

e-ISSN en línea: 2215-5627
Impresa: ISSN 1659-2573



Cuadernos

de Investigación y Formación
en Educación Matemática

Año 2026

Vol. 19

Nº. 2

CIMM

Centro de Investigación en
**Matemática y
Meta-Matemática**


EDITORIAL
UCR

UCR
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA



Contenido del Volumen 19. Número 2. Año 2026

Presentación.....	05
--------------------------	-----------

Sección 1. Artículos de investigación

1. Trayectorias de formación como profesores de matemáticas incluyentes.....	07-26
<i>Autores: Ashley Daniela Granados Cerinza, Wilmar Cortés Araque y Elizabeth Torres Puentes</i>	
2. La mediación del profesor de matemática en la enseñanza de eventos probabilísticos: un análisis del discurso docente desde las acciones mediadoras y los procesos matemáticos movilizados	27-47
<i>Autor: Guillermo Ramírez Montes</i>	
3. Intervención basada en la teoría de registros semióticos para mejorar el rendimiento en números enteros en octavo grado	49-72
<i>Autores: Katya Lisseth López-López, Eduardo Adam Navas-López y Cristina Lissette Sandoval-Zúñiga</i>	
4. El impacto de un curso de precálculo en el aprendizaje de los conocimientos previos requeridos en Cálculo	73-84
<i>Autores: Luis Rojas-Torres, Kevin Gómez Guillén, Karol Jiménez Alfaro y Diana Chacón Camacho</i>	
5. Sistematización de experiencias vividas en el uso de recursos humorísticos, memes y caricaturas en el aula de matemáticas	85-119
<i>Autora: Paola Alejandra Balda Álvarez</i>	
6. La ética comunitaria ante las tensiones emocionales: alegría y frustración al abordar el logaritmo en el aula de matemáticas.....	121-141
<i>Autor: Pedro Elías Chaparro Rueda</i>	
7. La simbolización como núcleo epistemológico en la enseñanza de la lógica matemática: un análisis desde la teoría de la simbolista de educación en matemática pura	143-173
<i>Autor: Juan Carlos Ruiz Castillo</i>	
8. Generalization processes in a learning situation related to the trigonometric Fourier series	175-196
<i>Autores: Fabián W. Romero Fonseca y Rosa María Farfán Márquez</i>	
9. O desenvolvimento do jogo digital Math-Mon para o ensino de educação financeira: potencialidades na Educação Básica	197-211
<i>Autores: José Vitor Novaes Moreira y Raquel Carneiro Dörr</i>	



10. **El lenguaje matemático ante la Inteligencia Artificial Generativa: análisis conceptual de su incidencia en las respuestas de estudiantes, docentes y una tipología de prompts.....** 213-236
Autor: Reiman Yitsak Acuña Chacón
11. **Modelo GeoIA-M para la mediación del razonamiento matemático en cálculo universitario con inteligencia artificial generativa y GeoGebra** 237-263
Autor: Marco Gutiérrez Montenegro



Presentación del Volumen 19. Número 1, Año 2026

Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática tiene como objetivo crear un espacio dedicado a compartir investigaciones y reflexiones que fortalecen la educación matemática en sus múltiples dimensiones. En un contexto educativo en constante transformación, es fundamental promover el intercambio de conocimientos, experiencias y evidencias que favorezcan una enseñanza más pertinente, inclusiva e innovadora.

Los artículos en esta edición reflejan la diversidad de enfoques, metodologías y contextos que caracterizan la investigación en Educación Matemática. Se presentan estudios sobre procesos de enseñanza y aprendizaje hasta propuestas de innovación didáctica y formación docente: la formación de profesores, la sistematización de experiencias con recursos humorísticos, la ética comunitaria, las dimensiones emocionales del aprendizaje, la simbolización como núcleo epistemológico en la enseñanza de la lógica matemática y la generalización de procesos en situaciones de aprendizaje relacionados con las series de Fourier.

Asimismo, tres artículos presentan la importancia del uso de la tecnología digital en las aulas de matemática y el papel de docentes en estos entornos de aprendizaje, permitiendo responder a las demandas de una sociedad caracterizada por la innovación tecnológica, la incertidumbre y la rápida evolución del conocimiento: el papel de los juegos digitales en Educación Básica y de la inteligencia artificial en aulas universitarias. Cada contribución aporta elementos valiosos para enriquecer la reflexión académica.

Expresamos nuestro más sincero agradecimiento a las personas autoras de Brasil, Colombia, Costa Rica, El Salvador, Guatemala y México por confiar sus investigaciones a nuestra revista, así como a las personas revisoras, cuyo trabajo riguroso garantiza la calidad científica de cada publicación.

Esperamos que este número motive nuevas interrogantes, inspire futuras investigaciones y favorezca el intercambio de ideas entre docentes de matemática, investigadores y estudiantes comprometidos con el desarrollo de la Educación Matemática. Con este propósito, la revista reafirma su compromiso con la excelencia académica, el acceso abierto al conocimiento, que caracteriza a la Universidad de Costa Rica, y la construcción de una comunidad científica colaborativa.

Dr. William Poveda
Director de la Revista





TRAYECTORIAS DE FORMACIÓN COMO PROFESORES DE MATEMÁTICAS INCLUYENTES

TRAINING PATHWAYS FOR INCLUSIVE MATHEMATICS TEACHERS

Ashley Daniela Granados Cerinza¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0008-2314-8880>

Wilmar Cortés Araque²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0008-3814-2561>

Elizabeth Torres Puentes³

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-3642-0571>

RESUMEN

El artículo muestra los resultados de una investigación en el marco de una Maestría en Docencia de las Matemáticas (MDM) en la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) dentro una propuesta formativa orientada a la refiguración de la identidad del profesor de matemáticas. Desde la línea de Formación de profesores de Matemáticas, el programa asume dicha identidad como una construcción articulada entre las dimensiones del ser, el saber y el hacer, en relación con los ámbitos del sí mismo, el otro, la comunidad escolar y el campo académico. El objetivo fue describir la trayectoria de formación de dos profesores de matemáticas, que se refiguran como profesores incluyentes, a partir de su experiencia de formación continua en la MDM, en tanto examinan e interpretan su experiencia vivida, reconstruyendo su identidad profesional. Metodológicamente, se ubica en la investigación narrativa, del tipo narrativas docentes y se trabajó desde la sistematización de experiencias. Se construyeron y analizaron relatos autobiográficos elaborados por los dos participantes, tejidos con los datos recabados en diarios

¹Gimnasio Moderno Bilingüe San Francisco, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: granadoscerinzad@gmail.com

²Gimnasio Militar FAC “TC. Luis F. Pinto”, Melgar, Tolima. Correo electrónico: wilmar372@gmail.com

³Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá, Colombia. Correo electrónico: etorresp@pedagogica.edu.co



de campo, material multimedia, tareas y producciones de los seminarios. Entre los hallazgos desde el análisis narrativo, se evidenció que la trayectoria del Profesor de Matemáticas Incluyente (PMI) no sigue un curso lineal, sino que se configura como un proceso de transformación continua, representado metafóricamente en cuatro estadios: huevo, oruga, pupa y mariposa. Estos momentos dan cuenta de un tránsito que inicia en intuiciones éticas tempranas, atraviesa experiencias de exclusión y se consolida en la construcción de su identidad docente que reconoce y asume la diferencia, el cuidado y la comunidad, así como interpretar que la enseñanza de las matemáticas es una herramienta para comprender y transformar la realidad.

Palabras clave: Trayectorias de formación, Inclusión, refiguración, Sistematización de experiencias, Identidad del profesor de matemáticas.

ABSTRACT

This article presents the results of research conducted within the framework of a Master's Program in Mathematics Education (MDM) at the National Pedagogical University (UPN), as part of a training program aimed at reshaping the identity of mathematics teachers. From the perspective of Mathematics Teacher Training, the program views this identity as a construction articulated through the dimensions of being, knowing, and doing, in relation to the spheres of self, others, the school community, and the academic field. The objective was to describe the training trajectory of two mathematics teachers who, through their ongoing professional development in the MDM, redefined themselves as inclusive educators. This process involved examining and interpreting their lived experience, thus reconstructing their professional identity. Methodologically, the research is situated within narrative research, specifically teacher narratives, and employed the systematization of experiences. Autobiographical narratives written by the two participants were constructed and analyzed, woven together with data collected from field notes, multimedia materials, assignments, and seminar productions. Among the findings from the narrative analysis, it was evident that the trajectory of the Inclusive Mathematics Teacher (IMT) does not follow a linear path, but rather is configured as a process of continuous transformation, metaphorically represented in four stages: egg, caterpillar, pupa, and butterfly. These stages reflect a journey that begins with early ethical intuitions, passes through experiences of exclusion, and is consolidated in the construction of their teaching identity, which recognizes and embraces difference, care, and community, as well as interpreting mathematics teaching as a tool for understanding and transforming reality.

Keywords: Teacher education trajectory, Inclusion, Refiguration, Systematization of experiences, Identity of the mathematics teacher.

1. INTRODUCCIÓN

La investigación que dio luz a este artículo se tituló *De profesores de matemáticas a profesores de matemáticas incluyentes: refiguración del ser*. Para efectos de esta divulgación, se exponen los resultados correspondientes con el objetivo “describir las trayectorias de formación de dos profesores de matemáticas que se refiguran como profesores incluyentes, a partir de la sistematización de su experiencia formativa en la MDM” (Granados y Cortes, 2026, p.15).

Para los autores de este artículo, la sistematización de experiencias se configura como un ejercicio reflexivo orientado a comprender el *Ser* del profesor de matemáticas (Guacaneme y Salazar, 2024). Dicho ejercicio no se limita a una recuperación del pasado, implica interpretarlo desde el presente y proyectarlo hacia el futuro,

posibilitando una relectura de la acción, en este caso, de la trayectoria formativa que otorga nuevos sentidos a los acontecimientos que han marcado tal recorrido. En este horizonte, se coincide con Jara (2018), quien sostiene que la sistematización de experiencias permite “apropiarnos críticamente de su sentido” (p. 65), en la medida en que este no está previamente dado ni surge de forma espontánea, sino que el sentido se construye de manera personal y colectiva mediante una interpretación rigurosa, consciente e intencionada de la experiencia. En consonancia con Ricoeur (1987), esta construcción se inscribe en un movimiento hermenéutico en el que la narración permite configurar los acontecimientos vividos en una trama dotada de sentido. A su vez, la interpretación de dicha trama posibilita la refiguración —correspondiente al momento de la mimesis III—, entendida como la producción de nuevas comprensiones de sí mismo y la proyección de otros modos de ser como Profesor de Matemáticas Incluyente (PMI).

A partir de su participación en la MDM de la UPN, los autores de este artículo han transitado por un proceso formativo cuyo propósito trasciende la adquisición de herramientas teóricas o didácticas. Se trata, más bien, de un proceso que interpela convicciones, emociones, prácticas y posicionamientos éticos. La MDM ha operado como un escenario de tránsito, de quiebre y, a la vez, de reconstrucción, en el cual se ha puesto en juego la identidad profesional docente y el compromiso con una Educación Matemática de carácter incluyente.

Para los autores de este artículo, la educación matemática incluyente se comprende como una perspectiva que reconoce la diversidad como una condición constitutiva del aula. Desde esta perspectiva se cuestiona las prácticas que reducen la enseñanza a la transmisión homogénea de un mismo conocimiento, mediante los mismos procedimientos y en los mismos tiempos para todos los estudiantes. Esta comprensión implica superar las dicotomías entre saber y no saber matemáticas, o entre inclusión y exclusión, para avanzar hacia una educación matemática en contextos de diversidad, capaz de reconocer las singularidades de los sujetos y de construir caminos diferenciados que favorezcan su participación genuina (Torres, 2025).

Así, siguiendo a Larrosa (2009), se asume la experiencia como aquello que acontece al sujeto, lo afecta y lo transforma, por ello acota que experiencia es *eso que me pasa*. La experiencia se constituye como un espacio en el que se entrelazan diversos principios —entre estos, la exterioridad, la alteridad, la alienación, la reflexividad, la subjetividad, la transformación, el pasaje y la pasión— y en el que el sujeto —en este caso el profesor— vive los acontecimientos a la par que se deja afectar por tales principios. Precisamente es en ese dejarse afectar donde reside el sentido formativo de la experiencia, ya que lo vivido cobra relevancia cuando genera preguntas, confronta, moviliza y sitúa al sujeto frente al otro y frente a sí mismo.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

La sistematización que da origen a este artículo se organizó en torno a tres ejes de análisis: la inclusión en el aula de matemáticas; la identidad del profesor de matemáticas, con especial énfasis en la dimensión del *Ser*; y las trayectorias de

formación. Estos tres ejes convergen en un núcleo común, la experiencia como fundamento de la formación. Para precisar el sentido teórico desde el cual se comprende dicha experiencia, se retoman los aportes de Larrosa (2009), Jara (2018) y Cacho (2004).

Desde la mirada de Larrosa (2009), la experiencia no se concibe como una acumulación de acontecimientos, sino como aquello que irrumpe en la vida del sujeto: “eso que me pasa”, aquello que, al acontecer, deja huella y modifica la manera de ser, sentir y comprender el mundo. Para desarrollar esta idea, el autor identifica el *qué* de la experiencia a partir de varios principios como lo son la exterioridad, entendida como aquello que sucede fuera del sujeto y más allá de su control inmediato; la alteridad, que remite al reconocimiento del otro como diferente y, por lo tanto, merecedor de respeto en esa diferencia; y la alienación, que alude a la sensación de distancia o separación frente a lo que acontece, generando una ruptura entre el sujeto y la experiencia vivida.

De igual manera, Larrosa (2009) plantea que el *quién* de la experiencia, es aquello que se ve afectado por lo que sucede, se sostiene en principios tres principios: i) reflexividad, que da cuenta y razón del movimiento que experimenta el sujeto al salir de sí mismo para encontrarse con lo que ocurre y regresar transformado; ii) subjetividad, que sitúa la experiencia en el sujeto mismo, quien debe disponerse a ser afectado, mostrando apertura, sensibilidad y vulnerabilidad; iii) transformación, que señala que quien atraviesa una experiencia no permanece intacto, pues lo vivido deja huella que moldea su manera de ser.

Finalmente, el *pasar* de la experiencia se comprende a través de dos principios adicionales. El pasaje remite a la experiencia como tránsito hacia un territorio desconocido, incierto y potencialmente riesgoso. La pasión, por su parte, se refiere a la intensidad de lo vivido, a aquello que se padece y deja marcas profundas en el sujeto. Así, vivir una experiencia —o permitir que esta atravesase al sujeto— implica una disposición a la apertura y a la vulnerabilidad, dado que quien la vive se ve modificado y no retorna siendo el mismo. De este modo, la experiencia acontece a la par que forma al sujeto.

De acuerdo con lo anterior, la subjetividad del profesor de matemáticas puede comprenderse como una construcción situada que emerge de la interacción entre la trayectoria personal, los procesos formativos y las prácticas pedagógicas que el docente desarrolla en contextos específicos. Desde esta perspectiva, Torres y Salazar (2024) plantean que el ser profesor de matemáticas no se reduce a la apropiación de contenidos disciplinares ni al dominio de estrategias didácticas, sino que implica un proceso de constitución del sujeto en el que intervienen experiencias biográficas, emociones, creencias y posicionamientos éticos frente a la enseñanza. En este sentido, la subjetividad docente se configura a partir de las maneras en que el profesor interpreta su historia, se relaciona con los estudiantes y otorga sentido a su práctica pedagógica.

En correspondencia con esta perspectiva, Jara (2018) sostiene que las experiencias no pueden ser entendidas como eventos disyuntos ni como narraciones lineales. Cada experiencia se configura como un proceso histórico y social complejo, en el que confluyen dimensiones individuales y colectivas, así como elementos objetivos y subjetivos. Para este autor, sistematizar una experiencia supone adentrarse

en esa complejidad, implica reconstruirla, interrogarla, interpretarla y resignificarla, más que para explicarla, para extraer aprendizajes, proyectar y compartir con *otros* esos nuevos sentidos. Así, la experiencia es a la vez objeto de reflexión y fuente de producción de conocimiento.

Por su parte, Cacho (2004) aporta una comprensión de la experiencia desde la noción de trayectoria formativa, entendida como una construcción atravesada por los contextos históricos y las condiciones biográficas y educativas particulares de cada sujeto. La trayectoria se concibe como un proceso dinámico en el que confluyen tres dimensiones temporales: i) la dimensión biográfica, que refiere a la historia personal, incluyendo vivencias, afectos y experiencias que inciden en el desarrollo del sujeto; ii) la dimensión educativa, que abarca los procesos formativos a lo largo del tiempo como la escolarización, la formación inicial y los aprendizajes derivados de la práctica profesional; iii) la dimensión histórico-cultural, que alude al contexto social, político, económico e institucional que condiciona y moldea la trayectoria, ofreciendo oportunidades o imponiendo restricciones.

Estas dimensiones se articulan entre sí y configuran el marco desde el cual se construye la identidad del profesor. Las trayectorias permiten comprender cómo se entrelazan las condiciones materiales, los vínculos afectivos, los saberes pedagógicos, los retos institucionales y las decisiones éticas que constituyen al sujeto en su condición de profesor. En el caso del profesorado, tal identidad no surge de forma inmediata ni se adquiere de una vez y para siempre, sino que se construye progresivamente en la relación entre experiencias vividas, decisiones éticas, aprendizajes pedagógicos y contextos de actuación. Así, Cacho (2004) señala que,

la identidad se configura de manera permanente; no constituye un núcleo esencial preexistente ni algo que se adquiere en un momento puntual, sino que se negocia a lo largo de la vida. A través de una sucesión de formas de participación, las identidades se van trazando como trayectorias (p. 80).

En este sentido, Cacho (2004) señala que el estudio de la trayectoria permite comprender la manera en que un profesional ha ido construyendo sus modos de pensar, enseñar y actuar, es decir, su identidad en el ámbito laboral, evidenciando así la estrecha relación entre identidad y trayectoria formativa. Como lo expresa el autor:

La identidad se configura de manera permanente; no constituye un núcleo esencial preexistente ni algo que se adquiere en un momento puntual, sino que se negocia a lo largo de la vida. A través de una sucesión de formas de participación, las identidades se van trazando como trayectorias (p. 80).

A la luz de los planteamientos de Larrosa (2009), Jara (2018) y Cacho (2004), la experiencia se reconoce, entonces, como una realidad compleja, viva y múltiple, que no se limita al hacer, al saber o al ser de manera fragmentada, sino que involucra la constitución integral del sujeto en su relación con el mundo. En este marco, la experiencia que se busca sistematizar corresponde al proceso de formación vivido como maestrantes en la MDM de la UPN durante los años 2024 y 2025. Este recorrido que se ha configurado como un trayecto de transformación en el que se entrecruzan vivencias personales, tensiones profesionales y aprendizajes situados, los cuales han incidido en la manera de comprenderse como Profesores de Matemáticas Incluyentes.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

Para dar cuenta del proceso de refiguración como PMI la investigación que da luz a este artículo, se desarrolló desde la propuesta de sistematización de experiencias de Jara (2018), en articulación con la perspectiva hermenéutica de Ricoeur (1987). En este marco, se elaboraron relatos autobiográficos orientados a reconstruir episodios significativos de la experiencia de formación y a reconocer las trayectorias que se configuran al articular narrativamente dichos acontecimientos. La sistematización implicó una interpretación crítica de los relatos para comprender los sentidos adquiridos en la configuración y refiguración de la identidad como PMI. Los relatos autobiográficos se conciben como dispositivos epistemológicos que posibilitan la generación de conocimiento a partir del quehacer del profesor y en reflexión sobre este. De acuerdo con Lejeune (1994), el relato autobiográfico es un “relato retrospectivo en prosa que una persona real hace de su propia existencia, poniendo énfasis en su vida individual, en particular en la historia de su personalidad” (p. 14). Desde la perspectiva hermenéutica de Ricoeur (1987), la acción humana puede ser interpretada como un texto: los acontecimientos de la vida no se presentan como una secuencia transparente o plenamente ordenada, sino que adquieren inteligibilidad cuando son articulados en una trama narrativa.

La construcción de los relatos se comprende a partir de los tres momentos de la mimesis propuestos por Ricoeur (1987). La prefiguración —mimesis I— remite al mundo de la acción previamente vivido: sus circunstancias, temporalidades, vínculos, tensiones y marcos de sentido. La configuración —mimesis II— corresponde a la composición de la trama, mediante la cual acontecimientos inicialmente dispersos se seleccionan, relacionan y organizan en un relato dotado de sentido. Esta configuración no surge desde cero, sino que se construye en una tensión entre sedimentación e innovación: retoma formas narrativas, interpretaciones y significados previamente disponibles, pero también establece relaciones nuevas entre los acontecimientos y produce otras formas de comprender la trayectoria vivida y la identidad profesional que se ha configurado en ella. Finalmente, la refiguración —mimesis III— ocurre cuando la interpretación del relato transforma la comprensión que el sujeto tiene de sí mismo y abre posibilidades para proyectar nuevas maneras de ser y actuar como profesor.

En la sistematización que se expone en este artículo, los relatos autobiográficos se elaboraron con la información proveniente de otros insumos como los diarios de campo, recursos multimedia, producciones escritas y actividades desarrolladas en los seminarios de formación en la MDM, los cuales permitieron recuperar acontecimientos significativos, articularlos narrativamente e interpretar las transformaciones que han incidido en la refiguración de la identidad como PMI.

Con el fin de reconocer y localizar los fragmentos más relevantes dentro de los relatos autobiográficos, se diseñó un sistema de codificación que permitió su identificación precisa en el texto completo. Por ejemplo, en el código [W, A, 38], la primera letra señala el autor del relato, la segunda letra permite ubicar la temporalidad de la experiencia, *A* determina la temporalidad antes de la experiencia, *Du* se usa para referirse al momento durante la experiencia y *De* para el periodo posterior a esta. Finalmente, el número indica el párrafo específico. Asimismo, en los relatos se optó

por el uso de pseudónimos al mencionar a profesores y compañeros —*i. e.* profesor E, profesora C o profesora O— con el propósito de proteger su identidad y asegurar la confidencialidad de la información, en concordancia con los principios éticos que rigen la investigación en el campo educativo.

Los procedimientos metodológicos que orientaron esta sistematización se apoyaron en la propuesta de Jara (2018), quien la define como:

aquella interpretación crítica de una o varias experiencias que, a partir de su ordenamiento y reconstrucción, descubre o explicita la lógica y el sentido del proceso vivido en ellas: los diversos factores que intervinieron, cómo se relacionaron entre sí y por qué lo hicieron de ese modo” (p. 61).

Desde esta perspectiva, la sistematización produce conocimientos y aprendizajes en tanto permite apropiarse críticamente de las experiencias vividas, comprenderlas teóricamente y orientarlas hacia el futuro con una perspectiva transformadora.

Jara (2018) propone organizar la sistematización a partir de cinco tiempos:

- i) El punto de partida es entendido como el reconocimiento de la experiencia que se desea comprender y del lugar desde el cual el sujeto la interroga. Este momento inicial implica identificar las motivaciones, las preguntas orientadoras y el contexto en el que se desarrolló la práctica objeto de reflexión.
- ii) Formular un plan de sistematización donde se delimitan los propósitos, los ejes de análisis y las estrategias metodológicas del proceso. En este plan se definen los aspectos de la experiencia que serán analizados, las fuentes que permitirán reconstruir el proceso y los criterios que orientarán su interpretación.
- iii) La recuperación del proceso vivido corresponde al momento en que la experiencia se reconstruye a partir de los acontecimientos, decisiones y relaciones que la configuraron. Este proceso implica identificar acciones, actores y momentos significativos, así como las condiciones que influyeron en su desarrollo.
- iv) Las reflexiones de fondo constituyen el momento analítico en el que se interpretan críticamente los elementos surgidos durante la reconstrucción de la experiencia. Este ejercicio permite comprender los sentidos, relaciones y lógicas que explican lo ocurrido, generando conocimiento a partir de la práctica.
- v) Finalmente, los puntos de llegada sintetizan los aprendizajes obtenidos y las implicaciones que estos tienen para el campo educativo. Más que un cierre definitivo, representan una apertura hacia nuevas preguntas y posibilidades de transformación de la práctica, consolidando la sistematización como una forma de producir saber pedagógico desde la experiencia.

4. RESULTADOS: CONFIGURACIONES NARRATIVAS DE LA TRAYECTORIA FORMATIVA

Las tres dimensiones temporales¹ propuestas por Cacho (2004) conversan con la metáfora del ciclo vital de la mariposa —huevo, oruga, pupa y mariposa— como columna vertebral interpretativa de nuestro proceso de refiguración como PMI. La metáfora permite representar las distintas fases en que la identidad se gesta, se tensiona, se resquebraja y se resignifica. Cada estadio condensó una característica central de la trayectoria formativa, a partir de la cual fue posible reconocer el paso desde experiencias tempranas de exclusión hacia una identidad profesional incluyente.

Así, cada estadio no constituye una etapa cronológica rígida, sucesiva o acabada. Tampoco representa una progresión lineal que conduzca a una identidad del profesor definitiva. En correspondencia con Jara (2018), la experiencia se comprende como un proceso histórico y social complejo, atravesado por relaciones, tensiones y sentidos que se reconstruyen continuamente. Por ello, los estadios pueden coexistir, superponerse y reaparecer cuando los acontecimientos vividos son reinterpretados desde el presente. En este sentido, la identidad del PMI se propone como un proceso metamórfico abierto en donde cada estadio es un pliegue de una narración que se escribe y reescribe en diálogo con los *otros*, con los saberes y con las condiciones sociales. La metáfora de la mariposa no pretende idealizar la trayectoria, pretende subrayar que la transformación es una condición ontológica del sujeto docente, especialmente de aquel que ha hecho de la inclusión una promesa ética y profesional.

4.1. Profesor Huevo. Un origen silente

El Profesor Huevo simboliza el comienzo silencioso del proceso formativo, un momento en el que la identidad docente aún no se reconoce plenamente, pero en el que empiezan a surgir las primeras intuiciones de carácter ético. Estas emergen en medio de condiciones marcadas por ciertas carencias, relaciones afectivas frágiles y la presencia de vínculos familiares que, a pesar de todo, funcionan como espacios de cuidado y protección para el sujeto en formación.

Tal como ocurre con el huevo en el ciclo de vida de la mariposa, este período no resulta visible a simple vista, pero es decisivo porque allí se acumulan las marcas, experiencias y gestos que más adelante influirán en la transformación del sujeto. En esta etapa inicial, el futuro profesor aún no tiene conciencia de su vocación, pero

¹ Cacho (2004) comprende las trayectorias como secuencias de experiencias formativas o laborales que no siguen un curso fijo ni un destino previamente trazado, sino que constituyen un movimiento continuo con coherencia temporal, en el que se conectan pasado, presente y futuro. Estas trayectorias se estructuran en tres dimensiones temporales: el tiempo biográfico, que organiza los acontecimientos de acuerdo con los ciclos de vida y las experiencias personales del sujeto; el tiempo educativo, que atiende a los ciclos, dinámicas y experiencias vinculadas con la escolarización, la formación inicial y la formación continua; y el tiempo histórico, que sitúa la trayectoria en relación con las oportunidades, limitaciones y condiciones derivadas del contexto social, institucional y de las políticas laborales y educativas. Aunque Cacho no presenta estas dimensiones como una derivación directa de la hermenéutica de Ricoeur, ambas perspectivas pueden ponerse en diálogo de manera complementaria, siendo que la primera aporta categorías para reconstruir las trayectorias formativas del profesorado, mientras que la segunda permite comprender cómo los acontecimientos vividos adquieren sentido al ser configurados e interpretados narrativamente.

comienza a experimentar las huellas de la desigualdad, el señalamiento y la exclusión en contextos donde las condiciones materiales y simbólicas limitan las posibilidades de pertenencia. No obstante, incluso en medio de estas dificultades, surgen lazos familiares y comunitarios que funcionan como espacios de cuidado y sostén, tal como se observa en el relato:

Sin un detallado instructivo ni previo aviso, mis padres asumieron el reto de edificar una vida juntos... intentando en cada paso resolver el complejo desafío de criar, amar y enseñar a una pequeña vida que comenzaba su propio viaje [D, A, 7].

Este fragmento evidencia uno de los primeros pliegues del tiempo biográfico: *la familia como red de apoyo y como escenario de aprendizajes vitales*. Aunque sin certezas ni modelos claros, los padres del futuro PMI intentan construir un mundo posible desde el afecto y la precariedad, mostrando que el cuidado no depende de la abundancia, sino de la decisión de acompañar al otro. En este sentido, como plantea Le Vine (citado en Manjarrés et al., 2015), el cuidado implica “(...) la creación de unas condiciones de vida que permitan a los más pequeños sobrevivir hasta que sean independientes” (p. 45). De este modo, la familia se configura como el primer territorio donde el sujeto aprende a resistir y a reconocer el valor del cuidado cotidiano.

Sin embargo, estas redes de cuidado también están atravesadas por tensiones y contradicciones. Las familias de donde emergen muchos futuros profesores no constituyen espacios completamente armónicos, sino escenarios donde conviven el amor y la escasez, la ternura y la ausencia. El relato lo muestra con claridad cuando señala:

Día a día, se embarcaron en la tarea de enfrentar una realidad desconocida... pero siempre firmes en la decisión de construir una familia lejos de los horrores que de jóvenes vivieron [D, A, 8].

Las huellas de la escasez y las ausencias también aparecen en relatos que muestran cómo el amor puede expresarse a través del sacrificio silencioso. Así se evidencia en el fragmento:

La escasez, ausencias y pequeños actos de lucha y dignidad tejieron mi infancia. La lucha por un plato de comida era diaria, y la madre fingía no tener hambre [W, A, 20].

Aquí el cuidado se manifiesta como un acto silencioso en el que la madre renuncia a sí misma para sostener a los otros, revelando la ambivalencia de un espacio familiar donde conviven protección y precariedad. A estas experiencias se suma la *vivencia de la ausencia*, particularmente la pérdida de figuras significativas que marcan profundamente la construcción de la identidad. Como puede advertirse en el siguiente fragmento

La ausencia de mi padre, muerto cuando yo era muy niño, fue una constante. Su partida no solo significó la pérdida de un ser querido, sino significó la irrupción de la muerte como pregunta sin respuesta [W, A, 25].

Desde la perspectiva de Cacho (2004), las trayectorias formativas no se configuran únicamente a partir de los conocimientos adquiridos, sino también desde las

ausencias que los sujetos cargan y que influyen en su manera de habitar el mundo. En medio de estas experiencias de diferencia y exclusión comienza a gestarse una sensibilidad particular hacia quienes también *habitan los márgenes*. El relato lo ilustra cuando señala:

Gracias al entorno en donde crecí... aprendí a querer a esos pequeños peludos... Mis padres me enseñaron que estas criaturas también podrían tener sed o hambre [D, A, 19].

De este modo, el contacto con aquello que suele ser rechazado por otros se convierte en una primera pedagogía de la compasión. Con el paso del tiempo, estas experiencias se traducen en gestos concretos que anuncian una vocación incipiente, como se evidencia cuando el relato menciona:

Acoger a Tamara, víctima de matoneo, siendo el único en asistir a sus quince años... y la promesa de que ‘ningún estudiante sería tratado como yo lo fui [W, A, 61].

Así, en este primer estadio del *Profesor Huevo*, la vocación docente aún no se nombra, pero ya se insinúa como una ética del cuidado que más adelante encontrará en la enseñanza una forma digna de habitar el mundo.

4.2. El Profesor Oruga: Un caminar distinto

La oruga simboliza el inicio del movimiento y de la búsqueda. Representa el momento de exploración en el que el sujeto comienza a reconocerse como profesor y empieza a observar el mundo con una mirada crítica, marcada por la experiencia de la alteridad, el dolor y el descubrimiento de las matemáticas como un lenguaje simbólico que permite comprender la realidad. En la trayectoria del futuro PMI, este momento puede entenderse como el tránsito entre una sensibilidad inicial hacia el cuidado — heredada de experiencias previas— y la aparición progresiva de una conciencia profesional. Durante esta etapa comienza a reconocerse como alguien que enseña, reorganiza su biografía desde una perspectiva educativa y se pregunta por su lugar dentro del aula, al tiempo que desarrolla una mirada crítica frente a los discursos históricos que han configurado la escuela y las formas de enseñar.

A diferencia del estadio anterior, donde la sensibilidad hacia el otro surgía principalmente como respuesta ética al dolor propio o al sufrimiento observado, el *Profesor Oruga* inicia ahora un proceso reflexivo más sistemático sobre su papel en la educación. Comprende que ser profesor de matemáticas no se limita a transmitir contenidos disciplinares, sino que implica asumir una postura frente al otro y frente a quienes han sido catalogados como diferentes o anormales. En esta toma de conciencia aparece una dimensión política e histórica del oficio docente, pues, como señala Orjuela (2022), la escuela colombiana ha operado históricamente como un “(...) mecanismo que funciona a partir del disciplinamiento, la docilidad, la observación, la regularización, la distribución y la inclusión de individualidades diferenciables” (p. 38).

En este contexto, el futuro PMI comienza a mirar de otra manera las diferencias entre los estudiantes. Aquello que durante mucho tiempo se entendió como obstáculo empieza a aparecer como una posibilidad pedagógica. Esta toma de conciencia se

manifiesta en experiencias cotidianas que marcan su percepción del mundo universitario y de la diversidad que lo habita:

Uno de los momentos que más marcó mi comprensión sobre la diversidad ocurrió de manera cotidiana: un estudiante de biología, con dificultades motrices, subía con esfuerzo inusitado las interminables escaleras de la universidad... cada peldaño era una barrera, cada peldaño una prueba que el entorno le imponía sin piedad [W, Du, 70].

Del mismo modo, reconoce que,

El ingreso a la Universidad Distrital me ofreció otra mirada del mundo. Allí encontré la diversidad, la pluralidad de voces, creencias, cuerpos y saberes [W, Du, 104].

En estos relatos la diferencia deja de ser una idea abstracta para convertirse en una experiencia encarnada en la observación del otro. La imagen del estudiante que lucha con cada escalón revela cómo los espacios educativos pueden reproducir desigualdades estructurales, donde incluso la arquitectura institucional se convierte en metáfora de exclusión. A partir de esta observación, el futuro profesor advierte que muchas de las barreras que enfrentan los estudiantes no provienen de fallas individuales, sino de estructuras institucionales que organizan la vida escolar.

Esta comprensión se articula con la reflexión de Orjuela (2022), quien afirma que,

sus prácticas están situadas en dos momentos concretos y con maneras de acción particulares: uno por medio de actuaciones disciplinarias, de examen, de la clasificación, la separación y la normalización ejercidas sobre los cuerpos de los individuos y el otro a través del control y regulación de la población, la especie y sus grupos (p. 39).

De este modo, el futuro PMI comienza a reconocer que los dispositivos escolares —evaluaciones, currículos, espacios físicos o discursos pedagógicos— no son neutros, sino que participan en la producción de jerarquías y exclusiones que moldean las identidades dentro de la escuela. También cambia la forma en que observa la realidad, pues la mirada del *Profesor Oruga* se vuelve más atenta y reflexiva, y lo cotidiano empieza a convertirse en materia de interpretación pedagógica. Esta transformación aparece en experiencias aparentemente simples, como cuando relata:

Recuerdo la sesión del 24 de agosto del seminario Intersubjetividad en el Aula de Matemáticas, cuando visitamos el Jardín Botánico... participé activamente más que por interés en la cocina por el propósito de alimentar a mis compañeros y a los demás asistentes [D, Du, 151].

En estos gestos emerge una sensibilidad intersubjetiva que reconoce que el conocimiento también se construye en los vínculos y en las relaciones cotidianas. Esta comprensión se conecta con la idea de que el sentido pedagógico surge en la interacción con los demás. Como plantea Mèlich (1997), “en la vida cotidiana el sentido surge en la interacción con los demás” (p. 86) y “el mero hecho de hablar, de dialogar, implica una voluntad de consenso, un deseo de entendimiento entre los participantes” (p. 91).

En este proceso, el futuro PMI también reconoce que su identidad profesional se construye en relación con sus estudiantes, tal como expresa en el relato:

Esto lo recordé... cuando nos cuestionamos si nuestra subjetividad estaba determinada por la subjetividad de nuestros estudiantes... con Nicolás, con su familia, fui un buen profesor de matemáticas [W, Du, 78].

A partir de estas experiencias, la matemática deja de percibirse como un conjunto neutral de algoritmos y comienza a revelarse como una herramienta para comprender el mundo y pensar la inclusión. En esta transformación se manifiesta la tensión entre mismidad (idem) e ipseidad (ipse) descrita por Ricoeur (citado en Van Manen, 2016), el futuro PMI mantiene la constancia de su oficio —seguir siendo profesor de matemáticas—, pero cambia profundamente la forma en que entiende su tarea.

Así, la elección de las matemáticas se consolida como el lugar desde el cual contribuir al cuidado del otro, pues enseñar deja de ser una tarea técnica para convertirse en una práctica ética y política que, como sugieren Skovsmose y Valero (2012), permite comprender las estructuras sociales y abrir posibilidades para transformarlas.

4.3. El Profesor Pupa: recogerse para transformarse

Esta etapa alude a un momento de recogimiento y transformación interior, donde se produce un proceso de introspección en el que el acompañamiento de la comunidad de pares brinda un espacio de contención, permitiendo al futuro PMI reconocer que su diferencia no constituye una limitación, sino una manera válida y propia de habitar la profesión docente. En este proceso, la MDM se convierte en un capullo simbólico, un espacio donde la acción exterior se transforma en reflexión y donde la experiencia se vuelve comprensión. No hay prisa en este momento, pero sí intensidad; no hay estridencia, pero sí una vida interior que se reorganiza mientras el futuro PMI empieza a reconocerse como parte de una comunidad que también se busca y se narra para transformarse.

Este capullo formativo no está tejido de aislamiento, sino de voces compartidas. En la MDM, el futuro PMI descubre que la formación no es únicamente un proceso individual, sino una trama colectiva donde las historias personales se entrelazan. Aquello que antes se vivía como una búsqueda solitaria —la pregunta por el sentido de enseñar o por su lugar como profesor— comienza a construirse junto con otros que también cargan memorias, dudas y expectativas. En este encuentro emerge el primer pliegue: el reconocimiento de una comunidad que se sostiene en el afecto y en la palabra compartida. Tal experiencia aparece reflejada en el relato:

Esta tarea la ejecuté con simpleza, recaudando las memorias en un documento que leí en el seminario sin pensar mucho en ello, empero, tuve la oportunidad de escuchar las narraciones de mis compañeros de la MDM, las memorias de sus allegados sobre un pasado que era relatado con cariño, con risas o con más sentimientos de los que quizá pensábamos en primer lugar [D, Du, 2].

En este intercambio, el futuro PMI comprende que aprender de la experiencia vivida también significa escuchar al otro y permitir que su palabra reconfigure la lectura del propio pasado. Esta experiencia puede comprenderse a la luz de la reflexión de

González (2001), quien sostiene que el otro no es simplemente una presencia externa, sino una ausencia que permanece presente y que contribuye a constituirnos. Desde esta perspectiva, el yo no se forma en soledad, sino en relación con la alteridad. Escuchar las memorias de los compañeros se convierte entonces en un acto de reconocimiento mutuo, donde cada historia amplía el horizonte de comprensión de los demás.

Al mismo tiempo, esta experiencia se distancia de la lógica histórica de homogeneización que, según González (2001), ha caracterizado a la cultura occidental, construida “(...) tras innumerables guerras, colonizaciones, expropiaciones, explotaciones, deportaciones, etcétera., de todo aquello –y de todos aquellos– que no comulgan con nuestra moderna conciencia de Progreso y Desarrollo” (p. 129). Frente a esta tendencia excluyente, el espacio formativo comienza a vivirse como un lugar donde las diferencias no se corrigen, sino que se sostienen.

En este contexto emerge también una *pedagogía del cuidado* entre pares. El futuro PMI experimenta que la formación implica acompañarse mutuamente, sostener la palabra del otro y dejarse afectar por ella. Este clima comunitario se hace visible en el relato:

Pero allí, entre las paredes del B316, nació un grupito de personas [se refiere a los compañeros del MDM], que se cuidaban entre sí [D, Du, 165].

En este gesto sencillo aparece una comprensión profunda de la educación: antes de enseñar, es necesario aprender a habitar la comunidad. El aprendizaje florece en la reciprocidad y en la confianza compartida. Así, la *pupa* —aparentemente inmóvil— late con la fuerza de lo colectivo: los vínculos entre compañeros se convierten en alimento formativo, los afectos en conocimiento y el silencio compartido en una forma de respiración común.

En medio de este proceso de recogimiento surge un segundo pliegue: el reconocimiento de la propia singularidad dentro del colectivo. El futuro PMI empieza a comprender que formar parte de una comunidad no significa diluirse en ella, sino encontrar su propia voz. Esta conciencia aparece en experiencias aparentemente pequeñas que revelan un modo distinto de estar en el aula:

Esta convicción [se refiere a aceptar su diferencia] se reflejó en la clase del 30 de noviembre del seminario Discurso y Corporeidad, cuando nos entregaron distintos tipos de hojas y herramientas de broquelado para reconstruir una representación del aula en la que solíamos enseñar. Allí, casi sin darme cuenta, monopolicé uno de los rodillos y me puse a jugar con este durante un buen rato en lugar de concentrarme en la tarea [D, Du, 171].

