienta Edpuzzle, pero estos no fueron impedimentos para su utilización de manera sencilla y amigable.

4. CONSIDERACIONES FINALES

Este trabajo se propuso diseñar, implementar y valorar una intervención formativa basada en el uso de la aplicación Edpuzzle, orientada a promover el aprendizaje autónomo en estudiantes de primer ingreso del curso de Matemática General. Así como analizar la percepción de los estudiantes sobre el uso de esta herramienta en el contexto de la metodología de aula invertida. De los resultados obtenidos se puede concluir que no se presentaron consultas de gran relevancia cuando se practicó el tema de ecuaciones con radicales en las clases presenciales, posteriores a las clases asignadas mediante Edpuzzle. La totalidad de los estudiantes se mostró conforme y a gusto con la calidad y utilidad de los videos. Aquellos que realmente los visualizaron, mostraron que lo hicieron de forma completa, atenta y minuciosa, al dejar entrever estrategias rigurosas explicadas desde este recurso, lo que comprueba que el estudiante realmente comprometido con la metodología puede adquirir conocimientos de forma autónoma.

El uso de Edpuzzle como herramienta tecnológica para la enseñanza del tema en cuestión demostró ser una alternativa efectiva para fomentar el aprendizaje autónomo y mejorar la comprensión de los temas abordados. Los resultados evidencian que otorgar al estudiantado material didáctico adecuado y accesible puede conllevar al desarrollo de competencias matemáticas con un alto grado de autonomía y precisión, siempre que exista un compromiso real con el estudio independiente.

En términos de percepción, los estudiantes valoraron positivamente la implementación de Edpuzzle al considerarlo un recurso interactivo, dinámico e innovador, que facilita la comprensión de temas complejos. El formato de videos con preguntas insertadas no solo permitió un aprendizaje más activo y enfocado, sino que también incentivó la concentración y la revisión constante del material. Esto reafirma el potencial de esta herramienta para fortalecer el proceso de enseñanza-aprendizaje y mejorar la experiencia educativa en combinación con las clases presenciales.

Pese a ser una herramienta diseñada desde hace más de 10 años, Edpuzzle resultó ser novedosa para la mayoría de la población objeto de estudio, pero aún así bien recibida por estos. Lo anterior muestra un impacto positivo en la comprensión de los temas y la promoción de un aprendizaje más independiente e interactivo, que ayuda resolver necesidades actuales como el papel protagónico del estudiante (Jiménez Hernández et al., 2023). Ahora bien, existen áreas de mejora relacionadas principalmente con las condiciones de uso técnico y pedagógico, cuyas adecuaciones pueden optimizar su implementación. Es importante mencionar que, aunque el estudiantado prefiere aprender con videos interactivos (preguntas y notas aclaratorias), esta modalidad no descarta el aprendizaje mediante las clases tradicionales.

Por tanto, se concluye que la integración de Edpuzzle en la enseñanza de temas matemáticos representa una opción valiosa para mejorar el aprendizaje, siempre que se acompañe de un diseño pedagógico que responda a las necesidades del estudiantado y que aproveche las ventajas de la tecnología de manera efectiva.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

RDF concibió la idea presentada. MBB desarrolló la teoría. RDF y MBB adaptaron la metodología a este contexto, crearon los modelos, realizaron las actividades, recopilaron los datos y analizaron los datos. Ambas autoras participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio pertenecen a las personas autoras correspondientes, RDF y MBB, y estarán disponibles previa solicitud razonable.