En este gesto aparentemente trivial se revela una disposición a explorar otras formas de actuar y de habitar el espacio pedagógico. La diferencia deja de ser una desviación que debe corregirse y empieza a reconocerse como fuente de identidad pedagógica. Esta lectura dialoga con la reflexión de González (2001), quien advierte que la cultura occidental ha tendido a sostenerse en la “(...) permanente exterminación de cualquier atisbo de singularidad, de cualquier señal que pudiese quebrar o romper la homologación labrada y esculpida por nuestro principio de

identificación/diferenciación de cualquier brizna de Alteridad en «el ser-otro del otro» (p. 131).

El reconocimiento de esta singularidad también se manifiesta cuando el futuro PMI se reencuentra con su historia personal en medio de la experiencia formativa. Un ejemplo aparece en el siguiente relato:

El espacio de Intersubjetividad en el Aula de Matemáticas, cuando parte de la actividad de clase del 24 de agosto fue visitar el Jardín Botánico de Bogotá; pese a que teníamos una misión, la visita me permitió volver a conectar con ese pasado que vivió mi familia [W, Du, 103].

Aquí el entorno natural funciona como un espejo que devuelve al futuro PMI la memoria de su origen. Su diferencia ya no lo separa de la comunidad, sino que se convierte en raíz de su vocación. En este reconocimiento comienza a gestarse la promesa de enseñar desde la propia singularidad, entendiendo que la humanidad no se realiza negando la diferencia, sino cultivando el vínculo con ella. En este punto, el capullo comienza a abrirse, la quietud interior se transforma en impulso y la identidad que se recogía para comprenderse empieza a disponerse para actuar.

4.4. El Profesor Mariposa: Abrir las alas

Esta etapa representa la apertura y el despliegue. El vuelo no es una evasión, sino un acto de testimonio. En esta fase, el PMI reconoce la dignidad que emerge de su propia historia y la proyecta en su práctica docente, enseñando desde el cuidado, la memoria y un compromiso ético que lo vincula con los demás.

Este momento corresponde al tiempo del *después*, un tiempo que se enlaza con las tres dimensiones de la trayectoria de formación planteadas por Cacho (2004). En esta etapa el profesor, ya constituido como PMI, se reencuentra con el mundo no para escapar de él, sino para habitarlo de otra manera. Su vuelo no es una fuga, sino una forma de testimonio, cada color de sus alas guarda las huellas de los procesos vividos en las etapas anteriores, y cada movimiento recuerda los aprendizajes nacidos de la comunidad, la introspección y el reconocimiento de la diferencia.

En este estadio, el *Profesor Mariposa* se percibe como un sujeto en permanente tránsito, aunque ahora con la capacidad de observar su historia como un todo. Desde esa perspectiva amplia comprende que su identidad docente está compuesta por múltiples fragmentos de experiencia. Las heridas ya no necesitan ocultarse, pues han sido transformadas en sentido y compromiso. Desde esa altura simbólica entiende que enseñar no consiste en sostener ideales abstractos, sino en permanecer fiel a las promesas que dieron origen a su vocación. De este modo surge un primer rasgo: un profesor que hereda la dignidad, alguien que reconoce en su pasado una fuente de significado para su labor pedagógica. Esto se expresa en el siguiente relato:

Sin embargo, estas vivencias no me quebraron, con dolor las acepté, mi familia fue mi mayor inspiración para ser selectivo en las cargas que llevaba, ellos me enseñaron la fuerza de la empatía, el valor de la compasión y la necesidad de construir espacios donde la diferencia no sea castigada, sino acogida [W, De, 35].

En esta narración, la dignidad aparece como un legado que se transmite a través de la experiencia familiar. El PMI identifica en su historia el origen de su manera de relacionarse con el mundo: la empatía como fuerza vital, la compasión como orientación ética y el dolor como fuente de aprendizaje. Reconocer estas vivencias no implica quedar atrapado en ellas, sino reinterpretarlas desde el presente para orientar su práctica docente (Mèlich, 1997). Desde esta perspectiva, el PMI comprende que no puede transformar las decisiones de quienes lo precedieron, pero sí puede recoger los valores que heredó de ellos como guía ética. La empatía, el respeto por la diferencia y el cuidado silencioso se convierten así en principios orientadores de su práctica pedagógica, ejemplo de ello es el siguiente relato:

He llegado a 2025 como quien se detiene un momento a mirar el dibujo completo del mosaico. Ya reconozco las piezas antiguas —la montaña de Boyacá, el ruido de la ciudad, la silla vacía de mi padre, la risa que se burlaba de mi diferencia— y veo cómo, sin darme cuenta, fueron generando un patrón. No un destino, sino una forma: una manera de estar en el mundo y, sobre todo, de entrar al aula [W, De, 99].

La metáfora del mosaico muestra cómo las piezas aparentemente dispersas de la vida encuentran sentido al integrarse en una figura mayor. Siguiendo a Ricoeur (1987), esta fidelidad a la propia historia expresa la capacidad de sostener una promesa sin negar el cambio. Un segundo pliegue de análisis es el de un profesor que se dignifica en su propio quehacer. La dignidad ya no es únicamente un legado recibido, sino una práctica que se construye en el presente. Si el primer movimiento lo lleva a mirar hacia atrás para reconocer lo que recibió, el segundo lo invita a mirar el aula como el lugar donde esa promesa se concreta. Su identidad profesional se fortalece al actuar con coherencia respecto a los valores que lo sostienen. Esto se expresa en el siguiente compromiso:

Prometo pensar la accesibilidad como diseño y no como parche: que las representaciones de una idea matemática se multipliquen hasta que alcancen a todos. Prometo hacer comunidad: documentar, escuchar, invitar a las familias, aprender con colegas; convertir la clase en una pequeña red donde nadie camine solo. Prometo, por último, no perder el humor ni la paciencia: la dignidad también entra por ahí [W, De, 107].

En estas palabras, la dignidad se manifiesta como acción concreta. El aula se convierte en un espacio donde la justicia se practica a través del diseño inclusivo, el trabajo comunitario y la atención a las relaciones humanas. Así, la docencia aparece como una práctica de esperanza que también se refleja en otro relato de la dimensión educativa:

Las relaciones interpersonales ya no me parecían, entonces, un territorio hostil o temible, sino un campo fértil para la reconstrucción conjunta [D, De, 57].

Esta mirada coincide con la perspectiva de Skovsmose y Valero (2012), quienes sostienen que la Educación Matemática Crítica busca “crear escenarios de participación donde todos puedan pensar y actuar” (p. 25). En este sentido, el profesor se dignifica al generar espacios donde su autoridad habilita en lugar de excluir y donde el conocimiento se convierte en puente para el encuentro humano.

Finalmente, el PMI comprende que *nombrar* y *cuidar* son gestos fundamentales de su práctica. Nombrar implica reconocer las presencias y devolverles su lugar en el relato compartido. Así lo expresa el siguiente fragmento.

Ahora, que logré llegar a 2025 sabiendo que nombrar fue mi primer gesto de resistencia y que cuidar es mi manera de estar en el mundo. De los ‘después’ que me dejó el tránsito por la MDM, por la escuela y por mis propias sombras, aprendí que la normalidad no es una puerta de entrada sino una construcción movidiza: hay quien la usa como filtro y hay quien la convierte en puente. Yo elijo el puente [D, De, 178].

En esta elección se condensa la madurez del Profesor Mariposa. Como afirma Larrosa (2009), la experiencia formativa no consiste simplemente en acumular conocimientos, sino en dejarse transformar por aquello que nos ocurre en el aquí y ahora, sino también en el allá y después. De este modo, el PMI convierte su trayectoria en una pedagogía de cuidado: una forma de enseñar que transmite saberes, pero que también dignifica y acompaña. Tal como sucede en el ciclo vital de la mariposa, cada estadio —huevo, oruga, pupa y mariposa— deja marcas que no desaparecen, sino que se integran en una identidad docente que continúa transformándose en el encuentro con los otros.

5. CONCLUSIONES: LOS PUNTOS DE LLEGADA

La constitución del PMI no responde a un proceso lineal ni exclusivamente académico, por el contrario, se configura como una trayectoria compleja en la que confluyen dimensiones biográficas, educativas e históricas que se entrelazan para dar forma a una identidad docente en permanente transformación. Desde esta perspectiva, la formación profesional se construye tanto a partir de los aprendizajes institucionales como de las experiencias personales que atraviesan la vida del docente.

El análisis de los relatos autobiográficos permitió identificar que la identidad del PMI se desarrolla mediante un proceso metafóricamente representado en la metamorfosis de la mariposa, la cual permitió comprender la formación docente como un tránsito en el que se integran experiencias de vulnerabilidad, descubrimiento, introspección y apertura. Cada estadio refleja momentos en los que el sujeto se interroga por su lugar en el mundo, su relación con los otros y el sentido de enseñar matemáticas en contextos atravesados por la diversidad.

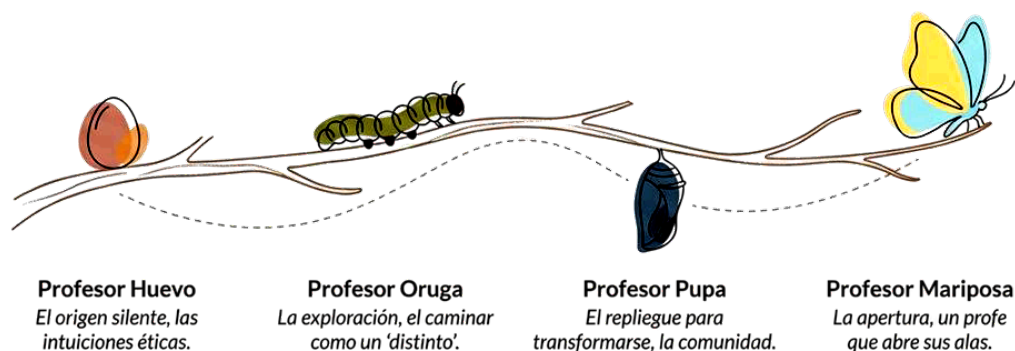
En el estadio del Profesor Huevo emergen las bases éticas de esta trayectoria, pues las experiencias tempranas relacionadas con el cuidado, la precariedad o la exclusión van configurando una sensibilidad particular frente a la diferencia. Aunque en este momento la vocación docente aún no se encuentra claramente definida, comienzan a gestarse disposiciones afectivas que posteriormente se traducirán en una ética del cuidado hacia los estudiantes. Posteriormente aparece el estadio del Profesor Oruga, que marca el inicio de la conciencia profesional, donde el sujeto comienza a reconocerse como docente y a cuestionar críticamente ciertas dinámicas escolares que históricamente han reproducido jerarquías y exclusiones. En este contexto, la matemática deja de ser únicamente un saber disciplinar y se comprende también como un lenguaje simbólico que permite interpretar la realidad y abrir posibilidades para una educación más justa.

El estadio del Profesor Pupa representa un momento de introspección y transformación, en el que la experiencia formativa en la maestría se convierte en un espacio de encuentro y reflexión colectiva donde el futuro PMI puede narrar su trayectoria, escuchar la de otros y resignificar su propia experiencia, proceso mediante el cual la diferencia comienza a asumirse no como una limitación, sino como una fuente de identidad pedagógica.

Finalmente, el Profesor Mariposa simboliza la apertura hacia el mundo desde una identidad docente que integra las experiencias anteriores. En este momento, el PMI transforma su historia en una práctica pedagógica basada en el cuidado, la inclusión y el compromiso con los otros. Así, enseñar matemáticas deja de entenderse únicamente como transmisión de contenidos y se convierte en una práctica ética orientada a generar espacios de participación y reconocimiento.

A manera de síntesis, el siguiente esquema representa visualmente las cuatro configuraciones narrativas identificadas en las trayectorias de formación analizadas: Profesor Huevo, Profesor Oruga, Profesor Pupa y Profesor Mariposa. No pretendemos establecer una progresión lineal, rígida o definitiva de la identidad del PMI, sino que, buscamos mostrar un proceso metamórfico abierto, en el que cada estadio constituye un pliegue interpretativo donde se conservan huellas de experiencias anteriores, se dialoga con las tensiones del presente y proyectan nuevas posibilidades de refiguración. En este sentido, las configuraciones pueden coexistir, superponerse o reaparecer cuando los acontecimientos vividos adquieran nuevos significados en la trama narrativa.

Figura 1: Esquema de las características que emergen en las trayectorias de formación de dos PMI



Fuente: Tomado de Granados y Cortes (2026).

A partir de estas refiguraciones se proponen algunas preguntas orientadoras que permiten ampliar la comprensión de las trayectorias de formación del PMI: ¿qué experiencias tempranas dejan huellas en la manera de reconocer al otro?; ¿qué acontecimientos permiten cuestionar las concepciones iniciales sobre la diferencia y hacer visibles las barreras que atraviesan los espacios educativos?; ¿cómo inciden la reflexión sobre la propia historia y el encuentro con otros en la resignificación de la identidad docente?; y ¿de qué manera las experiencias vividas se proyectan en

decisiones pedagógicas orientadas al cuidado, la participación y el reconocimiento de los estudiantes?

Estas fueron algunas de las preguntas que nos interpellaron en nuestro camino como PMI y que aún no están resueltas, sino que se buscan abrir posibilidades de interpretación sobre trayectorias singulares, dinámicas e inacabadas, susceptibles de nuevas refiguraciones

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

ADGC, WSA y ETP concibieron la idea presentada en este artículo, el cual es producto de una investigación en la que ADGC y WCA fueron autores y ETP la asesora. Todos los autores participaron activamente en la discusión de los resultados, revisaron y aprobaron el trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio están disponibles en el repositorio de la Universidad Pedagógica Nacional.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a la Maestría en Docencia de las Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, por la formación que nos permitió reflexionar sobre nuestro ser como profesores de matemáticas incluyentes. En particular agradecemos a las profesoras Claudia Salazar por hacernos experimentar otras formas de investigar(nos) y por ejemplificar el poder que reposa en las narrativas y en el cariño por el otro; a la profesora Claudia Vargas por ser parte del camino, por creer en nuestras ideas y permitirnos un espacio para ser nosotros a nuestros ritmos sin temer a salirnos de los renglones; al profesor Edgar Angulo, por ser ese aventurero valiente que nos inspiró a más, a mirar con otros ojos el mundo que creíamos establecido; a el profesor Ferley Ortiz, por tan magnas enseñanzas y discusiones en sus seminarios, donde podíamos pensar sobre la educación o sobre la inclusión con la misma furia con que la enseñamos; a la profesora Paola Balda, quien nos permitió ver al pasado para invitarlo con cariño al presente; al profesor César Rendón, que entendió que cada proceso es distinto, que nosotros también somos diversos y necesitamos de otros ritmos, de otras metodologías; y, por supuesto, a nuestros compañeros de la MDM, nuestra comunidad fraguada en las batallas de los salones, nuestras anclas en las esperanzas de un mejor futuro y nuestra fogata a la cual volver después de cada batalla.

6. REFERENCIAS

- Cacho, M. (2004). Profesores, trayectoria e identidades. *Revista Latinoamericana de Estudios Educativos*, 34(3), pp. 69 – 111. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=27034304>
- González, F. (2001). El otro hoy. Una ausencia permanente presente. En Larrosa, J., y Skliar, C (Eds.), *Habitantes de Babel: políticas y poéticas de la diferencia*. Laertes.
- Granados, A y Cortes, W. (2026). *De profesores de matemáticas a profesores de matemáticas incluyentes: refiguración del ser* [Tesis de Maestría en educación Matemática. Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio UPN. <https://repositorio.upn.edu.co/items/bdf9b97a-4f08-422e-8293-5785525491b0>
- Guacaneme, E., & Salazar, C. (2024). Aspectos esenciales en la constitución de la identidad del profesor de matemáticas como oportunidades y retos para la formación. En Parga, Zapata y Tuay (Editores). *Educación en ciencias y matemáticas: contextos, desafíos y oportunidades*. (pp. 395–421). Universidad Pedagógica Nacional. <https://repositorio.upn.edu.co/items/e92b1aeb-07e6-4718-8dbf-34c3659d3cc0>
- Jara, O. (2018). *La sistematización de experiencias: práctica y teoría para otros mundos posibles*. Centro Internacional de Educación y Desarrollo Humano - CINDE. <https://www.unc.edu.ar/sites/default/files/La%20sistematizaci%C3%B3n%20de%20experiencias%20-%20Oscar%20Jara%20%28edici%C3%B3n%20colombiana%29.pdf>
- Larrosa, J. (2009). Experiencia y alteridad en educación. En C. Skliar y J. Larrosa (eds.), *Experiencia y alteridad en educación*. (pp. 13 – 44). Homo Sapiens. https://www.dgeip.edu.uy/documentos/2018/ifs/dapg/materiales/Jorge_Larrosa_Experiencia_y_alteridad.pdf
- Lejeune, P. (1994). *El pacto autobiográfico*. (J. M. Flórez, Trad.). Fondo de Cultura Económica.
- Manjarrés, D., León, E., y Gaitán, A. (2015). *Familia, discapacidad y educación: anotaciones para comprender y reflexionar en torno a propuestas de interacción desde la institución educativa*. Universidad Pedagógica Nacional. <https://repositorio.upn.edu.co/items/e63bc4eb-a07b-4fad-ad66-b4de32668ba4>
- Mèlich, J.-C. (1997). *Del extraño al cómplice: La educación en la vida cotidiana*. Anthropos
- Orjuela, G. (2022). *Los anormales de la escuela colombiana: Institucionalización de su educación en la primera mitad del siglo XX*. Editorial Aula de Humanidades.
- Ricoeur, P. (1987). *Tiempo y narración I: Configuración del tiempo en el relato histórico*. Ediciones Cristiandad.

- Skovsmose, O., y Valero, P. (2012). Rompimiento de la neutralidad política: Un compromiso crítico de la educación matemática con la democracia. En O. Skovsmose, y P. Valero (eds.), *Educación matemática crítica: Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 11 – 38). Universidad de los Andes
- Torres, E. (2025, 23 de enero). Sesión 14 *Cátedra Doctoral en Educación Matemática 2024-2* [Video]. YouTube. https://youtu.be/RoDb_FGO1k4
- Torres, E., y Salazar, C. (2024). *Narrativas, trayectorias y experiencias de futuros profesores de matemáticas. [Ponencia]*. IX Jornadas de Historias de Vida en Educación, Universitat de València, España
- Van Manen, M. (2016). *Fenomenología de la práctica: Métodos de donación de sentido en la investigación y la escritura fenomenológica*. Editorial Universidad del Cauca.



LA MEDIACIÓN DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA EN LA ENSEÑANZA DE EVENTOS PROBABILÍSTICOS: un análisis del discurso docente desde las acciones mediadoras y los procesos matemáticos movilizados

THE MEDIATION OF THE MATHEMATICS TEACHER IN THE TEACHING OF PROBABILISTIC EVENTS: an analysis of teacher discourse from the perspective of mediating actions and mobilized mathematical processes

Guillermo Ramírez Montes¹



ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2524-1674>

RESUMEN

Este artículo tiene por objetivo analizar la mediación docente llevada a cabo por un profesor de Matemática al introducir los conceptos probabilísticos de eventos más probables, eventos menos probables y eventos igualmente probables, lo anterior en una clase de cuarto grado de la educación primaria en Costa Rica. Para tal efecto, se desarrolló una propuesta didáctica de clase basada en el uso de material concreto, donde la mediación intencionada del profesor fue fundamental para introducir los conceptos probabilísticos mediante preguntas que confrontaron a los estudiantes a responder sobre propiedades relativas a los conceptos en estudio. La recolección de datos incluyó las transcripciones de grabaciones en audio de la discusión colectiva y en grupos del trabajo realizado a lo largo de la clase entre el profesor y las personas estudiantes. El análisis de los datos se centra en las acciones mediadoras del profesor y los procesos matemáticos movilizados a través del discurso docente. Los resultados revelan la pertinencia de la mediación del profesor para que algunos estudiantes superaran ciertas dificultades relativas a los conceptos explorados y para promover un aprendizaje consolidado de esos conceptos.

Palabras clave: eventos probabilísticos, material concreto, mediación docente, educación primaria.

¹Universidad de Costa Rica, Montes de Oca, Costa Rica. Correo electrónico: guillermo.ramirez_m@ucr.ac.cr



ABSTRACT

This article aims to analyze the teaching mediation carried out by a mathematics teacher when introducing the probabilistic concepts of more probable events, less probable events, and equally probable events in a fourth-grade primary education class in Costa Rica. For this purpose, a teaching proposal based on the use of concrete materials was developed, where the teacher's intentional mediation played a fundamental role in introducing probabilistic concepts through questions that challenged students to answer about properties related to the concepts under study. Data collection included transcriptions of audio recordings of whole-class and group discussions conducted throughout the lesson between the teacher and the students. The data analysis focuses on the teacher's mediating actions and the mathematical processes mobilized through teacher discourse. The results reveal that the relevance of the teacher's mediation in helping some students overcome certain difficulties related to the explored concepts and in promoting a consolidated understanding of those concepts.

Keywords: probabilistic events, concrete material, teacher mediation, primary education.

1. INTRODUCCIÓN

La Estadística y la Probabilidad, al ser disciplinas científicas encargadas del manejo, análisis e interpretación de la información, han jugado un papel fundamental en el desarrollo de la sociedad moderna al proporcionar herramientas metodológicas generales para analizar la variabilidad, determinar relaciones entre variables, y mejorar las predicciones y toma de decisiones en situaciones de incertidumbre (Batanero, 2004). Precisamente por esto, la estadística y la probabilidad se han incorporado de forma generalizada al currículo de Matemática de la enseñanza primaria, secundaria y universitaria en la mayoría de los países desarrollados (Batanero, 2000).

Debido a lo anterior, en los últimos años se ha evidenciado un aumento notable de publicaciones, diseños curriculares e investigaciones relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la estadística y la probabilidad, respondiendo, en gran medida, al interés de investigadores por abordar los factores relacionados con el aprendizaje de conceptos probabilísticos. Así, se identifican líneas de investigación como la formación del profesorado en conceptos probabilísticos y diseños curriculares o didácticos para los procesos de enseñanza-aprendizaje en torno a dichas temáticas (Batanero, 2019).

Entre la iniciativa de los diseños didácticos en la enseñanza de la estadística y la probabilidad, desde inicios del siglo XX, ha surgido un interés por el estudio de la manipulación de materiales como herramienta para desarrollar el conocimiento matemático y científico. Entre estos insumos, el material concreto se ha estipulado como una alternativa didáctica que va más allá de ser una manera divertida de desarrollar aprendizajes, lo que permite la autonomía del infante en la adquisición de conocimientos, esto debido a que se limita la participación de la persona docente en momentos cruciales del aprendizaje (Alsina, 2017).

Ahora bien, investigaciones han dejado ver que las dificultades entorno al aprendizaje de conceptos de probabilidad en primaria se dan principalmente porque los conceptos y procedimientos son tratados de manera demasiado abstracta y formal; las ideas probabilísticas a menudo contradicen la intuición y la manera en que las personas estudiantes perciben el

mundo; y por la dificultad que tiene el niño en diferenciar entre situaciones aleatorias y deterministas (Dorado, 2021).

Ante este escenario, y considerando que la investigación sobre la probabilidad en primaria es aún escasa, y que se concentra principalmente en la educación secundaria (Rodríguez et al., 2018), es que se vuelve necesario investigar sobre la mediación que el docente de Matemática lleva a cabo a la hora de enseñar conceptos probabilísticos y sobre alternativas que puede implementar, desde su papel como facilitador del conocimiento, para facilitar así un aprendizaje más ameno de estos conceptos probabilísticos desde su mediación docente.

A nivel del currículo costarricense, los Programas de Estudio de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP, 2012) argumentan que, para el II ciclo de la Educación General Básica¹, el estudio de la probabilidad debe ir orientado a “profundizar en conceptos concretos relacionados con eventos y sus representaciones” (p. 247). Como propósito principal de este ciclo en probabilidad, se persigue que las personas estudiantes experimenten con el juego, y en el caso particular del estudio de eventos (más probables, menos probables e igualmente probables), se dan sugerencias puntuales, como la manipulación de material concreto para que la persona estudiante simule experiencias aleatorias.

Considerando el contexto anterior, este artículo tiene como objetivo analizar la mediación docente de un profesor de Matemática al introducir los conceptos probabilísticos de eventos más probables, eventos menos probables y eventos igualmente probables con recurso al material concreto. Para tal fin, se establecen las siguientes preguntas de investigación: ¿Cuáles acciones de la mediación docente del profesor de Matemática influyen en el aprendizaje de los conceptos probabilísticos de eventos menos probables, más probables e igualmente probables, y cómo esta mediación ayuda a transformar dificultades evidenciadas en el estudiante?, ¿qué procesos matemáticos destacados por los Programas de Estudio de Matemáticas del currículo costarricense (MEP, 2012) son movilizados en el estudiante a través de dichas acciones de mediación?

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

2.1 Tendencias en la investigación sobre conceptos probabilísticos en primaria

A nivel del contexto de Costa Rica, Hernández-Solís et al. (2021) realizan un estudio exploratorio, con el objetivo de investigar la construcción del espacio muestral asociado a varios tipos de eventos, partiendo de dos ítems: uno en contexto de urnas y otro de ruletas. En las tareas matemáticas presentadas se les solicitaba a estudiantes costarricenses de 6° curso de educación primaria construir un espacio muestral compatible con la descripción de un evento seguro, probable, equiprobable e imposible. Los resultados del estudio muestran que las personas estudiantes, en su mayoría, son capaces de construir un espacio muestral

¹ La Educación General Básica es referida en el currículo costarricense a estudiantes que cursan los niveles cuarto, quinto y sexto grado de primaria; cuyas edades comprenden entre los 9 y 12 años.

adecuado en aquellas tareas en las que se les solicitó un evento posible o un evento equiprobable; sin embargo, surgen confusiones entre evento seguro y evento muy probable, como así también entre evento imposible y evento poco probable.

Es importante destacar que, de acuerdo con lo mencionado por Hernández-Solís et al. (2021), la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria es intuitiva y depende sustancialmente del lenguaje que las personas tienen a su disposición, por lo que es vital reconocer el vocabulario que las personas estudiantes asocian a las situaciones aleatorias y a la probabilidad como tal, dada la versatilidad que tienen algunos términos entre lenguaje coloquial y formal. Específicamente, se destaca que hay palabras que debe utilizar la persona estudiante en la asignatura de Matemática que no necesariamente tienen el mismo significado en su uso coloquial o fuera del contexto académico. Un ejemplo de ello es la palabra “seguro”, que coloquialmente no implica necesariamente que el hecho descrito se producirá; mientras que en probabilidad su significado es distinto: un evento seguro ocurrirá siempre (p.186).

Hernández-Solís et al. (2021) también mencionan la importancia de utilizar tanto simuladores de experiencias aleatorias, basados en recursos con material concreto (dados, ruletas, urnas, entre otros), como también otros recursos, como las tecnologías digitales, los cuales puedan permitir un dinamismo en el uso de representaciones asociadas a los conceptos. Lo anterior, pues cada tipo de recurso potencia el aprendizaje de propiedades asociadas a los conceptos de una manera más o menos amigable para la persona estudiante.

A nivel internacional, existe una gran cantidad de investigaciones en torno a la enseñanza y aprendizaje de conceptos probabilísticos. Entre los trabajos destacados se encuentra el trabajo de Garfield et al. (2008), quienes en su libro enfatizan estudios de investigación que se han venido desarrollando sobre el uso de recursos educativos para promover el razonamiento estadístico y probabilístico. En particular, los autores refieren que gran parte de estos estudios sugieren que el uso de herramientas tecnológicas o material concreto puede ayudar a las personas estudiantes a mejorar su razonamiento y comprensión, facilitando los procesos de aprendizaje.

En esta línea de uso del material concreto y recursos tecnológicos, Batanero (2001) refiere que es esencial que el estudiantado tenga la oportunidad de explorar situaciones aleatorias de forma activa e interactiva mediante simulaciones, ya sea con material concreto o con recursos tecnológicos, ya que estos favorecen la construcción de significado en torno a la noción de probabilidad. Adicionalmente, Alsina y Bosch (2023) enfatizan que el material concreto es un recurso fundamental debido a que permite visualizar las ideas matemáticas de una mejor manera y hace más ameno para la persona estudiante el proceso de aprendizaje. En particular, las autoras proponen diez recursos manipulativos que van desde juegos de mesa hasta el uso de bolsas, cajas y cubos; actividades que esencialmente contribuyen a desarrollar el pensamiento estocástico en niños y niñas de los 3 a los 12 años, con la finalidad de que el profesorado de niveles de infantil y primaria dispongan de un abanico de recursos y actividades para aplicar en sus lecciones de clase.

En relación a la enseñanza de la probabilidad respecto a otros conceptos matemáticos, Batanero et al. (2021) presentan una síntesis de la investigación sobre el razonamiento probabilístico en infantes hasta los 7 años, en donde mencionan los aportes realizados por Piaget e Inhelder (1951) y Fischbein (1975). En particular, a partir de las ideas expuestas de

esos personajes, Batanero et al. (2021) resaltan que la enseñanza de la probabilidad debe comenzar lo antes posible para poder desarrollar la intuición en el infante, por lo que, la persona docente debe proponer situaciones probabilísticas que introduzcan una forma de pensar diferente a otras ramas de la Matemática y, así, ayudarles a superar aquellas intuiciones erróneas primitivas que puedan surgir sobre la aleatoriedad. Puntualmente, se recomienda proporcionar diferentes experiencias que le permitan al infante observar los fenómenos aleatorios y la organización de datos bajo la experimentación, incluyendo experimentar con material concreto, pues los niños tienden a trabajar mejor las actividades sobre el azar cuando hay material tangible de por medio.

Por otra parte, en la línea de cómo se visualiza la enseñanza de la probabilidad en los libros de texto, Alsina y Vásquez (2015) realizan un estudio de contenido de libros de texto, en donde analizan los conocimientos en torno a la temática de probabilidad para niveles de primaria. Los resultados señalan que la enseñanza de la probabilidad, a partir de estos textos, se realiza desde una perspectiva intuitiva, en la que se realiza un énfasis en la importancia del uso del lenguaje cotidiano e informal. Estos resultados concuerdan con lo mencionado previamente en el estudio realizado por Hernández-Solís et al. (2021), en torno a la importancia del lenguaje; sin embargo, Alsina y Vásquez (2015) resaltan, adicionalmente, la importancia de hacer una transición entre el lenguaje coloquial y el lenguaje probabilístico usado en el aula, de manera tal que la formalización de los conceptos sea lo más naturalmente posible y se pueda profundizar sobre dichos conceptos.

En general, la reflexión que puede obtenerse a partir de lo expuesto por Alsina y Vásquez (2015) es que, si bien el material presentado en libros de texto puede resultar valioso para un nivel inicial en el aprendizaje de la probabilidad, también es necesaria su complementación con otras actividades de clase que promuevan la participación de las personas estudiantes y la profundización de conceptos probabilísticos.

2.2 El papel del profesor de Matemática como mediador del conocimiento

En la enseñanza de la probabilidad, la mediación docente adquiere un papel fundamental, dado que la construcción de conceptos probabilísticos implica que las personas estudiantes transiten de interpretaciones intuitivas sobre la aleatoriedad a formas de razonamiento más elaboradas y formalizadas de los conceptos. En este proceso, el profesor no debe limitarse a comunicar definiciones o procedimientos, sino que debe también diseñar situaciones, gestionar interacciones y promover discusiones matemáticas que permitan a los estudiantes explorar, argumentar y construir significados probabilísticos.

Desde esta perspectiva, Ponte et al. (2013) plantean que la mediación del profesor durante las discusiones matemáticas se desarrolla mediante acciones orientadas a favorecer la participación y profundización del razonamiento de las personas estudiantes. Aunque estas acciones puedan aplicarse a diferentes áreas de la Matemática, adquieren particular relevancia en probabilidad, donde la comprensión de los conceptos requiere analizar fenómenos aleatorios, interpretar resultados y discutir diferentes formas de razonamiento.

Los autores identifican, dentro de las acciones relacionadas con los conceptos y procedimientos matemáticos, cuatro formas de intervención docente. La primera consiste en *invitar a la persona estudiante a participar en una discusión matemática*, con esto genera espacios donde se pueden expresar sus ideas, explicar sus estrategias y justificar sus

interpretaciones sobre una situación probabilística. Esta participación resulta especialmente relevante en probabilidad, debido a que los estudiantes suelen construir explicaciones iniciales basadas en experiencias cotidianas sobre el azar, las cuales requieren ser discutidas y analizadas.

La segunda acción corresponde a *sugerir información relevante para avanzar en la resolución de una tarea o validar las ideas planteadas por la persona estudiante*. En una clase de probabilidad, esta mediación puede manifestarse cuando el profesor orienta la atención hacia relaciones entre resultados experimentales, representaciones, frecuencias observadas o propiedades de los modelos probabilísticos, sin proporcionar directamente la respuesta.

La tercera acción se refiere a *apoyar o guiar mediante preguntas y otras dinámicas, a los estudiantes para mantener la participación en la discusión matemática*. En el contexto probabilístico, las preguntas del profesor pueden favorecer procesos como: explicar por qué un resultado parece más probable que otro, justificar predicciones, comparar estrategias de solución o interpretar resultados obtenidos mediante experimentos aleatorios.

La cuarta acción consiste en *desafiar a la persona estudiante a ir más allá de sus conocimientos previos*, para buscar ampliar sus concepciones iniciales sobre el azar y la incertidumbre. Esto implica generar situaciones que permitan avanzar de razonamientos intuitivos a procesos de argumentación, generalización y construcción de modelos probabilísticos.

Ponte et al. (2013) señalan que estas acciones se articulan durante las discusiones matemáticas, y que las intervenciones del profesor, mediante preguntas, orientación y retroalimentación, favorecen el desarrollo de diferentes procesos matemáticos. En este sentido, la mediación docente influye en los procesos que las personas estudiantes movilizan al abordar una situación probabilística.

Esta relación entre mediación docente y procesos matemáticos se vincula con los planteamientos del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP, 2012), que establece cinco procesos matemáticos fundamentales: razonar y argumentar; plantear y resolver problemas; comunicar; conectar; y representar. En la enseñanza de la probabilidad, estos procesos se manifiestan cuando los estudiantes justifican predicciones, analizan resultados experimentales, comunican interpretaciones, relacionan conceptos probabilísticos con otros conocimientos matemáticos y utilizan representaciones para expresar fenómenos aleatorios.

Por otra parte, Godino (2024) plantea que la competencia docente requiere reconocer los significados asociados a los contenidos matemáticos, identificar los objetos y procesos que emergen en las producciones estudiantiles, diseñar tareas adecuadas, considerar las características del contexto y evaluar la idoneidad didáctica de los procesos de instrucción. Estas competencias resultan esenciales en probabilidad, debido a que el profesor debe interpretar las ideas iniciales de los estudiantes sobre el azar y tomar decisiones didácticas que permitan su evolución hacia significados matemáticos más elaborados.

En relación con los recursos utilizados para favorecer esta mediación, Batanero (2001) destaca que la enseñanza de la probabilidad se potencia mediante situaciones didácticas basadas en la experimentación y el uso de recursos concretos o tecnológicos. Sin embargo, el

valor del material no reside únicamente en su manipulación, sino en las oportunidades que genera para que los estudiantes exploren fenómenos aleatorios, formulen hipótesis, analicen resultados y construyan significados probabilísticos.

En este sentido, Batanero et al. (2004) señalan que la enseñanza de la probabilidad requiere que el profesor seleccione y gestione situaciones de aprendizaje que permitan establecer conexiones entre las intuiciones iniciales sobre el azar, la interpretación de resultados experimentales y la progresiva formalización de conceptos probabilísticos. Así, las tareas propuestas, las representaciones utilizadas y las formas de interacción en el aula, constituyen elementos centrales de la mediación docente y están influenciados por las concepciones del profesor sobre la enseñanza de la estocástica y sobre la naturaleza del conocimiento probabilístico (Eichler, 2007).

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

3.1 Participantes y contexto del estudio

Este estudio está fundamentado en una propuesta didáctica de clase para la introducción de los conceptos probabilísticos de eventos (siendo estos: igualmente probables, menos probable y más probable); propuesta realizada en un grupo de cuarto año de la Educación General Básica costarricense de una escuela pública de la capital de Costa Rica. En total participaron 17 estudiantes, los cuales fueron divididos en 4 grupos: 3 grupos de cuatro personas y 1 grupo de cinco personas, todos formados por al menos un hombre y una mujer.

El profesor implementador, externo a la institución, tuvo el papel de investigador principal e implementador de la propuesta didáctica, apoyado por el profesor del grupo quien colaboró dando apoyo logístico. En cuanto a la elección del investigador como implementador, esta responde meramente a una decisión de conveniencia, considerando que el profesor del grupo no tenía experiencia en propuestas del uso del discurso docente como recurso de promoción del aprendizaje, por lo que se acuerda que la intervención recaiga en el investigador.

Se reconoce que la condición de investigador e implementador conlleva una posición particular dentro del proceso investigativo, pues la participación directa en la experiencia de aula puede influir en la interpretación de los datos generados. En este sentido, se asumió una postura reflexiva y objetiva orientada a reconocer dicha implicación y a favorecer la rigurosidad del análisis mediante la revisión sistemática de las transcripciones y su vinculación de las interpretaciones con las categorías teóricas establecidas.

La propuesta partió del uso del material concreto para introducir los conceptos referidos. Se facilitó a cada grupo de estudiantes una urna fabricada con material concreto, en la cual había bolas de igual tamaño, pero de diferentes colores. Cada urna tenía diferentes configuraciones de colores, de tal forma que la cantidad de bolas de un color era diferente en cada urna, pero todas las urnas tenían los mismos colores.

Al principio, se realiza una discusión colectiva para introducir el concepto de situación aleatoria y evento, mediante una lluvia de ideas basada en respuestas dadas por las personas estudiantes sobre posibles situaciones que se podrían considerar, o no, aleatorias. La

mediación docente a través de preguntas guía relacionadas a situaciones de la vida cotidiana del estudiante fue el medio para la lluvia de ideas, dándose esta introducción como parte de los conocimientos previos necesarios para una mejor comprensión de los conceptos de eventos más probables, menos probables e igualmente probables.

Posteriormente, se procede a la actividad de extracción de bolas con el material concreto proporcionado. Se da la indicación a las personas estudiantes de extraer bolas de la urna, conforme a como ellos mejor consideraban hacerlo. A medida que las personas estudiantes iban extrayendo bolas de su urna, tenían que ir las colocando en una región poligonal hecha con cartón (ver figura 1), y al mismo tiempo tenían que ir registrando en papel las extracciones que iban obteniendo. Como parte de la mediación docente, el profesor tenía que ir monitoreando que las personas estudiantes fueran realizando la actividad, pero sobre todo promover la discusión matemática en cada grupo mediante preguntas orientadoras que buscaban que las personas estudiantes comprendieran los conceptos de eventos más probables, menos probables e igualmente probables.

Figura 1. Propuesta de extracción de bolas de urna con material concreto.



Fuente: Fotografía del autor

Una vez concluida la actividad de la urna con cada grupo, se realiza nuevamente una discusión colectiva con todo el grupo a fin de contrastar ¿de qué depende decidir si un color es más probable, menos probable o igualmente probable a otro? ¿cómo se relaciona el concepto de situación aleatoria con estos conceptos anteriores?, y posteriormente se formalizan los conceptos en la pizarra.

La propuesta de clase finaliza con una tarea matemática de evaluación-consolidación de los aprendizajes adquiridos por las personas estudiantes. Dicha tarea estuvo conformada por preguntas de selección múltiple y respuesta corta.

Para efectos de este estudio, el análisis de los datos se centra sobre la mediación docente llevada a cabo en la discusión grupal y colectiva en torno al trabajo con el material concreto

de la urna para la introducción de los conceptos probabilísticos de tipos de eventos: evento más probable, menos probable e igualmente probable.

3.2 Recolección de los datos y análisis

Este estudio es de naturaleza cualitativa, siguiendo un análisis descriptivo e interpretativo (Cohen et al., 2007), producto de las respuestas dadas por las personas estudiantes durante los momentos de discusión grupal y colectiva de la actividad matemática.

La recolección de datos incluyó las transcripciones de grabaciones en audio de la discusión grupal y colectiva desarrollada entre profesor-estudiantes. El cuerpo del análisis está constituido por transcripciones de discusiones matemáticas desarrolladas con los estudiantes. Se seleccionaron para su análisis algunos extractos de diálogos correspondientes a dos de los grupos participantes. Esta selección se realizó con base en un criterio de relevancia analítica, considerando aquellos episodios en los que el discurso del profesor evidencia, por un lado, fortalezas en la mediación para el aprendizaje de los conceptos en estudio y, por otro, dificultades conceptuales manifestadas por los estudiantes que no se observaron en los otros grupos. En este sentido, la selección de los extractos responde al propósito de profundizar en la comprensión del papel de la mediación docente en la consolidación de los conceptos en estudio y en la superación de dichas dificultades.

La unidad de análisis corresponde a los episodios de interacción docente-estudiante en torno a la resolución y discusión de la actividad matemática de extracción de bolas de una urna. A partir de las transcripciones, se realizó un proceso de lectura, segmentación y organización de los datos en episodios significativos para el estudio, identificando intervenciones del profesor pertinentes a los objetivos de la investigación.

Posteriormente, el análisis se centró en la interpretación de dichos episodios a partir de un proceso de codificación cualitativa, orientado a identificar las acciones mediadoras del profesor (Ponte et al., 2013) y los procesos matemáticos movilizados en el discurso (MEP, 2012). Este procedimiento permitió establecer relaciones entre las intervenciones docentes y las producciones de los estudiantes en el contexto de la actividad analizada. El proceso de análisis se desarrolló de manera sistemática, manteniendo coherencia entre el marco teórico de referencia, las categorías que se desprenden de la literatura y los datos transcritos.

Para garantizar el anonimato de las personas estudiantes, se han empleado nombres ficticios en el tratamiento y presentación de los datos. El estudio se desarrolló conforme a los principios éticos que exige la institución donde se desarrolló la propuesta de clase, incluyendo el consentimiento informado de los padres o tutores para la participación de los estudiantes en el proceso investigativo, vía el profesor del grupo, y el asentimiento de los participantes y de la persona directora de la institución.

Además, se han designado codificaciones específicas para referirse a una intervención del profesor implementador (P), grupo 1 (G1), grupo 2 (G2), o de todas las personas estudiantes (TODOS).

4. RESULTADOS

4.1 Acciones del profesor

A continuación, se presentan los principales resultados referentes a las acciones del profesor movilizadas durante las discusiones matemáticas: (1) invitar a la persona estudiante a ser parte de una discusión matemática; (2) sugerir información relevante para avanzar o validar ideas; (3) apoyar o guiar mediante preguntas y dinámicas de interacción; y (4) desafiar a las personas estudiantes a ir más allá de sus conocimientos previos.

4.1.1 Invitar a la persona estudiante a ser parte de una discusión matemática

A lo largo de los diálogos, el profesor promueve constantemente la participación activa del estudiante mediante preguntas abiertas y solicitudes de ejemplos o explicaciones. Por ejemplo, cuando el profesor comienza a monitorear los grupos de trabajo, al discutir con el grupo 2 comienza queriendo hacer énfasis en el concepto de situación aleatoria, dándose una discusión en torno a lo que es, o no es, aleatorio [extracto 1]:

P: una situación aleatoria podemos entenderla como algo que no podemos predecir. ¿Quién podría darme un ejemplo?

Mateo: una ruleta

P: una ruleta, ¿por qué?

Mateo: porque no sabemos dónde va a caer.

P: muy bien, ¿alguien más?

Cuando el profesor pregunta “¿Quién podría darme un ejemplo?” o “¿alguien más?”, el profesor genera un espacio donde las personas estudiantes se convierten en protagonistas de la construcción del conocimiento. Esta acción favorece la interacción y legitima las ideas de las personas estudiantes como parte del proceso matemático. Asimismo, el profesor distribuye la participación entre distintos integrantes del grupo, evitando que una sola persona monopolice la discusión.

Si bien la respuesta de Mateo es “una ruleta”, en vez de ser más específico y decir “el sector (número, color, etc.) donde se detiene la flecha de una ruleta no viciada”, el docente entiende la intención del estudiante, y lanza la pregunta “una ruleta, ¿por qué?”, a fin de que explique mejor su idea, y entendiendo a la vez que, debido al grado de escolaridad del estudiante, no se espera que use un lenguaje tan formal para expresar sus ideas. Esta intención va de la mano con lo referido por Alsina y Vásquez (2015), respecto a buscar que la transición entre el lenguaje cotidiano y el lenguaje formal se desarrolle en forma progresiva, pero al mismo tiempo, de la manera más naturalmente posible, según el nivel en que se encuentre la persona estudiante.

Semejantemente, pero ahora dando énfasis a ejemplos de situaciones no aleatorias, el profesor promueve el siguiente diálogo [extracto 2]:

P: ok, ¿será que alguno de ustedes me puede decir una situación que NO sea aleatoria?

Pedro: los números de la lotería, o el bingo.

P: Un bingo, ¿cómo?

Mateo: depende, profe, si ya sabemos lo que va a salir en el cartón de los números entonces si podemos predecir el número que va a salir.

Juan: eso es trampa.

P: pero entonces, ¿en el juego del bingo podemos predecir el número que va a salir?

Mateo: no, siempre se queda a la espera del número que saque la persona que “canta” el bingo.

P: entonces, ¿será que el bingo es un ejemplo de una experiencia NO aleatoria?

Mateo: no, es aleatoria.

P: muy bien, ¿quién me puede decir un ejemplo de una situación NO aleatoria?

Angela: saber qué ropa nos vamos a poner para venir a la escuela

P: ¿Puede explicar por qué eso es una experiencia NO aleatoria, Ángela?

Ángela: porque nosotros venimos todos los días siempre con uniforme, sabemos cómo vendremos vestidos cualquier día de la semana.

P: ¡Muy bien!, puede predecirse cómo vendrán vestidos el día siguiente, por lo que NO es algo aleatorio. ¿Y el lanzamiento de una moneda, es una situación aleatoria o no aleatoria?

Mateo: sí sí.

P: Dejemos que Pedro hable, está bien, Mateo. Pedro, ¿qué opina usted del lanzamiento de una moneda? ¿es una situación aleatoria?

Pedro: ummm, creo que sí, pues no sabemos qué va a salir, si cara o cruz.

Del diálogo se desprende que cuando el profesor le dice a Mateo: “Dejemos que Pedro hable”, el profesor ha considerado que Mateo ya ha tenido bastante participación, no como Pedro, quien hasta el momento no había participado de la discusión. Así, se fomenta un ambiente inclusivo y dialógico, en el que múltiples voces pueden aportar a la comprensión colectiva.

4.1.2. Sugerir información relevante para avanzar en la resolución o validar ideas

El profesor también interviene proporcionando pistas o reformulaciones que ayudan al estudiante a avanzar en la comprensión de los conceptos. Por ejemplo, en este diálogo con el grupo 1 [extracto 3]:

P: muy bien. Entonces, cuando nosotros elegimos un color, nosotros podemos asociar ese color a un término que ya definimos, ¿qué sería? (todo el grupo queda en silencio).

P: por ejemplo, sacar una pelota de color amarillo, ¿qué es, según lo que ya estudiamos? ... ¿es una situación aleatoria, un espacio muestral o tiene otro nombre?

Pablo: un evento, un evento

Cuando los estudiantes guardan silencio ante la pregunta sobre el concepto de evento, el profesor procede a reformular la forma de plantear la pregunta, pero sin dar la respuesta, diciendo: “por ejemplo, sacar una pelota de color amarillo, ¿qué es... una situación aleatoria, un espacio muestral o tiene otro nombre?”. Esta mediación reduce la complejidad de la tarea y orienta la atención hacia conocimientos previamente trabajados. Otra manifestación de esta acción ocurre en el extracto 2, cuando el profesor retoma las ideas de los estudiantes para validarlas y conectarlas con el lenguaje matemático formal. Por ejemplo, después de que Ángela explica que el uniforme escolar permite predecir cómo irán vestidos, el profesor confirma la idea diciendo “¡Muy bien!, puede predecirse cómo vendrán vestidos el día siguiente, por lo que NO es algo aleatorio”, así establece explícitamente la relación que está haciendo Ángela con el concepto de experiencia no aleatoria para validarla, pero al mismo tiempo le explica al resto de este grupo el razonamiento de esta estudiante.

En otro diálogo, orientado al momento exacto de introducir los tipos de eventos probabilísticos con el grupo 2, el profesor identifica dificultades asociadas al uso del lenguaje coloquial [extracto 4]:

P: Muy bien. Ahora, ya hablamos del evento más probable y hablamos del evento menos probable en esta urna. Piensen, cómo sería el evento obtener rojo y obtener morado.

Juan: tiene más que el amarillo y menos que el rosado

P: ok, eso es cierto, pero si quisiéramos darles un nombre a esos eventos asociados al rojo y el morado, nada más. ¿Cómo le llamaríamos a esos dos eventos?

Juan: medio probable

P: medio probable, ok. Vamos a ver, entonces tendríamos eventos más probables, menos probables y medios probables. Veamos, tendríamos entonces más, menos y medios. ¿Tiene coherencia eso?

G2: síii

P: Veamos a ver. Cuando comparamos el 3 y 1, por ejemplo, podemos decir que 3 unidades es más que 1 unidad, y que 1 unidad es menos que 3 unidades. Y si comparo 2 con 2, ¿qué podría decir?

Juan: son empates

P: ¿empates?, vamos a ver. Si queremos comparar el 3 y el 1 usamos el símbolo “mayor que”, si comparamos el 1 con el 3 usamos el símbolo “menor que”, y si comparamos el 2 con el 2, ¿qué símbolo usamos?

G2: iguaaal

P: entonces, ¿cómo suena mejor?, ¿decir que el rojo es medio probable al morado o que el rojo es igualmente probable que el morado?

Juan: igualmente probable que el morado, tiene más sentido

P: entonces, resumiendo. Tenemos que el amarillo es el más probable, el rosado...

G2: el menos probable

P: y el rojo...

Juan: igual probabilidad...igualmente probable que el morado.

Se observa que los estudiantes estaban asociando el término “empate” y “medio” a eventos de igual probabilidad, lo cual se deriva del uso de un lenguaje informal que están acostumbrados a usar en situaciones de su cotidianidad, las cuales no tienen que ver precisamente con situaciones del azar, pero sí con obtener equivalencias. En este sentido, y siguiendo lo mencionado por Hernández-Solís et al. (2021), el profesor se interesa por conocer el significado que les dan las personas estudiantes a los conceptos matemáticos; y adicionalmente, conduce a los estudiantes desde esas expresiones cotidianas hasta términos matemáticos más precisos como “igualmente probable”. Específicamente, a partir de la relación del lenguaje formal usado para comparar el orden en los números naturales (conocimiento previo que ya tenían), el profesor ayuda a que las personas estudiantes opten por el término “igualmente probable” como un término con “más sentido”. Así, la comparación con los símbolos “mayor que”, “menor que” e “igual que” constituye una estrategia de mediación que enlaza conocimientos previos con nuevos conceptos probabilísticos.

4.1.3. Apoyar o guiar mediante preguntas y dinámicas que mantengan la discusión matemática

La mediación docente se caracteriza por el uso continuo de preguntas encadenadas que mantienen al estudiante involucrado en la construcción del razonamiento. El profesor evita ofrecer respuestas directas y, en cambio, guía el análisis mediante interrogantes sucesivas. Por ejemplo, en el extracto 2, en la discusión sobre el bingo, el profesor pregunta: “¿en el juego del bingo podemos predecir el número que va a salir?”, y, posteriormente, “¿será que el bingo es un ejemplo de una experiencia NO aleatoria?”. Estas preguntas permiten que el estudiante revise y ajuste sus propias ideas. De igual forma, el profesor utiliza dinámicas de contraste y comparación para sostener la discusión matemática. Por ejemplo, cuando analiza la probabilidad de extraer bolas de distintos colores, buscando la consolidación de conceptos, plantea un escenario alternativo [extracto 5], al plantearle al grupo 2 la siguiente situación:

P: otra pregunta. Si colocáramos en la caja solo tres bolas rojas y dos bolas moradas, ¿qué podríamos decir?

Juan: que el rojo tiene más probabilidad de salir y el morado menos.

P: ¿pero ustedes no habían dicho que el rojo y el morado eran igualmente probables?

Juan: pero ahora lo cambié a más y a menos

P: ¿qué cambié a más y a menos?

Juan: la cantidad

P: muy bien, entonces podríamos decir que los eventos son más probables, menos probables o igualmente probables ¿dependiendo de qué?

Juan: de la cantidad que haya comparado con los demás.

El escenario planteado por el profesor mantiene la discusión enfocada en los conceptos previamente introducidos, y refuerza lo mencionado por Alsina y Bosch (2023) respecto a

aprovechar al máximo el uso del material concreto para que las personas estudiantes puedan visualizar mejor las ideas matemáticas, como es el caso del escenario de cambiar de configuración de las bolas para realizar contrastes respecto a una configuración inicial. Estas intervenciones obligan a justificar respuestas y a establecer relaciones entre cantidad y probabilidad, en busca de ir identificando propiedades o elementos que definen a los conceptos, pero inclusive permite, de cierta manera, trabajar en forma indirecta desde temprano otras relaciones, como la ley de probabilidad de Laplace.

También se evidencia esta acción de contraste cuando el profesor problematiza respuestas parciales o ambiguas. Por ejemplo, en el diálogo del extracto 4, ante la expresión “medio probable”, el docente no rechaza inmediatamente la idea, sino que pregunta “¿tiene coherencia eso?”, permitiendo que el grupo reflexione y refine colectivamente el significado matemático más adecuado.

4.1.4 Desafiar a la persona estudiante a ir más allá de sus conocimientos previos

El profesor constantemente genera situaciones que desafían las intuiciones iniciales de las personas estudiantes, promoviendo una comprensión más profunda de los conceptos probabilísticos. Un ejemplo importante aparece cuando se cuestiona si el color define que un evento sea simple o compuesto [extracto 6].

P: ¿cuántos eventos simples tenemos acá? (señalando las bolas en la caja)

Pablo: tenemossss... ..cuatro

P: cuatro, ¿por qué?

Pablo: porque hay cuatro colores

P: Melodi, ¿qué opina de la respuesta de Pablo?

Melodi: ummm, yo creo que sí, son cuatro, hay cuatro colores

P: les hago otra pregunta, ¿hay una sola bolita de un color?

G1: nooo

Ana: del anaranjado y morado sí, pero de la amarilla y azul no

P: muy bien, entonces, por ejemplo, ¿sacar una bolita anaranjada sería un evento simple?

Ana: sí, porque solo hay una

P: ok, ¿y sacar una bolita morada, sería un evento simple?

Ana: sí también

P: ¿y sacar una bolita amarilla?

Ana: no, ya no, porque hay más de una amarilla

P: excelente. ¿Y cómo le llamamos al evento de sacar una bolita amarilla entonces?

Pablo: ahhh, compuesto

P: muy bien. Entonces, ¿cuántos eventos simples en total se pueden definir con todas las bolitas

Pablo: diez, porque hay diez bolitas

P: ¿podría explicar un poco más eso que dijiste, Pablo?

Pablo: bueno, un evento simple solo puede tener una bolita, por lo que si hay diez bolitas se pueden tener diez eventos simples, uno para cada bolita

P: excelente. Vean entonces que el color no define que uno evento sea simple o no, sino la cantidad de bolitas que hay de ese color

Inicialmente, los estudiantes asocian los eventos simples con la existencia de colores distintos; sin embargo, mediante preguntas orientadoras, el profesor conduce a comprender que lo relevante es la cantidad de elementos asociados al evento. Asimismo, en el diálogo del extracto 5, el profesor desafía las ideas previas al modificar las condiciones del problema. Cuando plantea que ahora existen tres bolas rojas y dos moradas, obliga al estudiante a reconsiderar la afirmación anterior de que ambos eventos eran igualmente probables. Esta estrategia evidencia que la probabilidad depende de la frecuencia y no del color, promoviendo un razonamiento más abstracto y relacional.

4.2 Procesos matemáticos

A continuación, se analiza cada proceso matemático movilizado por el profesor durante las discusiones matemáticas, acompañado de ejemplos concretos de los diálogos, explícitamente: razonar y argumentar; plantear y resolver problemas; comunicar; conectar; y representar.

4.2.1 Razonar y argumentar

La mediación docente favorece constantemente el razonamiento y la argumentación matemática. El profesor promueve que las personas estudiantes justifiquen sus respuestas, elaboren conclusiones y construyan generalizaciones a partir de casos concretos. Por ejemplo, en el extracto 6, cuando el profesor pregunta: “cuatro, ¿por qué?” después de que Pablo responde “tenemossss... ..cuatro”. Una respuesta simple del profesor podría haber sido “incorrecto” o “no”, pero en vez de eso impulsa a los estudiantes a justificar sus afirmaciones, aun cuando no son verdaderas.

Asimismo, de los diálogos referidos se observa que el razonamiento inductivo aparece cuando el profesor modifica las condiciones del problema en el extracto 5, y plantea: “Si colocáramos en la caja solo tres bolas rojas y dos bolas moradas, ¿qué podríamos decir?”. A través de este cambio, el estudiante debe revisar y reorganizar sus ideas previas sobre eventos igualmente probables. La discusión permite generalizar que la probabilidad depende de la cantidad de elementos en la urna. También se promueve la argumentación mediante preguntas como: “¿Tiene coherencia eso?”, cuando surge la expresión “medio probable”. El profesor no invalida la respuesta, sino que desafía al grupo a reflexionar y argumentar sobre la precisión del lenguaje matemático. Por otra parte, durante la discusión colectiva surge el siguiente diálogo [7]:

P: ok, con respecto a este grupo, ¿cuál color tiene mayor cantidad de bolas?

G2: celeste (refiriéndose al azul).

P: Y con respecto a este grupo, ¿cuál color tiene más bolas?

Grupo 3: morado

P: ¿y ustedes? (señalando al grupo 4).

G4: la anaranjada.

P: ok, podemos ver que, en cada grupo, hay un color diferente que tiene mayor cantidad de bolas, ¿cómo le podemos llamar a ese evento asociado a ese color?

TODOS: evento más probable.

P: ¡muy bien!, le vamos a llamar evento más probable, conforme se discutió en cada grupo (profesor escribe en la pizarra la definición).

*Semejantemente se hace el cuestionamiento para los eventos menos probables e igualmente probables.

P: ahora bien, chicos, tengo aquí esta distribución de bolas (señalando dos bolas moradas y dos bolas anaranjadas colocadas sobre una mesa y cercadas por cartón). ¿Cuál color sería más probable de extraer si metiéramos las cuatro bolas en la urna?

TODOS: ningunooo

P: ¿Por qué?

Carlos: hay igual cantidad de bolas moradas y anaranjadas.

P: ¿cómo dijimos que se llaman los eventos con igual número de elementos?

Juan: igual de probabilidad.....igualmente probables.

P: los demás, ¿qué opinan?

TODOS: sí, igualmente probables.

Se evidencia que el profesor igualmente promueve la argumentación durante este momento de discusión colectiva, nuevamente utiliza preguntas como “por qué”, las cuales invitan a los estudiantes a justificar su respuesta, incluso usando el lenguaje probabilístico introducido de eventos igualmente probables.

Además, el profesor impulsa procesos de generalización y formalización colectiva. Al comparar las distintas urnas de cada grupo y preguntar “¿cuál color tiene mayor cantidad de bolas?”, orienta a las personas estudiantes hacia la construcción de definiciones matemáticas compartidas. De esta manera, el conocimiento deja de ser una observación aislada y se transforma en un concepto formalizable.

4.2.2 Plantear y resolver problemas

La mediación docente potencia la resolución de problemas al presentar situaciones concretas como la del extracto 7: “tengo aquí esta distribución de bolas (señalando dos bolas moradas y dos bolas anaranjadas colocadas sobre una mesa y cercadas por cartón). ¿Cuál color sería más probable de extraer si metiéramos las cuatro bolas en la urna?”, en este caso se evidencia que el profesor plantea una situación problema después de ya haber trabajado los conceptos de eventos más probables, menos probables e igualmente probables en las discusiones grupales,

de forma que los estudiantes pongan en práctica lo aprendido en estos momentos de discusión para responder a la situación planteada con el material concreto. La situación anterior requiere que el estudiante plantee la situación en términos de cantidades asociadas a cada color, y luego interprete, de acuerdo con esa cantidad, si realmente se puede decir que hay un evento más probable que otro, llegando a la deducción de que no existe.

Así, aunque las actividades se desarrollan en un contexto sencillo, el profesor las transforma en problemas matemáticos mediante preguntas que exigen interpretar la información disponible. Además, la mediación docente impulsa la reformulación de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones. Por ejemplo, en el extracto 5, cuando los estudiantes consideran que el rojo y el morado son igualmente probables en la configuración inicial de la urna, y luego el profesor cambia las cantidades de bolas asociadas a cada color, se genera un nuevo problema matemático que obliga a reinterpretar la situación. Estos escenarios de cambio de configuración son estrategias que utiliza el profesor para evaluar el conocimiento, y al mismo tiempo, para aprovechar el uso del material concreto en la configuración de diferentes formas de como se le podría plantear una situación problema al estudiante.

4.2.3 Comunicar

La comunicación matemática constituye uno de los procesos más promovidos por la mediación docente observada, siendo implícita a la discusión matemática. El profesor genera continuamente espacios para que las personas estudiantes expresen ideas, expliquen procedimientos y utilicen lenguaje matemático. Un ejemplo significativo ocurre cuando el profesor pregunta en el extracto 2: “¿Puede explicar por qué eso es una experiencia NO aleatoria, Ángela?”. La estudiante debe verbalizar su razonamiento y explicar cómo el uso del uniforme permite predecir la situación. Esta acción fortalece la expresión oral y la organización de ideas matemáticas.

Así mismo, la comunicación matemática se potencia cuando el profesor solicita explicaciones adicionales. Por ejemplo, después de que Pablo afirma que existen diez eventos simples, en el extracto 6, el profesor pregunta: “¿podría explicar un poco más eso que dijiste, Pablo?”. Esta intervención impulsa al estudiante a clarificar y justificar su razonamiento ante el grupo. La mediación también promueve el uso progresivo de lenguaje matemático formal. Inicialmente los estudiantes utilizan expresiones cotidianas como “medio probable”, pero el profesor guía la discusión hacia términos más precisos como “igualmente probable”. De esta manera, el estudiante aprende a comunicar ideas matemáticas utilizando vocabulario especializado.

4.2.4 Conectar

El profesor establece conexiones entre los conceptos probabilísticos y otros conocimientos matemáticos o contextos cotidianos. Estas conexiones permiten que el estudiante otorgue significado a los conceptos en estudio. Por ejemplo, el docente relaciona las experiencias aleatorias con situaciones cercanas al contexto de los estudiantes, como una ruleta, una rifa, el bingo o el uniforme escolar, presente en los extractos 1 y 2. Estas referencias conectan la probabilidad con experiencias de la vida cotidiana y facilitan la comprensión de la noción de aleatoriedad.

Así mismo, el profesor conecta la probabilidad con conceptos matemáticos previamente estudiados. Cuando compara en el extracto 2 “más probable”, “menos probable” e “igualmente probable” con las relaciones “mayor que”, “menor que” e “igual que”, establece un puente entre la probabilidad y el razonamiento numérico. Esta mediación ayuda al estudiante a construir nuevos significados a partir de conocimientos anteriores. También, se promueven conexiones conceptuales internas dentro de la propia probabilidad. El profesor relaciona eventos simples, eventos compuestos, frecuencia y probabilidad, permitiendo que el estudiante comprenda que los conceptos no son aislados, sino parte de una red conceptual.

4.2.5 Representar

Tal como es referido por Batanero et al. (2004), parte de la mediación docente es el uso de actividades matemáticas que promuevan el uso de distintas representaciones, en este sentido, las bolas de distintos colores, las urnas y la distribución física de elementos funcionan como representaciones concretas y visuales de conceptos abstractos relacionados con la probabilidad. Por ejemplo, en el extracto 6, cuando el profesor señala las bolas y pregunta “¿cuántos eventos simples tenemos acá?”, utiliza la representación concreta de la urna para que los estudiantes identifiquen eventos y relaciones probabilísticas. La manipulación y observación de los objetos facilita la comprensión de conceptos abstractos. Así mismo, en el extracto 4, el profesor promueve representaciones simbólicas al comparar relaciones probabilísticas con símbolos matemáticos. Cuando pregunta “¿qué símbolo usamos?” al comparar el 2 con el 2, introduce la representación del signo igual como apoyo para comprender el concepto de “igualmente probable”. La representación también se evidencia cuando el profesor escribe definiciones en la pizarra después de la discusión colectiva. Esta acción transforma las ideas orales construidas grupalmente en registros matemáticos más formales y permanentes.

5. CONSIDERACIONES FINALES

Los resultados obtenidos permiten concluir que la mediación docente desempeña un papel fundamental en el desarrollo de discusiones matemáticas orientadas a la construcción de significados sobre los conceptos probabilísticos de eventos más probables, menos probables e igualmente probables; así como también de eventos aleatorios y no aleatorios.

En relación con la pregunta de investigación ¿Qué acciones de la mediación docente del profesor de Matemática influyen en el aprendizaje de los conceptos probabilísticos de eventos menos probables, más probables e igualmente probables, y cómo esta mediación ayuda a romper con dificultades evidenciadas en el estudiante?, se identificó que las acciones referidas por Ponte et al. (2013) fueron movilizadas por el profesor, favoreciendo la construcción progresiva de significados probabilísticos. Estas acciones permitieron que las personas estudiantes no solo respondieran preguntas de forma concreta, sino que justificaran, argumentaran y reformularan sus razonamientos, evidenciando procesos de construcción y revisión de significados probabilísticos durante la interacción.

Adicionalmente, la mediación docente favoreció la identificación y transformación de algunas dificultades e interpretaciones iniciales expresadas por las personas estudiantes durante las discusiones matemáticas, particularmente aquellas relacionadas con el uso del lenguaje cotidiano e interpretaciones intuitivas de los conceptos probabilísticos. Por ejemplo,

expresiones como “medio probable” o la asociación entre color y tipo de evento fueron transformadas, mediante preguntas orientadoras y comparaciones con conocimientos previos, a conceptos matemáticos más precisos como “igualmente probable”, “evento simple” y “evento compuesto”. De esta forma, la intervención docente favoreció procesos de resignificación de ideas iniciales y la movilización progresiva de un lenguaje informal o coloquial hacia un lenguaje matemático más formal y coherente con los conceptos abordados durante los intercambios de diálogo analizados en la intervención profesor-estudiante.

Con respecto a la segunda pregunta de investigación, ¿qué procesos matemáticos destacados por los Programas de Estudio de Matemáticas del currículo costarricense (MEP, 2012) son movilizados en el estudiante a través de dichas acciones de mediación?, tal como fue destacado por Ponte et al. (2013), las preguntas y orientaciones que haga el profesor durante las discusiones matemáticas favorecen a que surjan diferentes procesos matemáticos. Los resultados muestran que la mediación docente movilizó los diversos procesos matemáticos destacados en los Programas de Matemáticas del currículo costarricense. Específicamente, se evidencia que más de un proceso se promueve en un mismo diálogo, y que estos procesos se movilizan en las personas estudiantes, principalmente, con preguntas y la forma en la que el profesor las plantea, siendo que, como sugiere el MEP (2012), la mayor visualización de uno u otro proceso dependerá de la forma en que el profesor oriente la clase.

En relación a las limitaciones que se desprenden de esta investigación, considerando que el análisis se fundamentó principalmente en los intercambios discursivos profesor-estudiante producidos durante la implementación de la propuesta, los resultados permiten identificar procesos de construcción y transformación de ideas que posteriormente son retomadas y formalizadas por el profesor, pero no permiten establecer, de manera concluyente, la consolidación del aprendizaje a partir de los extractos analizados. Si bien, la propuesta de la clase contempló la valoración de la consolidación de aprendizajes de los conceptos abordados mediante una tarea de evaluación, el presente estudio se centra en el análisis de la mediación docente y no en la medición de los aprendizajes conceptuales alcanzados.

Finalmente, esta investigación no se centró en el análisis del uso del material concreto para promover el discurso del profesor y el aprendizaje de conceptos probabilísticos en la clase de probabilidad. Por lo anterior, esto abre la posibilidad para que estudios posteriores se centren en investigar sobre este asunto con los conceptos abordados u otros contenidos de probabilidad de primaria; inclusive investigar el aporte que puede tener el material concreto complementado con las tecnologías digitales para favorecer el discurso del profesor en el aula, de forma tal que, como refieren Hernández-Solís et al. (2021), se busque aprovechar al máximo de los recursos tecnológicos como los simuladores para un mayor dinamismo de la clase de probabilidad, y analizar cómo estos cobran mayor o menor importancia según el abordaje que le da el profesor.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

Se declara que el autor de este texto, denotado por GRM, planteó la idea desarrollada y construyó el referente teórico y metodológico. También, ejecutó las intervenciones didácticas

para luego realizar una recolección y análisis de los datos. De igual forma, GRM ejecutó la redacción de la investigación.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la persona autora correspondiente, GRM, previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Se agradece al Lic. Siviany Montero por facilitar su grupo de estudiantes como foco de esta investigación para llevar a cabo la propuesta de clase. Igualmente, agradezco al Departamento de Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica, quien mediante los espacios de reflexión y análisis de la práctica docente que permite el curso MA0024 Didáctica de la Estadística y la Probabilidad, se hizo posible llevar a cabo esta visita a la escuela, permitiendo reflexionar sobre la teoría y cómo esta se puede poner en práctica.

5. REFERENCIAS

- Alsina, Á. (2017). Contextos y propuestas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad en Educación Infantil: Un itinerario didáctico. *Revista Épsilon*, 34(95), 25–48.
- Alsina, Á., & Vásquez, C. (2015). La enseñanza de la probabilidad en Educación Primaria: El currículo versus el libro de texto. En P. A. Sánchez-Martínez (Ed.), *Educación matemática, un mar de posibilidades: 17 Jornadas para el Aprendizaje y la Enseñanza de las Matemáticas* (pp. 1–14). Sociedad de Educación Matemática de la Región de Murcia.
- Alsina, Á., y Bosch, E. (2023). Estadística y probabilidad en infantil y primaria: Diez materiales manipulativos esenciales para desarrollar el sentido estocástico. *Tangram: Revista de Educação Matemática*, 6(3), 24–59. <https://doi.org/10.30612/tangram.v6i3.17587>
- Batanero, C. (2000). ¿Hacia dónde va la educación estadística? *Blaix*, 15(2), 2–13.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*. Universidad de Granada.
- Batanero, C. (2004). Los retos de la cultura estadística. *Yupana*, 1(1), 27–37. <https://doi.org/10.14409/yu.v1i1.238>
- Batanero, C. (2019). *Treinta años de investigación en educación estocástica: Reflexiones y desafíos*. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín, & E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1–15). Universidad de Granada
- Batanero, C., Godino, J. D., & Roa, R. (2004). *Training teachers to teach probability*. *Journal of Statistics Education*, 12(1). <https://doi.org/10.1080/10691898.2004.11910715>

- Batanero, C., Álvarez-Arroyo, R., Hernández-Solís, L. A., y Gea, M. M. (2021). El inicio del razonamiento probabilístico en educación infantil. *PNA: Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 15(4), 267–288.
- Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6th ed.). Routledge.
- Dorado, A. (2021). *Investigación sobre la probabilidad en educación primaria* (Tesis de maestría). Universidad de Oviedo.
- Eichler, A. (2007). Individual curricula: Teachers' beliefs concerning stochastic instruction. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2(3), 208–226.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Reidel.
- Garfield, J. B., Ben-Zvi, D., Chance, B., Medina, E., Roseth, C., y Zieffler, A. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4020-8383-9>
- Godino, J. D. (2024). *Teoría de la idoneidad didáctica basada en el Enfoque Ontosemiótico (EOS)*. Universidad de Granada.
- Hernández-Solís, L. A., Batanero, C., Gea, M. M., y Álvarez-Arroyo, R. (2021). Comparación de probabilidades en urnas: Un estudio con estudiantes de Educación Primaria. *Uniciencia*, 35(2), 1–18. <https://doi.org/10.15359/ru.35-2.9>
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). *Programas de estudios de matemáticas de educación general básica y educación diversificada*. <https://www.mep.go.cr/sites/default/files/media/matematica.pdf>
- Piaget, J. e Inhelder, B. (1951). *La genése de l'idée de hasard chez l'enfant*. Presses Universitaires de France.
- Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., y Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. *Quadrante*, 22, 55–81.
- Rodríguez, B., Rosas, A., y Miranda, I. (2018). La enseñanza-aprendizaje de las reglas de probabilidad: El papel del profesor y sus decisiones. *Latin-American Journal of Physics Education*, 12(4), 4312-1–4312-10.



INTERVENCIÓN BASADA EN LA TEORÍA DE REGISTROS SEMIÓTICOS PARA MEJORAR EL RENDIMIENTO EN NÚMEROS ENTEROS EN OCTAVO GRADO

INTERVENTION BASED ON THE THEORY OF SEMIOTIC REGISTERS TO IMPROVE PERFORMANCE IN INTEGERS AMONG EIGHTH-GRADE STUDENTS

Katya Lisseth López-López¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0001-5302-5610>

Eduardo Adam Navas-López²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0003-3684-2966>

Cristina Lissette Sandoval-Zúniga³

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0003-2633-6792>

RESUMEN

Muchas de las dificultades históricas en la comprensión de conceptos matemáticos siguen siendo un desafío para los estudiantes en la actualidad. Ocurre particularmente con los números negativos. La literatura científica identifica que las principales dificultades en el aprendizaje de los números enteros son la correcta interpretación de números negativos y realizar operaciones que involucren números negativos. Se ha observado que los estudiantes de octavo grado de una escuela pública del departamento de San Salvador, El Salvador, enfrentan diversas dificultades al operar con este conjunto numérico, a

¹ Universidad de El Salvador, San Salvador, El Salvador. Correo electrónico: 1121030@ues.edu.sv

² Universidad de El Salvador, San Salvador, El Salvador. Correo electrónico: eduardo.navas@ues.edu.sv

³ Universidad de El Salvador, San Salvador, El Salvador. Correo electrónico: sz23006@ues.edu.sv

pesar de que dicho contenido, originalmente, corresponde al plan de estudios de séptimo grado, lo que indica limitaciones conceptuales previas. En investigaciones precedentes, se destaca la importancia de emplear diversos registros de representación semiótica en el aula, señalando que los métodos tradicionales de enseñanza a menudo no incorporan estas formas diversas. Por ello, el objetivo de este estudio es analizar el efecto de una intervención basada en la teoría de los Registros de Representación Semiótica sobre el rendimiento de esos estudiantes en números enteros y sus operaciones básicas. Entonces, se realizó una investigación-acción de enfoque mixto con un diseño de pre-prueba, intervención y post-prueba. La intervención consistió en talleres que enfatizaron diferentes representaciones semióticas. Los resultados cuantitativos muestran un incremento significativo del rendimiento en las operaciones con números enteros gracias a la intervención. El análisis cualitativo indica que los estudiantes tienen más dificultades en la conversión del registro verbal al numérico y en la argumentación adecuada de las propiedades en el registro verbal.

Palabras clave: Números enteros, Representación semiótica, Octavo grado.

ABSTRACT

Many historical difficulties in understanding mathematical concepts remain a challenge for students today. This is particularly true for negative numbers. Scientific literature identifies that the primary difficulties in learning integers are the correct interpretation of negative numbers and performing operations involving them. It has been observed that eighth-grade students at a public school in the department of San Salvador, El Salvador, face various difficulties when operating with this number set, even though this content originally corresponds to the seventh-grade curriculum, indicating prior conceptual limitations. Previous research highlights the importance of employing diverse registers of semiotic representation in the classroom, noting that traditional teaching methods often fail to incorporate these diverse forms. Therefore, the objective of this study is to analyze the effect of an intervention based on the Theory of Registers of Semiotic Representation on these students' performance in integers and their basic operations. To this end, a mixed-methods action research study was conducted using a pre-test, intervention, and post-test design. The intervention consisted of workshops that emphasized different semiotic representations. Quantitative results show a significant increase in performance regarding operations with integers due to the intervention. Qualitative analysis indicates that students face greater difficulties in conversion from the verbal to the numerical register and in providing adequate arguments for properties within the verbal register.

Keywords: Integers, Semiotic representation, Eighth grade.

1. INTRODUCCIÓN

Una de las funciones fundamentales de la educación matemática es identificar y analizar los obstáculos que dificultan la comprensión y el aprendizaje de esta disciplina; y a lo largo de la historia, el desarrollo de conceptos matemáticos ha estado marcado por los desafíos que enfrentaron los propios matemáticos en su formulación y evolución (Gagatsis y Alexandrou, 2022).

En realidad, muchas de las dificultades que en su momento representaron un reto incluso para los matemáticos más destacados siguen siendo un desafío para los estudiantes en la actualidad (Gagatsis y Alexandrou, 2022). Particularmente, esto también ocurre con los números negativos (Bruno, 2001; Vlassis, 2004). Según Glaeser (1981), a lo largo de la historia, incluso los grandes matemáticos que aceptaron los números negativos y los utilizaron en sus cálculos, encontraron problemas para comprender el concepto detrás de ellos,

especialmente con la regla de los signos. Brousseau (1983) señala que los errores no son sólo el resultado del desconocimiento, la incertidumbre o el azar, sino que son consecuencia de un conocimiento previo que en su momento fue útil y exitoso, pero que posteriormente se revela como falso o simplemente inadecuado. Ese conocimiento previo es el obstáculo epistemológico.

El aprendizaje de los números enteros ha sido identificado como un desafío recurrente y repetitivo en la educación matemática, dado que su comprensión exige la modificación, adecuación y asimilación de aprendizajes previos, así como cierto nivel de abstracción para lograr una comprensión del significado de los números y sus operaciones (Bruno, 2001; Gagatsis y Alexandrou, 2022; Kilhamn, 2011; Navas López y Cruz Miranda, 2025; Vlassis, 2004). Este salto resulta ser crítico para estudiantes de 12 o 13 años (edad en la que suele realizarse), ya que los enfrenta a concepciones previas, fuertemente arraigadas y construidas a lo largo de toda la enseñanza primaria, e incluso, antes (Bruno, 2001). Se sabe, además, que estos problemas suelen persistir cuando los estudiantes aprenden álgebra (Gallardo y Rojano, 1988). Hay que tener en cuenta que la introducción a esta temática se hace en la educación formal como algo únicamente aritmético, pero tiene como objetivo un fin algebraico (Parada et al., 2013). En este sentido, la teoría de Registros de Representación Semiótica ofrece una base teórica que permite conceptualizar los objetos matemáticos y posibilita un salto semántico entre el pensamiento aritmético y el pensamiento algebraico (Burak y Brandt, 2010).

Alfarisi et al. (2022), en su revisión sistemática, identificaron que las principales dificultades en el aprendizaje de los números enteros son: la correcta interpretación de números negativos y realizar operaciones que involucran números negativos. En general, como plantean Pluinage y Flores (2016), los estudiantes no perciben la regla de los signos como una dificultad en el análisis, lo cual resulta significativo, puesto que sugiere una falta de reflexión sobre el proceso de solución y una mecanización de este, representando un obstáculo para el desarrollo de estrategias y procedimientos didácticos.

De hecho, según Duval (2004) no es posible comprender un objeto matemático sin la comprensión o producción de alguna representación semiótica del objeto. Y precisamente, se ha encontrado que las representaciones visuales del producto de los naturales provocan dificultades para la comprensión del producto de los enteros (Pluinage y Flores, 2016). En esta línea, Velosa Sánchez (2020) señala que las cantidades menores que cero no representan algo que sea tangible, y que su uso surge por la necesidad matemática de realizar una representación mental del conjunto de los números enteros para poder trabajar con ellas.

En El Salvador, el programa oficial incluye el estudio de los números enteros en séptimo grado (Argueta et al., 2019a), pero en la práctica cotidiana, es muy común encontrar estudiantes de octavo o noveno grado, e incluso de bachillerato (décimo y onceavo grado) que no comprenden los números negativos.

De manera específica, en el Complejo Educativo “Japón” del distrito de Mejicanos, departamento de San Salvador, El Salvador, durante la realización de las prácticas docentes de dos de las investigadoras durante 2025, se observó que los estudiantes de octavo grado del turno matutino, enfrentan dificultades similares a las identificadas por Alfarisi et al. (2022) y Pluinage y Flores (2016) al momento de operar números enteros. Se constató, además, que

los estudiantes no conocían la representación figural unidimensional de los números enteros, a pesar de ser abundante en la unidad 1 del libro de texto (Argueta et al., 2019a) que se supone usaron el año anterior. En contraste, se puede verificar que en la unidad 2 (sumas y restas) y la unidad 3 (multiplicación y división) del mismo libro de texto, únicamente hay dos ejemplos de representación visual, uno de suma y resta combinada, y otro para multiplicación. Por lo demás, las unidades 2 y 3 no cuentan con otras representaciones que no sean numéricas.

Recientemente, se han documentado las dificultades que presentan estudiantes de séptimo grado de la misma zona geográfica (Navas López y Cruz Miranda, 2025), como la dificultad para dar sentido a cantidades negativas, dificultad para unificar la recta real, dificultad para pasar del cero absoluto (la nada) al cero arbitrario (punto de simetría entre positivos y negativos), y estancamiento en el estadio de operaciones concretas.