5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Blasco, A. C., Lorenzo, J. y Sarsa, J. (2016). La clase invertida y el uso de videos de software educativo en la formación inicial del profesorado. *Revista d'innovació Educativa*, (17), 12-20. <https://www.redalyc.org/jats-Repo/3495/349551247003/349551247003.pdf>
- Baxter, P. y Jack, S. (2008). Qualitative Case Study Methodology: Study Design and Implementation for Novice Researchers. *The Qualitative Report*, 13(4), 544-559. <https://doi.org/10.46743/2160-3715/2008.1573>
- Durán, M. M. (2012). El estudio de caso en la investigación cualitativa. *Revista Nacional de Investigación*, 3(1), 121-134. <https://doi.org/10.22458/rna.v3i1.477>
- Escuela de Matemática – Universidad Nacional (s.f.). *Programas de curso de servicio*. Recuperado el 6 de marzo de 2024, de <https://www.matematica.una.ac.cr/index.php/oferta-academica/cursos-de-servicio/documentacion-digital>
- García Barrera, A. (2013). El aula inversa: cambiando la respuesta a las necesidades de los estudiantes. *Avances En Supervisión Educativa*, (19). <https://doi.org/10.23824/ase.v0i19.118>
- González Rodríguez, N. Y. (2020). *Aprendizaje cooperativo y Flipped Classroom con Edpuzzle. Un caso de estudio* [Trabajo de fin de máster, Universidad de La Laguna]. Repositorio Institucional de la Universidad de La Laguna. <https://riull.ull.es/xmlui/handle/915/22410>
- Guerrero Salazar, C., Prieto López, Y., y Noroña Medina, J. (2018). La aplicación del aula invertida como propuesta metodológica en el aprendizaje de matemática. *Espíritu Emprendedor TES*, 2(1), 1–12. <https://doi.org/10.33970/eetes.v2.n1.2018.33>
- Jiménez Hernández, C., Jordán Lluch, C., Magreñán Ruiz, Á. A., y Orcos Palma, L. (2023). Invirtiendo la clase de matemáticas en los últimos cursos de secundaria mediante el uso de videos enriquecidos. *Innovación Educativa*, (33). <https://doi.org/10.15304/ie.33.9257>
- Jordan Lluch, C., Pérez Peñalver, M. J. y Sanabria Codesal, E. (2014). Flipped Classroom: Reflexiones y opiniones de los implicados. En *Jornadas de Innovación Educativa y docencia en Red de la Universitat Politècnica de València* (pp. 310-323). Editorial Universitat Politècnica de València. <http://hdl.handle.net/10251/66232>
- Lacruz Alcocer, M. (2002). *Nuevas tecnologías para futuros docentes* (vol. 36). Universidad de Castilla-La Mancha.
- Mayer, R. E. (2002). Multimedia learning. *Psychology of Learning and Motivation*, 41, 85-139. [https://doi.org/10.1016/S0079-7421\(02\)80005-6](https://doi.org/10.1016/S0079-7421(02)80005-6)
- Mazcuñán Navarro, E. M. (2015). Creación de lecciones a partir de vídeos con EdPuzzle. En *Nuevos enfoques en la aplicación práctica de la innovación docente* (pp. 47-52). Universidad de León.
- Medina Molina, J. (2008). Un método para la generación de videos docentes. *Rect@*, 16(1). <http://hdl.handle.net/10317/698>
- Moreno R., y Martínez R. J. (2009). Aprendizaje autónomo. Desarrollo de una definición. *Acta Comportamentalia*, 15(1). <https://doi.org/10.32870/ac.v15i1.14512>
- Niño Rojas, V. M. (2011). *Metodología de la investigación*. Ediciones de la U.
- Programa Estado de la Nación. (2021). *Octavo estado de la educación*. CONARE, PEN. https://estadonacion.or.cr/wp-content/uploads/2021/09/Educacion_WEB.pdf

- Pueo, B., Jiménez Olmedo, J. M., Penichet Tomás, A. y Carbonell Martínez, J. A. (2017). Aplicación de la herramienta EDpuzzle en entornos de aprendizaje individuales dentro del aula. En R. Roig Vila (Ed.), *Investigación en docencia universitaria: Diseñando el futuro a partir de la innovación educativa* (pp. 694–702). Octaedro. <http://hdl.handle.net/10045/71190>
- REAL ACADEMIA ESPAÑOLA. *Diccionario de la lengua española*, 23ª ed. [versión 23.7 en línea]. Recuperado el 20 de marzo de 2024, de <https://dle.rae.es>
- REAL ACADEMIA ESPAÑOLA. *Diccionario de la lengua española*, 23ª ed. [versión 23.7 en línea]. Recuperado el 24 de abril de 2025, de <https://dle.rae.es>
- Rodríguez Licea, R. A., López Frías, B. S. y Mortera Gutiérrez, F. G. (2017). El video como recurso educativo abierto y la enseñanza de matemáticas. *Revista electrónica de investigación educativa*, 19(3), 92-100. <https://doi.org/10.24320/redie.2017.19.3.936>
- Serrano, D. (2023). Los vídeos educativos como estrategias detonantes de aprendizaje. *Aloma: Revista de Psicología, Ciències de l'Educació i de l'Esport*, 41(1), 131-140. <https://doi.org/10.51698/aloma.2023.41.1.131-140>



EXPERIENCIA DE FORMACIÓN: ESTRATEGIA DIDÁCTICA PARA LA ENSEÑANZA DE LA PROBABILIDAD FRECUENCIAL EN UN ESPACIO MUESTRAL NO EQUIPROBABLE