Por ello, con el propósito último de mejorar el rendimiento de esos estudiantes, se plantea el siguiente objetivo general: Analizar el efecto de una intervención didáctica basada en la teoría de Registros de Representación Semiótica (RRS) sobre el rendimiento de los estudiantes de octavo grado del Complejo Educativo “Japón”, en el aprendizaje de los números enteros y sus operaciones básicas. Para lograrlo, se plantean los siguientes objetivos específicos:

1. Diagnosticar el nivel de rendimiento y conocimiento actual de los estudiantes sobre los números enteros y sus operaciones básicas mediante una pre-prueba, adaptada de Marulanda Sarmiento (2017).
2. Implementar una intervención didáctica basada en la teoría de RRS, promoviendo el uso de representaciones gráficas, simbólicas y verbales de los números enteros y sus operaciones básicas.
3. Comparar el rendimiento de los estudiantes antes y después de la intervención mediante una post-prueba, adaptada de Marulanda Sarmiento (2017).
4. Analizar cualitativamente, desde la teoría de RRS, los errores y dificultades evidenciados por los estudiantes en las pruebas aplicadas.

1.1 Justificación

La revisión sistemática de literatura de Goes et al. (2024) destaca la importancia de emplear diversos registros semióticos en el aula, señalando que los métodos tradicionales de enseñanza a menudo no incorporan estas formas diversas, lo que puede limitar la comprensión de los estudiantes.

La integración de los registros de representación semiótica en el plan de estudios de matemáticas puede proporcionar un enfoque estructurado para la enseñanza de conceptos complejos. Esta integración es esencial para desarrollar un plan de estudios que apoye diversas tareas de aprendizaje y promueva la alfabetización matemática (Colombo et al., 2010).

Duval (1993) sostiene que el uso de múltiples registros parece ser un requisito esencial para evitar que los objetos matemáticos se confundan con sus representaciones y permitir su reconocimiento en cada una de ellas. La investigación sugiere que el uso de representaciones semióticas en la enseñanza puede cerrar brechas conceptuales y mejorar la

capacidad de los estudiantes para articular argumentos matemáticos, potenciando así su alfabetización matemática general (Salazar-Torres et al., 2016; Vlassis, 2004). Se ha demostrado, además, que el uso de representaciones semióticas promueve el desarrollo del razonamiento matemático (Burak y Brandt, 2010). De manera específica, la incorporación de representaciones gráficas ha demostrado ser una metodología eficaz para la enseñanza de los números negativos (Bishop et al., 2014; Oliveira et al., 2025; Velosa Sánchez, 2020), y además se considera indispensable para el desarrollo de sus operaciones aritméticas básicas (Velosa Sánchez, 2020).

Un ejemplo es la recta numérica, una representación semiótica gráfica que ayuda a los estudiantes a desarrollar una variedad de habilidades que pueden aplicarse no sólo en operaciones con números enteros, sino también en otros conceptos matemáticos más amplios (Gagatsis y Alexandrou, 2022; Vlassis, 2004). Por lo tanto, resulta fundamental diseñar estrategias didácticas que incorporen de manera eficaz la teoría de RRS en la enseñanza de los números enteros y sus operaciones básicas, con el fin de que los estudiantes logren una comprensión profunda y significativa de este concepto.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

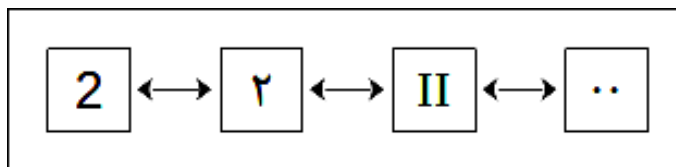
2.1 La teoría de registros de representación semiótica

Duval (2004) plantea que: “No es posible estudiar los fenómenos relativos al conocimiento sin recurrir a la noción de representación” (p. 58). En particular, un RRS se refiere a las diversas formas y sistema de signos que se pueden utilizar para transmitir el significado de los objetos matemáticos (Duval, 2017). Estos sistemas de signos constituyen estructuras más restringidas, donde los signos (señales, símbolos, íconos) se relacionan bajo reglas específicas (Duval, 2004).

Existen diferentes tipos de RRS, entre ellas: el lenguaje natural, el gráfico, el figural (Duval, 2004), el algebraico, el numérico (Henriques y Almouloud, 2016), el tabular (Costa y Nóbrega, 2024), diagramáticas, fotográficas, por mapas o cartas, gestual o corporal (Aparecida de Faria y Laburú, 2021), y maquetas (Goes et al., 2024).

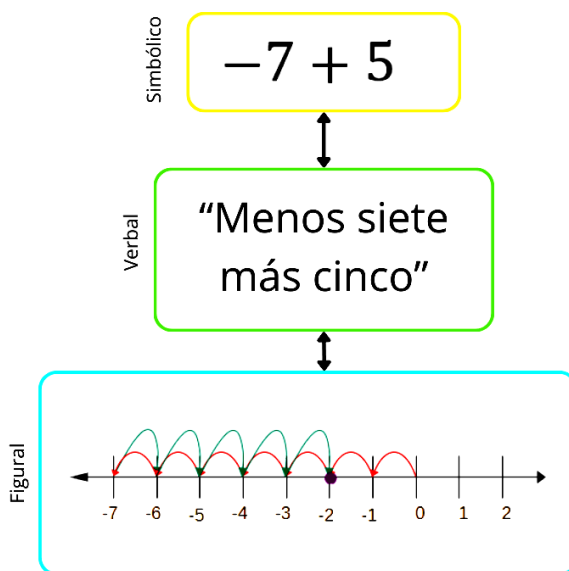
Duval (2004) indica que hay tres actividades cognitivas clave relativas a las representaciones semióticas: formación, tratamiento y conversión. La formación de representaciones es un proceso cognitivo mediante el cual se construyen imágenes mentales o simbólicas de un objeto, fenómeno o concepto, a partir del uso de algún sistema de signos concreto (Burak y Brandt, 2010; Duval, 2004). Esta actividad implica evocar un objeto real siguiendo las reglas propias del RRS utilizado, lo que supone una selección intencionada de ciertos rasgos relevantes del objeto que se desea representar (Duval, 2003, 2004).

El tratamiento de las representaciones semióticas se refiere a una operación cognitiva que implica la transformación de una representación dentro del mismo RRS pero con distinto sistema de signos (Duval, 2003, 2004; Burak y Brandt, 2010). Por ejemplo, en la Figura 1 se muestran diferentes representaciones del objeto matemático conocido como número 2, en el mismo registro simbólico, pero en diferentes sistemas de signos (indoarábigo, arábigo, romano y maya).

Figura 1. Ejemplo de tratamiento de representaciones semióticas del número 2.

Fuente: Elaboración propia.

La conversión de representaciones semióticas es una operación cognitiva que implica transformar una representación perteneciente a un RRS en otra representación equivalente, pero expresada en otro RRS (Duval, 2003, 2004; Burak y Brandt, 2010). Esto sucede al traducir una frase verbal en una imagen, transformar una gráfica en un texto descriptivo o expresar datos en una fórmula matemática (Duval, 2003). Esta actividad cognitiva es importante en procesos como el razonamiento matemático, ya que permite establecer equivalencias entre distintas formas de representación, ampliando así la comprensión del objeto representado (Duval, 2006). Por ejemplo, en la Figura 2, se presentan tres representaciones semióticas de una operación matemática entre números enteros en los registros simbólico, verbal y figural.

Figura 2. Ejemplo de conversión entre representaciones semióticas de una operación de suma de números enteros.

Fuente: Elaboración propia.

2.2 Representaciones semióticas en la enseñanza de números enteros y sus operaciones

Según Velosa Sánchez (2020), el concepto de número entero se relaciona con diversas representaciones semióticas, como la gráfica, algebraica, numérica y la recta numérica. Esta diversidad es clave para el aprendizaje matemático, ya que, como afirma Duval (2006), comprender un concepto requiere coordinar al menos dos registros semióticos distintos para evitar un aprendizaje únicamente procesual.

Previamente, se ha argumentado la utilidad de representaciones visuales para comprender el significado de los números enteros (Pluvinage y Flores, 2016). Específicamente, la representación figural unidimensional, usando la recta numérica (ver Figura 2), favorece el análisis de puntos, desplazamientos y operaciones (Rivera Santacruz, 2023; Velosa Sánchez, 2020). Además, los recursos manipulativos, como las fichas bicolores, son fundamentales para representar visualmente las operaciones aritméticas básicas (Jiménez y Bolaños, 2015), por lo que este trabajo los incorpora como apoyo visual y gráfico para los estudiantes.

A continuación, se presentan algunos antecedentes del uso de la teoría de RRS en la enseñanza de los números enteros y sus operaciones en estudiantes de educación básica.

Jiménez y Bolaños (2015), en un contexto de educación inclusiva con estudiantes ciegos en Colombia, priorizaron el lenguaje natural y las fichas bicolores (con texturas) para representar y operar con enteros. Dado que esta población tiene necesidades especiales, se reconoce al lenguaje natural y los recursos manipulativos como los sistemas de representación semiótica privilegiados.

Marulanda Sarmiento (2017), mediante una investigación-acción, propone un proyecto de aula mediado por las TIC con el propósito de fortalecer el pensamiento numérico en las operaciones de adición y sustracción de números enteros en estudiantes de séptimo grado en Colombia. Su intervención se centró en el uso de representaciones semióticas en los registros gráfico y simbólico, principalmente el uso de la recta numérica. Para evaluar la mejora, en esa tesis se aplicaron dos pruebas, una diagnóstica y otra final (post-intervención). Estas permitieron reconocer el aumento del rendimiento de los estudiantes al realizar ejercicios y problemas de enteros así como sus operaciones de suma y resta. Por ello, para este trabajo, se usaron adaptaciones de sus pruebas diagnóstica y final.

Por su parte, Velosa Sánchez (2020) en su estudio con niños de sexto grado de un colegio privado en Colombia, destaca que la diversidad de representaciones semióticas y las actividades de conversión mejoran el aprendizaje del concepto de número entero. En esta línea, Fraga da Silva y Rosa (2022) realizaron una investigación con enfoque STEAM dirigido a estudiantes de séptimo grado en Brasil, esto con el objetivo de dotar de significado a los números enteros. En su investigación, fomentan la asociación entre la representación verbal de los números enteros con una representación gráfica basada en escalas cromáticas: colores fríos para temperaturas bajo cero (asociadas a enteros negativos) y colores cálidos para temperaturas sobre cero (vinculadas a enteros positivos).

Rivera Santacruz (2023), con estudiantes de séptimo grado en una zona rural de Colombia, enfatiza la conversión entre la representación numérica y la figural unidimensional, permitiendo al estudiante asumir el rol de validar, verificar e interpretar una misma situación

representada en dos registros distintos, evitando así la percepción errónea de que se trata de problemas diferentes o que deben resolverse de forma distinta.

De estos estudios, concretamente Marulanda Sarmiento (2017), Velosa Sánchez (2020) y Rivera Santacruz (2023), aplicaron una intervención didáctica basada en la incorporación de diferentes representaciones semióticas de los números enteros y sus operaciones básicas; y verificaron, por medio de instrumentos tipo examen, si los estudiantes aumentaron su rendimiento al resolver ejercicios y problemas sobre números enteros.

A diferencia de esos antecedentes, este estudio está contextualizado en una escuela pública de El Salvador, donde hay escasez de investigaciones publicadas que aborden la enseñanza de los números enteros utilizando diferentes RRS, y donde, como ya fue explicado, el libro de texto oficial es pobre en representaciones no simbólicas de las operaciones entre números enteros. Además, es común que se presente un desfase curricular relevante: el contenido de números enteros, que oficialmente es propio de séptimo grado, debe abordarse, nuevamente, en octavo grado, con el fin de solventar los vacíos conceptuales previos de los estudiantes.

2.3 Recursos manipulativos

Pese a los avances tecnológicos, continúa sobresaliendo el uso de materiales concretos y manipulativos como estrategia efectiva en la enseñanza de la matemática a nivel de quinto a séptimo grado (Mendoza Cedeño et al., 2025). En esta misma línea, Souza Miola y Rossetti (2022) reportan que el uso de estos recursos en la enseñanza de los números enteros es una de las tendencias en Brasil, al proporcionar una experiencia de aprendizaje más tangible y significativa. Además, diversos estudios han evidenciado que el uso sistemático de materiales manipulativos mejora la asimilación de conceptos relacionados con los números enteros, ya que promueven la participación del estudiante, fomentan la exploración de ideas matemáticas y fortalecen la comprensión conceptual a través de la representación concreta de las operaciones (Sahat et al., 2018; Quane y Brown, 2022; Costa, 2023).

Borjas Franco (2009) en su tesis, aborda las dificultades que enfrentan los estudiantes de séptimo grado en la comprensión y operación con números enteros, particularmente en la adición y sustracción. Además, propone una intervención basada en recursos manipulativos y representaciones semióticas, enfatizando el uso de actividades y materiales concretos que facilitan la conversión entre el registro gráfico (figural unidimensional y fichas) y el simbólico (numérico).

Como señala Oliveira et al. (2025), en su revisión de literatura, este enfoque es particularmente efectivo con las operaciones de números enteros, donde las representaciones gráficas y visuales, apoyadas en material manipulativo, facilitan la transición de lo abstracto a lo concreto.

Se retoma en este trabajo, la propuesta de Borjas Franco (2009) de incorporar las representaciones gráficas manipulativas con fichas bicolores. Esta elección se fundamenta en las revisiones de Souza Miola y Rossetti (2022) y de Oliveira et al. (2025) sobre su amplio uso y su efectividad para visualizar las operaciones de suma, resta, multiplicación y división de los números enteros, a través de reglas intuitivas como la eliminación de fichas de colores opuestos, y la inversión de colores por cambio de signo (Borjas Franco, 2009; Jiménez y

Bolaños, 2015); y por su obvia alineación con la teoría de RRS al permitir el tratamiento y conversión de representaciones.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

Este trabajo se enmarca en una metodología de investigación-acción con enfoque mixto y diseño de pre-prueba, intervención y post-prueba. En la parte cuantitativa, se evalúa el cambio en el rendimiento de los alumnos entre el antes y después de la intervención, aplicando la prueba de comparación para muestras emparejadas. En la parte cualitativa, se analizan las soluciones de los estudiantes en ambas pruebas, desde la teoría de RSS, destacando tanto las dificultades como los avances observados.

La investigación-acción es vista como una indagación práctica realizada por el profesorado, con el propósito de mejorar su práctica educativa a través de ciclos de acción y reflexión (Latorre, 2005). En este caso, se realizó un ciclo completo de Investigación-Acción. En la Figura 3 se presentan los pasos considerados para este trabajo, que se basan en la propuesta de Latorre (2005).

Figura 3. Pasos para realizar una investigación acción



Fuente: Elaboración propia, adaptado de Latorre (2005).

A continuación, se describe el proceso seguido:

1. Identificación del problema: Durante el desarrollo de las prácticas profesionales de dos autoras, se observaron errores numéricos cometidos por los estudiantes de octavo grado en cálculos algebraicos. Al indagar más, se llegó a la conclusión de que el problema era la falta de comprensión de los números enteros y sus operaciones básicas, particularmente cuando se involucran números negativos.

2. Planificación de la acción: Se diseñó una intervención didáctica enfocada en mejorar la enseñanza de las operaciones básicas entre números enteros mediante el uso de las representaciones semióticas gráficas (figural unidimensional y fichas bicolores), verbal y simbólica. Esta propuesta incluye diversas actividades que se espera faciliten la comprensión de los números enteros y sus operaciones. Para evaluar la efectividad de la intervención, se planeó realizar una pre-prueba (o prueba diagnóstica) y una post-prueba (o prueba final) de dificultad equivalente, y comparar sus resultados.

3. Implementación de la acción: En esta fase, se llevó a cabo la aplicación de las tres actividades principales con los estudiantes: la pre-prueba, la intervención, y la post-prueba. La pre-prueba se aplicó en el 25 de julio de 2025 en una sesión de clase de 45 minutos. La intervención se desarrolló en las primeras tres semanas de agosto de 2025, en tres sesiones de 60 minutos, una por semana. La post-prueba se aplicó el 26 de agosto del mismo año, en una sesión de 45 minutos.

4. Observación y recolección de datos: Se realizó el análisis de la pre-prueba (a finales del mes de julio de 2025) y de la post-prueba (a principios de septiembre de 2025). El análisis cuantitativo consistió en comparar la cantidad de respuestas incorrectas en cada prueba de cada sujeto, para lo que se aplicó la prueba de comparación de muestras emparejadas de Wilcoxon. Posteriormente (a finales de septiembre), se realizó el análisis cualitativo, que consistió en una revisión minuciosa de las soluciones presentadas por los estudiantes para categorizar los errores procedimentales y conceptuales cometidos en las operaciones y las dificultades observables en los procesos de tratamiento y conversión entre los registros gráfico, simbólico y verbal.

5. Reflexión sobre la acción: A partir de los datos recolectados, se realizó un análisis de los avances y los errores presentes en la pre-prueba y en la post-prueba para reflexionar sobre los resultados obtenidos, y saber así si la propuesta ha aumentado el rendimiento de los estudiantes al resolver ejercicios y problemas de números enteros y sus operaciones básicas, identificando tanto los logros como los aspectos que requieren ajustes.

3.1 Participantes y contexto

Los participantes son los ocho estudiantes de octavo grado, sección “B”, del turno matutino en el Complejo Educativo “Japón” que realizaron tanto la pre-prueba como la post-prueba y estuvieron presentes en todas las sesiones de la intervención. El complejo educativo está ubicado en la zona urbana del distrito de Mejicanos, departamento de San Salvador, El Salvador. Los estudiantes tienen entre 13 y 17 años y residen en áreas cercanas a la institución. Se caracterizan por mostrar apatía hacia la asignatura de matemáticas, tener escasa participación en ella, y dificultad para mantener la atención sostenida. Los estudiantes en este centro escolar adolecen de una elevada tasa de ausentismo, razón por la cual, sólo 8 de los 32 estudiantes del Octavo-B fueron considerados en este estudio.

3.2 Instrumentos

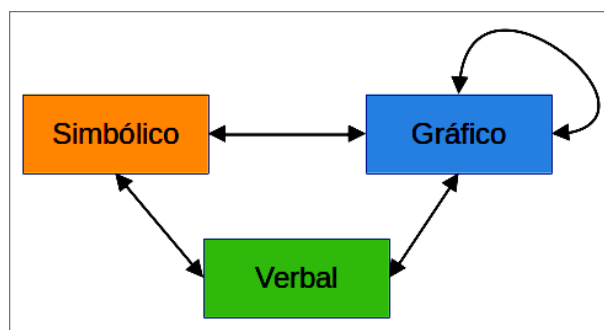
Tanto la pre-prueba como la post-prueba se construyeron tomando como base las respectivas pruebas de Marulanda Sarmiento (2017). Se agregó el contenido de las operaciones de multiplicación y división de números enteros, ya que los instrumentos originales sólo incluyen suma y resta. Ambas pruebas son muy similares en dificultad. Los instrumentos originales

constan de 12 ítems, pero para este trabajo se usaron 10. Se omitieron los ítems relacionados con la historia de los números enteros, ya que, en el programa de estudio oficial (Argueta et al., 2019a), este contenido no se aborda en El Salvador.

3.3 Propuesta Didáctica / Intervención

La intervención se centra en el tratamiento y conversión de los números enteros y sus operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) entre los registros: simbólico (representación numérica decimal), gráfico (representación figural unidimensional, y representación con fichas bicolores), y verbal (escrito y hablado). Concretamente, se abordan las conversiones y tratamientos, como se indica en la Figura 4. Debido a limitantes del tiempo disponible para realizar la intervención, esta consistió únicamente de tres sesiones de clases adicionales, que no se pudieron desarrollar de forma consecutiva, sino una por semana, durante tres semanas.

Figura 4. Conversiones y tratamiento contemplados en la intervención.



Fuente: Elaboración propia.

3.3.1 Sesión 1: Taller «Diferentes caras de los Números Enteros»

Duración: 1 hora.

En esta sesión, se presentan de nuevo los números enteros en sus representaciones numérica, verbal, y figural unidimensional. Por ejemplo, el número -2 (representación numérica en el registro simbólico) se lee “menos dos” (representación escrita en el registro verbal), y se puede representar como un punto sobre una recta horizontal, a dos marcas a la izquierda de la marca del cero (representación figural unidimensional en el registro gráfico). Se realizan cuatro o cinco de este tipo de ejemplos para que los estudiantes comprendan que se trata del mismo objeto matemático (número) en las tres representaciones. A continuación, se pide a los estudiantes realizar ejercicios en los que deben completar dos representaciones de un número entero dada una de ellas, tantos como sea posible hasta cubrir 20 minutos.

Después, se presentan las mismas tres representaciones (numérica, verbal y figural unidimensional) de operaciones sencillas de suma y resta de dos números enteros, como en la Figura 2. De este tipo de ejemplos, se presentan los siguientes: $+8-6$, $-7+5$, $-5+7$, $+7-5$, $-4+4$. A continuación, se asignan ejercicios para que los estudiantes pasen a realizarlos a la pizarra. Esto puede llevar hasta 25 minutos adicionales. Finalmente, en lo que resta de tiempo, se

presentan dos ejemplos similares, pero con tres números enteros, y se asignan ejercicios para la pizarra.

3.3.2 Sesión 2: Taller «Enteros en Acción: Sumando y Restando con Fichas»

Duración: 1 hora.

Como se adelantó en la sección de antecedentes, en esta sesión se procedió análogamente como lo hizo Borjas Franco (2009):

La sesión comienza con la explicación del uso de las fichas de colores: las rojas representan números negativos y las amarillas (o blancas), positivos. Se realizan ejercicios de: (a) conversión de representación numérica (registro simbólico) a la representación con fichas (registro gráfico); (b) conversión de representación verbal a la representación con fichas; (c) tratamiento de representación figural unidimensional a la representación con fichas; y luego a la inversa, ejercicios de (d) conversión de la representación con fichas (desde la pizarra) a la representación numérica; (e) conversión de fichas a verbal; y (f) tratamiento de fichas a figural unidimensional. Esto puede llevar hasta 25 minutos.

Después se procede con las representaciones de la suma y resta. Las reglas son las siguientes:

1. Dos fichas del mismo color se suman.
2. Las fichas de colores diferentes se eliminan entre sí.
3. El signo (-) invierte el color de la ficha; el signo (+) lo conserva.

Se abordan tres casos para la suma: ambos números positivos, ambos negativos y uno positivo y otro negativo. En la pizarra, se escribe la representación numérica y los estudiantes manipulan las fichas para obtener el resultado.

El mismo enfoque se aplica a la resta, considerando los mismos casos. Después de resolver los ejercicios, los estudiantes dibujan la recta numérica en sus cuadernos. El docente ilustra las operaciones mediante desplazamientos en la pizarra. A partir de la gráfica, los estudiantes deducen la operación correspondiente y realizan desplazamientos en sus cuadernos. Finalmente, resuelven ejercicios utilizando las fichas bicolores y la recta numérica.

3.3.3 Sesión 3: Taller «Enteros en Acción: Multiplicando y Dividiendo»

Duración: 1 hora.

La sesión comienza con una retroalimentación sobre los conceptos de multiplicación y división, incluyendo sus representaciones verbales (palabras o expresiones como “veces”, “por cada”, “repartidos entre”, etc.). Una vez unificados los significados, se trabaja con los registros de representación figural unidimensional y numérico, ya que estas representaciones son totalmente desconocidas para los estudiantes, y no están en los libros de texto oficiales.

En la recta numérica, los desplazamientos positivos se hacen hacia la derecha (color negro o azul) y los negativos hacia la izquierda (color rojo). Se abordan tres casos para la multiplicación y división: ambos números positivos, ambos negativos y uno positivo y otro negativo. El docente representa las operaciones en la recta numérica, mostrando cómo obtener el resultado.

Los estudiantes realizan ejercicios en sus cuadernos, observando patrones en las operaciones (leyes de signos). Para concluir el taller, se realizan preguntas sobre lo aprendido en las sesiones, para consolidar el aprendizaje.

4. RESULTADOS

Esta sección se ha dividido en dos partes, la del resultado cuantitativo y la de los resultados cualitativos. En este análisis, cada estudiante se identifica con el código 'E#', donde "#" es un número del 1 al 8.

4.1 Resultados cuantitativos

En la Tabla 1, se muestra la cantidad de respuestas incorrectas por cada sujeto en la pre-prueba y en la post-prueba, y la diferencia correspondiente (ambas pruebas tenían 10 ítems). Se aplicó la prueba de Wilcoxon para verificar diferencias ($V=28$, $p\text{-valor}=0.0213$) y se concluye que sí hay una diferencia estadísticamente significativa entre ambas pruebas. Aunque la reducción de respuestas incorrectas fue baja en general, fue pronunciada en los sujetos E1 y E8 que mejoraron sensiblemente su rendimiento en la post-prueba respecto de la pre-prueba. Otros estudiantes, como E2, E4 y E5 mejoraron muy poco o nada su rendimiento.

Tabla 1. Cantidad de respuestas incorrectas en las pruebas realizadas.

Sujeto	pre-prueba	post-prueba	Diferencia
E1	10	5	-5
E2	5	5	0
E3	6	3	-3
E4	4	3	-1
E5	5	4	-1
E6	5	2	-3
E7	4	1	-3
E8	6	0	-6

Fuente: Elaboración propia.

4.2 Resultados cualitativos

Esta sección ha sido dividida en cinco partes: (1) Algunas dificultades identificadas en la pre-prueba; (2) Sobre la conversión desde la representación numérica (en el registro simbólico) a la figural unidimensional (en el registro gráfico); (3) Sobre la conversión de la representación figural unidimensional a la numérica; (4) Sobre la conversión del registro verbal al simbólico (la representación numérica); y (5) Observaciones sobre las carencias iniciales y avances logrados en la calidad de las justificaciones verbales.

4.2.1 Dificultades iniciales en la comprensión de los números negativos

En la pre-prueba se evidenció que los estudiantes tenían problemas para darle sentido a los números enteros negativos y para operarlos junto con los números enteros positivos. En el primer caso, se puede ejemplificar con la respuesta al ítem 1a por parte de E4, como puede verse en la Figura 5, en la que E4 mezcla indistintamente los números negativos con los positivos al intentar ordenarlos descendientemente. Desde la perspectiva de la teoría de RSS, E4 pudo haber resuelto fácilmente el ítem 1a, colocado los números en una recta y luego sólo leerlos en secuencia, es decir, realizando la conversión a la representación figural unidimensional en el registro gráfico, pero no lo hizo.

Figura 5. Solución presentada por E4 al Ítem 1a de la pre-prueba.

1. En la siguiente tabla se presentan las temperaturas promedio, en grados centígrados, de una ciudad en diferentes meses del año.

a. Ordena de mayor a menor las temperaturas.

14, 11, 12, 8, 6, 6, -4, 3

Mes	Temperatura (°C)
Enero	-12
Marzo	3
Junio	-6
Agosto	8
Septiembre	11
Octubre	-4
Noviembre	6
Diciembre	14

Fuente: Elaboración propia.

Los problemas para operar los números negativos con positivos se ilustran con la solución de E2 al ítem 3, que es una operación de sumas y restas encadenadas. Ver Figura 6. En ella se observa que E2 logró operar correctamente $-20+6$, y realizó bien la operación entre paréntesis. También logró invertir correctamente el signo de -5 , pero al momento de sumar $-14+5$, sumó las magnitudes y le asignó signo negativo, obteniendo erróneamente -19 . Luego, al tener otro caso de suma de un negativo (-19) con un positivo ($+10$), lo hizo correctamente. Y finalmente, admitió como respuesta un valor con el signo opuesto a su propio resultado. De manera similar al ejemplo anterior, aquí se observa una ausencia de conversiones, en este caso desde el registro simbólico. E4 pudo haber realizado la conversión de esta suma encadenada a una representación gráfica, ya sea la figural unidimensional o con fichas bicolor, ya sea para resolver el problema o comprobar el resultado, pero no lo hizo.

Figura 6. Solución presentada por E2 al Ítem 3 de la pre-prueba.

3. Al resolver $-20 + 6 - (-4 + 8 - 9) + 10$ se obtiene como resultado:

A. -57

B. 9

C. -1

D. 1

Handwritten work:

$$-20 + 6$$

$$-4 + 8 - 9$$

$$4 - 9 = -5$$

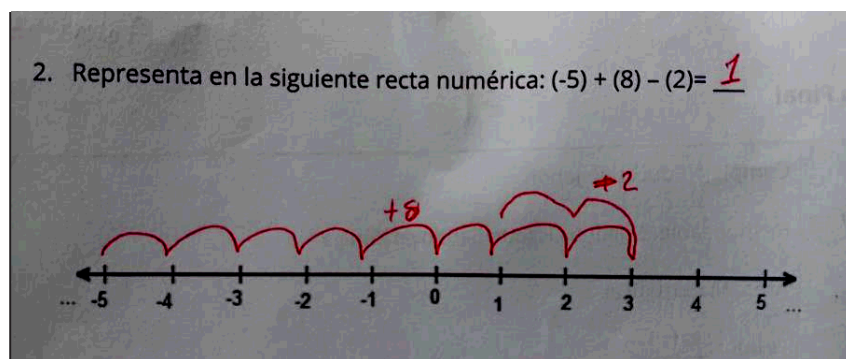
$$-14 + 5 = -9 + 10 = -9$$

Fuente: Elaboración propia.

En general, en la pre-prueba se observó consistentemente la ausencia de tratamientos entre representaciones y conversiones entre registros, que podrían facilitar la solución de los ejercicios y problemas. Tal como señala Duval (2004), es necesario que el estudiante pueda coordinar las conversiones entre registros y no se limite a ejecutar algoritmos de forma automática.

4.2.2 Conversión de representación numérica a figural de sumas y restas

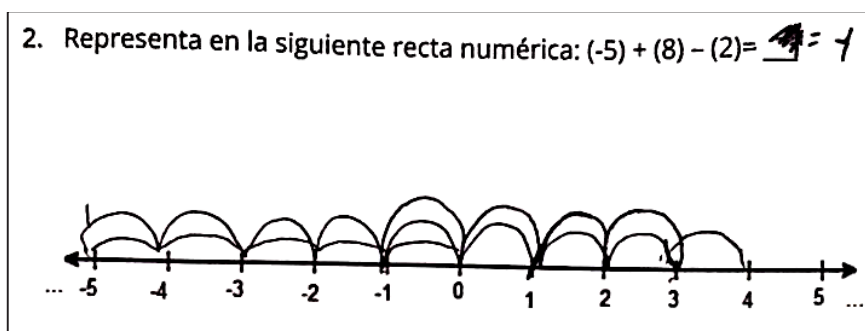
En la post-prueba se evidenció un avance significativo en esta conversión, pues más de la mitad de los estudiantes representó correctamente los desplazamientos en la recta para resolver operaciones de suma y resta con números enteros, estableciendo la relación entre signo y dirección del desplazamiento, lo que confirma que la propuesta favoreció de manera notable la conversión en el registro figural unidimensional. La integración de fichas y el uso sistemático de la recta numérica durante la intervención fueron factores decisivos para fortalecer este aspecto. Por ejemplo, en la Figura 7 se presenta el procedimiento del sujeto E2, del que se puede intuir que realizó correctamente los desplazamientos.

Figura 7. Solución presentada por E2 al Ítem 2 de la post-prueba.

Fuente: Elaboración propia.

Algunos estudiantes, como E3, pueden estar muy cerca de cometer errores, a pesar de realizar correctamente los saltos, debido a la propia falta de pulcritud de sus procedimientos gráficos. Ver la Figura 8. Esto es comprensible debido a la falta de experiencia de los estudiantes en representaciones gráficas.

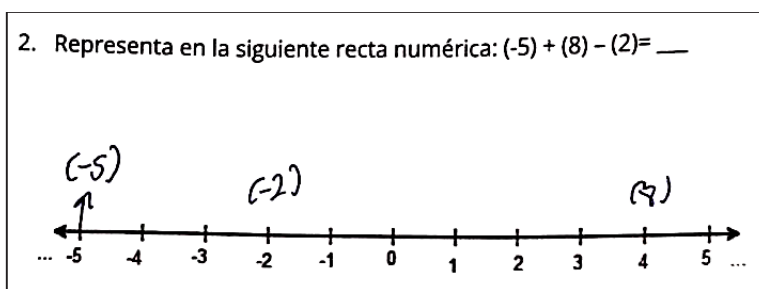
Figura 8. Solución presentada por E3 al Ítem 2 de la post-prueba.



Fuente: Elaboración propia.

Otros estudiantes, como E1, a pesar de la intervención, no logró representar la operación planteada en el mismo ítem. Ver Figura 9. Y, de hecho, puede inferirse que omitió el cero al realizar los ocho saltos desde el -5 hacia la derecha, lo que indica que todavía tiene una falta de reconocimiento del cero como número en la recta (el cero es la nada, la ausencia). Y luego no pudo encadenar la resta del número 2 en la misma operación. En otras palabras, E1 no ha desarrollado todavía la habilidad de conversión de sumas y restas, desde el registro simbólico al gráfico (figural unidimensional), aunque sí parece poseer la habilidad de la respectiva conversión para los números únicamente.

Figura 9. Solución presentada por E1 al Ítem 2 de la post-prueba.



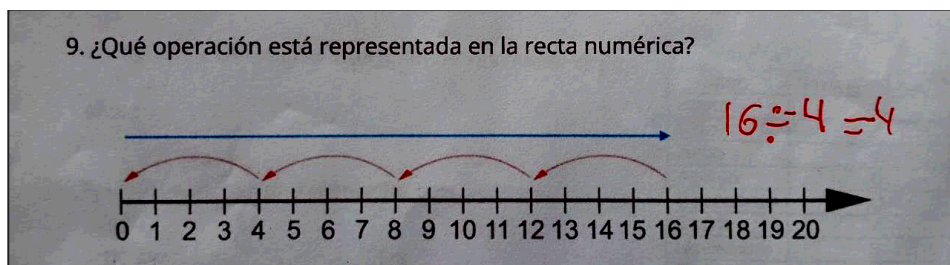
Fuente: Elaboración propia.

4.2.3 Conversión de representación figural a numérica de la multiplicación y división

Los ítems 8 y 9 de la post-prueba planteaban operaciones, de multiplicación y división respectivamente, en representación figural unidimensional que debían traducirse al registro numérico. La mayoría de estudiantes resolvió con éxito, comprendiendo la relación entre

desplazamiento, signo y resultado de la operación, según se explicó en la intervención. Por ejemplo, en la Figura 10 se presenta la respuesta correcta de E8. Persistieron algunos errores puntuales en dos sujetos que no lograron identificar de qué operación se trataba.

Figura 10. Solución presentada por E8 al Ítem 9 de la post-prueba.



Fuente: Elaboración propia.

4.2.4 Conversión de operaciones del registro verbal a representación numérica

Los ítems 8, 9 y 10 de la pre-prueba presentaron contextos verbales en los que los estudiantes mostraron serias dificultades para traducir enunciados cotidianos a operaciones numéricas: atribuyeron signos u operaciones incorrectas, omitieron operaciones o no resolvieron. El rendimiento bajo confirma que esta es la conversión más desafiante para ellos. Por ejemplo, la Figura 11 presenta la solución incorrecta de E1 al ítem 9 de la pre-prueba.

Figura 11. Solución presentada por E1 al Ítem 9 de la pre-prueba.

9. El entrenador del equipo de baloncesto les otorga a sus jugadores 4 puntos positivos por cada cesta que realiza y 2 puntos negativos por cada desacierto en sus lanzamientos. Manuel, uno de sus jugadores, ha realizado 7 lanzamientos, de los cuales ha encestado 3 y fallado el resto. ¿Cuál es la puntuación que ha obtenido Manuel en su entrenamiento?

$7 + 4 - 2 + 3 = 12$

Fuente: Elaboración propia.

En el ítem 10 de la post-prueba, un problema de saldo, se registró una mejora leve, ya que algunos estudiantes lograron realizar la conversión de manera adecuada. Los resultados confirman que esta conversión sigue siendo el punto más débil, incluso tras la intervención, y que requiere más práctica y estrategias específicas. La Figura 12 presenta la solución correcta de E5 al ítem 10 de la post-prueba.

Figura 12. Solución presentada por E5 al Ítem 10 de la post-prueba.

10. Amanda abrió una cuenta de ahorros con \$350. El primer mes retiró \$150, el segundo mes depositó \$140, el tercer mes retiró \$200, el cuarto mes depositó \$160 y el quinto mes retiró \$130. El saldo o total de dinero que tiene Amanda es:

$$\begin{aligned}
 &350 - 150 \\
 &= 200 + 140 \\
 &= 340 - 200 \\
 &= 140 + 160 \\
 &= 300 - 130 \\
 &= 170
 \end{aligned}
 \quad = \$170$$

Fuente: Elaboración propia.

4.2.5 Justificaciones verbales

Los ítems 5, 6 y 7 pedían justificar enunciados de verdadero/falso sobre operaciones con números enteros. La argumentación en la pre-prueba fue en su mayoría deficiente, ya que predominó el uso de reglas memorizadas, en ocasiones aplicadas erróneamente. Por ejemplo, en la Figura 13, se ve la respuesta de E1 al ítem 5, en la que se muestra que ha memorizado incorrectamente la ley de los signos. La falta de explicación verbal refleja que los tratamientos en el registro verbal eran una de las dimensiones más débiles de los sujetos.

Figura 13. Solución presentada por E1 al Ítem 5 de la pre-prueba.

Determina el valor de verdad (V o F) de cada enunciado. Justifica tu respuesta.

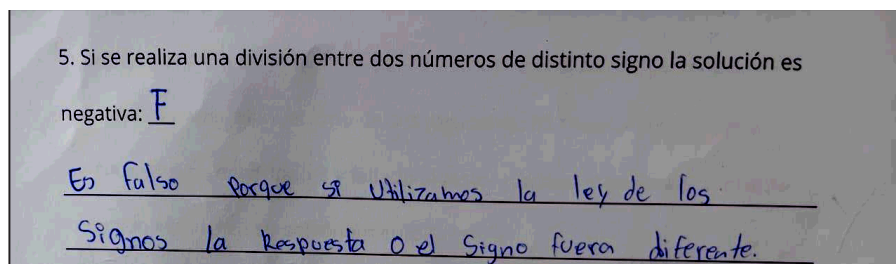
5. Si se realiza una división entre dos números de distinto signo la solución es negativa: F

$$+ \times + = + \quad - \times - = + \quad + \times - = -$$

Fuente: Elaboración propia.

Otro ejemplo de esta dificultad se presenta en la Figura 14, en la que el sujeto E4, falló en responder correctamente, y su explicación carece de sentido.

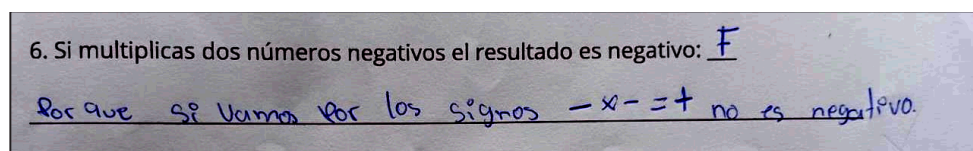
Figura 14. Solución presentada por E4 al ítem 5 de la pre-prueba.



Fuente: Elaboración propia.

En la post-prueba se observó una mejora leve. Algunos estudiantes, como E4, comenzaron a justificar de manera más certera, pero aún con problemas de redacción, como se puede ver en la Figura 15. La argumentación matemática se mantiene como el aspecto más vulnerable y requiere de estrategias didácticas adicionales para fomentarla.

Figura 15. Solución presentada por E4 al ítem 6 de la post-prueba.



Fuente: Elaboración propia.

5. CONCLUSIONES Y REFLEXIONES FINALES

La implementación de la intervención con actividades basadas en diferentes representaciones semióticas, como la figural unidimensional y con fichas bicolores, provocó mejoras significativas en el rendimiento sobre las operaciones básicas con números enteros por parte de los estudiantes participantes, especialmente en suma y resta. Del total de 8 estudiantes, 7 lograron resolver problemas de manera más precisa y correcta después de la intervención. El uso de materiales manipulativos y visuales (las fichas bicolores) fue clave para que los estudiantes pudieran internalizar el concepto abstracto de los números negativos y el concepto del cero. Estos hallazgos apoyan la idea de Duval (2006), que la enseñanza explícita de los diferentes RRS es vital en el aprendizaje de los contenidos de matemática.

Estos resultados son consistentes con los hallazgos de investigaciones como las de Velosa Sánchez (2020) y Rivera Santacruz (2023), que destacaron la efectividad de los RRS para facilitar el aprendizaje de los números enteros. Sin embargo, a pesar de las mejoras observadas, persisten ciertas dificultades, principalmente en la conversión del registro verbal

al numérico y en la argumentación adecuada de las propiedades en el registro verbal. La persistencia de estas dificultades particulares revela que, aunque la intervención propuesta mostró resultados favorables en este grupo, se requiere de ajustes para un mejor abordaje y lograr una mayor efectividad.

A pesar de que la propuesta didáctica fue efectiva en diversos aspectos, presenta ciertas limitaciones, como el tiempo restringido para su implementación y la falta de familiaridad de los estudiantes con los RRS, ya que el libro de texto oficial de séptimo grado de El Salvador le da escasa atención al registro gráfico y al verbal, en particular en las dos unidades que tratan el tema de las operaciones básicas con números enteros. Asimismo, en cuanto al resto del grupo de octavo grado, su asistencia intermitente a la escuela presenta un serio obstáculo para su aprendizaje, y el abordaje de esta problemática requiere de un enfoque multidisciplinario que va mucho más allá de los aspectos cognitivos de la educación matemática.

Se plantea la necesidad de reforzar estrategias que fomenten la conexión entre diferentes RRS en este y en otros contenidos, y que fomenten la importancia de la argumentación de procesos matemáticos. Sería beneficioso incorporar más actividades y extender la cantidad de sesiones de la intervención, ya que se ha observado que los estudiantes suelen confundir las reglas o propiedades de la suma y la resta con las de la multiplicación y división cuando se enseñan simultáneamente, sugiriendo la necesidad de un enfoque más detallado en la enseñanza de estas operaciones.

Viendo la intervención en retrospectiva (ver Figura 4), sería muy enriquecedor para una siguiente implementación el incorporar tratamientos en los registros simbólico y verbal. En el registro simbólico se podrían incorporar otras representaciones numéricas, como las presentadas en la Figura 1. En particular en El Salvador, debido a la invisibilización de todo lo indígena, se podría retomar la representación simbólica de los números enteros con el sistema de numeración maya, y las sumas y restas en este sistema, como sugieren Navas y Galdámez (2018). Sin embargo, ese tipo de incorporación se debe armonizar con las restricciones contextuales (tiempo disponible, disposición y conocimientos previos de los estudiantes, etc.).

En cuanto a los sujetos del estudio, se requiere de mayor esfuerzo para que estos nivelen sus capacidades con el nivel académico en el que se encuentran. Sin embargo, la introducción que recibieron sobre los diferentes RRS, es decir, las diferentes caras que tienen los números enteros, pareció incentivarlos a pensar que los contenidos de la materia de matemática no son tan inaccesibles como pensaban antes de la intervención. Por ello, resulta razonable proponer una intervención similar con el tema de ecuaciones de primer grado, que es un tema importante de octavo grado (ver Argueta et al., 2019b).

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

Según el estándar CRediT (<https://credit.niso.org/>):

KLLL y EANL concibieron la idea. KLLL redactó el primer borrador. KLLL y CLSZ realizaron la recolección de datos, y curación de datos. KLLL y EANL desarrollaron la metodología. KLLL, CLSZ y EANL realizaron el análisis formal. EANL ejecutó la

administración del proyecto, la supervisión, y la validación. KLLL, CLSZ y EANL realizaron la redacción final del manuscrito. Todos los autores revisaron y aprobaron la revisión final del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por CLSZ (C. L. Sandoval Zúñiga) previa solicitud razonable.

5. REFERENCIAS

- Alfarisi, M. A., Dasari, D., Aljupri, y Sikma, Y. (2022). Is integer number difficult for students?: A systematical literature review. *Proceeding of international conference on frontiers of science and technology 2021*, 070030. <https://doi.org/10.1063/5.0102934>
- Aparecida de Faria, R., y Laburú, C. E. (2021). Conexão entre múltiplas representações em atividades de função polinomial do 1º Grau. *REMATEC - Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, 16, 310–325. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2021.n.p310-325.id483>
- Argueta, A. E., Muñoz, E. A., Pleitez, R. M., Herrera, D. M., Gómez, C. O., Mejía, F. A., Lemus, N. E., Rodríguez, S. E., y Guevara, F. A. (2019a). *Matemática 7: Libro de texto* (2ª ed.). Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (MINEDUCYT).
- Argueta, A. E., Muñoz, E. A., Pleitez, R. M., Herrera, D. M., Gómez, C. O., Mejía, F. A., Lemus, N. E., Rodríguez, S. E., y Guevara, F. A. (2019b). *Matemática 8: Libro de texto* (2ª ed.). Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (MINEDUCYT).
- Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Whitacre, I. y Schappelle, B. P. (2014). Using order to reason about negative numbers: the case of Violet. *Educational Studies in Mathematics*, 86, 39–59. <https://doi.org/10.1007/s10649-013-9519-x>
- Bruno, A. (2001). La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 4(1), 415-427.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165–198. <https://revue-rdm.com/1983/les-obstacles-epistemologiques-et/>
- Burak, D., y Brandt, C. F. (2010). Modelagem matemática e representações semióticas: contribuições para o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Zetetiké*, 18(1). <https://doi.org/10.20396/zet.v18i33.8646694>
- Borjas Franco, D. Y. (2009). *Aprendizaje de los números enteros una "experiencia significativa" en estudiantes de séptimo grado de la Escuela Nacional de Música* [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán]. Biblioteca Virtual Miguel de Cervantes. <https://www.cervantesvirtual.com/nd/ark:/59851/bmcf19k7>

- Colombo, J. A. A., Buehring, R. S., y Moretti, M. T. (2010). Registros de representação semiótica, tarefas e análise de dados: Articulações em torno do currículo de matemática. *REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 4(1), 90-113. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2009v4n1p90>
- Costa, J. F. S. (2023). Aprendendo números inteiros: uma experiência baseada na Teoria dos Campos Conceituais. *Revista de Educação Matemática*, 20(01), e023104. <https://doi.org/10.37001/remat25269062v20id483>
- Costa, A. R. G., y Nóbrega, M. P. (2024). Registros de representação semiótica na educação matemática: um olhar em torno do conceito de probabilidade. *Caderno Pedagógico*, 21(7), e5673. <https://doi.org/10.54033/cadpedv21n7-123>
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. En *Annales de didactique et de sciences cognitives* 5, 37-65.
- Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. En S. D. A. Machado (Ed.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica* (pp. 11-33). Papirus.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Grupo de Educación Matemática.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168. http://dmle.icmat.es/pdf/GACETARSME_2006_9_1_05.pdf
- Duval, R. (2017). Registers of Semiotic Representations and Analysis of the Cognitive Functioning of Mathematical Thinking. En T. M. M. Campos (Ed.). *Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations* (pp. 45-71). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-56910-9_3
- Fraga da Silva, S., y Rosa, M. (2022). Educación Matemática STEAM: dando sentido a los números enteros con las tecnologías digitales. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 18(66). <https://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/1425>
- Gagatsis, A., y Alexandrou, M. (2022). A review of the research in teaching and learning the negative numbers: An “action research” concerning the application of the geometrical model of the number line. *Didattica della matematica. Dalla ricerca alle pratiche d’aula*, (11), 9-32. <https://doi.org/10.33683/ddm.22.11.1>
- Gallardo, A., y Rojano, T. (1988). Areas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(2), 155-188. <https://revue-rdm.com/1988/areas-de-dificultades-en-la/>
- Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303-346. <https://revue-rdm.com/1981/epistemologie-des-nombres-relatifs/>
- Goes, A. L. de, Sanzovo, D. T., Lucas, L. B., y Luccas, S. (2024). A Teoria dos Registros de Representação Semiótica e Múltiplas Representações na Educação Matemática: uma

- Revisão Sistemática de Literatura. *Revista De Ensino, Educação E Ciências Humanas*, 25(2), 353–363. <https://doi.org/10.17921/2447-8733.2024v25n2p353-363>
- Henriques, A., y Almouloud, S. A. (2016). Teoria dos registros de representação semiótica em pesquisas na Educação Matemática no Ensino Superior: uma análise de superfícies e funções de duas variáveis com intervenção do software Maple. *Ciência & Educação*, 22(2), 465-487. <https://doi.org/10.1590/1516-731320160020012>
- Jiménez, J. y Bolaños, J. (2015). *Uso de representaciones semióticas en el aprendizaje de las operaciones de suma y resta de números enteros en un aula con integración de población ciega*, [Tesis de licenciatura, Universidad Distrital Francisco José de Caldas facultad de ciencias y educación, Bogotá, Colombia].
- Kilhamn, C. (2011). *Making Sense of Negative Numbers*. [Tesis doctoral, University of Gothenburg]. GUPEA. <http://hdl.handle.net/2077/24151>
- Latorre, A. (2005). *La investigación-acción: conocer y cambiar la práctica educativa* (3ra ed.). Editorial Grao.
- Marulanda Sarmiento, D. F. (2017). *Proyecto de aula como estrategia didáctica para el fortalecimiento del pensamiento numérico en la enseñanza de las operaciones de adición y sustracción de números enteros mediado por las TIC* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/58978>
- Mendoza Cedeño, H. R., Tapia Ruelas, C. S., y Guzmán Ramírez, A. C. (2025). Estrategias didácticas innovadoras para el aprendizaje matemático en Educación Básica Media: Revisión Sistemática. *Revista de Ciencias Humanísticas y Sociales (ReHuSo)*, 10(2), 83-93. <https://doi.org/10.33936/rehuso.v10i2.7663>
- Navas López, E. A., y Cruz Miranda, J. A. (2025). Identificación de las dificultades en la comprensión de los números negativos por medio del modelo de Pirie y Kieren. *Paradigma - Revista de Investigación Educativa*, 32(54), 9-34. <https://doi.org/10.5377/paradigma.v32i54.21528>
- Navas, E. A., y Galdámez, M. G. (2018). El legado de las matemáticas mayas y la enseñanza de la matemática. *Acta latinoamericana de matemática educativa*, 31(2), 1062-1069. <http://funes.uniandes.edu.co/13725/>
- Oliveira, A. P. A., Silva, H. C. A., Alves, F. J. C., Costa, F. M., Alencar, J. R. S., y Alves, O. S. (2025). Revisão integrativa do ensino e aprendizagem de números inteiros: O pensamento aritmético na educação básica. *ARACÊ*, 7(3), 11288-11307. <https://doi.org/10.56238/arev7n3-069>
- Parada, E., Pluvinae, F., Sacristán, A. (2013). Reflexiones en una comunidad de práctica de educadores matemáticos sobre los números negativos. *Recherches en didactique des mathématiques*, 33(3), 233-266. <https://revue-rdm.com/2013/reflexiones-en-una-comunidad-de/>
- Pluvinae, F., y Flores, P. (2016). Génesis Semiótica de los Enteros. *BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 30(54), 120-141. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a06>

- Quane, K., y Brown, L. (2022). Fidget toy or mathematics gem!: The multiple uses of a pop-it squircle. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 27(1), 28-33. <https://search.informit.org/doi/10.3316/informit.448937141931389>
- Rivera Santacruz, H. L. (2023). Sistema de Actividades: Procesos Aditivos con Enteros a Través de Algunas Representaciones Semióticas con el uso de las Tecnologías. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 7(5), 1487-1515. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i5.7823
- Sahat, N., Tengah, K. A., y Prahmana, R. C. I. (2018). The teaching and learning of addition and subtraction of integers through manipulative in Brunei Darussalam. *Journal of Physics: Conference Series*, 1088(1), 012024. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1088/1/012024>
- Salazar-Torres, J. P., Contreras-Santander, Y. L., y Jaimes-Mora, S. S. (2016). Semiótica: Un recurso fundamental en los procesos de argumentación matemática escrita. *Eco Matemático*, 7(1), 20–32. <https://doi.org/10.22463/17948231.1016>
- Souza Miola, A. F., y Rossetti, M. (2022). Algumas Tendências sobre o Ensino de Números Inteiros: uma metassíntese das pesquisas brasileiras. *Revista Diálogos Em Educação Matemática*, 1(1), e202205. <https://doi.org/10.28998/redemat.v1i1.14570>
- Velosa Sánchez, E. (2020). *Las representaciones semióticas en el aprendizaje de los números enteros*. [Tesis de maestría, Universidad Autónoma de Manizales]. <https://repositorio.autonoma.edu.co/handle/11182/1085>
- Vlassis, J. (2004). Making sense of the minus sign or becoming flexible in ‘negativity’. *Learning and Instruction*, 14(5), 469-484. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2004.06.01>



EL IMPACTO DE UN CURSO DE PRECÁLCULO EN EL APRENDIZAJE DE LOS CONOCIMIENTOS PREVIOS REQUERIDOS EN CÁLCULO

THE IMPACT OF A PRECALCULUS COURSE ON THE LEARNING OF PREREQUISITE KNOWLEDGE FOR CALCULUS

Luis Rojas-Torres¹

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-9085-2703>

Kevin Gómez Guillén²

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0002-5415-4729>

Karol Jiménez Alfaro³

 ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-7891-1862>

Diana Chacón Camacho⁴

 ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0004-6956-2244>

RESUMEN

El dominio de los conocimientos previos esperados es un elemento necesario para el aprendizaje efectivo de un curso. El objetivo de este artículo es estudiar el impacto de un curso de precálculo en los conocimientos previos requeridos en el curso de cálculo. Para este objetivo se aplicó un pretest y un posttest a 236 personas antes y después de la nivelación. Para el análisis de los datos se compararon porcentajes de suficiencia y medias mediante pruebas *t* para muestras pareadas. Los resultados mostraron que en las cinco áreas evaluadas hubo progresos significativos en el

1 Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica. Correo electrónico: luismiguel.rojas@ucr.ac.cr

2 Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica. Correo electrónico: kevin.gomezguillen@ucr.ac.cr

3 Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica. Correo electrónico: karol.jimenez@ucr.ac.cr

4 Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica. Correo electrónico: dianalucia.chacon@ucr.ac.cr



promedio y en los porcentajes de personas que alcanzaron el nivel del suficiente. El área que presentó las mejoras más bajas fue funciones trigonométricas, mientras que las mayores se presentaron en operaciones algebraicas, ecuaciones y conceptos básicos de funciones. Estos resultados señalan que la nivelación fue exitosa y muestran que es factible la implementación de nivelaciones, aunque todavía persisten áreas que requieren reforzamiento.

Palabras clave: Nivelación, cálculo, conocimientos previos, álgebra, funciones

ABSTRACT

Mastery of the expected prerequisite knowledge is a necessary element for effective learning in a course. The objective of this article is to study the impact of a precalculus course on the prerequisite knowledge required in a calculus course. For this purpose, a pretest and a posttest were administered to 236 participants before and after the remedial course. Data analysis included comparisons of proficiency percentages and mean scores using paired-samples t-tests. The results showed that in the five areas assessed there were significant improvements in the mean scores and in the percentages of participants who reached a satisfactory performance level. The area with the smallest improvements was trigonometric functions, while the areas with the greatest improvements were algebraic operations, equations, and basic concepts of functions. These results indicate that the remedial course was successful and show that the implementation of remedial courses is feasible, although some areas still require further reinforcement.

Keywords: Remedial course, calculus, prerequisite knowledge, algebra, functions.

1. INTRODUCCIÓN

Uno de los principales problemas que enfrentan las personas docentes de matemática durante las clases es la ausencia de la base de conocimientos requeridos para el desarrollo del curso (Gamboa et al., 2019). Esta situación obliga a las personas docentes a diseñar estrategias para nivelar al estudiantado, lo cual, muchas veces, resta tiempo de las lecciones previstas para el desarrollo de los objetivos del curso.

En los cursos de cálculo diferencial se requiere que el estudiantado posea un dominio de los conceptos de álgebra y funciones para poder desarrollar las nociones de límites y derivación. No obstante, la realidad es que muchas veces, la población no presenta las bases requeridas. En particular, en Costa Rica se ha observado que las personas admitidas a universidades públicas dominan incluso menos de la mitad del temario de álgebra y funciones de secundaria (Rojas et al., 2025).

Ahora bien, el aprendizaje universitario de las matemáticas, y particularmente del cálculo diferencial e integral, se caracteriza por ser acumulativo y jerárquico: los nuevos conceptos se construyen sobre estructuras conceptuales que han sido previamente desarrolladas. Desde la perspectiva cognitivista, el aprendizaje significativo ocurre cuando la nueva información se integra en esquemas de conocimiento existentes, por lo que la calidad y organización del conocimiento previo determinan directamente la comprensión posterior (Rach & Ufer, 2020; Bedada & Machaba, 2022). En esta línea, el conocimiento matemático previo no solo actúa como un requisito de entrada, sino como el principal predictor del éxito académico en los primeros cursos universitarios de matemáticas.

Diferentes estudios han mostrado que la falta de dominio en contenidos principalmente de álgebra y trigonometría constituye una de las principales causas del fracaso en cálculo. Watson et al. (2023) señalan que las deficiencias en habilidades y conocimientos previos afectan negativamente la capacidad de resolver problemas incluso cuando el estudiante comprende los nuevos conceptos teóricos. De forma similar, Mahadewsing et al. (2024) evidencian que muchos errores en exámenes de cálculo se originan en conocimientos previos deficientes, por ejemplo, cuando dichos conocimientos son necesarios al inicio de la resolución, el estudiante puede verse imposibilitado para desarrollar el problema. También, McKinney & Dibbs (2021) señalan que la fluidez algebraica es necesaria para las clases universitarias, y gran parte del fracaso en cálculo puede atribuirse a la falta de conceptos y habilidades de precálculo, incluso mencionan que estudiantes que se retiran de los cursos de cálculo, a menudo muestran analfabetismo algebraico.

El papel estructural de estos conocimientos también ha sido documentado desde la teoría de la carga cognitiva. Un conocimiento previo suficiente permite agrupar información en unidades significativas, liberando recursos de memoria de trabajo para el razonamiento matemático de mayor nivel; por el contrario, la carencia de bases provoca sobrecarga cognitiva y aprendizaje superficial (Alreshidi, 2023). En consecuencia, estudiantes con mayor dominio inicial no solo aprenden mejor, sino que también experimentan menos dificultades al enfrentarse a tareas matemáticas complejas, lo que favorece percepciones de autoeficacia más positivas y reduce la frustración asociada al aprendizaje. Esto contribuye a una mayor persistencia académica y a actitudes más favorables hacia la matemática.

En el contexto específico de cálculo, múltiples estudios coinciden en que la preparación previa es un predictor más importante del desempeño que la exposición previa al propio cálculo. Schraeder et al. (2019) encontraron que haber cursado cálculo anteriormente no garantiza el éxito universitario, mientras que Carnell et al. (2018) reportaron que los estudiantes sin bases sólidas requieren ritmos de enseñanza distintos y mayor revisión de álgebra. De hecho, las entrevistas analizadas por Schraeder et al. (2019) muestran que los estudiantes perciben el álgebra y la trigonometría como los verdaderos prerrequisitos para comprender el curso.

Finalmente, el conocimiento previo también cumple un rol estructurante en la construcción de nuevas conexiones matemáticas. Pambudi (2022) demuestra que estudiantes con mayor dominio inicial establecen más relaciones conceptuales al resolver problemas de cálculo, mientras que Radmehr y Drake (2020) señalan que la existencia de conocimientos previos organizados facilita la integración de contenidos avanzados al permitir vincular nuevas ideas con estructuras conceptuales ya consolidadas. Así, el aprendizaje matemático puede entenderse como un proceso de reconstrucción progresiva del conocimiento, donde cada nuevo concepto depende de la red conceptual previamente consolidada.

1.1. El impacto de las nivelaciones en matemática

Dada la importancia que tienen los conocimientos previos, muchos programas educativos han implementado la política educativa de ofrecer talleres de nivelación de

los contenidos requeridos para sus asignaturas. Estos cursos de nivelación matemática surgen como respuesta de las diferentes instituciones educativas a la heterogeneidad en la preparación académica del estudiantado que ingresa a la educación superior. Estos cursos son concebidos como prerrequisitos destinados a desarrollar las habilidades necesarias para cursar asignaturas universitarias formales. Sin embargo, la investigación internacional ha mostrado que su efectividad depende fuertemente de su diseño pedagógico y de la población a la que están dirigidos.

Díaz et al. (2019) desarrollaron un curso de álgebra básica en línea para un subgrupo de estudiantes de una asignatura de matemáticas de ingeniería. Las personas que llevaron el curso nivelatorio presentaron una mejor nota que el grupo control en un examen de una asignatura de ingeniería sobre diferenciación. Por su parte, Alcotzi et al. (2024) también diseñaron un curso virtual de álgebra para personas estudiantes de ingeniería. Se obtuvo que luego de las clases, el promedio en un posttest de matemática mejoró con respecto a la nota obtenida en un pretest.

Un ensayo controlado aleatorizado desarrollado por Logue et al. (2016) comparó el modelo remedial tradicional con un enfoque alternativo en el que los estudiantes se matriculan directamente en un curso universitario de estadística acompañado de apoyo adicional. Los resultados mostraron que el grupo con enfoque alternativo obtuvo tasas de aprobación 16 puntos porcentuales superiores y acumuló más créditos académicos. En un seguimiento a tres años, Logue et al. (2019) confirmaron que este modelo no solo mejora la aprobación inicial, sino que también incrementa las tasas de graduación (8.1 puntos porcentuales más) y acelera el cumplimiento de los requisitos cuantitativos. Esto indica que las nivelaciones acompañadas de apoyo presentan mejores resultados.

Los estudios sobre modelos alternativos que integran apoyo académico simultáneo al curso universitario muestran que estos enfoques aumentan la inscripción y aprobación en matemáticas durante el primer año (Meiselman & Schudde, 2022; Mokher et al., 2021), aunque sus efectos a largo plazo sobre persistencia universitaria son menos consistentes. Asimismo, el diseño específico del programa influye en su efectividad, con aspectos como el uso del mismo docente para el curso principal y el de apoyo, la integración curricular y la heterogeneidad de habilidades (Ryu et al., 2022). Así, estudios sobre programas estructurados de aceleración, como Statway, muestran que integrar contenidos universitarios con apoyo específico y estrategias pedagógicas basadas en evidencia aumenta significativamente la obtención de créditos en matemática y favorece resultados más equitativos (Yamada & Bryk, 2016).

Por otro lado, la literatura indica que los efectos de la nivelación no son homogéneos. Boatman y Long (2018) encontraron que el impacto depende del nivel de preparación inicial, es decir, estudiantes con desempeño cercano al punto de corte pueden experimentar efectos negativos al ser asignados a cursos remediales, ya que estos requieren nivelaciones menos exhaustivas. Este resultado cuestiona la aplicación uniforme de políticas de nivelación y resalta la necesidad de diagnósticos más precisos y decisiones diferenciadas.

1.2. Contextualización del problema

En la Universidad de Costa Rica se implementó el curso de precálculo con el fin de repasar y profundizar en los temas de álgebra y funciones requeridos para los cursos de cálculo diferencial e integral. Este curso no es una nivelación directamente de secundaria, pero sí lo es de forma indirecta, ya que dentro de su metodología se considera repases constantes de los temas de álgebra y funciones que se requieren para los temas consignados.

El curso de precálculo es obligatorio para varias de las carreras que llevan cursos de cálculo diferencial, pero para otras carreras no lo es, por lo cual un grupo de estudiantes puede llevar cálculo sin la nivelación requerida. El curso se organiza en los ejes temáticos de Funciones, Geometría Analítica, Funciones Trigonométricas y Geometría del Espacio. Su metodología es principalmente presencial, pero también hace uso de entornos de aprendizaje en línea, dentro de los cuales destaca la evaluación de cinco cursos cortos en línea masivos y abiertos (MOOCs) que cubren áreas críticas como álgebra, principios de funciones y trigonometría.

El presente artículo tuvo como objetivo estudiar el impacto del curso de nivelación de Precálculo en los conocimientos previos requeridos para el curso de Cálculo. Para ello, se analizó la distribución del dominio de dichos conocimientos mediante un pretest aplicado antes de la nivelación y se comparó con la distribución observada en un postest aplicado al finalizar el curso.

2. METODOLOGÍA

La investigación desarrollada fue de carácter cuantitativo con un diseño preexperimental, de tipo test-retest, dirigido a observar el cambio en las puntuaciones de los conocimientos previos requeridos en Cálculo, luego de tomar el curso de precálculo.

2.1. Participantes

La población del estudio estuvo conformada por 236 estudiantes que aprobaron el curso de Precálculo y que realizaron tanto el pretest como el postest de conocimientos previos de cálculo. El pretest fue aplicado antes de iniciar el curso, mientras que el postest se aplicó una vez finalizada la nivelación. Se excluyeron del estudio a las personas que realizaron el postest en menos de 10 minutos, dado que la prueba requiere más de ese tiempo para poder ser analizada.

2.2. Instrumento

El pretest fue un subconjunto de 20 preguntas del examen de diagnóstico de matemática de la Universidad de Costa Rica (DiMa, Rojas-Torres y Jiménez, 2025), el cual fue aplicado en su totalidad. Este examen contiene preguntas de álgebra y funciones de secundaria, junto con otros temas avanzados de matemática que no son conocimientos de secundaria. Debido al objetivo del estudio, para la nota del pretest solo se consideraron las 20 preguntas de temas de secundaria.



El postest fue una prueba con únicamente las 20 preguntas consideradas para el pretest. Las medidas consideradas utilizaron 4 preguntas de cada una de las siguientes áreas: operaciones algebraicas, transformaciones algebraicas, ecuaciones, conceptos básicos de funciones y funciones trigonométricas. Las preguntas fueron de selección única y utilizaron 5 opciones de respuesta. Si bien el uso de los mismos ítems podría introducir un efecto de familiaridad, el postest se aplicó al finalizar el curso, es decir, con más de 5 meses de diferencia para reducir el efecto de recuerdo inmediato de las preguntas.

2.3. Procedimiento

El examen de diagnóstico de matemática se aplicó antes de ingresar a la nivelación, por medio de una convocatoria oficial de la Universidad de Costa Rica, ya que esta prueba es parte del proceso de matrícula del estudiantado a los cursos de precálculo. Si un estudiante aprueba esta evaluación se exime de dicho curso. El examen se aplicó en formato virtual, no presencial. Posteriormente, en la última semana del curso de precálculo, se realizó el postest en formato virtual en una sesión presencial de clases.

2.3. Análisis de datos

El primer análisis consistió en comparar los porcentajes de las personas que presentaron una nota suficiente en cada área temática (operaciones algebraicas, transformaciones algebraicas, ecuaciones, funciones y funciones trigonométricas), según aplicación de la prueba. Para ello, se estableció que una persona tenía una nota suficiente en un área temática si poseía entre 3 o 4 respuestas correctas de las 4 preguntas consideradas.

El segundo análisis consistió en comparar los promedios obtenidos en el pretest y el postest mediante la aplicación de una prueba t para muestras pareadas, tanto en la nota global de la prueba como en las notas por áreas. Esta prueba permitió determinar si las diferencias observadas entre ambos momentos eran estadísticamente significativas, considerando que las mediciones provenían de las mismas personas. Así, se evaluó si el cambio en el desempeño promedio podría atribuirse al efecto de la nivelación y no únicamente a variaciones aleatorias.

Algo importante a considerar, son las limitaciones metodológicas del estudio, entre las que se encuentra la ausencia de un grupo control, lo cual limita la atribución causal de los cambios observados exclusivamente al curso de nivelación. Asimismo, el carácter voluntario de parte de la evaluación y la aplicación virtual del pretest podrían introducir sesgos asociados a la motivación del estudiantado y a las condiciones de realización de la prueba.

3. RESULTADOS

En las siguientes secciones se presentan los resultados encontrados luego de realizar el análisis de datos de comparación de las puntuaciones del pretest con el postest.

3.1. Cambio en la distribución según niveles de dominio en cada área temática

En la Tabla 1 se puede observar que la población que aprobó precálculo inició el curso con porcentajes bajos de personas con el nivel suficiente en los distintos temas (inferiores al 20%). De hecho, en transformaciones algebraicas, funciones y funciones trigonométricas los porcentajes no alcanzan el 10%.

Tabla 1. Porcentajes de personas con nota suficiente, según área y test.

Examen/Nivel	AL	TA	EC	FN	FT
Pretest	18.22%	7.20%	15.25%	9.32%	5.51%
Posttest	50.85%	40.25%	56.36%	49.15%	27.12%
Diferencia	32.63%	33.05%	41.10%	39.83%	21.61%

Nota: N=236; AL=operaciones algebraicas, TA=transformaciones algebraicas, EC=ecuaciones, FN=funciones y FT=funciones trigonométricas

En los porcentajes señalados se puede apreciar que el porcentaje de personas con nivel suficiente aumentó en más del 30% en todas las áreas, luego de la aprobación del curso de precálculo, con excepción de funciones trigonométricas donde el porcentaje incrementó en un 21.61%. Con este aumento tres áreas alcanzaron alrededor de un 50% de personas con un nivel suficiente, las cuales fueron operaciones algebraicas, ecuaciones y funciones. Transformaciones algebraicas alcanzó un 40.25% y funciones trigonométricas solo un 27.12%.

3.2. Cambio en el promedio de las secciones y la prueba

Las medias obtenidas en las notas totales del pretest y del posttest, en una escala de 0 a 20 puntos, fueron 5.16 y 11.56, respectivamente. Luego de verificar la normalidad de las diferencias entre el posttest y el pretest se estimó la prueba t de diferencias de muestras pareadas. El estadístico de la prueba fue $t(386)=-24.49$, $p<.001$, con lo cual se concluyó que las medias fueron significativamente diferentes.

En todas las áreas se obtuvo el mismo comportamiento, es decir, que las medias aumentaron significativamente, los valores de estos promedios se pueden observar en la tabla 2. Los aumentos fueron de aproximadamente 1.2 unidades en operaciones algebraicas, transformaciones algebraicas y funciones trigonométricas; mientras que el aumento en ecuaciones y funciones fue de aproximadamente 1.4 unidades. Estos cambios llevaron las notas promedio a valores superiores al punto medio (2 de 4) en todas las áreas, con excepción de funciones trigonométricas que fue la que tuvo el promedio más bajo inicialmente.

Tabla 2. Promedio de las notas de cada componente de la prueba, según test.

Examen	AL	TA	EC	FN	FT	Total
Pretest	1.449	1.000	1.119	0.936	0.657	5.161
Posttest	2.602	2.216	2.547	2.314	1.881	11.559
Diferencia	1.153	1.216	1.428	1.377	1.225	6.398
Valor p	<.01	<.01	<.01	<.01	<.01	<.01

Nota: N=236; AL=operaciones algebraicas, TA=transformaciones algebraicas, EC=ecuaciones, FN=funciones y FT=funciones trigonométricas. El valor p representa el valor asociado a la prueba t de diferencias de muestras pareadas.

4. DISCUSIÓN

Los resultados obtenidos en este estudio muestran que las áreas de álgebra básica, funciones y ecuaciones son las secciones en las que se obtuvieron las mejoras más significativas. La comprensión de las reglas algebraicas básicas facilitará la computación de los métodos algebraicos implicados en el cálculo diferencial, como las simplificaciones requeridas en algunos límites o la aplicación de reglas de diferenciación. Por otro lado, el dominio de los conceptos de funciones brinda una base para la comprensión de los conceptos del cálculo, los cuales representan propiedades de las funciones.

Las mejoras observadas en álgebra sugieren una posible reducción de la carga cognitiva asociada a los procesos algebraicos requeridos en cálculo diferencial. Por ejemplo, un mayor dominio de racionalización o factorización puede facilitar que el estudiantado concentre más recursos cognitivos en la comprensión de conceptos abstractos como el de límite, en lugar de centrarse únicamente en la aritmética del procedimiento. Desde este punto, el fortalecimiento de las bases algebraicas constituye un apoyo importante para el aprendizaje de nuevas ideas matemáticas. Visto así, esta nivelación en álgebra actuará como un facilitador de la capacidad de resolución en conceptos nuevos.

En las transformaciones algebraicas menos personas alcanzaron el nivel de suficiente que las áreas mencionadas previamente. Esta área es de mucha importancia, debido a que las racionalizaciones y las factorizaciones son la base de varios métodos de cálculo de límites; por tanto, se debe redoblar el esfuerzo en Precálculo para aumentar la cantidad de personas que llegan al nivel suficiente. No obstante, la mejora un poco menor que en las otras áreas era esperable debido a que estos temas van más allá de la aplicación de reglas, demandan la identificación de patrones en los cuales las reglas son útiles.

El área donde se obtuvo el nivel de mejora más bajo fue trigonometría. Esta área es fundamental para muchos cursos de matemática avanzada como cálculo en varias variables o ecuaciones diferenciales. Debido a esto, resulta pertinente que la cátedra de

Precálculo valore la implementación de ajustes en la metodología del curso que favorezcan un mayor dominio de estos temas por parte del estudiantado. Una sugerencia para mejorar este resultado es cambiar la ubicación del contenido de funciones trigonométricas en el cronograma del curso: pasar de las últimas semanas a las semanas intermedias. La hipótesis que se maneja es que el estudiantado que lleva notas altas en los exámenes iniciales del curso puede bajar el compromiso en las últimas evaluaciones. Si se implementa este cambio, en futuros estudios se debe evaluar si este cambio de la metodología repercutió en cambios en las notas de este tema.

De manera global, se observó una mejora grande y significativa en la puntuación total del postest, la cual llevó el promedio de una nota baja (5.16) a una nota media (11.56). Esto muestra que la nivelación brindada por Precálculo es efectiva, pero todavía no alcanza el nivel deseado de al menos un nivel medio-alto, de aproximadamente 14 puntos de 20 (70%). Ahora bien, hay que considerar que estas notas podrían estar subestimadas por el carácter voluntario de la evaluación; es posible que en un ambiente sumativo estas notas sean mucho más altas que las observadas y la nivelación sea más exitosa que lo observado.

En futuros estudios se debe analizar si los y las estudiantes que aprobaron el curso de precálculo presentan mejores notas en el curso de cálculo que aquellas personas que no lo llevan. Se espera que al igual que en Díaz et al. (2019) y Alcotzi et al. (2024), las personas que llevan la nivelación presentan mejores resultados en cálculo diferencial, lo cual se justifica en el manejo de la base conceptual requerida para el curso (Alreshidi, 2023).

Las nivelaciones asociadas a los conocimientos previos pueden representar una alta inversión de recursos, pero ignorar su necesidad puede ser aún más costoso. Las personas que llevan cursos para los cuales no están preparados pueden experimentar niveles de frustración más altos y su probabilidad de aprobación tiende a ser mucho más baja, ya que la ausencia de los conocimientos previos es un obstáculo ineludible para el aprendizaje. En particular, las personas que aprobaron el curso de precálculo cuentan con un panorama más favorable para el aprendizaje del cálculo que el que tenían antes de llevar el curso, dado que ahora cuentan con una mejor base de conocimientos.

No obstante, los resultados deben analizarse considerando algunas limitaciones del estudio. En primer lugar, la ausencia de un grupo control impide asegurar que las mejoras observadas se deban únicamente al curso de Precálculo. Además, el estudio se realizó únicamente con estudiantes que aprobaron el curso, por lo que los resultados no necesariamente representan a toda la población matriculada. Asimismo, el formato virtual del pretest y el carácter voluntario de parte de la evaluación pudieron influir en el desempeño observado.

Por otra parte, las dificultades observadas en funciones trigonométricas y transformaciones algebraicas muestran que muchos estudiantes aún presentan debilidades en temas que requieren mayor comprensión conceptual y reconocimiento de patrones algebraicos. Esto evidencia la necesidad de fortalecer las estrategias metodológicas utilizadas en estas áreas.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

Todos los autores participaron activamente en las distintas etapas de la construcción del artículo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la persona autora principal del artículo previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

La investigación fue apoyada por el departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Costa Rica, con el fin de evaluar la eficacia del curso de Precálculo.

5. REFERENCIAS

- Acoltzi, E., Hernández, J. L., Ameneiro, H. M., & Gómez, J. (2024). Curso virtual de nivelación de álgebra elemental con aprendizaje activo para estudiantes de ingeniería. *ANFEI Digital – Revista Científica del Instituto Tecnológico de Apizaco*. 10.63136/read162024958pp271
- Alreshidi, N. A. K. (2023). Enhancing topic-specific prior knowledge of students impacts their outcomes in mathematics. *Frontiers in Education*, 8. <https://doi.org/10.3389/feduc.2023.1050468>
- Bedada, T. B., & Machaba, M. F. (2022). Investigation of students' perception learning calculus with GeoGebra and cycle model. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(10), em2164. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12443>
- Boatman, A., & Long, B. T. (2018). Does remediation work for all students? How the effects of postsecondary remedial and developmental courses vary by level of academic preparation. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 40(1), 29-58. <https://doi.org/10.3102/0162373717715708>
- Carnell, L., Graham-Squire, A., O'Hara, K., y Piechnik, L. (2018). Environmental Impacts: How comparative prior knowledge affects students' calculus experience. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies (PRIMUS)*, 28(10), 920-935. <https://doi.org/10.1080/10511970.2018.1472682>
- Díaz, J. J., Luna, M., & Salinas-Padilla, H. (2019). Curso de nivelación algebraica para incrementar el rendimiento académico en estudiantes de ingeniería en un ambiente

- virtual de aprendizaje. *RIDE. Revista Iberoamericana para la Investigación y el Desarrollo Educativo*, 9(18), 456-489. <https://doi.org/10.23913/ride.v9i18.432>
- Gamboa Araya, R., Castillo Sánchez, M., & Hidalgo Mora, R. (2019). Errores matemáticos de estudiantes que ingresan a la universidad. *Actualidades Investigativas en Educación*, 19(1), 1–31. <https://doi.org/10.15517/aie.v19i1.35278>
- Logue, A. W., Douglas, D., & Watanabe-Rose, M. (2019). Corequisite mathematics remediation: Results over time and in different contexts. *Educational Evaluation & Policy Analysis*, 41(3), 294-315. <https://doi.org/10.3102/0162373719848777>
- Logue, A. W., Watanabe-Rose, M., & Douglas, D. (2016). Should students assessed as needing remedial mathematics take college-level quantitative courses instead? A randomized controlled trial. *Educational Evaluation and Policy Analysis*, 38(3), 578-598. <https://doi.org/10.3102/0162373716649056>
- Mahadewsing, R., Getrouw, D., & Calor, S. (2024). Prior knowledge of a calculus course: The impact of prior knowledge on students' errors. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 19(3), em0786. <https://doi.org/10.29333/iejme/14765>
- McKinney, T., & Dibbs, R. (2021). Performance in Calculus II for students in CLEAR Calculus: A causal comparative study. *Pursue: Undergraduate Research Journal*, 4(1), article 3. https://digitalcommons.pvamu.edu/pursue/vol4/iss1/3?utm_source=digitalcommons.pvamu.edu%2Fpursue%2Fvol4%2Fiss1%2F3&utm_medium=PDF&utm_campaign=PDFCoverPages
- Meiselman, A. Y., & Schudde, L. (2022). The impact of corequisite math on community college student outcomes: Evidence from Texas. *Education Finance and Policy*, 17(4), 719-744. https://doi.org/10.1162/edfp_a_00365
- Mokher, C. G., Park-Gaghan, T. J., & Hu, S. (2021). Does the method of acceleration matter? Exploring the likelihood of college coursetaking success across four developmental education instructional strategies. *Teachers College Record*, 123(9), 3-27. <https://doi.org/10.1177/01614681211052000>
- Pambudi, D. S. (2022). Exploration of Prospective Mathematics Teachers' Mathematical Connections When Solving Integral Calculus Problems Based on Prior Knowledge. *European Journal of Mathematics and Science Education*, 3(2), 105-116. <https://doi.org/10.12973/ejmse.3.2.105>
- Rach, S., & Ufer, S. (2020). Which Prior Mathematical Knowledge Is Necessary for Studying Mathematics at University? *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 6(3), 375-403. <https://doi.org/10.1007/s40753-020-00112-x>
- Radmehr, F., & Drake, M. (2020). Exploring Students' Metacognitive Knowledge: The Case of Integral Calculus. *Education Sciences (MDPI)*, 10(3), 55. <https://doi.org/10.3390/educsci10030055>

- Rojas-Torres, L. & Jiménez-Alfaro, K. (2025). Construcción e implementación de una prueba diagnóstica para cursos de cálculo. *Revista Electrónica Calidad En La Educación Superior*, 16(1), 376–405. <https://doi.org/10.22458/caes.v16i1.5628>
- Rojas-Torres, L., Jiménez-Alfaro, K. y Solano, B. (2025). Problemas de formación en matemáticas se reflejan en estudiantes que ingresan a la universidad. En Programa Estado de la Nación (Ed), Estado de la Educación.
- Ryu, W., Schudde, L., & Pack, K. (2022). Constructing Corequisites: How community colleges structure corequisite math coursework and the implications for student success. *AERA Open*, 8(1), 1-13. <https://doi.org/10.1177/23328584221086664>
- Schraeder, M. R., Pyzdrowski, L. J., & Miller, D. A. (2019). The impact of prior exposure to calculus. *American Journal of Educational Research*, 7(3), 237-243. <https://pubs.sciepub.com/education/7/3/8/index.html>
- Watson, C., Duran, P., Castillo, A., Fuller, E., Potvin, G., & Kramer, L. (2023). The supportive role of active learning in a calculus course on low precalculus proficiency students. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 56(4), 561–582. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2023.2255189>
- Yamada, H., & Bryk, A. S. (2016). Assessing the first two years' effectiveness of Statway®: A multilevel model with propensity score matching. *Community College Review*, 44(3), 179-204. <https://doi.org/10.1177/0091552116643162>



SISTEMATIZACIÓN DE EXPERIENCIAS VIVIDAS EN EL USO DE RECURSOS HUMORÍSTICOS, MEMES Y CARICATURAS EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

SYSTEMATIZATION OF LIVED EXPERIENCES IN THE USE OF HUMOROUS RESOURCES, MEMES, AND CARTOONS IN THE MATHEMATICS CLASSROOM

Paola Alejandra Balda Álvarez¹

 ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0001-7824-9496>

RESUMEN

El uso de recursos humorísticos, memes y caricaturas en el aula de matemáticas constituye una estrategia didáctica innovadora y llamativa para estudiantes de diversos niveles académicos. Esta estrategia está orientada al fortalecimiento de la motivación, la comprensión conceptual, la memorización y al desarrollo de competencias matemáticas y comunicativas. Esta experiencia corresponde a la integración intencionada de recursos gráficos y humorísticos, construidos y analizados por una profesora y estudiantes, vinculados a situaciones de su realidad cotidiana. El artículo tiene como propósito examinar, a través de un análisis crítico, la implementación de esta estrategia como experiencia educativa significativa. El método utilizado fue el de sistematización de experiencias. Entre los resultados obtenidos se resalta la identificación de tres asuntos centrales: aportes didácticos del uso del humor en matemáticas, factores que favorecen su efectividad en el aula y aspectos a mejorar en su diseño e implementación; con sus respectivas manifestaciones, causas y reflexiones. Una de las conclusiones derivadas de la sistematización de la experiencia es que el uso de memes y caricaturas facilita la apropiación de conceptos matemáticos, fortalece el vínculo entre el saber escolar y la cultura juvenil, y promueve un ambiente de aprendizaje más participativo, crítico y significativo.