TRAINING EXPERIENCE:
DIDACTIC STRATEGY FOR TEACHING FREQUENTIST
PROBABILITY IN A NON-EQUIPROBABLE SAMPLE SPACE

Luis Diego Chavarría Brenes¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0003-1359-0118>

Los materiales concretos y pseudo concretos son de mucha utilidad para llegar a una comprensión de los significados de probabilidad en primaria y secundaria. En Costa Rica, los Programas de Estudio de Matemática (MEP, 2012) ofrecen metodológicas específicas para la enseñanza enfocadas en facilitar una transición progresiva desde una comprensión intuitiva hasta el cálculo formal de probabilidades. Los PEM señalan que, los juegos de azar ofrecen una excelente oportunidad para generar ejemplos que faciliten la comprensión de conceptos sobre la probabilidad, ya que estos permiten a los estudiantes relacionar el contenido matemático con situaciones reales y cercanas a su contexto cotidiano, manteniendo además un carácter lúdico.

Por otro lado, el plan de estudios de la carrera de Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica ofrece tres áreas de formación, de manera que las mismas integren la construcción del conocimiento teórico-práctico necesario para el desempeño del educador matemático. Una de estas áreas corresponde a lo didáctico matemático, la cual es la responsable de “*la transformación de conocimiento provisto por la teoría en conocimiento útil para la acción donde no es un proceso de aplicación sino de reconstrucción situacional*” (Diker y Terigi, 1997, p. 118). Es por ello que, la carrera integra didácticas específicas, de manera que se les brinda a los futuros docentes de Matemática diferentes herramientas y espacios para el desarrollo de habilidades y poder llevar a cabo tareas de diseño, implementación y análisis.

Este ensayo tiene como propósito compartir mi experiencia personal durante mi formación como bachiller en Educación Matemática. En el marco del curso MA0024 Didáctica de la Estadística y Probabilidad, desarrollé una estrategia didáctica para la enseñanza de la probabilidad frecuencial en un espacio muestral no equiprobable como parte de mi práctica profesional, la cual consistió en la implementación de un taller, dirigido a personas docentes

¹ Bachiller en Educación Matemática y estudiante en la Maestría de Estadística de la Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica. C. P. 11501. Correo electrónico luis.chavarriabrenes@ucr.ac.cr



de primaria. Esta estrategia tuvo como eje un abordaje de fenómenos aleatorios, el significado frecuencial de la probabilidad, la experimentación y la exploración de espacios muestrales no equiprobables. El diseño se fundamentó en el análisis fenomenológico, desarrollado a través de sus cinco fases: simplificación, matematización, resolución, comunicación e interpretación. Lo anterior con el objetivo de aproximar la fenomenología didáctica al quehacer docente por medio de la exploración de un juego matemático para una construcción progresiva sobre el enfoque frecuentista de la probabilidad.

Previo a compartir el proceso de implementación del taller, es importante resaltar que el juego matemático se relaciona con las abejas y la polinización de flores, de manera que se dé un proceso de exploración de los conceptos de probabilidad con este fenómeno real (fomentando cálculo de probabilidades simples y la comparación de resultados esperados con los observados), promoviendo un aprendizaje constructivista incorporando elementos de la fenomenología didáctica.

El juego consiste en lanzar un balón que simula ser una abeja. Este se desliza por una serie de canales que lo conducen a una de cuatro flores posibles. Una de las flores tiene una probabilidad de “un medio” de ser alcanzada, otras dos tienen una probabilidad de “un cuarto” cada una, y una de las flores nunca recibe a la abeja (probabilidad 0). Antes de cada lanzamiento, los estudiantes deben elegir la flor en la que creen que caerá la abeja. Quien acierte gana un punto, y al finalizar 20 rondas, el estudiante con más puntos será el ganador. El objetivo de esta actividad es que reconozcan, a través del juego, que algunas flores tienen mayor probabilidad de ser alcanzadas que otras, a medida que observan los resultados en cada ronda, llevando un registro mediante un tablero.

El taller se ofreció a docentes de primaria en la escuela Otto Hübbe, estructurado en una sesión de 80 minutos, dividido en tres bloques, 1) introducción y contextualización de los enfoques de la probabilidad, 2) aplicación del juego matemático y contextualización sobre la fenomenología didáctica y 3) discusión y evaluación. Entre los materiales son el acrílico, MDF y tornillos plásticos. En cuanto a las herramientas, se emplearon los softwares SketchUp y Adobe Illustrator para el diseño, y máquinas como la Router Esko y una máquina de grabado y corte láser para la fabricación y acabado del producto.

El desarrollo del bloque 1, se enfatizó en dejar claro cómo la base de la probabilidad es la aleatoriedad, recordando que, un fenómeno se le considera aleatorio si se comporta con el cálculo de probabilidades, detallando que, al trabajar con la aleatoriedad hay una necesidad de modelizar, es decir, trabajar con situaciones reales. Por esta misma línea se especifican los diversos enfoques de la probabilidad, de manera que el juego construido no es posible trabajar con el Teorema de Laplace, por lo que invita a trasladar conocimientos de otros enfoques probabilísticos, como el frecuencial y el intuitivo, permitiendo dar una pincelada de lo que es la probabilidad condicional o subjetiva, que se ajusta a casos a contextos de la vida donde no se pueden realizar infinitas repeticiones. Por otro lado, se discutió el sesgo de la equiprobabilidad, detallando cómo de manera natural, las personas piensan que todos los resultados posibles de un experimento tienen la misma probabilidad de ocurrir. Sin embargo, esto no siempre es cierto. A veces, las situaciones no son tan simples como un dado o una moneda

Para el bloque 2, los docentes pusieron en práctica el juego, teniendo un acercamiento a una clase. Previo a la implementación se les brindó una contextualización del juego, así como una discusión del cómo las abejas realizan el proceso de recolección del polen, brindándoles un material impreso. Para este punto, mediante una serie de preguntas se les explicó a los docentes el objetivo del juego y cómo el mismo promueve esa construcción progresiva sobre ciertos conceptos probabilísticos. Las preguntas elaboradas fueron las siguientes:

Identificar cuál fue el resultado más observado durante el juego

Objetivo: Que los docentes vean como la frecuencia de los resultados ayuda identificar patrones y reflexionar sobre cómo esta observación puede ser usada para enseñar conceptos de probabilidad en el aula.

Analizar si se puede abordar este resultado a través del enfoque clásico laplaciano

Objetivo: Que los docentes vean como al tratarse de un espacio muestral no equiprobable no se puede utilizar este enfoque.

Determinar la probabilidad de las demás flores

Objetivo: Que los docentes interpreten los resultados observados utilizando el cálculo probabilístico.

Brindar interpretaciones intuitivas y frecuenciales de los resultados obtenidos

Objetivo: Que los docentes puedan desarrollar explicaciones claras que combinen la intuición y la frecuencia observada.

Reflexionar sobre cómo puede este juego ayudar a comprender mejor la probabilidad.

Objetivo: Tener una visión de la opinión de las personas docentes y reflexionar sobre cómo el juego puede ser una herramienta efectiva para enseñar probabilidad de manera práctica y experiencial.

Valorar la importancia de realizar experimentos al enseñar probabilidad ¿Por qué sí o por qué no?

Objetivo: Fomentar el debate sobre la relevancia de las actividades experimentales en la enseñanza de la probabilidad, ayudando a los docentes a valorar el impacto que tienen los experimentos en la comprensión de los estudiantes.

Para el bloque 3, se realizó una discusión sobre la fenomenología didáctica, detallándoles diferentes metodologías de clase para la enseñanza de la probabilidad. Entre estas, destacando las estrategias orientadas a simplificar las relaciones matemáticas, que incluyen el uso de simulaciones, y aquellas que integran aplicaciones, donde se fomenta el uso de experimentación y el juego. Aunado al punto anterior, se les comentó lo mencionado por Gutiérrez-Fallas (2024), quien, citando a Penalva y Linares (2011), destaca que las tareas matemáticas deben demostrar la aplicabilidad de la matemática en la resolución de problemas contextualizados en los fenómenos que rodean a las personas estudiantes (esto conectando con los PEM), de manera que, el aprendizaje de las matemáticas en las personas estudiantes es condicionado por las tareas que propone el docente.

Para finalizar el bloque 3 se enfatizó el análisis fenomenológico, señalándoles como:

Mediante el organizar, estructurar y matematizar es que cada individuo se apropia personalmente de las matemáticas.

Objetivo: Que las personas docentes comprendan cómo, al pasar la persona estudiante por este proceso ayuda a involucrar procesos metacognitivos, teniendo como consecuencia una comprensión significativa del objeto matemático e incluso su aplicabilidad.

La fenomenología viene a constituir una pieza fundamental en los currículos por competencias que promueven un enfoque funcional de las matemáticas escolares.