¹ Institución Educativa General Santander, Calarcá, Colombia. Correo electrónico:
Pbalda20@hotmail.com



Palabras clave: Sistematización De Experiencias, Educación Matemática, Memes, Humor, Recursos Didácticos.

ABSTRACT

The use of humorous resources, memes, and cartoons in the mathematics classroom constitutes an innovative and engaging teaching strategy for students at different educational levels. This approach is aimed at strengthening motivation, conceptual understanding, memorization, and the development of both mathematical and communicative competencies. This experience involves the intentional integration of graphic and humorous resources, created and analyzed by a teacher and students, and connected to situations from their everyday reality. The purpose of this article is to examine, through a critical analysis, the implementation of this strategy as a meaningful educational experience. The method used was the systematization of experiences. Among the results obtained, three central aspects stand out: the didactic contributions of humor in mathematics, the factors that enhance its effectiveness in the classroom, and aspects to be improved in its design and implementation, along with their corresponding manifestations, causes, and pedagogical reflections. One of the conclusions derived from the systematization of the experience is that the use of memes and cartoons facilitates the appropriation of mathematical concepts, strengthens the connection between school knowledge and youth culture, and promotes a more participatory, critical, and meaningful learning environment.

Keywords: Systematization of Experiences, Mathematics Education, Memes, Humor, Teaching Resources.

1. INTRODUCCIÓN

La innovación en las estrategias didácticas constituye un reto permanente para los profesores de matemáticas, aún más en la actualidad donde pese al momento histórico en el que nos encontramos y el claro exceso de información que circula en las redes sociales y medios de comunicación, y con ellos las múltiples herramientas que podrían ser empleadas en el aula, la manera como se enseñan las matemáticas, sigue siendo de forma abstracta, rígida y en ocasiones, distante de la realidad de quienes la aprenden. En este sentido, promover aprendizajes que atiendan las necesidades particulares de los contextos y que se ubiquen en el momento histórico actual implica no solo transformar las metodologías de enseñanza, sino también reconocer y valorar las formas de aprender, así como los lenguajes culturales propios de los estudiantes del siglo XXI, de manera que se favorezca una formación integral y contextual orientada al desarrollo de diversos tipos de habilidades o competencias (pensamiento crítico, comunicación, creatividad y cooperación) (Harari, 2018).

Es así como el uso de recursos humorísticos, memes y caricaturas en el aula de matemáticas se configura como una estrategia didáctica innovadora, que tal y como lo menciona Balda (2019a, 2019b), aporta al fortalecimiento de la motivación, la comprensión conceptual, la memorización y al desarrollo de competencias matemáticas, creativas y comunicativas, al acercar la realidad actual del que aprende al aula. El uso de memes y caricaturas en el aula de clase corresponde a la integración intencionada de recursos gráficos y humorísticos, diseñados, o seleccionados por

profesores y creados y analizados por estudiantes, los cuales asumen un rol preponderante como mediadores del aprendizaje matemático y adquieren significados especiales al establecer relaciones permanentes entre las matemáticas y la cotidianidad de los estudiantes.

El presente trabajo tiene como objetivo general examinar la implementación del uso de recursos humorísticos, memes y caricaturas en el aula de matemáticas, a través del proyecto *Las mates con humor entran*, mediante el método de sistematización de experiencias. De acuerdo con Varela (2006) y teniendo en cuenta el momento de ejecución de la sistematización y la utilidad de la misma, esta es de carácter correctivo, dado que pretende efectuar cambios en la marcha en la implementación de la experiencia partir de una lectura crítica. Los alcances están relacionados con la comprensión profunda del hacer docente al emplear los memes y caricaturas como recurso en el aula de matemáticas, identificar aciertos y obstáculos, y generar conocimiento teórico-práctico que emane de la práctica, con el fin de dar continuidad a la implementación y dialogar con otras experiencias de la misma índole.

Es así como la sistematización de experiencias se constituye en una herramienta metodológica valiosa para analizar la propuesta, toda vez que permite fortalecer las capacidades transformadoras de profesores y estudiantes en un escenario de práctica real, contextual e históricamente situado. Una reflexión de la realidad y para la realidad.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

En la actualidad, los medios de comunicación visuales y digitales presentan una accesibilidad creciente a escala global. Es en este escenario donde las unidades de información escrita que incorporan elementos visuales adquieren protagonismo, dado el amplio impacto y la diversidad que ofrecen a los lectores a través de contenidos variados, al responder a múltiples intereses y abarcar amplios sectores de la sociedad. Adicionalmente, el uso de estas unidades contribuye al fortalecimiento de la memorización, pone en juego la creatividad, evidencia la capacidad de síntesis y favorece la comprensión conceptual.

En un contexto caracterizado por la sobreabundancia de información, los sujetos tienden a buscar recursos que les permitan construir conocimiento de manera clara, sencilla y con alta capacidad de recordación (Balda, 2019a, 2019b). Es precisamente allí donde recursos como los memes o las caricaturas se constituyen en medios eficaces para compartir o construir conocimiento. Estos recursos facilitan la apropiación de conceptos que, en otros formatos más tradicionales, podrían resultar difíciles de retener tras experiencias académicas convencionales (Balda, 2021a, 2021b). Al respecto, Flores (2003) afirma que el uso de medios humorísticos sobrepasa la intención puramente lúdica, pues las propuestas que sugieren emplear el humor con alguna intención “barren desde: la función curativa fisiológica a la curativa psicológica, pasando a la creación de puentes de comunicación y confort” (Flores, 2003, p. 7). Además, autores como Abreu (2001) y Pérez Vila (1979) coinciden en afirmar que los

recursos humorísticos logran acercarse a los usuarios con el fin de entretener y enseñar de forma creativa y llamativa.

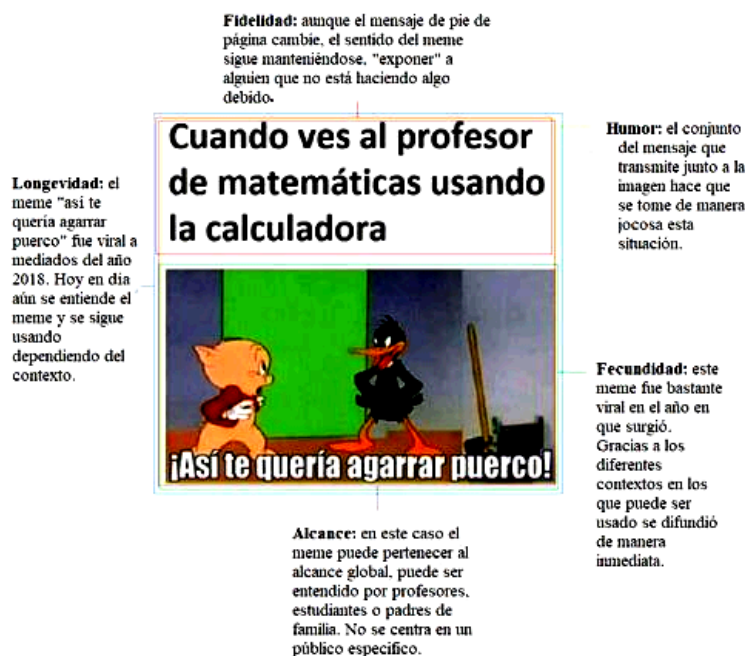
En la actualidad, aunque son pocas, existen investigaciones que reportan el uso de estos recursos en el contexto educativo. De acuerdo con Balda (2024), dichas investigaciones se ubican en dos categorías: una relacionada con los memes como artefactos, medios o estrategias didácticas; y otra centrada en el lenguaje y la cognición. Con respecto a la primera categoría, autores como Balda (2019a) y Beltrán Pellicer (2016) proponen emplear los memes en matemáticas como recursos en diferentes momentos de una clase y con diversidad intenciones como lo son motivar, introducir o reforzar el estudio de un concepto matemático. Referente a la segunda categoría, Bini y Robutti (2019) reconocen que los memes transmiten un significado asociado a una “memesfera” que contiene reglas compartidas entre los sujetos y les permiten recibir, procesar, almacenar, usar y compartir información del entorno estableciendo relaciones directas con las matemáticas.

Es así como estas unidades de información han ido adquiriendo, paulatinamente, un papel protagónico en diversos contextos, incluido el educativo. No obstante, su uso en el aula como uno de los múltiples recursos didácticos disponibles implica un reto adicional al de su simple selección. Al respecto, Balda (2018) propone no solo la selección, sino también la creación de memes o caricaturas que pueden ser empleados en diversos momentos de la clase: para inducir conceptos trabajados previamente por los estudiantes; para reforzar o profundizar en conceptos ya introducidos; como estrategias de evaluación; e incluso como una invitación hacia un giro social.

Este tipo de recursos, deberían de acuerdo con Bohórquez (2025), considerar al menos cuatro características:

1. Fidelidad, para que pueda ser reconocido a pesar de sus cambios y procesos de transformación.
2. Fecundidad, es decir, que tenga un alto potencial de transmisión.
3. Longevidad, para que se mantenga en el tiempo.
4. Humor, como un elemento integrador entre el contexto, la imagen y cada una de las características mencionadas anteriormente (Camas, Valero y Vendrell, 2018, p. 952).

Bohórquez ejemplifica estas características a través de un meme creado por él (ver Figura 1).

Figura 1. Características generales de un meme

Fuente: Bohórquez (2025).

En consecuencia, resulta fundamental reconocer que la incorporación de memes y caricaturas se constituye en un potente proyecto de largo alcance que invita a su sistematización con el fin de comprender su verdadero alcance educativo. La sistematización permite reconstruir de manera crítica los procesos vividos, identificar las intencionalidades, analizar las transformaciones en las formas de aprendizaje y visibilizar las tensiones que emergen en la implementación del proyecto. Además, posibilita convertir prácticas aparentemente cotidianas en conocimiento fundamentado, susceptible de ser compartido, discutido y enriquecido en la comunidad académica. En este sentido, sistematizar el uso de estos recursos, caricaturas y memes, en el aula de clase como parte de un proyecto que ha tenido amplia visibilidad, no solo aporta al reconocimiento de propuestas innovadoras en educación matemática, sino que también contribuye a la reflexión profunda y amplia de las experiencias que los profesores implementan de manera permanente en las aulas.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

El presente trabajo contempla los aportes derivados de la Investigación Acción Participativa (IAP) como un enfoque investigativo que busca la plena participación social. Se desarrolla bajo la modalidad de sistematización de experiencias, a partir del análisis del uso de memes y caricaturas como recursos en clase de matemáticas. Este enfoque metodológico resulta pertinente en tanto permite comprender, interpretar y

resignificar una experiencia educativa situada, construida colectivamente a lo largo del tiempo.

Se adoptaron las pautas metodológicas propuestas por Jara (2018) y Varela (2006), las cuales conciben la sistematización como “el rescate y reconstrucción de experiencias vividas y la socialización de los aprendizajes resultan con el fin de mejorar los resultados e impactos de los procesos de desarrollo” Varela (2006, p.13).

Los aspectos específicos de esta propuesta, al corresponder a una experiencia didáctica desarrollada en el aula de matemáticas, se sustentan en los aportes de autores como Pérez (2016) y Navarro y Roche (2013), quienes abordan la sistematización de experiencias educativas como una estrategia para comprender críticamente la práctica docente.

La metodología se estructuró siguiendo los cinco tiempos propuestos por Jara (2018), que se presentan en la Figura 2.

Figura 2. Los cinco tiempos de sistematización



Fuente: Elaboración propia basada en Jara (2018).

Cada uno de estos tiempos se desarrolló mediante momentos constitutivos que se describen a lo largo del informe de sistematización.

a. El punto de partida

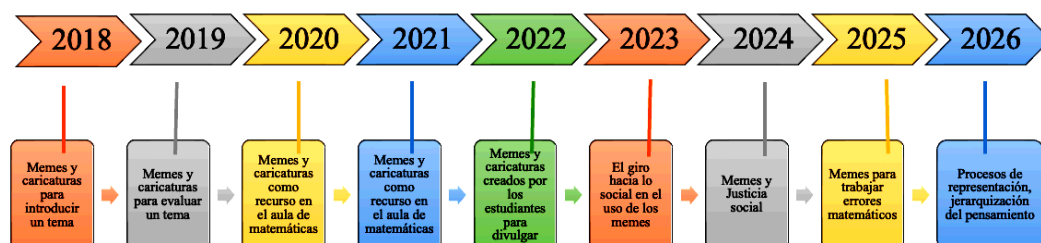
De acuerdo con Jara (2018), la sistematización parte de la propia práctica, es decir, de lo que se hace, se piensa y se siente, por lo que es indispensable haber participado directamente en la experiencia. Quienes la han vivido deben ser los principales protagonistas del proceso, aunque puedan contar con apoyos externos para aspectos metodológicos, organizativos o comunicativos, sin que estos sustituyan su voz. Asimismo, resulta fundamental llevar y conservar registros llevar y conservar registros continuos de lo ocurrido mediante anotaciones, documentos, informes, fotografías, grabaciones u otros materiales que permitan reconstruir y reflexionar sobre la experiencia. Esto implica que para llevar a cabo la sistematización sea indispensable *haber participado de la experiencia y tener registros de esta*.

a.1 Haber participado de la experiencia

Como profesora y gestora de la iniciativa del uso de memes y caricaturas en la enseñanza de las matemáticas participé de manera directa en la implementación y divulgación de la estrategia didáctica, lo que permitió una mirada reflexiva y situada

del proceso. Como autora de la iniciativa, año tras año incorporé a la misma asuntos que enriquecieron el uso de los memes y caricaturas en el aula de matemáticas. En los años 2018 y 2019, estos recursos se emplearon principalmente para introducir y evaluar contenidos, lo que refleja un uso inicial con fines didácticos básicos, nada distinto a lo que otro recurso podría representar. A partir de 2020 y hasta 2022, se consolidó su integración como herramienta en el aula, destacando su valor para facilitar la comprensión y el interés del estudiantado. En esta etapa se permitió a los estudiantes crear sus propios memes trascendiendo su uso inicial y permitiendo divulgar lo aprendido. En 2023 se observó un giro hacia lo social, donde los memes abarcaron asuntos más allá de lo meramente matemático y se vincularon con contextos y problemáticas sociales. Esta tendencia se reforzó en 2024 con su relación con la justicia social, usando algunos asuntos teóricos de la Enseñanza de las Matemáticas para la Justicia Social [EMpJS], sin abandonar la mirada hacia los objetos que se refleja en el trabajo del 2025 con su aplicación para el análisis de errores matemáticos. Finalmente, en 2026, el enfoque se orienta hacia procesos más complejos, como la representación y jerarquización del pensamiento, lo que sugiere una maduración en el uso pedagógico de los memes, pasando de un recurso introductorio a una herramienta para el desarrollo del pensamiento crítico y reflexivo. La evolución de la implementación se sintetiza en la Figura 3.

Figura 3. Línea de tiempo de ideas de implementación de la propuesta



Fuente: Elaboración propia.

La implementación de esta estrategia durante estos nueve años y que se reportada en esta sistematización, ha impactado alrededor de 200 estudiantes por año, esto es cerca de 1800 estudiantes, todos alumnos de la investigadora, autora de este escrito, quien trabaja en un colegio público de Soacha-Cundinamarca-Colombia y atiende a estudiantes entre los 10 y 17 años.

a.2 Tener registros de la experiencia

Previo al inicio del proceso de sistematización se contaba con diversos registros de la experiencia, que son las huellas de la experiencia. Entre los tipos de registro se encuentran: memes creados por los estudiantes y por la profesora, artículos publicados sobre la propuesta, presentaciones de las propuestas, audiovisuales que reportan la propuesta (entrevistas a la profesora, conferencias dictadas por la profesora, etc., reconocimientos que la propuesta ha recibido y encuestas de percepción del trabajo).

La cantidad y tipología de registros con los que se contaba previo a la sistematización se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1. Registros de la experiencia

Tipología de registro	Clase de registro	Cantidad
Memes creados por los estudiantes	Cuadernos	25
	Carpetas	145
Memes creados por la profesora	Imagen jpg	25
Artículos publicados sobre la propuesta	Revistas Indexadas	12
	Artículos en periódicos o revistas no indexadas	4
Presentaciones de las propuestas	PPT	8
	Videos	3
Audiovisuales que reportan la propuesta (entrevistas, conferencias, etc.)	Entrevistas	5
	Conferencias Grabadas	2
Reconocimientos a la propuesta	Distinciones en eventos nacionales	1
	Distinciones en eventos nacionales	1
Percepción de estudiantes	Encuestas	101
	Entrevistas	21

Fuente. Elaboración propia.

a. Preguntas iniciales

De acuerdo con Jara (2018), esta etapa de la sistematización consiste en definir claramente para qué se quiere realizar el proceso, precisando su objetivo y la utilidad que tendrá, en coherencia con la misión y la estrategia institucional, así como con los intereses y posibilidades de quienes participan. Asimismo, implica delimitar qué experiencia se va a sistematizar, seleccionando aquellos asuntos más relevantes, especificando el lugar y el período de tiempo, sin necesidad de abarcar la totalidad del proceso vivido, sino el tramo que resulte más significativo. Esto implica *definir el objetivo, delimitar ejes de sistematización, definir fuentes de información y procedimientos a seguir*.

b.1 ¿Para qué queremos hacer esta sistematización?

El objetivo de esta sistematización es examinar, a través de un análisis crítico, la implementación de la estrategia de uso de los memes y caricaturas como experiencia educativa significativa.

b.2 ¿Qué experiencia(s) queremos sistematizar?

Los ejes de sistematización definidos son:

- **Sentido y diseño de la estrategia:** Intencionalidades educativas del uso de memes. su diseño didáctico y su coherencia con los objetivos de aprendizaje.

- **Implementación y dinámica en el aula:** Formas de puesta en práctica de la estrategia, roles de la profesora y estudiantes, y condiciones del contexto escolar.
- **Aprendizajes y participación de los estudiantes:** Aprendizajes matemáticos promovidos, niveles de participación, motivación, creatividad y apropiación por parte de los estudiantes.
- **Tensiones, transformaciones y proyecciones:** Dificultades y resistencias encontradas, cambios en la práctica docente y aprendizajes que orientan futuras experiencias.

Entendidos los ejes se crearon preguntas orientadoras que permitieron dar un horizonte a la sistematización. Tanto los ejes como sus respectivas preguntas se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2. Registros de la experiencia

Eje de sistematización	Preguntas orientadoras
1. Sentido y diseño de la estrategia	¿Qué intencionalidades orientaron el uso de los memes y caricaturas como estrategia educativa?, ¿cómo se articuló esta estrategia con los objetivos de aprendizaje y el enfoque pedagógico del área?, ¿qué criterios se tuvieron en cuenta para el diseño de las actividades basadas en memes y caricaturas?
2. Implementación y dinámica en el aula	¿Cómo se llevó a cabo la implementación de la estrategia en el aula?, ¿qué roles asumieron la profesora y los estudiantes durante el desarrollo de las actividades?, ¿qué condiciones del contexto escolar influyeron en la experiencia?
3. Aprendizajes y participación de los estudiantes	¿Qué aprendizajes matemáticos se promovieron a través del uso de memes y caricaturas?, ¿cómo participaron los estudiantes y qué niveles de motivación y creatividad se evidenciaron?, ¿de qué manera los estudiantes expresaron su comprensión de las matemáticas mediante los memes y caricaturas?
4. Tensiones, transformaciones y proyecciones	¿Qué dificultades, tensiones o resistencias surgieron durante la experiencia?

Fuente: Elaboración propia.

b.3 ¿Qué fuentes de información vamos a utilizar?

Las fuentes de información empleadas son de dos tipos: fuentes primarias y fuentes secundarias. De acuerdo con Varela (2006), las fuentes primarias surgen una vez identificados los actores que hacen parte de la experiencia. Deben realizarse entrevistas a profundidad, las cuales deben estar enfocadas en la obtención de

información que no se encuentra disponible o que se desea corroborar o profundizar acerca de juicios o reflexiones y aprendizajes alrededor de la experiencia. Por otra parte, “la información secundaria, documental o bibliográfica está compuesta por informes, documentos diagnósticos, fotografías, evaluaciones, notas de prensa, vídeos, etcétera, que son valiosos y pueden aportar elementos esenciales para el eje de sistematización” (Varela, 2006, p. 45). Es importante aclarar que todos los registros se constituyen en fuentes, pero no todas las fuentes son registros, pues estas devienen de un proceso inicial de organización y depuración que permite, incluso, convertir los registros en fuentes de información como relatos que se alimentan de los registros.

A continuación, se presentan las fuentes de información empleadas en esta sistematización. Estas fuentes de información devienen de los registros de información presentados en la Tabla 1 y se constituyen en el corpus de estudio. La Tabla 3 presenta: el tipo de fuente, siendo las fuentes secundarias los documentos y materiales producidos durante el desarrollo de la experiencia y las fuentes primarias, entrevistas a profundidad, realizadas después de la implementación y relatos de la experiencia que buscaban aclarar aquellos asuntos que las fuentes secundarias no permitían identificar.

Tabla 3. Fuentes de información

Tipo de fuente	Definición en la experiencia	Ejemplos	Qué tipo de información aporta	Función en el análisis
Fuentes primarias	Información a la que se tuvo que recurrir después de la implementación y que buscaba aclarar aquellos asuntos que las fuentes secundarias no permitían identificar.	Entrevistas a 6 estudiantes sobre cómo cambió su percepción de las matemáticas después de crear memes. Relato escrito de la líder del proyecto sobre decisiones didácticas al integrar humor (hace parte del capítulo de un libro). Relato escrito de una estudiante sobre la experiencia (hace parte del capítulo de un libro). Reflexiones escritas de la líder del proyecto	Percepciones, emociones, cambios en la motivación, comprensión conceptual, tensiones, aprendizajes declarados, significados atribuidos al humor en clase.	Reconstruir la experiencia desde la voz de los participantes y comprender los procesos internos (motivacionales, cognitivos y emocionales).

Fuentes secundarias	Documentos y materiales producidos durante el desarrollo de la experiencia que sirven como evidencia.	Colección digital de memes creados por estudiantes y profesora. Artículos, conferencias y reconocimientos del trabajo	Evidencias concretas del proceso, evolución en la calidad conceptual de los memes, cambios en el lenguaje matemático, progresión en el razonamiento.	Sustentar con pruebas documentales los hallazgos y triangular la información obtenida en las entrevistas.
---------------------	---	---	--	---

Fuente. Elaboración propia.

La elección del corpus, que deviene de los registros, obedece al principio de saturación de datos. Esto significa que se recopiló información hasta que los nuevos datos dejaron de aportar información relevante. Por efectos de protección de menores se emplearon para el análisis solo las entrevistas de voz protegiendo la identidad de los menores con un cambio de nombre y contando con las autorizaciones de sus padres para realizar la entrevista de voz. Las conferencias y entrevistas se tomaron de lugares públicos, cuya difusión fue aprobada, como canales de televisión, emisoras o eventos académicos.

b.4 ¿Qué procedimientos vamos a seguir?

El procedimiento a emplear obedece a la estructuración de la información. Teniendo un panorama general del proceso de recolección de información, la presente sistematización sobre el uso de los memes y caricaturas como recurso en el aula de matemáticas se desarrolló en cinco momentos clave, siguiendo las orientaciones de Oscar Jara (2018). En el primer momento, se vivió la experiencia en el aula mediante el diseño e implementación de actividades basadas en caricaturas y memes matemáticos, lo que implicó no solo la puesta en práctica de la estrategia, sino también la generación de registros.

El segundo momento correspondió a la formulación de preguntas iniciales en correspondencia con ejes de sistematización: el sentido y diseño de la estrategia, su implementación en el aula, los aprendizajes y formas de participación de los estudiantes, y las tensiones y transformaciones emergentes.

En el tercer momento se llevó a cabo la recuperación del proceso vivido y su reconstrucción histórica, tomando como base las fuentes de información. Este proceso implicó no solo organizar y clasificar la información, sino también elaborar relatos que permitieran reinterpretar la experiencia a la luz de los ejes definidos. En este sentido, la escritura se constituyó en una práctica reflexiva fundamental, ya que permitió resignificar lo ocurrido, reconocer las intencionalidades en el uso de los memes y caricaturas como recurso en el aula de matemáticas y problematizar las formas en que los estudiantes se relacionan con esta disciplina.

El cuarto momento se centró en las reflexiones de fondo, donde se realizó el análisis de la información a partir de los ejes de sistematización, apoyado en la construcción de categorías que emergieron del análisis. La interpretación crítica del proceso permitió comprender por qué la estrategia funcionó de determinadas maneras, qué condiciones influyeron en su desarrollo y qué tensiones emergieron en su implementación (Duque Sánchez, 2016).

Finalmente, en el quinto momento se construyeron los puntos de llegada, los cuales recogen las principales conclusiones y aprendizajes derivados de la experiencia. Así mismo, se comunican los hallazgos en función de los ejes de sistematización, destacando tanto las potencialidades como los desafíos de incorporar recursos culturales digitales en la enseñanza de las matemáticas.

a. Recuperación del proceso vivido

De acuerdo con Jara (2018), esta fase de la sistematización comprende, por un lado, la *reconstrucción ordenada y cronológica de la experiencia* tal como ocurrió en el período delimitado, lo que permite tener una visión global del proceso, identificar momentos significativos, decisiones clave, cambios y etapas, apoyándose en recursos gráficos o narrativos y, por otro lado, la *organización y clasificación de la información* disponible a partir de los ejes de sistematización, definiendo variables y categorías, privilegiando una descripción rigurosa sin interpretaciones anticipadas, aunque registrando preguntas o temas a profundizar, para lo cual pueden emplearse matrices o cuadros que faciliten el análisis posterior.

c.1 Reconstrucción histórica de la experiencia

La reconstrucción de la experiencia constituye un momento fundamental dentro del proceso de sistematización, en tanto permite organizar de manera cronológica los principales acontecimientos, decisiones y transformaciones que han configurado el desarrollo de la propuesta. En este sentido, no se trata únicamente de enumerar hechos, sino de dar cuenta del proceso vivido, identificando momentos significativos, cambios en las prácticas y etapas que marcan la evolución de la experiencia.

La experiencia con el uso de memes y caricaturas en la enseñanza de las matemáticas inicia en el año 2018, en el contexto del aula, como una apuesta orientada a vincular el pensamiento matemático con elementos propios de la cultura juvenil. En este primer momento, su implementación tuvo un carácter exploratorio, en el que los memes y caricaturas comenzaron a ser utilizados como recurso para captar la atención de los estudiantes y generar conexiones entre los contenidos matemáticos y sus experiencias cotidianas. Al respecto, Balda (2020a, 2020b) afirma: “Todo empezó cuando en una clase de matemáticas los niños estaban distraídos haciendo memes y decidí incorporarlos a mi clase” (párr.24). Y aunque la intención inicial parecía no muy clara, en términos de lo matemático, “No sé exactamente por qué, pero sí sé que fue en ese momento cuando decidí que los memes harían parte de mis clases, bajo el lema si no puedes con tu enemigo, únete a él”. (Balda, 2023a, párr 2), si había una intención

contextual “Los memes se constituyen en una estrategia para traer la realidad del que aprende al aula” (Balda, 2023b, párr.2).

Este periodo se caracterizó por la búsqueda de sentido en la enseñanza, así como por tensiones iniciales frente al reconocimiento del meme como un recurso legítimo dentro del aula de matemáticas.

Durante el año 2019, la experiencia trasciende el espacio del aula y se proyecta hacia escenarios de divulgación académica, mediante su presentación en eventos como la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa y la publicación de artículos como: *La caricatura y los memes como herramienta de divulgación matemática. Una experiencia en el aula* -Revista Números-. Este momento representó un punto de inflexión, ya que implicó la necesidad de organizar, sistematizar y comunicar la experiencia, otorgándole mayor estructura y visibilidad. A su vez, comenzaron a configurarse intencionalidades más definidas, relacionadas con el uso del humor como mediación para la comprensión de conceptos matemáticos. Por ejemplo, en el trabajo presentado por Balda (2019a) se presenta el desarrollo histórico, hasta ese momento, de su proyecto. Así como la forma en que la autora llevó a sus estudiantes a la implementación de estos recursos en el aula.

Figura 4. Momentos de la experiencia reportados por Balda (2019a)



Fuente: Elaboración propia.

En los años 2020 y 2021, se evidenció una consolidación de los memes y las caricaturas como recursos didácticos, acompañada de una mayor intencionalidad en su uso. En este periodo, se fortalecieron las estrategias de mediación docente, se promovió la discusión colectiva en torno a los significados matemáticos presentes en los memes y las caricaturas y se incorporó la participación activa de los estudiantes, quienes no solo interpretaban, sino también producían sus propios memes y caricaturas. Este momento marcó un avance hacia una enseñanza centrada en la comprensión, el diálogo y la argumentación. Durante este periodo hubo divulgación de los alcances del proyecto en varios medios, a saber: Los memes como recurso en el aula de matemáticas. - Universidad del Norte-. Las mates con humor entran. Las caricaturas y los memes como herramienta de divulgación. -ALME-. Los memes como recurso en el aula de matemáticas-Escuela Normal Superior del estado de México-. Uso de memes y caricaturas como recursos humorísticos visuales en el aula de matemáticas-IIME. Al respecto, Balda (2021, p. 21) afirma:

La experiencia permitió identificar cómo y cuándo los memes y otros recursos humorísticos pueden ser empleados en diversos momentos de las clases de matemáticas. Las intervenciones de los estudiantes expresan cómo el uso de estos recursos como herramienta pre- o posinstruccional se constituye en un excelente detonante para dar inicio a un nuevo aprendizaje. Son elementos que generan escenarios de discusión y reflexión y conducen al estudiante a la indagación, lo cual refuerza la idea de considerar a estos recursos humorísticos una herramienta que permite al docente generar preguntas orientadoras e hipótesis respecto a una situación particular. Por otra parte, el uso de memes y caricaturas como recursos evaluativos otorga alternativas formas de evaluación.

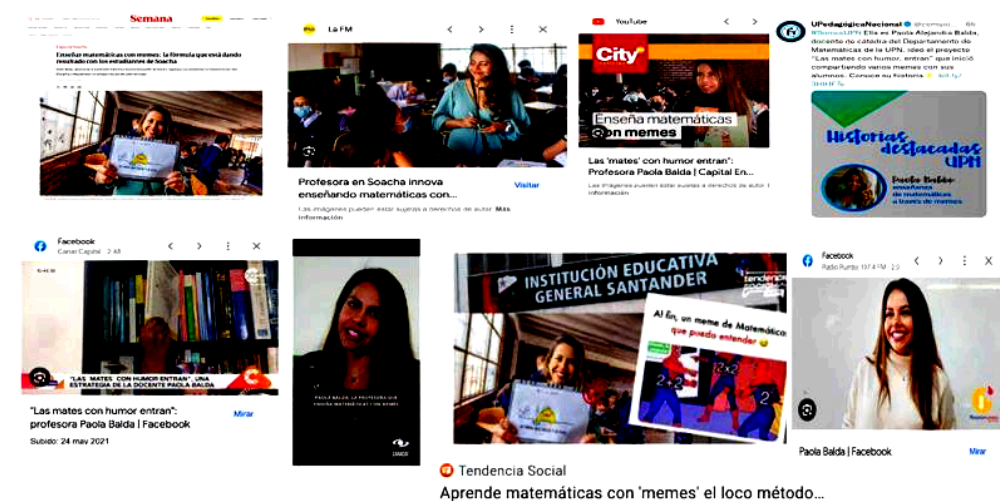
Incluso en el artículo del 2021, Balda retoma el trabajo de Beltrán (2016) para promover el uso de rúbricas para evaluar los recursos humorísticos construidos por los estudiantes (Figura 5).

Figura 5. Rúbrica para la evaluación de memes

RÚBRICA	4 - Excelente	3 - Bien	2 - Regular	1 - Mal
Coherencia del meme	La elección de la imagen está en consonancia con el texto.	La imagen y el texto están relacionados, pero se podría escribir mejor.	La imagen tiene algo que ver con el texto, pero sería necesario escribirlo de otra manera completamente diferente.	La imagen no tiene nada que ver con el texto escrito.
Ortografía y gramática	El texto no tiene faltas de ortografía y la gramática es correcta.	El texto tiene una falta de ortografía.	El texto tiene dos faltas de ortografía o alguna falta gramatical (tiempos verbales, por ejemplo).	El texto tiene más de dos faltas de ortografía y/o de gramática.
Adecuación a los contenidos solicitados	El meme se adecua a la consigna de la actividad.	El meme no se relaciona con lo solicitado en la actividad, pero tiene que ver con contenidos propios del tema de estudio.	El meme no tiene que ver con lo solicitado ni con los contenidos del tema, pero está relacionado con las matemáticas.	El meme no tiene nada que ver con las matemáticas.

Fuente: Beltrán (2026).

Para el año 2022, la experiencia alcanzó un nivel significativo de visibilización en medios de comunicación, lo que amplió su alcance más allá del aula y lo posicionó en el escenario público (Figura 6). Esta exposición contribuyó a resignificar el uso de memes y caricaturas en la enseñanza de las matemáticas, no solo como una estrategia innovadora, sino como una práctica con impacto social, capaz de transformar la percepción de los estudiantes frente a la disciplina. Algunos de los espacios en los cuales el proyecto tuvo visibilidad fueron: Revista Semana, La Universidad Pedagógica Nacional, La FM, RCN radio, Alerta Bogotá, La nota positiva, Tendencia Social.

Figura 6. Visibilización del proyecto en medios

Fuente: Elaboración propia.

Posteriormente, entre los años 2023 y 2024, la experiencia incorporó de manera explícita un enfoque sociopolítico, particularmente en relación con la justicia social. Este giro amplió el horizonte de la propuesta, permitiendo establecer conexiones entre las matemáticas, el contexto social y las problemáticas del entorno. Así se reconoció como los memes y caricaturas no solo funcionan como mediadores del aprendizaje conceptual, sino también como herramientas para la reflexión crítica y la lectura del mundo. Para dar a conocer los avances del proyecto se hicieron presentaciones en eventos académicos y se publicó un artículo: Memes y Justicia Social -16º Foro de Investigación de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales-, ¿Qué divulgan los memes en matemáticas? -6to Encuentro de Jóvenes que investigan de RELME-, Justicia social en el aula de matemáticas- Reunión Latinoamericana De Matemática Educativa-, Memes, caricaturas y justicia social en el aula de matemáticas -Revista chilena de educación científica-. Para este momento Balda, incorporó el uso de memes y caricaturas en el diseño de situaciones de aprendizaje fundamentadas en enfoque de la Enseñanza de las Matemáticas para la Justicia Social.

Figura 7. Situación de Aprendizaje



Prohibida la reproducción total o parcial de este material. Los derechos de autor son propiedad de la profesora Paola Balda.

Situación de aprendizaje 1: Dime cuánto gastas y te diré dónde vives

Nuestra primera situación de aprendizaje busca que reconozcamos cuánto dinero se gasta en casa, cuánto debería ganar si quisiera en determinado momento de mi vida vivir solo. ¿En Colombia habrá desigualdad en el tema de ingresos? ¿qué crees?



A través de esta situación de aprendizaje estaremos trabajando los siguientes asuntos relacionados con la Justicia Social:

Identidad	Tengo una visión positiva de mí mismo, incluida la conciencia y la comodidad con mi pertenencia a diversos grupos en la sociedad.
Identidad	Conozco mi historia familiar y mis antecedentes culturales y puedo describir cómo mi propia identidad está informada y moldeada por mi pertenencia a diversos grupos de identidad.
Diversidad	Tengo el lenguaje y el conocimiento para describir de manera precisa y respetuosa cómo las personas (incluyendo a mí) son similares y diferentes entre sí y con otros en sus grupos de identidad.
Justicia	Puedo reconocer, describir y distinguir la injusticia y la injusticia en diferentes niveles de la sociedad.
Justicia	Soy consciente de las ventajas y desventajas que tengo en la sociedad por mi pertenencia a diferentes grupos identitarios y sé cómo esto ha afectado mi vida.
Acción	Asumo la responsabilidad de hacer frente a la exclusión , el prejuicio y la injusticia.

Fuente: [Southern Poverty Law Center](#)

Además, haremos un repaso de los diferentes sistemas numéricos, sus operaciones, los usos y significados de los números. En este caso nos centraremos en los enteros

¡Bienvenidos!

Fuente: Balda (2024).

Finalmente, entre los años 2025 y 2026, se observó y se observa una profundización teórica. En este momento se han desarrollado orientaciones metodológicas para la creación de memes y caricaturas en el aula y se han abordado procesos cognitivos y metacognitivos asociados a su uso, tales como la representación, la jerarquización del pensamiento y la reflexión sobre el propio aprendizaje. Este periodo da cuenta de una experiencia que ha transitado desde una práctica inicial de carácter intuitivo hacia una propuesta consolidada, con aportes significativos al campo de la educación matemática (Balda, 2024, 2025a, 2025b, 2025c). La difusión se siguió realizando a través de presentaciones en eventos académicos y la publicación de dos nuevos artículos: Memes en la enseñanza de las matemáticas -XIII Encuentro Juvenil de matemáticas-, Los memes como recurso en el aula de matemáticas -Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa-, Los memes como recurso en el aula de matemáticas- Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa-, ¿Cómo crear memes para nuestras clases de matemáticas? -Revista Números-, Mujeres de acero -Canal Caracol-, Procesos de representación, jerarquización del pensamiento y reflexión metacognitiva en memes matemáticos. -Revista Unión-. Un ejemplo de cómo la autora propone un paso a paso para la creación de memes se presenta en la Figura 8.

Figura 8. Paso a paso para crear un meme

Paso	Descripción
Determinar la temática a trabajar	Aritmética. Orden de números decimales
Definir la pertinencia en términos de la intención del meme	Meme conceptual/durante clase. Problematizar un error común como lo es que 0,4 es menor que 0,35
Determinar la plantilla	Al ser una situación de ambigüedad sirven plantillas que representen ambigüedad o contradicción. • “Plantilla de Drake”
Redactar el contenido del meme	0,4>0,35; 0,4<0,35
Diseñar el meme	
Probar y ajustar el diseño	• El meme es claro • El meme presenta el error ◦ El meme da a entender el mensaje
Incorpora elementos que estimulen la reflexión o el análisis	• ¿Qué representa este meme? • ¿Por qué crees que Drake acepta que 0,4>0,35? • ¿Por qué crees que Drake rechaza que 0,4<0,35? ¿Qué hace que un decimal sea mayor que otro?

Fuente: Balda (2025c).

A partir de esta reconstrucción, es posible identificar diversas etapas en el proceso: una fase exploratoria inicial, una fase de divulgación y formalización, una fase de consolidación didáctica, una etapa de expansión social y, finalmente, un momento de profundización teórica y proyección investigativa. Asimismo, se reconocen decisiones clave, como la incorporación del humor como mediación, la participación activa de los estudiantes en la producción de memes y caricaturas y la articulación de la enseñanza de las matemáticas con enfoques de justicia social, las cuales han marcado transformaciones significativas en la práctica docente (Balda, en prensa). Cada uno de estos momentos hace parte de la cronología de la experiencia, en la cual se evidencian hitos y enfoques claramente definidos.

Cronología de la Experiencia

[2018] — Inicio de la experiencia

Hito: Primer uso exploratorio de memes y caricaturas en el aula.

Enfoque: Buscar la motivación y la conexión con lo cotidiano del estudiante.