Objetivo: Que los docentes interpreten cómo la fenomenología didáctica contribuye a que las personas estudiantes les den un significado funcional a las matemáticas y comprendan su aplicabilidad en la vida real por medio de estudio de fenómenos.

El fenómeno de estudio contribuye al entendimiento del objeto matemático y viceversa.

Objetivo: Que los docentes comprendan cómo el objeto matemático tiene que nacer del fenómeno de estudio, para así este ayude a un entendimiento del fenómeno.

La construcción del juego e implementación del taller me brindó la oportunidad de tener un pequeño acercamiento a la fenomenología didáctica, donde resulta muy importante que el docente tenga una sólida comprensión del fenómeno que se quiera llevar al aula para la enseñanza de contenidos matemáticos, esto para proceder con su matematización, lo cual también implicaría un buen manejo de los objetos matemáticos tratados. Además, al fomentar el uso de fenómenos que rodean a los estudiantes, se da una construcción de conocimientos más significativos, dándole una funcionalidad a las matemáticas y comprendiendo el mundo real por medio de las mismas, promoviendo así procesos metacognitivos, donde los estudiantes logran adueñarse de los nuevos conocimientos adquiridos desarrollando un pensamiento propio de estos.

Por otro lado, los docentes comentaron la necesidad de este tipo de metodologías en las aulas, sobre todo la implementación de juegos matemáticos, ya que para los estudiantes de primaria les ayuda a estimular ciertos pensamientos lógicos y abstractos, así como la creatividad, relaciones sociales, estimulación de autorregulación y un reforzamiento de los aprendizajes. Por esta misma línea, se evidenció una necesidad por parte de los docentes de tener este tipo de capacitaciones, específicamente en probabilidad, ya que desconocían los diferentes enfoques de la probabilidad.

Respecto a la construcción de juego matemático, se presentó la dificultad en la presión de las probabilidades, esto ya que se realizaron diferentes tableros y fallaban en los pesos de las probabilidades, por lo que se generó la necesidad de recurrir diversos materiales y herramientas. De esta manera es importante resaltar como, para este tipo de construcciones se deben considerar diversos factores, entre ellos la claridad del experimento aleatorio a realizar, probabilidades reales y coherentes, que exista una posibilidad de análisis y comparación,

que el juego fomente el uso de los contenidos matemáticos, reglas y diseños adecuados a los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Diker, G. y Terigi, F. (1997). *La formación de maestros y profesores: Hoja de ruta*. México: Paidós.

Gutiérrez-Fallas, L.F. (2024). Diseño de tareas matemáticas fenomenológicas con integración de la tecnología en la formación inicial de profesores de matemática. *Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação*, 19(2), 1-23. <https://doi.org/10.21723/riaee.v19iesp.2.18999>

Ministerio de Educación Pública. (2012). Programas de Estudio de Matemáticas. <https://www.mep.go.cr/sites/default/files/media/matematica.pdf>

APÉNDICES

Apéndice 1: Juego Matemático.



Fuente: Elaboración propia.

Apéndice 2: Fases de ciclo fenomenológico escolar aplicados en el juego matemático.

Fase	Roles de acuerdo al autor	Descripción de acuerdo al autor	Relación con el juego matemático
Fase 1 Simplificación	Docente: investiga, organiza, diseña y planifica.	Consiste en dos momentos en los cuales la persona docente es responsable: 1) Indagación de fenómenos que problematicen situaciones del mundo real asociados con el contenido matemático 2) Simplificar ese fenómeno y diseñar una tarea matemática fenomenológica proponiendo un modelo escolar del fenómeno.	En esta fase, la persona docente introduce el fenómeno del juego, esto mediante una contextualización a las personas estudiantes sobre la importancia de las abejas y el rol que estas tienen en la polinización. Lo anterior mediante la indagación del fenómeno como tal, explicando cómo el color, el olor, la disponibilidad de néctar y la forma de las flores influyen en la preferencia de las abejas, siendo esto una escogencia aleatoria. Posteriormente, la tarea matemática consiste en predecir en qué flor caerá la abeja (balín), relacionando así las características de las flores con la probabilidad de que una abeja se sienta atraída.

Fase	Roles de acuerdo al autor	Descripción de acuerdo al autor	Relación con el juego matemático
Fase 2 Matematización Resolución	Docente: orienta, acompaña y monitorea. Estudiante: trabaja en equipo, conjetura y resuelve.	Se da esa exploración matemática de la tarea por parte de las personas estudiantes, movilizando su razonamiento matemático y utilizando conocimientos conceptuales-procedimentales que tienen para matematizar la situación	Durante esta fase, las personas estudiantes participan activamente en el juego, de manera que se explora el fenómeno lanzando al balón, observando el resultado. Es aquí donde discuten sobre los eventos probables, improbables y seguros, basándose en los resultados observados tras varias rondas del juego (enfoque frecuentista). Aquí es donde las personas estudiantes deben utilizar sus conocimientos implícitos sobre la probabilidad para de esta manera poder hacer predicciones más argumentadas de acuerdo al pasar las rondas.
Fase 3 Comunicación Interpretación	Docente: dirige, valida y sistematiza Estudiante: participa, revisa y cuestiona	Momento en el cual se da una discusión colectiva, donde la persona docente dirige el diálogo constructivo invitando a las personas estudiantes a argumentar y justificar sus resultados, de modo que permita finalmente validar las conclusiones a la luz de la interpretación del fenómeno de estudio.	Para esta fase, la persona docente debe facilitar una discusión sobre los resultados que obtuvieron las personas estudiantes. Aquí el docente debe validar y sistematizar los datos registrados en las pizarras, donde las personas estudiantes revisan cuántas veces acertaron en sus predicciones y justifican por qué creían que la abeja (balón) caería en una flor específica. Esto tiene como objetivo que las personas estudiantes interpreten los resultados del juego, comparando los resultados esperados con los observados y reflexionar sobre las decisiones estratégicas tomadas durante el juego.

Fuente: Elaboración propia.



EXPERIENCIA PROFESIONAL: CONCURSO DE CUENTOS MATEMÁTICOS

PROFESSIONAL EXPERIENCE: MATHEMATIC STORY CONTEST

Aarón Josué Vargas Carrillo¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0001-4945-5765>

En el campo de Educación Matemática, es cada vez más urgente encontrar estrategias que no solo transmitan conocimientos, sino que también despierten la curiosidad, la comprensión y el gusto por las matemáticas. En esta búsqueda los cuentos didácticos han demostrado ser una herramienta fundamental en el desarrollo del pensamiento, particularmente en la infancia (Rojas y Prieto, 2019; Jiménez y Gordo, 2014). A través de las historias, las y los estudiantes no solo aprenden contenidos, sino que los estructuran en esquemas mentales que les permiten recordar, relacionar y dar sentido a los objetos matemáticos presentes.

Desde el marco teórico de Duval (1995), comprender un objeto matemático exige usar varios registros de representación semiótica, así como el poder convertir información entre estos registros. En este sentido, los cuentos permiten presentar ideas matemáticas integradas dentro de una narración con contextos visuales, lingüísticos y simbólicos, facilitando el movimiento entre registros y promoviendo una comprensión de los contenidos.

Al integrar los conceptos matemáticos dentro de una historia, las y los estudiantes no solo se enfrentan a problemas o definiciones, sino que interactúan con personajes, escenarios y conflictos que hacen que el contenido cobre vida. Esta integración de registros (narrativo, visual y simbólico) favorece el aprendizaje, especialmente en los niveles de educación primaria y primeros años de secundaria, donde el lenguaje y la imaginación son clave para el desarrollo cognitivo.

La experiencia de formación que se reporta es parte de una vivencia concreta: la creación del cuento matemático “*El Reloj Circunferencia*”. El compartir esta experiencia tuvo como objetivo motivar a las y los futuros educadores matemáticos y a colegas en ejercicio, para elaborar productos de acceso libre que fomenten la accesibilidad del aprendizaje matemático y promuevan actitudes positivas hacia esta asignatura, la cual socialmente ha sido estigmatizada y se considera como accesible para pocos, una consideración paradójica al también ser conscientes de su relevancia en los avances científicos y su utilidad cotidiana.

1 Bachiller en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, San José, Costa Rica, C. P. 11501. Correo electrónico: aaron.vargascarrillo@ucr.ac.cr



Para la elaboración del cuento seguí una trayectoria que tiende a las cuatro fases de la ingeniería didáctica, iniciando por un *análisis preliminar* en donde se consultó el Ministerio de Educación Pública [MEP] (2012) en los Programas de Estudio de Matemáticas focalizando la atención en un contenido, determinando significados institucionales, dificultades, creencias; posterior se realizó un *diseño* en donde se determinó un contexto o situación que pudiera modelar el contenido, además de realizar una transposición didáctica del mismo, adaptando las ideas a un vocabulario accesible para el público meta articulándolo, a su vez, con la rima; continuando con la *implementación* en donde tuve la oportunidad de presentarlo a colegas, profesores y personas colaboradoras, recibiendo retroalimentación; y finalizando con una *evaluación o análisis retrospectivo* acerca de la experiencia, contrastando lo previsto en el *diseño* y lo observado en la *implementación* (Godino et al, 2014).