[2019] — Primera divulgación académica

Hito: Presentación en RELME y publicación en revista.

Enfoque: Formalización inicial de la experiencia.

[2020] — Consolidación como recurso didáctico

Hito: Participación activa en eventos académicos y ponencias.

Enfoque: Dotar a la práctica de una mayor intencionalidad.

[2021] — Profundización didáctica

Hito: Centralidad del humor y la participación estudiantil activa.

Enfoque: Procesos de interpretación y creación propia de memes y caricaturas.

[2022] — Visibilización mediática

Hito: Amplia difusión en prensa y medios de comunicación.

Enfoque: Lograr impacto social y reconocimiento de la práctica.

[2023] — Giro hacia justicia social

Hito: Cambio estratégico en la temática.

Enfoque: Incorporación de un enfoque sociopolítico explícito.

[2024] — Consolidación del enfoque crítico

Hito: Maduración de la perspectiva social.

Enfoque: Triangulación entre memes, caricaturas, matemáticas y contexto social.

[2025] — Producción metodológica

Hito: Creación de materiales de apoyo.

Enfoque: Elaboración de orientaciones para crear memes y caricaturas en clase.

[2026] — Profundización teórica

Hito: Análisis avanzado de la práctica.

Enfoque: Investigación de procesos cognitivos y metacognitivos involucrados.

c.2 Ordenación y clasificación de la experiencia con base en los ejes de sistematización

Dada la diversidad de fuentes se decidió ordenar y clasificar la información de acuerdo a dos tipos de recursos (narrativos y gráficos). Los relatos, transcripciones de entrevistas y artículos (recursos narrativos), se analizaron desglosándolos en cláusulas que, a criterio de la sistematizadora, dieran cuenta de los asuntos propuestos en los ejes de sistematización. Las cláusulas definieron etiquetas (manifestaciones) que luego se agruparon y dieron lugar a categorías emergentes que aportaron a dar respuesta a las preguntas: ¿qué intencionalidades orientaron el uso de los memes y caricaturas como estrategia educativa?, ¿cómo se articuló esta estrategia con los objetivos de aprendizaje y el enfoque pedagógico del área?, ¿qué criterios se tuvieron en cuenta para el diseño de las actividades basadas en memes y caricaturas?, ¿cómo se llevó a cabo la implementación de la estrategia en el aula?, ¿qué roles asumieron la profesora y los estudiantes durante el desarrollo de las actividades?, ¿qué condiciones del contexto escolar influyeron en la experiencia?, ¿qué aprendizajes matemáticos se promovieron a través del uso de memes y caricaturas?, ¿cómo participaron los estudiantes y qué niveles de motivación y creatividad se evidenciaron?, ¿de qué manera los estudiantes expresaron su comprensión de las matemáticas mediante los memes y caricaturas?, ¿qué dificultades, tensiones o resistencias surgieron durante la experiencia? A modo de ejemplo se presenta la Tabla 4, la cual revive la manera de organización de las cláusulas.

Tabla 4. Organización de cláusulas

Eje de Sistematización	Cláusula de Referencia (Art. 6)	Conclusión / Impacto Pedagógico
Sentido y diseño de la estrategia	c5: Memes humorísticos sin contenido explícitamente matemático... permiten generar discusiones.	La estrategia prioriza la creación de un ambiente de confianza. El meme funciona como un disparador del diálogo antes de entrar en conceptos técnicos como los múltiplos o criterios.
Implementación y dinámica en el aula	c6: Personajes con expresiones emocionales intensas (niño confundido/gato enojado) (...) facilitan la representación de emociones.	Permite gestionar la dimensión afectiva del aprendizaje. Los estudiantes pueden expresar su sentir ante "retos" complejos, como la regla especial del 7 o las restas alternas del 11.
Aprendizajes y participación	c6: Plantillas de dos paneles comparativos... útil para evidenciar diferencias entre concepciones erróneas y correctas.	Promueve la metacognición. Es ideal para contrastar resultados en ejercicios de divisibilidad (como el del número 135) y verificar si se aplicaron correctamente los criterios de suma de cifras.
Tensiones, transformaciones y proyecciones	(Transversal a las cláusulas c5 y c6)	La principal transformación es el paso de una enseñanza tradicional de tablas a una práctica docente mediada por el lenguaje visual, reduciendo las resistencias al error.

Fuente: Elaboración propia.

El análisis de los memes, caricaturas y las presentaciones se realizó a la luz de los ejes de sistematización: el sentido y diseño de la estrategia, evidenciando las intencionalidades formativas y su articulación con los objetivos de aprendizaje; la implementación y dinámica en el aula, que permitió comprender los roles, formas de participación y condiciones del contexto; los aprendizajes y la participación de los estudiantes, identificando niveles de comprensión matemática, creatividad y apropiación del conocimiento; y, las tensiones, transformaciones y proyecciones, donde emergen dificultades, resistencias y posibles cambios en la relación de los estudiantes con las matemáticas. Un ejemplo de análisis se presenta en la Tabla 5.

Tabla 5. Análisis de la Imagen en la Sistematización



Eje de Sistematización	Análisis del Recurso Visual (Meme de Fry)	Conclusión / Impacto Pedagógico
Sentido y diseño de la estrategia	La imagen utiliza una plantilla de "revelación" o "escepticismo" para presentar una igualdad geométrica compleja.	Diseño intencional: El uso de un personaje conocido busca que una fórmula abstracta se perciba como un "descubrimiento sorprendente", facilitando la conexión emocional con el contenido.
Implementación y dinámica en el aula	La expresión de Fry refleja lo mencionado en la cláusula c6 del art. 6: la "sorpresa al descubrir una propiedad matemática inesperada".	Dinámica de asombro: En el aula, esta imagen sirve para detonar preguntas como "¿Es esto siempre verdad?", permitiendo que la profesora guíe la verificación de la fórmula en diferentes cuerpos geométricos.
Aprendizajes y participación	Contrario a los memes sin contenido matemático, este presenta explícitamente una relación numérica: $C + V = A + 2.$	Aprendizaje visual: El estudiante asocia la satisfacción del "meme entendido" con la comprensión de una propiedad matemática, promoviendo una apropiación creativa de la geometría.
Tensiones, transformaciones y proyecciones	Representa la transición de la enseñanza basada en la memorización de fórmulas a una basada en la curiosidad visual.	Proyección: El éxito de este formato sugiere que incluso conceptos complejos pueden presentarse como "revelaciones" humorísticas para disminuir la resistencia del alumno.

Fuente: Elaboración propia.

Las etiquetas que emergieron del análisis de los recursos narrativos y gráficos, se decidieron llamar manifestaciones y se ubicaron en cada uno de los ejes de sistematización (ver Tabla 6).

Tabla 6. Manifestaciones encontradas por cada eje

Sentido y diseño de la estrategia	Implementación y dinámica en el aula	Aprendizajes y participación de los estudiantes	Tensiones, transformaciones y proyecciones
M1. Proyecta el uso de los memes y caricaturas como una estrategia didáctica que vincula el pensamiento matemático con la cultura juvenil. M2. Sitúa al estudiante como intérprete activo de significados matemáticos presentes en los memes y caricaturas. M3. Diseña situaciones de aprendizaje que utilizan el humor gráfico para introducir y problematizar conceptos matemáticos. M4. Otorga sentido a la enseñanza de las matemáticas al relacionarlas con experiencias cotidianas de los estudiantes. M5. Reconoce el meme como un artefacto cultural válido para la construcción de conocimiento matemático. M6. Propone una enseñanza de las matemáticas con énfasis en la comprensión, el diálogo y la reflexión crítica.	M1. Uso de memes y caricaturas como actividad inicial para captar la atención y motivar la participación de los estudiantes. M2. Discusión colectiva de los memes y caricaturas para explorar ideas matemáticas implícitas en el lenguaje visual y textual. M3. Mediación docente orientada a profundizar el significado matemático del meme. M4. Interacción entre estudiantes a partir de interpretaciones diversas de un mismo meme y caricatura. M5. Incorporación de memes y caricaturas creados por los estudiantes como parte de la dinámica de la clase. M6. Ajustes en la planificación de la clase según las respuestas y aportes del grupo frente a los memes y caricaturas. M7. Empleo de memes y caricaturas con distintas intencionalidades didácticas (introdutoria, de refuerzo, de evaluación, percepción de errores, lecturas de contextos, etcétera)	M1. Mayor participación de los estudiantes al trabajar conceptos matemáticos a partir de memes y caricaturas. M2. Desarrollo de habilidades de argumentación al explicar el sentido matemático del meme. M3. Apropiación del lenguaje matemático al traducir el humor del meme en explicaciones formales. M4. Incremento de la confianza de los estudiantes para expresar ideas matemáticas propias. M5. Reconocimiento del error como parte del proceso de interpretación y aprendizaje matemático. M6. Producción de memes y caricaturas matemáticos como evidencia de comprensión conceptual.	M1. Tensiones iniciales frente al reconocimiento del meme y caricaturas como recurso legítimo en la enseñanza de las matemáticas. M2. Cuestionamiento de prácticas tradicionales centradas exclusivamente en ejercicios rutinarios. M3. Transformación del rol del docente hacia un facilitador del diálogo matemático mediado por M4. Cambios en la percepción de los estudiantes sobre las matemáticas como disciplina cercana y comprensible. M5. Proyección del uso de memes y caricaturas hacia otros contenidos y niveles educativos. M6. Consolidación del proyecto de Balda como una propuesta con potencial para la educación matemática con enfoque social.

Fuente: Elaboración propia.

Como ejercicio final de análisis, se organizaron las manifestaciones teniendo en cuenta la reconstrucción cronológica de la experiencia, con el fin de identificar momentos puntuales de emergencia de dichas manifestaciones y los aspectos o preguntas sobre las cuales se pudiera profundizar, todo esto con el objetivo de construir reflexiones profundas en torno a lo ocurrido en la implementación de la propuesta.

La reconstrucción cronológica y organización por ejes de sistematización inicia en 2018, con la implementación en el aula sin procesos de divulgación. La fuente corresponde a la práctica docente. En el eje de sentido pedagógico y diseño se identifican los momentos M1, M4 y M5; en implementación en el aula, M1; en aprendizajes y participación, no se registra información; y en tensiones, transformaciones y proyecciones, M1. La evidencia corresponde a la experiencia de aula. La pregunta orientadora para profundizar es: ¿Cómo se legitima inicialmente el meme como recurso?

En 2019 se desarrollan los primeros procesos de divulgación académica (RELME y artículo). Las fuentes corresponden a ponencias y artículo. En el eje de sentido pedagógico y diseño se ubican los momentos M1, M3 y M6; en implementación en el aula, M2 y M3; en aprendizajes y participación, M2; y en tensiones, transformaciones y proyecciones, M2. La evidencia corresponde a publicaciones. La pregunta orientadora es: ¿Qué elementos del aula se priorizan para comunicar?

En 2020 se presenta la consolidación del meme como recurso didáctico en eventos académicos. La fuente corresponde a ponencias. En el eje de sentido pedagógico y diseño se registran los momentos M3, M5 y M6; en implementación en el aula, M3, M6 y M7; en aprendizajes y participación, M1 y M3; y en tensiones, transformaciones y proyecciones, M2. La evidencia corresponde a eventos académicos. La pregunta orientadora es: ¿Qué ajustes metodológicos emergen?

En 2021 tiene lugar la profundización en el uso del humor y recursos visuales. Las fuentes corresponden a conferencia y artículo. En el eje de sentido pedagógico y diseño aparecen los momentos M2, M3 y M6; en implementación en el aula, M2, M3 y M4; en aprendizajes y participación, M2 y M4; y en tensiones, transformaciones y proyecciones, M3. La evidencia corresponde a publicaciones. La pregunta orientadora es: ¿Cómo se configura la mediación docente?

En 2022 se produce la visibilización en medios de comunicación. Las fuentes corresponden a noticias y entrevistas. En el eje de sentido pedagógico y diseño se registran los momentos M4 y M5; en implementación en el aula, M1 y M4; en aprendizajes y participación, M1; y en tensiones, transformaciones y proyecciones, M4. La evidencia corresponde a medios digitales. La pregunta orientadora es: ¿Cómo cambia el sentido del meme fuera del aula?

En 2023 se incorpora el enfoque de justicia social. La fuente corresponde a ponencias. En el eje de sentido pedagógico y diseño se identifican los momentos M4 y M6; en implementación en el aula, M2, M4 y M7; en aprendizajes y participación, M2 y M3; y en tensiones, transformaciones y proyecciones, M3 y M6. La evidencia

corresponde a eventos académicos. La pregunta orientadora es: ¿Qué nuevas intencionalidades emergen?

En 2024 se consolida el enfoque sociopolítico en el aula. Las fuentes corresponden a artículos y ponencias. En el eje de sentido pedagógico y diseño se registran los momentos M4 y M6; en implementación en el aula, M3, M4 y M7; en aprendizajes y participación, M3 y M5; y en tensiones, transformaciones y proyecciones, M4 y M6. La evidencia corresponde a publicaciones. La pregunta orientadora es: ¿Cómo se articulan matemáticas y contexto social?

En 2025 se desarrolla la producción metodológica sobre creación de memes y caricaturas. Las fuentes corresponden a eventos y artículo. En el eje de sentido pedagógico y diseño aparecen los momentos M3, M5 y M6; en implementación en el aula, M5 y M7; en aprendizajes y participación, M6; y en tensiones, transformaciones y proyecciones, M5 y M6. La evidencia corresponde a talleres y publicaciones. La pregunta orientadora es: ¿Qué define un meme didáctico eficaz?

Finalmente, en 2026 se presenta la profundización en procesos cognitivos y metacognitivos. La fuente corresponde a un artículo en prensa. En el eje de sentido pedagógico y diseño se registran los momentos M2 y M6; en implementación en el aula, M3; en aprendizajes y participación, M2, M3 y M6; y en tensiones, transformaciones y proyecciones, M3. La evidencia corresponde a investigación. La pregunta orientadora es: ¿Cómo se evidencian procesos metacognitivos?

b. La reflexión de fondo

Esta etapa de la sistematización se centra en el *análisis, la síntesis y la interpretación crítica* de la experiencia reconstruida, mediante el examen de cada componente y de sus interrelaciones, considerando tanto las dimensiones individuales como colectivas, con el fin de retomar los interrogantes, identificar tensiones y contradicciones, comprender las causas y la lógica del proceso vivido, y confrontar los hallazgos con otras experiencias y con referentes teóricos (Jara, 2018).

d.1 Analizar y sintetizar

La incorporación de memes y caricaturas en la enseñanza de las matemáticas no puede entenderse únicamente como una innovación metodológica, sino como una transformación en las formas de concebir el conocimiento, el aprendizaje y la relación entre escuela y cultura. A partir de la reconstrucción de la experiencia, es posible avanzar hacia una fase interpretativa que permita analizar los distintos componentes que la configuran, así como las tensiones, relaciones y proyecciones que emergen de su implementación.

Sentido y diseño de la estrategia

El sentido que orienta el uso de memes y caricaturas se sustenta en la intención de vincular el pensamiento matemático con la cultura juvenil, reconociendo estos recursos como artefactos culturales legítimos para la construcción de conocimiento. En este marco, el meme deja de ser un elemento periférico o meramente motivacional para

situarse como un mediador entre el saber matemático y las formas contemporáneas de comunicación, pues como lo afirma Balda (2023b, párr.23)

Los memes se constituyen en una estrategia para traer la realidad del que aprende al aula. Los memes son una forma de mostrar que las matemáticas se pueden trabajar con un humor, que reírse también es válido en una clase de matemáticas (reflexión 1).

Asimismo, la estrategia se configura desde una perspectiva que sitúa al estudiante como intérprete activo de significados, capaz de leer, cuestionar y resignificar los contenidos matemáticos presentes en los memes y caricaturas. Este desplazamiento supone una ruptura con enfoques tradicionales centrados en la transmisión de contenidos, para dar lugar a una enseñanza basada en la comprensión, el diálogo y la reflexión crítica.

El diseño de situaciones de aprendizaje que incorporan el humor gráfico permite problematizar conceptos matemáticos desde escenarios cercanos a la experiencia o vida de los estudiantes, otorgando sentido a la matemática en relación con lo cotidiano. En este sentido, el meme no simplifica el conocimiento, sino que lo complejiza al situarlo en contextos culturales específicos que demandan interpretación. Al respecto, Balda (2023, párr. 23) manifiesta “se consideró hacer uso de memes y caricaturas como herramienta para potenciar situaciones que tuvieran como fundamento la EMpJS”. Esto, en atención a otras investigaciones que emplean de este tipo de recursos y que reportan una importancia considerable en el desarrollo de habilidades sustentadas en el ejercicio de la democracia, a partir de la participación, reconocimiento de valores, la libre expresión, y el diálogo a través del estudio de fenómenos presentes en la vida (Balda, 2023).

No obstante, este enfoque plantea interrogantes relevantes: ¿hasta qué punto el meme logra mantener el rigor matemático sin diluirse en lo anecdótico?, ¿cómo se equilibra el componente cultural con la formalización del conocimiento? Estas preguntas evidencian la necesidad de profundizar en los criterios de diseño de la estrategia.

Implementación y dinámica en el aula

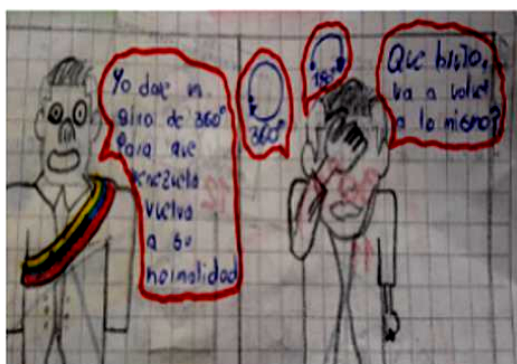
En el plano de la implementación, el uso de memes y caricaturas introduce transformaciones significativas en la dinámica del aula. Su utilización como actividad inicial permite captar la atención de los estudiantes y generar un ambiente propicio para la participación, lo que sugiere una reconfiguración de los momentos tradicionales de la clase, Balda (2024, párra16) afirma que “los memes y caricaturas pueden emplearse para introducir o problematizar, para reforzar un tema, para evaluar, o desde un giro hacia lo social para hacer una reflexión crítica de nuestra realidad, con las matemáticas”.

La discusión colectiva de los memes y caricaturas se convierte en un espacio central para la construcción del conocimiento, en el que los estudiantes exploran ideas matemáticas implícitas en el lenguaje visual y textual. En este proceso, la mediación docente adquiere un papel fundamental, no como transmisor de respuestas, sino como

orientador que profundiza y resignifica los aportes de los estudiantes, pues como lo afirma Balda (2022) en una conferencia afirma que los memes son un recurso que no fue creado para la enseñanza, el potencial se lo damos los profesores, por eso el rol del profesor es sumamente importante y determinante en términos de la intención de este tipo de recursos.

La interacción entre pares, a partir de interpretaciones diversas de un mismo meme, evidencia que el conocimiento matemático no es unívoco ni lineal, sino que se construye en diálogo con otros. Asimismo, la incorporación de memes y caricaturas creadas por los estudiantes introduce una dimensión productiva que transforma su rol, pasando de receptores a productores de conocimiento. En el meme creado por un estudiante de grado décimo en 2018 se puede evidenciar, no solo la comprensión en términos matemáticos de lo que representa un ángulo de 360° , sino que además se evidencia el reconocimiento de cómo los discursos políticos nos manipulan, así lo manifestó el estudiante (ver Figura 7).

Figura 9. Meme creado por un estudiante de grado décimo



Fuente: creación de un estudiante

Sin embargo, la flexibilidad que implica ajustar la planificación en función de las respuestas del grupo también representa un desafío. ¿Cómo sostener la coherencia curricular en un escenario donde la clase se redefine constantemente?, ¿qué tensiones surgen entre planificación y contingencia? Estas preguntas permiten visibilizar la complejidad de la práctica docente en este enfoque.

Aprendizajes y participación de los estudiantes

En relación con los aprendizajes, la experiencia muestra un incremento en la participación de los estudiantes, lo cual sugiere que el uso de memes y caricaturas favorece su implicación en el proceso educativo. Esta participación no se limita a lo cuantitativo, sino que se traduce en el desarrollo de habilidades de argumentación, en tanto los estudiantes deben explicar el sentido matemático del meme, por ejemplo cuando la profesora afirma que llegó a tener una colección de cerca de 500 memes, todos creados por los estudiantes (Balda, 2020b)

La traducción del humor en lenguaje matemático formal implica un ejercicio de apropiación conceptual que pone en juego procesos cognitivos complejos. En este

sentido, el meme actúa como un puente entre lo informal y lo formal, facilitando la comprensión sin sustituir la necesidad de rigor, así por ejemplo Valentina, una estudiante de grado décimo en el 2018 afirma: “en el meme puse que recordara las razones si te gustaba la coca cola con hielo, eso porque la profesora nos enseñó que seno era igual a cateto opuesto sobre hipotenusa, y así entonces cateto opuesto era CO y la hipotenusa H era hielo y así con todas”.

Asimismo, se observa un incremento en la confianza de los estudiantes para expresar sus ideas, lo que sugiere una transformación en la relación con el error. Este deja de ser percibido como una falla para convertirse en una oportunidad de aprendizaje, particularmente en procesos de interpretación donde múltiples lecturas son posibles como se evidencia en el siguiente testimonio:

“La profesora, al ver mi curiosidad y mi atención, me dijo: ‘Liseth, te tengo una súper misión, ¿la aceptas?’. Yo, con la audacia que también me caracteriza, sin dudarlo ni un segundo, dije: ‘¡Claro que sí!’. La profe respondió: ‘Quiero que hagas un meme con el tema de hoy, un meme en el que reflejes lo que aprendiste. Puedes elegir el meme y la parte del tema que tú quieras, pero lo importante es que tenga algo de lo que aprendimos hoy’. Fui con mucha emoción a mi puesto y empecé a crear mi meme matemático” (Cardozo en CODIME, 2025, p.170)

La producción de memes y caricaturas por parte de los estudiantes emerge como una evidencia significativa de comprensión, en tanto implica no solo entender un concepto, sino representarlo, sintetizarlo y comunicarlo. No obstante, surge la pregunta sobre cómo evaluar estos productos: ¿qué criterios permiten valorar su calidad matemática sin reducirlos a su dimensión estética o humorística?

Tensiones, transformaciones y proyecciones

El desarrollo de la experiencia no está exento de tensiones. Una de las principales tensiones se relaciona con el reconocimiento del meme como recurso legítimo en la enseñanza de las matemáticas, lo cual interpela las prácticas tradicionales centradas en ejercicios rutinarios y descontextualizados a veces no es tan fácil, hay cosas que se salen de control y pareciera que crear un meme es fácil, pero ante la dificultad inicial muchos estudiantes optan por no poner contenidos matemáticos, lo cual desvirtúa el trabajo, toca aprender muy bien para enseñar mejor (relato, Balda, 2026, p.2)

Estas tensiones anteriormente mencionadas dan lugar a transformaciones significativas, entre ellas el cambio en el rol del docente, quien pasa a ser un facilitador del diálogo matemático mediado por recursos culturales. Este desplazamiento implica no solo un cambio metodológico, sino también epistemológico, en tanto redefine qué se entiende por enseñar y aprender matemáticas como lo expresa Balda (2022) en una respuesta en conferencia enseñar con memes, caricaturas u otros recursos no convencionales implica que veas las matemáticas de una manera diferente, esto ha hecho que mi relación con los objetos cambie y que de manera constante problematice lo que es ser profesor del siglo XXI.

De igual manera, se evidencian cambios en la percepción de los estudiantes, quienes comienzan a concebir las matemáticas como una disciplina más cercana, comprensible y vinculada a su realidad. Este aspecto resulta clave en términos de equidad educativa y acceso al conocimiento. Como se evidencia en el testimonio de una estudiante en una entrevista a medios (2021): “Ahora sí me río mucho en clase de matemáticas”.

En términos de proyección, la experiencia abre posibilidades para su implementación en otros contenidos y niveles educativos, así como para su articulación con enfoques de educación matemática crítica y justicia social. La consolidación del proyecto como una propuesta con potencial en este campo plantea nuevos desafíos: ¿cómo escalar la experiencia sin perder su sentido contextual?, ¿qué implicaciones tiene su institucionalización?

En síntesis, el análisis de los distintos componentes de la experiencia permite reconocer que el uso de memes y caricaturas en la enseñanza de las matemáticas no constituye una estrategia aislada, sino un entramado complejo en el que convergen dimensiones culturales, cognitivas y sociales. La relación entre estos componentes evidencia que las transformaciones en el aula no dependen únicamente del recurso utilizado, sino de las intencionalidades que lo orientan, las dinámicas que lo configuran y los significados que los sujetos construyen en torno a él.

En este sentido, la experiencia analizada no solo aporta a la innovación didáctica, sino que invita a repensar el lugar de las matemáticas en la escuela, abriendo caminos hacia prácticas más contextualizadas, participativas y críticas.

d.2 Interpretación crítica del proceso

La sistematización de la experiencia con el uso de memes y caricaturas en la enseñanza de las matemáticas no se agota en su reconstrucción ni en el análisis de sus componentes. Un nivel más profundo de comprensión implica interrogar el proceso vivido, indagando por las causas que explican su desarrollo, las tensiones que lo atraviesan y la lógica que le da sentido. En este marco, la pregunta central no es solo qué ocurrió, sino por qué ocurrió de esa manera y no de otra, y qué factores hicieron posible su configuración.

Interrogantes sobre el origen y desarrollo de la experiencia

Una primera línea de análisis remite a las condiciones que dieron origen a la experiencia. El uso de memes y caricaturas emerge como respuesta a una problemática recurrente en la enseñanza de las matemáticas: la desconexión entre los contenidos escolares y los contextos culturales de los estudiantes. En este sentido, la incorporación de estos recursos no responde únicamente a una intención innovadora, sino a la necesidad de construir puentes entre el conocimiento matemático y las formas contemporáneas de comunicación.

Sin embargo, esta decisión también puede interpretarse como una toma de posición frente a modelos tradicionales de enseñanza. La pregunta que surge es: ¿por qué optar por el meme como mediador y no por otras estrategias? Una posible respuesta se

encuentra en su carácter híbrido, que articula imagen, texto y humor, lo que lo convierte en un dispositivo potente para activar procesos de interpretación

Tensiones y contradicciones en la experiencia

El desarrollo de la experiencia pone en manifiesto múltiples tensiones. Una de las más significativas se relaciona con la legitimidad del meme como recurso didáctico. Mientras que en el contexto juvenil el meme tiene un alto valor comunicativo, en el ámbito escolar puede ser percibido como trivial o carente de rigor. Esta contradicción refleja una tensión más amplia entre cultura escolar y cultura digital.

Una segunda tensión se sitúa en la relación entre comprensión y formalización. Si bien los memes y caricaturas facilitan el acceso a los conceptos matemáticos, también plantean el desafío de traducir ese entendimiento a un lenguaje formal. En este punto, surge la pregunta: ¿el uso del meme transforma realmente la comprensión matemática o solo modifica su forma de presentación?

Asimismo, la transformación del rol docente genera tensiones tanto a nivel personal como institucional. Pasar de un modelo centrado en la transmisión a uno basado en la mediación implica renunciar a ciertos niveles de control sobre el desarrollo de la clase, lo que puede generar incertidumbre. Esta situación se complejiza en contextos donde las prácticas tradicionales siguen siendo predominantes.

Interrelaciones entre los elementos de la experiencia

La experiencia analizada permite identificar una red de interrelaciones entre distintos elementos: el diseño pedagógico, la dinámica de aula, la participación estudiantil y las transformaciones en la percepción de las matemáticas. Estos componentes no operan de manera aislada, sino que se influyen mutuamente.

Por ejemplo, el diseño de situaciones de aprendizaje basadas en memes y caricaturas incide directamente en la dinámica de la clase, promoviendo espacios de diálogo e interpretación. A su vez, esta dinámica favorece la participación de los estudiantes, lo que repercute en sus procesos de aprendizaje y en la construcción de significados matemáticos.

De igual manera, la incorporación de la producción de memes y caricaturas por parte de los estudiantes no solo transforma su rol, sino que también redefine los criterios de evaluación y los modos de validar el conocimiento. Esta interrelación evidencia que los cambios en un componente generan efectos en todo el sistema de la experiencia.

Factores clave y lógica de la experiencia

A partir del análisis, es posible identificar algunos factores clave que explican la lógica de la experiencia. En primer lugar, la articulación entre cultura y conocimiento, que permite situar las matemáticas en contextos significativos para los estudiantes. En segundo lugar, la mediación docente, que orienta la interpretación y evita que el meme se reduzca a un elemento superficial. En tercer lugar, la participación activa de los estudiantes, que transforma el aprendizaje en un proceso colectivo y dialógico.

Estos factores configuran una lógica en la que el aprendizaje matemático no se concibe como la apropiación de contenidos predefinidos, sino como un proceso de construcción de significados mediado por prácticas culturales. En este sentido, el meme no es el centro de la experiencia, sino un medio a través del cual se reorganizan las relaciones entre saber, sujeto y contexto.

Diálogo con otras experiencias y marcos teóricos

La experiencia puede ser comprendida en relación con otras propuestas que buscan integrar elementos culturales en la enseñanza de las matemáticas, como el uso de narrativas, juegos o tecnologías digitales. Estas experiencias comparten la intención de contextualizar el conocimiento y hacerlo significativo para los estudiantes. Estas experiencias se visibilizan desde los diferentes marcos teóricos en el campo de la educación matemática.

Desde el punto de vista teórico, el uso de memes y caricaturas puede dialogar con enfoques sociopolíticos, que buscan problematizar el papel de las matemáticas en la construcción de la realidad social. O en enfoques centrados en los cognitivos que centran su atención en asuntos relacionados con la comprensión de conceptos.

En este sentido, la experiencia no solo se inscribe en un marco, sino también en un posicionamiento epistemológico que reconoce el carácter cultural, situado y crítico del conocimiento matemático.

La pregunta por la lógica de la experiencia permite comprender que su desarrollo no es casual, sino resultado de la convergencia de múltiples factores: la trayectoria docente, las características del contexto escolar, las necesidades de los estudiantes y las posibilidades que ofrecen los recursos culturales contemporáneos.

La experiencia se desarrolla de la manera en que lo hace porque responde a una intención de transformación de la práctica, que se materializa en decisiones concretas como la incorporación del meme, la apertura al diálogo y la flexibilización de la enseñanza. Sin embargo, también está condicionada por tensiones estructurales que limitan o posibilitan su desarrollo.

Como se observa, este proceso de sistematización no solo permite reconstruir lo vivido, sino también producir conocimiento pedagógico, en tanto hace visibles las condiciones, factores y lógicas que explican la experiencia. De este modo, se abren posibilidades para su resignificación, adaptación y proyección en otros contextos educativos.

e. Los puntos de llegada

Esta fase final de la sistematización consiste en formular *conclusiones y recomendaciones* que respondan a los objetivos propuestos y orienten nuevos aprendizajes, reconociendo su carácter abierto, y en diseñar productos y estrategias de comunicación que permitan compartir de manera creativa y pertinente los aprendizajes obtenidos con los distintos actores y otros contextos educativos (Jara, 2018). Las conclusiones se presentan en este documento como conclusiones generales del artículo.

4. CONCLUSIONES

La sistematización de la experiencia permitió reconocer que el uso de memes y caricaturas en la enseñanza de las matemáticas no constituye únicamente una estrategia didáctica innovadora, sino una respuesta a una problemática estructural: la desconexión entre los contenidos escolares y la realidad sociocultural de los estudiantes. En este sentido, la incorporación de estos recursos emerge de la necesidad de otorgar sentido al aprendizaje matemático, estableciendo puentes entre el conocimiento formal y las prácticas culturales juveniles. Así, los memes y caricaturas se configuran como mediadores que resignifican la enseñanza, favoreciendo la motivación, la disposición al aprendizaje y la construcción de significados en torno a los conceptos matemáticos.

En coherencia con este propósito, la experiencia pone en evidencia una transformación en la concepción del aprendizaje, al situar al estudiante como un sujeto activo en la interpretación y construcción del conocimiento. El énfasis en la comprensión, el diálogo y la reflexión crítica desplaza al estudiante de un rol pasivo hacia uno protagonista, en el que la argumentación y la interpretación se convierten en elementos centrales del proceso formativo. Este cambio no solo impacta la manera en que los estudiantes se relacionan con las matemáticas, sino también la forma en que se concibe la enseñanza misma.

En el plano de la implementación, el uso de memes y caricaturas transforma la dinámica del aula al configurar espacios de interacción y construcción colectiva del conocimiento. La discusión de los memes y caricaturas, la mediación docente orientada al diálogo y la posibilidad de múltiples interpretaciones favorecen un ambiente en el que el aprendizaje se construye socialmente. En este contexto, el aula deja de ser un espacio centrado en la transmisión de contenidos para convertirse en un escenario de negociación de significados, donde la interacción entre estudiantes y docente potencia la comprensión matemática.

Asimismo, la flexibilidad en el uso de estos recursos, tanto en términos de su incorporación en distintos momentos de la clase como en la diversidad de intencionalidades didácticas que pueden asumir, amplía las posibilidades en el aula. La inclusión de las caricaturas creadas por los estudiantes y su uso en procesos de evaluación, refuerzo o análisis de errores evidencia una diversificación de estrategias que permite atender distintos propósitos del proceso de enseñanza-aprendizaje, favoreciendo especialmente la evaluación formativa y la reflexión sobre el error como parte constitutiva del aprendizaje.

En relación con los aprendizajes, la experiencia muestra que el uso de memes y caricaturas favorece procesos significativos, evidenciados en el aumento de la participación, el desarrollo de habilidades argumentativas, la apropiación del lenguaje matemático y el fortalecimiento de la confianza en los estudiantes. La producción de memes y caricaturas matemáticas se destaca como una evidencia relevante de comprensión conceptual, en tanto implica la capacidad de representar, sintetizar y comunicar ideas matemáticas de manera significativa. Estos resultados sugieren que la integración de recursos culturales en la enseñanza no solo impacta la motivación, sino también la profundidad del aprendizaje.

No obstante, la experiencia también pone de manifiesto diversas tensiones. Entre ellas, destaca la dificultad inicial para reconocer los memes y caricaturas como recursos legítimos en la enseñanza de las matemáticas, lo que refleja la persistencia de modelos tradicionales centrados en la transmisión de contenidos y la resolución de ejercicios rutinarios. Estas tensiones, lejos de ser un obstáculo, se convierten en motor de transformación, al propiciar procesos de reflexión que cuestionan las prácticas establecidas y abren paso a nuevas formas de enseñar y aprender.

En este marco, se evidencia una transformación del rol docente, que transita de transmisor de conocimiento a mediador del diálogo matemático. Este cambio implica no solo una modificación en las estrategias didácticas, sino también en la concepción misma del conocimiento y su enseñanza, orientándose hacia enfoques más flexibles, críticos y centrados en la comprensión.

Finalmente, la experiencia muestra un potencial significativo de proyección, tanto en su posibilidad de ser implementada en otros contenidos y niveles educativos como en su articulación con enfoques socioculturales y sociopolíticos de la educación matemática. Los cambios observados en la percepción de los estudiantes, quienes comienzan a concebir las matemáticas como una disciplina cercana y comprensible, evidencian el impacto de la propuesta en la construcción de una relación más significativa con el conocimiento.

En conjunto, estas conclusiones permiten afirmar que el uso pedagógico de memes y caricaturas no solo transforma las prácticas de aula, sino que contribuye a reconfigurar el sentido de la educación matemática, orientándola hacia una perspectiva más contextualizada, participativa y socialmente comprometida.

La Tabla 7 presenta de manera sintética las conclusiones relacionadas con los ejes y que devienen de las manifestaciones encontradas durante el análisis.

Tabla 7. Manifestaciones, causas y conclusiones

Manifestaciones (por eje)	Causa asociada	Conclusión
Eje 1 – M1, M3, M4, M5. Proyección del uso de memes y caricaturas como estrategia didáctica; diseño de situaciones de aprendizaje basadas en el humor gráfico; vinculación de las matemáticas con experiencias cotidianas; reconocimiento del meme como artefacto cultural válido.	Necesidad de otorgar sentido a la enseñanza de las matemáticas y superar la desconexión entre los contenidos escolares y la realidad sociocultural de los estudiantes.	El uso pedagógico de memes y caricaturas resignifica la enseñanza de las matemáticas al establecer puentes entre el conocimiento escolar y las prácticas culturales juveniles. Estos recursos actúan como mediadores que dotan de significado a los conceptos matemáticos y favorecen la motivación y la disposición al aprendizaje.
Eje 1 – M2, M6. Posicionamiento del estudiante como intérprete activo de significados matemáticos; énfasis en la	Reconocimiento del estudiante como sujeto activo en la construcción	La estrategia promueve una concepción del aprendizaje matemático centrada en la interpretación, la argumentación y

comprensión, el diálogo y la reflexión crítica.	del conocimiento matemático.	la reflexión crítica, lo que fortalece la comprensión conceptual y desplaza al estudiante de un rol pasivo hacia uno protagonista.
Eje 2 – M1, M2, M3, M4. Uso de memes y caricaturas como actividad inicial; discusión colectiva; mediación docente orientada al diálogo; interacción entre estudiantes a partir de interpretaciones diversas.	Búsqueda de dinámicas de aula que favorezcan la participación activa, el intercambio de ideas y la construcción colectiva del conocimiento matemático.	La implementación de memes y caricaturas configura el aula como un espacio dialógico en el que la interacción social y la mediación docente potencian la comprensión matemática. El conocimiento se construye de manera colectiva mediante la confrontación y negociación de significados.
Eje 2 – M5, M7. Incorporación de producciones estudiantiles y uso de memes y caricaturas con diversas intencionalidades didácticas (introducción, refuerzo, evaluación, lectura de errores y contextos).	Necesidad de diversificar estrategias didácticas que respondan a distintos momentos y propósitos del proceso de enseñanza-aprendizaje.	El uso flexible y situado de memes y caricaturas amplía las posibilidades didácticas en el aula de matemáticas, permitiendo atender distintos propósitos pedagógicos y favoreciendo procesos de evaluación formativa y reflexión sobre el error.
Eje 3 – M1, M2, M3, M4, M5, M6. Mayor participación; desarrollo de la argumentación; apropiación del lenguaje matemático; aumento de la confianza; reconocimiento del error; producción de memes matemáticos.	Condiciones que promueven la participación activa, la expresión de ideas propias y la valoración del error como parte del aprendizaje.	La sistematización evidencia que el uso de memes y caricaturas fortalece aprendizajes matemáticos significativos, al favorecer la argumentación, la apropiación del lenguaje formal y la confianza de los estudiantes. La producción de memes y caricaturas se constituye en una evidencia de comprensión conceptual.
Eje 4 – M1, M2, M3. Tensiones frente al reconocimiento del recurso; cuestionamiento de prácticas tradicionales; transformación del rol docente hacia mediador del diálogo matemático.	Limitaciones del enfoque tradicional de enseñanza centrado en la transmisión de contenidos y la resolución rutinaria de ejercicios.	La propuesta genera procesos de reflexión que transforman el rol docente y cuestionan prácticas tradicionales, abriendo paso a una enseñanza más flexible, crítica y centrada en la comprensión.
Eje 4 – M4, M5, M6. Cambios en la percepción de las matemáticas; proyección a otros contextos y niveles; consolidación del proyecto con enfoque social.	Necesidad de propuestas innovadoras con enfoque sociocultural y socialmente comprometido.	El proyecto se consolida como una experiencia con potencial de expansión, capaz de transformar la percepción de las matemáticas y dialogar con enfoques socioculturales y sociopolíticos de la educación matemática.

Fuente: Elaboración propia.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

PB desarrolló toda la sistematización presentada en este artículo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la persona PB previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a la Institución Educativa General Santander por permitirme el desarrollo de la implementación didáctica que condujo a esta sistematización.

5. REFERENCIAS

- Balda, P. (2025a). *Memes en la enseñanza de las matemáticas* [Ponencia]. XIII Encuentro Juvenil de Matemáticas, Colegio Abraham Lincoln, Bogotá, Colombia.
- Balda, P. (2024a). *Justicia social en el aula de matemáticas: Una experiencia de aula con memes y caricaturas* [Ponencia]. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, San José, Costa Rica.
- Balda, P. (2023a). *Memes y justicia social* [Ponencia]. 16.º Foro de Investigación de las Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales: Reflexiones sobre educación y matemáticas, México.
- Balda, P. (2021a, septiembre). *Los memes como recurso en el aula de matemáticas* [Conferencia magistral]. 4.º Congreso Internacional de Matemáticas, Escuela Normal Superior del Estado de México, Ciudad de México, México.
- Balda, P. (2020a, abril). *Los memes como recurso en el aula de matemáticas* [Conferencia]. Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia.
- Balda, P. (2019a). *Las caricaturas y los memes como herramienta de difusión matemática* [Comunicación breve]. Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (RELME 33), Ciudad de México, México.
- Abreu, C. (2001a). La imagen periodística no fotográfica (periodismo iconográfico) (III): El dibujo periodístico: Una aproximación conceptual. *Revista Latina de Comunicación Social*, 3. <http://www.revistalatinacs.org/aa2000qjn/90abreu3.htm>
- Balda, P. (2019b). La caricatura y los memes como herramienta de divulgación matemática: Una experiencia en el aula. *Números: Revista de Didáctica de la Matemática*, 102. <https://funes.uniandes.edu.co/14865/1/Balda2019La.pdf>
- Balda, P. (2020b). Las mates con humor entran: Las caricaturas y los memes como herramienta de divulgación. En *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 34).