La experiencia vivida me permitió ser más consciente de la necesidad de elaborar recursos ricos en creatividad, por un lado, para la formación de las y los futuros docentes (me incluyo), pero especialmente para los protagonistas del aprendizaje: las y los estudiantes. Como menciona Gontijo et al. (2020), el conocimiento y la creatividad se relacionan de tal forma que el primero no emerge sin la segunda. Promover la creatividad permite que las y los estudiantes no solo comprendan contenidos, sino que también desarrollen formas personales de pensarlos, representarlos y comunicar sus ideas. De acuerdo con García et al. (2020), la elaboración de este tipo de productos creativos puede ser un medio de formación efectivo para los futuros maestros de primaria, pues permite incrementar el aprendizaje en la materia, propiciar la creatividad, trabajar aspectos relacionados al componente afectivo y creencias y mejorar su visión como futuro profesional en el aula.

El cuento fue reconocido con el segundo lugar en un concurso internacional organizado por FUNDAPROMAT en Panamá, el cual tuvo 115 participantes de 10 países latinoamericanos. Este logro no solo evidenció el potencial creativo de integrar narrativa y matemáticas, sino que también sirvió como punto de partida para reflexionar sobre el valor de los cuentos como medio de aprendizaje de las y los estudiantes, así como propuesta de formación para los futuros maestros de primaria.

CUENTO. EL RELOJ CIRCUNFERENCIA

Toc... tic... tac... tuc...

Esta es la historia de un reloj muy desentonado, que marcaba los segundos muy agotado, los minutos los marcaba intensamente y las horas... muy lentamente.

Iba muy desenfrenado, no tenía descansos ni pausas, él en verdad estaba cansado. Cada vez que marcaba las 4:40, con mucha certeza, su cara se llenaba de tristeza.

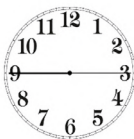


- Todavía queda mucho para que termine el día. ¡Qué dolor de cabeza! - El reloj no lo negaba, era un trabajo que le agotaba.

Toc... tic... tac... tuc...

A él en su tiempo de gloria y esplendor le pusieron un alias con mucho honor. **Al ser curvo, cerrado y con la misma distancia del centro a cualquier lado**, fue llamado “Reloj Circunferencia”, siendo un alias muy apropiado.

Le gustaba exhibir su figura, estaba encantado por su longitud de cintura. Cada 9:15, al reloj le gustaba medirse. Con ayuda de sus manecillas, que hacían de **radio**, formaba **un segmento, que llegaba de lado a lado, pasando por el centro**; sacaba su **diámetro** y al instante, ¡estaba muy contento!



- Admiro mucho mi figura. Es sensacional. A pesar de que **la razón entre mi diámetro y cintura se considere irracional**, pienso que me veo realmente excepcional. Puedo estar relleno, pero ¡no me queda nada mal! - El reloj encantado se daba un cumplido, le hacía sentir orgullo.

Y para acabar, a las 12:15 con sus agujas hacía una última medición, haciendo un **ángulo de noventa grados** formaba su **cuadrante** con gran emoción.



Toc... tic... tac... tuc...

Por muchos años fue de gran utilidad, fue una gran reliquia de una familia de gran humildad. Vio florecer un sinnúmero de generaciones a las que le obsequió su tiempo en todas las ocasiones.

El reloj circunferencia tuvo una vida útil muy larga, próxima a terminar. Ya estaba viejo y un poco oxidado, estaba a punto de dejar de contar.

- Recuerdo la primera vez que en brazos fui cargado y en una pared fui colocado. - El reloj con gran nostalgia recordó su pasado, viendo atrás recordó todo lo que había vivenciado.

La casa en la que habitaba también le cobró factura el tiempo, ya en pedazos estaba cayendo y parecía un amplio desierto, poco a poco se fue desolando y lentamente en escombros se fue haciendo.

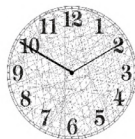
El reloj circunferencia estuvo casi en soledad, solo fue por un pequeño nido de arañas que lo acompañó en toda aquella adversidad.

Poco a poco las arañas tejieron **cuerdas** muy tensadas, algunas pasaban por el centro, llegaban de un punto del marco del reloj a otro, formando **un segmento**.



El reloj con el pasar del tiempo, por más arañas fue llenado de **cuerdas**, quedó irreconocible, ya estaba estropeado y a punto de llegar a su límite, esto era algo irreversible. El reloj circunferencia lo sabía y a él le generó una gran melancolía, esos iban a ser sus últimos momentos y recordar su pasado no le produjo ninguna mejoría.

Pero su sueño se estaba realizando, concluir su jornada de trabajo y jubilarse, al fin ese tiempo estaba llegando. Hizo un último esfuerzo de armonizar para dejar de sonar y a las 10:00 el reloj por última vez marcó el minuto 10... y al fin... pudo descansar de una vez.



Tic... tac... tic... tac...

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Peter Lang.
- García, D., Garrido, R. y Marcos, M. (2020). El uso de los cuentos y la creatividad para la formación del futuro profesorado de infantil en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 23(1), 161-174. <https://revistas.um.es/reifop/article/download/370071/278111>
- Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A. y Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 34(2-3), 167-200. <https://revue-rdm.com/2014/ingenieria-didactica-basada-en-el/>
- Gontijo, C., Tolentino, A., Gianni M y Pinheiro, M. (2020). Criatividade em matemática: conceitos, metodologias e avaliação. *Brasília: Editora da Universidade de Brasília*. <https://livros.unb.br/index.php/portal/catalog/book/36>
- Jiménez, M. y Gordo, A. (2014). El cuento infantil: facilitador de pensamiento desde una experiencia pedagógica. *Praxis y Saber*, 5(10), 151 - 170. Vista de El cuento infantil: facilitador de pensamiento desde una experiencia pedagógica | Praxis & Saber.
- Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de Estudio de Matemática*. <https://www.mep.go.cr/sites/default/files/media/matematica.pdf>
- Rojas, G. y Prieto, M. (2019). El cuento multimodal como estrategia didáctica para el aprendizaje de la lectura. *Educación y ciencia*, (23), 297-312. El cuento multimodal como estrategia didáctica para el aprendizaje de la lectura - Dialnet.



Cuadernos

de Investigación y Formación
en Educación Matemática

Año 2025

Vol. 18

Nº. 2

Presentación	5
--------------------	---

Sección 1. Artículos de investigación

1. Discriminación de género en la docencia de las matemáticas: una revisión sistemática	7-23
<i>Autor: Luis Alejandro Bustos Mancera</i>	
2. Integración de modelación matemática, inteligencia artificial generativa y situaciones de aprendizaje para la enseñanza del cálculo escolar	25-48
<i>Autores: Sebastián Saavedra Messina, Adiel Silva Riveros e Iván Pérez Vera</i>	
3. Procesos matemáticos en prácticas de estudiantes de profesorado en Matemática y Física	49-71
<i>Autores: Pablo Alejandro Wiernes y Ricardo Fabián Espinoza</i>	
4. Narrativas sobre las trayectorias de formación para enseñar matemáticas	73-83
<i>Autores: Yully Stefanny Jiménez Rodríguez y Elizabeth Torres Puentes</i>	
5. Aplicación de las representaciones semióticas en cálculo multivariable mediante la construcción de una montaña rusa física y virtual	85-98
<i>Autor: Juan Carlos Ruiz Castillo</i>	
6. Una descomposición genética preliminar para el concepto de logaritmo como número real	99-121
<i>Autores: Kevin David Gómez Guillén y Fabián Wilfrido Romero Fonseca</i>	
7. The use of adaptive digital technologies in teaching mathematics to students with special educational needs in Spain and Ecuador	123-133
<i>Autora: Celia Gallardo Herrerías</i>	
8. Integración de metodologías activas e inteligencia artificial en la enseñanza del tema de sucesiones y series: una experiencia de clase en un curso semipresencial del Instituto Tecnológico de Costa Rica	135-160
<i>Autores: Reiman Yitsak Acuña Chacón y Marcela Marrero Calvo</i>	
9. Diseño e implementación de una intervención formativa con Edpuzzle para promover el aprendizaje autónomo en un curso universitario de matemática general	161-180
<i>Autoras: Rita Díaz-Flores y Marianella Bolaños-Barquero</i>	

Sección 3. Mi formación en EducMate

1. Experiencia de formación: estrategia didáctica para la enseñanza de la probabilidad frecuencial en un espacio muestral no equiprobable	181-187
<i>Autor: Luis Diego Chavarría Brenes</i>	
2. Experiencia profesional: concurso de cuentos matemáticos	189-192
<i>Autor: Aarón Josué Vargas Carrillo</i>	