- Balda, P. (2021b). Uso de memes y caricaturas como recursos humorísticos visuales en el aula de matemáticas. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*. <https://revistaiime.org/index.php/IIME/article/view/119>
- Balda, P. (2023b). *¿Qué divulgan los memes en matemáticas?* [Ponencia]. 6.º Encuentro de Jóvenes que Investigan de la Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Ciudad de México, México.
- Balda, P. (2024b). Memes, caricaturas y justicia social en el aula de matemáticas. *Revista Chilena de Educación Científica*, 24(1), 56–74. <https://revistas.umce.cl/index.php/RChEC/article/view/2773>
- Balda, P. (2025b). *Los memes como recurso en el aula de matemáticas* [Ponencia]. 34.ª Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa, Bogotá, Colombia.
- Balda, P. (2025c). ¿Cómo crear memes para nuestras clases de matemáticas? *Números: Revista de Didáctica de la Matemática*, 109. https://drive.google.com/file/d/1nLvAJJo_mVSnCtJjBgJIOS_xoXxN3b2uN/view
- Balda, P. (en prensa). Procesos de representación, jerarquización del pensamiento y reflexión metacognitiva en memes matemáticos. *Revista Unión*.
- Beltrán Pellicer, P. (2016). Utilizando memes con tus alumnos. *Números: Revista de Didáctica de la Matemática*, 91, 129–134. https://zaguan.unizar.es/record/57751/files/texto_completo.pdf
- Bini, G., & Robutti, O. (2019). *Meanings in mathematics: Using internet memes and augmented reality to promote mathematical discourse* [Ponencia]. Eleventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, Utrecht, Netherlands. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-02422152/document>
- Bohórquez, L. A. (2025). *Memes asociados a la aritmética y el álgebra* [Trabajo de grado, Universidad Pedagógica Nacional de Colombia].
- Camas, L., Valero, A., y Vendrell, M. (2018). “Hackeando memes”: Cultura democrática, redes sociales y educación. *Espiral. Cuadernos del Profesorado*, 11(23). <https://doi.org/10.25115/ecp.v12i23.2017>
- CODIME (2025). *Aprender matemáticas desde la matemática educativa. Relatos y reflexiones de estudiantes*. DocentMat.
- Duque Sánchez, L. F. (2016). *La sistematización de experiencias educativas como estrategia de producción de conocimiento pedagógico* [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica Nacional]. Repositorio Institucional de la Universidad Pedagógica Nacional.
- Flores, P. (2003). *Humor gráfico en el aula de matemáticas*. Arial.
- Jara, O. (2018). *La sistematización de experiencias: Práctica y teoría para otros mundos posibles* (3.ª ed.). Centro de Estudios y Publicaciones Alforja.
- Harari, Y. N. (2018). *21 lecciones para el siglo XXI*. Debate.

- Navarro, M., y Roche, J. (2013). *Sistematización de experiencias educativas: Una propuesta metodológica para la reflexión pedagógica*. Fundación Educación y Desarrollo.
- Pérez, T. (2016). *Guía didáctica de sistematización de experiencias en contextos universitarios*. Universidad Nacional Abierta.
- Pérez, M. (1979). *La caricatura política en el siglo XIX*. Cuadernos Lagoven.
- Varela, R. (2006). *La sistematización de experiencias: Una metodología para evaluar e innovar procesos de desarrollo*. Instituto Latinoamericano de Planificación Económica y Social (ILPES).



LA ÉTICA COMUNITARIA ANTE LAS TENSIONES EMOCIONALES: ALEGRÍA Y FRUSTRACIÓN AL ABORDAR EL LOGARITMO EN EL AULA DE MATEMÁTICAS

COMMUNITARIAN ETHICS FACING EMOTIONAL TENSIONS: JOY AND FRUSTRATION WHEN ADDRESSING LOGARITHMS IN THE MATHEMATICS CLASSROOM

Pedro Elías Chaparro Rueda¹



ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0009-0809-3030>

RESUMEN

Aunque las emociones en educación matemática constituyen actualmente un campo consolidado de investigación, las perspectivas socioculturales todavía ofrecen un horizonte de análisis en expansión. En este artículo se argumenta la pertinencia de considerar la óptica reflexiva que ofrecen estas perspectivas, en particular la Teoría de la Objetivación. Inicialmente, se presenta un breve estado de la cuestión sobre algunas teorías que estudian las emociones en matemáticas —específicamente la alegría y la frustración—, en contraste con la manera como desde nuestra postura teórica se asume al sujeto que goza o sufre en el aula. Posteriormente, se expone un episodio que revela cómo las formas de pensamiento y colaboración en el aula pueden entrar en tensión con las emociones de estudiantes de noveno grado en Colombia (de 13 a 16 años) cuando abordan una tarea sobre el logaritmo. El análisis muestra cómo la frustración y la alegría no son un añadido a la resolución de la tarea, sino que configuran y reconfiguran las formas de producción y colaboración entre los participantes. Este estudio sugiere, por un lado, que investigar las emociones en matemáticas requiere un desplazamiento del plano individual hacia el colectivo, y, por otro, que una ética de orientación comunitaria puede mediar las tensiones de carácter emocional que emergen en la actividad matemática.

Palabras clave: Tensiones emocionales, Ética comunitaria, Logaritmo, Teoría de la objetivación.

¹Doctorado Interinstitucional en Educación, énfasis en Educación matemática, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia. Correos electrónicos: pechaparror@udistrital.edu.co; profesorch91@gmail.com



ABSTRACT

Although emotions in mathematics education currently constitute a consolidated field of research, sociocultural perspectives still offer an expanding horizon of analysis. This article argues for the relevance of considering the reflexive lens provided by these frameworks, particularly the Theory of Objectification. Initially, we present a brief state of the art regarding several theories that study emotions in mathematics —specifically joy and frustration— in contrast to the way in which, from our theoretical standpoint, we conceive of the subject who experiences pleasure or suffering in the classroom. Subsequently, we present an episode that reveals how forms of thinking and collaboration in the classroom can enter tension with the emotions of ninth-grade students in Colombia (aged 13 to 16) when they engage with a task on logarithms. The analysis shows how frustration and joy are not an addition to task resolution but rather shape and reshape the forms of production and collaboration among participants. This study suggests, on the one hand, that researching emotions in mathematics requires a shift from the individual plane toward the collective, and, on the other hand, that a community-oriented ethics can mediate the emotional tensions that emerge in mathematical activity.

Keywords: Emotional tensions, Communitarian ethics, Logarithms, Theory of objectification.

1. INTRODUCCIÓN

La dimensión emocional ha adquirido creciente relevancia en la educación. Durante la última década, organismos como el Banco Mundial y la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) han promovido el desarrollo de habilidades socioemocionales en las instituciones educativas (Banco Mundial, 2016). En Colombia, esta orientación ha sido adaptada en iniciativas como *Aulas socioemocionales* (Secretaría de Educación Distrital, 2025), orientadas a fortalecer el desarrollo socioemocional de los estudiantes. Estas propuestas reflejan un creciente interés por reconocer que los procesos educativos también involucran formas de sentir, relacionarse y actuar en comunidad.

Los recursos propuestos por estas organizaciones intergubernamentales presentan aportes significativos para el profesorado y entran en consonancia con varios marcos teóricos que desde la educación matemática han estudiado las emociones, como es el caso del Dominio Afectivo (McLeod, 1992) desde hace casi cuatro décadas, y el caso de la Teoría del Valor Control (Pekrun, 2006) desde hace aproximadamente veinte años. Se trata de perspectivas ampliamente desarrolladas en la investigación, con alcances alrededor del mundo y con resultados que brindan un panorama robusto para entender la influencia, emergencia y mediación de las emociones en matemáticas.

Sin embargo, se considera que la concepción de las emociones que fundamenta tanto las propuestas intergubernamentales como los dos marcos teóricos previamente descritos presenta, en principio, dos limitaciones. Primero, una concepción de sujeto en la que la historia y la cultura no se asumen como elementos constitutivos de los individuos; y segundo, una orientación ética vinculada a corrientes tradicionales, como la kantiana —centrada en el deber y en cómo deberíamos actuar— o la utilitarista —interesada en las consecuencias de nuestras acciones—. Desde una perspectiva sociocultural, estas limitaciones dificultan comprender cómo las emociones emergen, circulan y se transforman en las dinámicas sociales de producción y colaboración humana (Elias, 1990; Vygotsky, 2000), y, de manera específica, en el aula de matemáticas (Miranda et al., 2025; Radford, 2015a).

Desde esta perspectiva sociocultural, la Teoría de la Objetivación (Radford, 2006, 2014, 2023a) concibe al sujeto y sus emociones como histórica y culturalmente configurados. En consecuencia, las emociones no se entienden únicamente como estados internos, sino también como formas de relación y participación social. A partir del análisis de un episodio de clase, este artículo contribuye a ampliar la comprensión de las *tensiones emocionales* en el aula de matemáticas y del papel que puede desempeñar una ética comunitaria (Lasprilla et al., 2021) para mediarlas mediante la movilización de vectores de responsabilidad, cuidado y compromiso en la actividad matemática.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

2.1 Alegría y frustración en el aprendizaje de las matemáticas

El estado de la cuestión sobre las emociones en matemáticas enfrenta un obstáculo inicial: la notable ambigüedad terminológica en la literatura. Esta ambigüedad ya había sido advertida desde los orígenes de la investigación en educación matemática por McLeod (1992), quien sostiene que los mismos términos no siempre se remiten al mismo fenómeno, y, más recientemente, por Schukajlow et al., (2023), quienes destacan variaciones no solo derivadas de las perspectivas teóricas adoptadas, sino también de las interpretaciones particulares de cada autor. Con esta precisión en mente, emprendimos una revisión de la literatura centrada en la comprensión de las emociones en matemáticas, específicamente la alegría y la frustración, reconociendo que ambas se expresan mediante un amplio campo semántico de expresiones cercanas, por ejemplo, gozo, júbilo o felicidad, y molestia, congoja o desconsuelo. En consecuencia, la búsqueda bibliográfica se delimitó mediante el uso explícito de los términos “alegría” y “frustración” como palabras clave, aunque en el análisis se incorporaron expresiones afines atendiendo a dicha ambigüedad terminológica.

La revisión de los hallazgos se organizó en tres marcos teóricos fundamentales: (i) el Dominio Afectivo propuesto por McLeod (1992), (ii) la Teoría del Valor- Control de Pekrun (2006), y (iii) la perspectiva sociocultural representada por Radford (2006, 2014, 2023a) desde la Teoría de la Objetivación. Si bien existe una diversidad de perspectivas teóricas — en su mayoría heredadas del campo de la psicología —, estos marcos fueron seleccionados por su desarrollo específico en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, así como por las diferencias que presentan en su concepción del sujeto y de las emociones. En consecuencia, más que establecer una comparación cuantitativa entre estudios, la revisión buscó identificar tendencias conceptuales que permitieran situar el problema de investigación.

Inspirado en la teoría psicológica de Mandler (1989), McLeod (1992) propone al Dominio Afectivo (DA) como un marco pionero para estudiar la dimensión emocional en matemáticas. El DA se compone de tres categorías: por creencias —sobre uno mismo, las matemáticas, el contexto y la enseñanza—, emociones —positivas, como la alegría, y negativas, como la frustración—, y actitudes —automatizadas o adquiridas frente a nuevas tareas (McLeod, 1992). Posteriormente, el modelo fue ampliado con la incorporación de valores éticos y motivacionales (Debellis y Goldin, 2006; Hannula, 2012), constituyéndose en un referente para la investigación en educación matemática.

Desde el DA, diversos estudios (McLeod, 1992; Martínez, 2005; Sierpinska et al., 2008; Blanco et al., 2010; Perdomo y Fernández, 2018; Di Martino, 2019; Satyam et al., 2022) han encontrado que la frustración se caracteriza por entenderse como una reacción emocional caliente, evidenciarse en los cursos prerequisite de matemáticas, asociarse directamente con actitudes negativas, manifestarse de forma pluriemocional e, incluso, surgir del estigma asociado a ser catalogado como “bueno” en matemáticas. En contraste, la alegría se manifiesta mediante sonidos que expresan alivio tras la resolución de problemas, favorece una mayor disposición hacia la actividad matemática y atenúa los sentimientos negativos.

Por su parte, la Teoría del Valor- Control (CVT) (Pekrun, 2006; Schukajlow et al., 2017, 2023), desarrollada principalmente mediante métodos cuantitativos, propone clasificar las emociones en función de su objeto, es decir, aquello que las desencadena. Así, esta clasificación contempla tres objetos: *emociones de logro*, en las cuales los estudiantes atribuyen *valor* a las actividades matemáticas dependiendo del beneficio percibido que recibirán por realizarlas; *emociones epistémicas* (Pekrun et al., 2016), vinculadas a los procesos de generación del conocimiento; y *emociones sociales*, concernientes a la interacción y los sentimientos hacia otras personas, que de acuerdo con Schoenherr et al., (2025) —sobre el panorama general de la CVT en sus 20 años de desarrollo— han sido las menos exploradas.

De manera que, bajo este marco, la frustración y la alegría se comprenden en función del objeto que las origina. En el caso de las emociones de logro, Middleton et al. (2023) sugieren que el incremento del esfuerzo en matemáticas se asocia con experiencias de alegría, en tanto, que la frustración tiende a aparecer en situaciones donde se inhibe la motivación. Ahora, la interpretación es distinta para las emociones epistémicas, donde la frustración aparece como la incongruencia cognitiva resultante de problemas no resueltos (Pekrun et al., 2016), mientras que se puede identificar un vestigio de la alegría, no en la literalidad de la palabra, sino en lo que D’Mello y Graesser (2012) denominan “disfrute epistémico”, emergente cuando los estudiantes logran resolver alguna confusión surgida en el proceso de aprendizaje.

A partir de los hallazgos derivados de la revisión del DA y la CVT en torno a la frustración y la alegría, se delinearán tres resultados relevantes. En primer lugar, ambas emociones resultan inherentes a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; es decir, aparecen de manera recurrente en la actividad matemática escolar. En segundo lugar, presentan un carácter multifacético al estar asociadas a diversidad de situaciones —al logro, al desempeño, a los exámenes o incluso a cuestiones epistemológicas—. No obstante, en tercer lugar, se evidencia una limitación: los análisis y resultados provienen principalmente de dinámicas centradas en el individuo, donde las relaciones sociales y los modos de colaboración entre estudiantes ocupan un lugar marginal. Si bien esta orientación no constituye una restricción desde la cosmovisión del DA y la CVT, la mirada sociocultural nos invita a repensar la manifestación de las emociones desde una concepción de sujeto diferente, en la que la historia, la cultura y las relaciones sociales se asuman como elementos constitutivos de su investigación en el aula de matemáticas.

2.2 Una mirada histórico-cultural de las emociones en matemáticas

La concepción de sujeto que orienta este trabajo se nutre de los planteamientos de Elias (1990), que disuelve la dicotomía entre individuo y sociedad. Para este autor, el sujeto no

puede entenderse como una entidad aislada, sino como un ser inmerso en formas históricas y culturales que median su desarrollo. De este modo, incluso las acciones aparentemente individuales —como resolver una tarea matemática— no solo implican la apropiación de dichas formas, sino también su transformación, en la medida en que la interacción con otros y con el saber configura un devenir constante del sujeto.

Ahora bien, la relación entre sujeto y sociedad no es unidireccional. Tal como señala Marx (1844/2003), las condiciones sociales no solo moldean a los individuos, sino que son los propios sujetos, en su actividad colectiva, quienes transforman continuamente las condiciones sociales en las que viven. Esta postura se distancia de la tradición racionalista que concibe las emociones y los pensamientos como emanaciones internas del individuo, ajenas a lo social. Precisamente Elías (1990) cuestiona dicha perspectiva al señalar que es propio de la psique humana considerar el universo como objeto, en oposición a sí mismo como sujeto, de modo que las emociones serían respuesta a “su propia «naturaleza», y no a otra cosa” (p. 51, énfasis en el original). Frente a ello, la psicología histórico-cultural, en línea con Vygotsky (2000), reconoce que las emociones se desarrollan a través de mediaciones culturales, constituyendo un eslabón fundamental en la configuración de la personalidad y su vínculo con la vida social y orgánica del sujeto.

Diversos estudios han puesto de relieve el potencial analítico de un enfoque sociocultural para comprender las emociones en la educación matemática. Radford (2015a), reconoce los aportes pioneros del DA, pero critica su anclaje en una concepción cognitiva que limita la incorporación de la dimensión cultural. A partir del ejemplo del amor, muestra cómo las emociones no pueden entenderse al margen de sus condiciones históricas de producción. Esta idea se concreta en su estudio longitudinal sobre Laura, donde la frustración emerge en relación con una ética cultural de autosuficiencia, evidenciando que emoción y pensamiento se co-constituyen formando una unidad indisoluble. En una línea afin, Roth y Walshaw (2019) proponen una “psicología del drama” que amplía el espectro analítico al considerar no solo el discurso verbal, sino también la entonación, los silencios, intensidad del tono de la voz y los gestos corporales. Los autores concluyen que, al aventurarse en territorios menos convencionales, los educadores matemáticos pueden hallar herramientas más adecuadas para explicar las actividades “dramáticas” del aula —tanto problemáticas como alegres—. Más recientemente, Miranda et al. (2025), desde la Teoría de la Objetivación, analizan los procesos de subjetivación de estudiantes en clases de matemáticas, mostrando cómo la subjetividad se configura de manera dialéctica a partir de la interacción entre emociones, lenguaje, corporalidad y valores culturales. En conjunto, estos trabajos evidencian que las emociones no son meras respuestas individuales, sino procesos histórica y culturalmente situados que participan activamente en la producción del conocimiento matemático y en la constitución de los sujetos en la actividad.

2.3 Tensiones Emocionales

En coherencia con lo anterior, la definición de *tensiones emocionales* que proponemos se sustenta de una concepción del sujeto como ser histórico-cultural y en permanente devenir, en quien resulta imposible escindir lo individual de lo social (Elías, 1990; González, 2011), y cuya existencia se realiza en y a través de la Actividad (Marx, 1844/2003). En contraste con enfoques que reducen las emociones a estados internos o las clasifican de manera dicotómica —positivas o negativas—, las tensiones emocionales se entienden como aquellas que emergen

en el entramado de relaciones donde se produce y se comparte el saber. Se trata de emociones que entran en conflicto con las formas de producción, interacción o colaboración de los sujetos: entre estudiantes, entre el estudiante y el saber, o incluso en la relación consigo mismo como sujeto social. Desde esta perspectiva, las tensiones no constituyen anomalías, sino condiciones inherentes a la vida colectiva del aula, en consonancia con la idea de Radford (2023b) de que la coproducción del conocimiento está intrínsecamente atravesada por dinámicas tensionales.

2.4 Ética Comunitaria

De acuerdo con Radford (2023a), la Teoría de la Objetivación (TO) tiene sus bases filosóficas en Hegel y Marx, y se apoya en la escuela de Vygotsky y en la concepción educativa de Freire. A modo de síntesis, describiremos algunos elementos fundamentales de la TO a partir de tres preguntas orientadoras: ¿qué se aprende?, ¿cómo se aprende? y ¿para qué se aprende? Debido a su amplitud y complejidad, este apartado no pretende agotar los desarrollos conceptuales de la teoría, sino presentar algunos elementos necesarios para comprender el análisis que proponemos en este artículo.

En cuanto al cuestionamiento de *qué se aprende*, la TO concibe las matemáticas como un Saber (Knowledge), un sistema histórico-cultural, construido y refinado durante siglos por personas inmersas en determinada cultura (Radford, 2023a). Entre sus múltiples características, se destaca que el Saber lleva en sí mismo su propia contradicción, posee un carácter político y no se concibe como una entidad psicológica que reside en la mente.

En estrecha relación con ello, para la cuestión de *cómo se aprende*, la teoría concibe el aprendizaje como una *actualización* y un *encuentro* con el Saber, en síntesis, como conocimiento (Knowing): un proceso social, y progresivo de tomar conciencia de algo que ya existe y que se constituye como una posibilidad. Estos procesos son conocidos como procesos de Objetivación (PO) (Radford, 2015b).

Cuando ambas cuestiones se articulan en el proceso de enseñanza y aprendizaje, resulta de gran importancia develar los distintos medios semióticos de objetivación (MSO) que utilizan los estudiantes para alcanzar los objetos de conciencia, como registros escritos, gestos, palabras clave o movimientos. Diversos autores (Radford et al., 2017; Vergel, 2016) resaltan el papel fundamental de los gestos y movimientos, porque son capaces de comunicar ideas que resultaría imposibles recurriendo únicamente a la verbalización.

Ahora bien, la tercera cuestión del problema —el *para qué se aprende*— es un asunto no menor porque comúnmente se explica en términos instrumentalistas, es decir, buscando respuesta a la conocida pregunta “¿y esto para qué me sirve?”. Pero más allá de las aplicaciones prácticas, tanto estudiantes como docentes, pierden de vista el verdadero galardón que se obtiene cuando se aprende: la transformación *sui generis* del yo, “la creación de un yo particular (y único)” (Radford, 2023a, p. 101), en términos teóricos, procesos de subjetivación (PS). El verbo *devenir* (becoming) es el vocablo español que mejor expresa lo que entendemos por PS, “*llegar a ser*” o “*convertirse en*”. Desde la TO, se concibe y se aspira que en la actividad de enseñanza y aprendizaje los PO se den a la par de los PS.

Así las cosas, bajo el principio fundamental de que una persona simultáneamente es transformada cuando aprende, la cuestión del *para qué se aprende* conduce consecuentemente

a plantear la discusión sobre la ética del aula. Un asunto que recientemente ha cobrado fuerza en la educación matemática, puesto que, autores como Ernest (2021) desafían la idea de que las matemáticas sean neutras y desprovistas de valor, argumentando que su idealización puede acentuar desigualdades sociales, minar la autoestima estudiantil y promover un razonamiento instrumental desvinculado de la ética: “enseñar el razonamiento matemático abstracto libre de ética puede ser peligroso” (p. 85). La TO, consciente de esta necesidad, propone un tipo de ética que no solamente apunta al docente, sino que es tanto *por y para* los profesores, como *por y para* los estudiantes. Mientras que otras posturas éticas abogan por el actuar de los sujetos por razones de deber —deontología—, consecuencias —utilitarismo— o una justa medida —teleología—, la ética de la TO promueve que las relaciones entre los sujetos sean dadas en términos de alteridad —postura levisiana—, primando el hecho de que es con el otro que yo puedo llegar a ser. Así, se sustenta en una relación dialógica donde se pretende que docentes y estudiantes trabajen juntos, aspirando a *ser con* el otro y *ser para* el otro (Lévinas, 2002), en otras palabras, una relación de ética comunitaria (EC) (Radford, 2006, 2023a).

Las relaciones entre los distintos sujetos del aula, a las que se aspira por medio de la EC, se movilizan a través de tres vectores: *responsabilidad* hacia el prójimo, el *compromiso* de hacer todo lo posible en la Actividad, y el *cuidado* por alguien; elementos que motivan la participación en el aula llevando a los estudiantes a aprender sin dejar de ser solidarios (Lasprilla et al., 2021; Radford 2021a, 2021b). Estos vectores conforman la cúspide de nuestra postura ética, entendida como la *forma* de las relaciones sociales entre sujetos histórico-culturales, y constituyen el fundamento de las prácticas colaborativas que proponemos investigar. Así las cosas, abordemos el constructo teórico de cada vector y sus componentes, tomando como guía la Tabla 1.

Tabla 1. Sustrato, vector y respectivo componente

Sustrato ético	Vector ética comunitaria	Componente
Responsabilidad	Responsabilidad	Excedencia y acogida (hacerse cargo)
Socialidad	Cuidado del otro	Inmanencia y encuentro-dialogo
Sensibilidad	Compromiso en el trabajo conjunto	Proximidad (empatía) y exposición

Fuente: Lasprilla (2022, p.165)

La *responsabilidad* implica sobrepasar la dominante idea del Yo cuando respondemos al llamado del otro al oír, ver o percibir su fragilidad (Radford, 2023a). Lévinas introduce aquí la metáfora del rostro para comprender el llamado de la solicitud ética (Lasprilla, 2022), idea que, según Valero y Jørgensen (2021) tiene sus raíces en la ética cristiana que predica ver a Jesucristo en el rostro del prójimo. Los componentes de este vector son la *excedencia* y la *acogida*: en el primero, subyace el movimiento que nos permite salir del Yo hacia un desinteresado deseo por el otro; el segundo, plantea literalmente “hacerse cargo” del otro. En cuanto al vector *cuidado* es necesario aclarar que no se refiere a un acto de conmiseración ni de caridad (Radford, 2021a), sino desde una radical noción de alteridad, el cuidado de sí mismo es impensable si antes no pasa por el cuidado del otro. Su componente *inmanencia* se entiende como la posibilidad de experimentar al otro en su cercanía concreta, y el componente *encuentro* (diálogo) invita a una apertura ética radical hacia la palabra del otro, viendo el diálogo como una exposición asimétrica fundada en la brecha natural entre ipseidades (Lasprilla et al., 2021). Por último, el vector *compromiso* trata sobre el esfuerzo consciente y

continuo por dar lo mejor de sí cuando trabajamos juntos; es, al mismo tiempo, una promesa y una actitud. Requiere del componente *proximidad* —entendido como la empatía que permite estar junto al otro y generar la confianza de poder opinar y tomar posición respecto a las ideas que se plantean en una tarea conjunta— y del componente *exposición* —el cual pretende establecer una comunicación sensible, donde al exponer mis ideas literalmente me expongo a mí mismo—.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

Anclado en el paradigma de investigación cualitativa, este estudio se inscribe en un enfoque fenomenológico de tipo hermenéutico (Hernández et al., 2014), pues busca comprender las tensiones emocionales que emergen durante el desarrollo de tareas histórico-culturales sobre el logaritmo en estudiantes de grado noveno. Estas tensiones son analizadas en la *Actividad*¹ (Radford, 2014), entendida como un sistema social de relaciones y formas de colaboración que se configuran entre los sujetos alrededor de una tarea matemática. En este sentido, y en coherencia con Galeano (2020), la investigación asume un carácter social al privilegiar la subjetividad, las interacciones entre los participantes y la comprensión de sus motivos, significados y emociones en un contexto natural de aula.

La investigación se desarrolló en un colegio público en la ciudad de Bogotá D.C (Colombia) que ofrece educación desde preescolar hasta undécimo grado y cuya población pertenece principalmente a los estratos 1 a 3. Participaron 41 estudiantes de grado noveno (13 a 17 años) de la jornada mañana durante seis sesiones de trabajo de aproximadamente 1.5 horas. No se realizó selección muestral, pues el interés consistía en explorar las *tensiones emocionales* en las condiciones habituales de aula. El grado noveno fue escogido debido a que el estudio abordó procesos relacionados con el logaritmo, contenidos sugeridos en los estándares curriculares (Ministerio de Educación Nacional, 2006). Durante la recolección de información, el investigador desempeñó el rol de docente, acompañado por un camarógrafo externo encargado de registrar gestos, movimientos e interacciones de los estudiantes durante el trabajo colaborativo.

Para organizar el desarrollo de las tareas, se retomaron algunos momentos de la Actividad propuestos por Radford (2023a): discusión en pequeños grupos, interacción profesora-estudiantes, sesiones plenarias y presentación introductoria del docente. Adicionalmente, en esta investigación se incorporaron intercambios entre equipos de subtareas. Una subtarea corresponde a una parte específica de la tarea general, abordada inicialmente por un grupo pequeño de estudiantes. Posteriormente, grupos que habían trabajado subtareas diferentes —pero complementarias— se reunían para compartir avances, contrastar procedimientos y colaborar en la resolución conjunta de la tarea matemática.

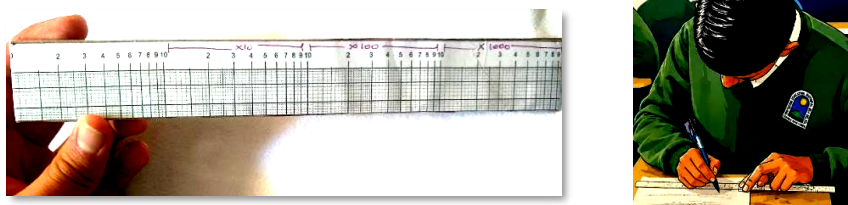
3.1 La tarea Slide Rule

La tarea Slide Rule fue diseñada para abordar el concepto de logaritmo desde la forma “multiplicar sumando y dividir restando” (MSDR), propuesta desde el enfoque de la

¹ La mayúscula inicial en Actividad indica el uso del término como concepto teórico de la Teoría de la Objetivación (*Tätigkeit*), y permite distinguirlo de su acepción cotidiana.

Socioepistemología desarrollado por Marcela Ferrari (Ferrari et al., 2016; Ferrari y Farfán, 2017). Para ello, se elaboró como material manipulativo (o artefacto) una regla de cálculo inspirada en el instrumento que antecedió a las calculadoras electrónicas. La tarea se organizó en dos subtareas complementarias. La subtarea A consistía en construir dos segmentos con la regla, medir cada uno por separado, unirlos para formar un tercer segmento y medir este último con el artefacto. La subtarea B era recíproca: se construían dos segmentos, se restaba uno del otro y el segmento sobrante se volvía a medir con la regla. En la Figura 1 se presenta el artefacto utilizado y la forma en que los estudiantes lo empleaban durante las mediciones.

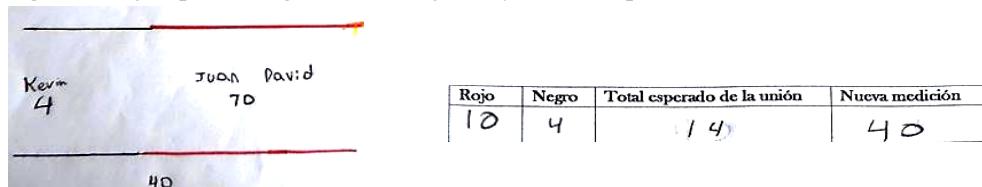
Figura 1. Artefacto utilizado en la tarea *Slide Rule* (izquierda) y estudiante realizando una medición con este (derecha).



Fuente: Chaparro (2019)

Esta tarea se concibió como un proceso progresivo de exploración, discusión y reflexión colectiva. Inicialmente, los estudiantes compartieron impresiones sobre un instrumento desconocido, manipularon el artefacto y realizaron mediciones de distintos segmentos para familiarizarse con su uso. Posteriormente, cada grupo abordó una de las dos subtareas (A o B), comparando los resultados con los valores esperados al sumar o restar segmentos. Este contraste buscaba generar sorpresa y promover interrogantes sobre las relaciones entre las operaciones y los resultados del artefacto. Como se observa en la Figura 2, dos segmentos con mediciones de 4 y 10 producían, al unirse, un nuevo segmento cuya medición no era 14, sino 40. Más adelante, los equipos que trabajaron subtareas distintas se reunieron para compartir procedimientos, contrastar resultados y colaborar en la construcción conjunta de conclusiones. Finalmente, redactaron un mensaje dirigido a otros estudiantes — adaptado de trabajos en TO (Vergel, 2016)— en el que comunicaban las relaciones identificadas durante el trabajo con la *Slide Rule*.

Figura 2. Ejemplo de segmentos dibujados y medidos por los estudiantes con la *Slide Rule*.



Fuente: Chaparro (2019)

3.2 Datos de investigación

Para la recolección y constitución de la información tomamos como referencia la estrategia propuesta por Pantano (2021), estableciendo principalmente cuatro fuentes: grabaciones en video y audio; hojas de trabajo de los estudiantes, específicamente, fragmentos de las producciones escritas que evidenciaban aproximaciones al concepto de logaritmo MSDR; análisis de los registros audiovisuales; y transcripciones del discurso verbal y no verbal. A partir de este proceso se constituyeron los datos de investigación, provenientes del trabajo de maestría realizado por el autor (Chaparro, 2019), entendidos como el conjunto de emociones, interacciones, gestos, expresiones y formas de participación manifestadas por los estudiantes durante el desarrollo de la Actividad (Hernández et al., 2014).

El episodio analizado en este artículo corresponde a uno de los nueve seleccionados en Chaparro (2019), por medio de los criterios de la Tabla 2; criterios previamente establecidos para identificar momentos significativos en la producción colectiva del conocimiento matemático en el marco de la teoría de la objetivación. Posteriormente, el episodio denominado “*Las cuatro operaciones*” fue reinterpretado a la luz de los desarrollos teóricos de la Ética Comunitaria (Radford, 2021a) y de las rúbricas analíticas propuestas por Lasprilla (2021, 2022), las cuales permiten identificar los vectores de responsabilidad, cuidado del otro y compromiso con la tarea a través de acciones observables de los participantes. En consecuencia, el análisis consideró de manera articulada los diferentes sistemas semióticos movilizados en la Actividad (Radford et al., 2017), examinando conjuntamente lo hablado, lo gesticado y lo escrito por los estudiantes.

Tabla 2. Fragmento de la rúbrica empleada para la selección del episodio de análisis.

Tarea	Momento	Video (minuto: segundo)	Indicios objetivación o MSO	Indicios subjetivación o formas de colaboración	Nombre del episodio
Slide Rule	Grupos por subtarea	0:00 – 2:00	No registra	Desespero, “muy difícil”	Confusión
	Grupos unidos	7:57 – 10:50	“está manejando las cuatro operaciones”	“¡No, espere profesor!”, “es que yo no entendí”	Las cuatro operaciones
	Plenaria general	1:48 – 4:22	Relación entre suma y producto	Un estudiante abandona a otro en la explicación	Si me dejas, te dejo

Fuente: Chaparro (2019)

Este episodio fue escogido para el presente artículo porque en él convergen de manera particularmente visible manifestaciones de alegría, frustración e interacciones colaborativas que posibilitan analizar la relación entre tensiones emocionales y ética comunitaria.

4. RESULTADOS

Como se observa en la Figura 3 (derecha), uno de los grupos al que le correspondió la subtask A realizó varias uniones en las que esperaba un resultado derivado de la suma de las medidas; sin embargo, la medición completa arrojaba un valor distinto. El mensaje elaborado por el grupo revela que las estudiantes identificaron una relación entre suma y multiplicación: “[...] nosotras pensábamos que se sumaban los dos resultados sin haber usado la regla. Al usar la regla nos dimos cuenta de que se multiplicaba el número que nos tocaba por la medida. Esto nos cambiaba totalmente el resultado”.

Figura 3. Mediciones del grupo de la subtask A (izquierda) y mensaje de conclusión elaborado por las estudiantes (derecha).

Unión 1			
Rojo	Negro	Total esperado de la unión	Nueva medición
7	100	107	700
Unión 2			
Rojo	Negro	Total esperado de la unión	Nueva medición
1.000	7	1.007	7.000
Unión 3			
Rojo	Negro	Total esperado de la unión	Nueva medición
20	100	120	2.000

Conclusiones:
Elaboramos diversas líneas con diversas medidas, al unirlas teníamos 3 resultados incorrectos pensando que se sumaban los 2 resultados sin haber usado la regla. Al usar la regla nos dimos cuenta que se multiplicaba el número que nos tocaba por la medida, esto nos cambiaba totalmente el resultado.

Fuente: Chaparro (2019)

A partir de este contexto, el episodio seleccionado corresponde a la discusión suscitada durante la unión de dos grupos: uno encargado de la subtask A y otro de la subtask B, en interacción con el docente. Desde este momento emerge una conversación colectiva entre profesor y estudiantes que consideramos significativa para la investigación. Más que una dinámica centrada exclusivamente en la explicación del profesor, el episodio muestra una construcción progresiva de significados a través de las intervenciones de los participantes.

E1: Para mí la regla está manejando las 4 operaciones y las está manejando de distinta manera [resalta el cuatro con su mano derecha (ver Figura 4)].

P: [el docente quiere saber a qué se refiere la estudiantes y pregunta] Supongamos aquí, usted tiene una línea de dos y una línea de 3. Las juntan. En una regla normal uno esperaría, en una regla normal que le dé 5. Pero con la regla, con esta, ¿Cuánto va a dar?

E1: Ehhh... 6 [con sorpresa].

Figura 4. Acercamiento gestual de E1 a la forma MSDR.



Fuente: Chaparro (2019)

E1 expresa en lenguaje cotidiano una idea inicial acerca del funcionamiento de la Slide Rule. Cuando afirma que la regla “maneja las operaciones de manera distinta”, el profesor interpreta que la estudiante se aproxima a la forma MSDR y, a partir de ello, interviene buscando que dicha idea gane claridad tanto para el grupo como para la propia E1. Esto da lugar al siguiente diálogo entre las estudiantes (E1, E2 y E3) y el profesor (P):

P: Bien, tenemos un segmento de 2 y otro de 3. Ahora sí, midanla toda, 2 y 3 [refiriéndose a la unión de los dos segmentos].

E1: 3 por 2 seis.

P: O sea, ¿qué es lo que hace la regla [...] cuando sumo [...]?

E1: Multiplico y, cuando resta, divide.

P: Básicamente esa es la idea.

E1: [celebra aplaudiendo (como se observa en la Figura 5 a la derecha)].

E2: No le entendí, ¡No, espere profesor! [simultáneamente a la celebración de E1 y con semblante de decepción (como se observa en Figura 5 a la izquierda)]

E1: Haz de cuenta que [...]

E2: Es que yo no le entendí.

Figura 5. Contraste entre la alegría de E1 (Izquierda) y la frustración de E2 (derecha)



Fuente: Chaparro (2019)

El profesor enfatiza la diferencia entre la “suma esperada” (5) y “el resultado final” (6), preguntando qué ocurre en la regla. A partir de este ejemplo, E1 refina su formulación inicial y responde: “multiplica; y cuando resta, divide”. Mientras que inicialmente señalaba que la regla “manejaba” las cuatro operaciones de manera distinta, ahora reorganiza su interpretación estableciendo dos relaciones específicas: suma-multiplicación y resta-división.

Al observar el episodio en retrospectiva, es posible identificar un refinamiento progresivo en la manera como E1 expresa su comprensión. En un primer momento, antes de conocer el trabajo de otros grupos, el resultado esperado entraba en tensión con la medición obtenida; de allí que en la Figura 3 las estudiantes afirmaran: “esto nos cambiaba totalmente el resultado”. Posteriormente, al interactuar con las mediciones de la subtask B, E1 plantea que la regla “maneja las cuatro operaciones de distinta manera”, enfatizando gestualmente el número cuatro. Finalmente, en el diálogo reciente, sintetiza la relación en dos pares: suma-multiplicación y resta-división. Sugerimos que este tránsito puede interpretarse como una reducción progresiva y refinamiento de recursos semióticos para condensar significados, fenómeno que Radford (2008) denomina contracción semiótica

Ahora bien, imbricada en este proceso emerge una dimensión emocional. La validación realizada por el docente parece generar alegría en E1, mostrando cómo la dimensión afectiva de la Actividad se entrelaza con la cognitiva (Vygotsky, 2000). Sin embargo, no solo se manifiesta alegría; también emerge una clara *tensión emocional*, pues la celebración de E1 contrasta inmediatamente con el desconcierto expresado por E2. Las reacciones de los participantes evidencian la coexistencia de distintas voces y subjetividades en el aula: mientras el profesor y E1 parecen compartir el entusiasmo por la comprensión alcanzada, E2 manifiesta explícitamente su dificultad, y los demás estudiantes observan la situación desde posiciones diversas. Este escenario encuentra eco en las reflexiones de Radford (2023a), quien señala que la escuela no solo produce conocimiento, sino también subjetividades; allí no solo importan los saberes, sino también los sujetos implicados en la Actividad.

Profundizando en la dimensión afectiva, la exclamación de E2 —interpretada por el autor como una expresión de frustración— está lejos de constituirse simplemente como una emoción “negativa”. La estudiante manifiesta que no está dispuesta a continuar sin comprender: “No, espere profesor”. Su intervención constituye una demanda de comprensión dirigida tanto al docente como a E1. En este sentido, puede interpretarse un proceso de subjetivación relacionado con el vector *compromiso con la tarea* dentro de la EC. Más allá de aceptar pasivamente la explicación o ignorar la conversación, en E2 prevalece la necesidad de comprender aquello que los otros intentan comunicar. Reconocemos este vector a partir de una acción registrada por Lasprilla (2021) en el componente *exposición*: “expresa abiertamente su comprensión o no de la tarea” (p. 199).

La interacción continúa así:

P: El trabajo de ustedes [haciendo referencia al subgrupo] era unir dos líneas, y cuando ustedes unen dos líneas, se supone que uno, uno está haciendo una suma; pero la regla termina haciendo [...].

E1, E2 y E3: Multiplicando [a unísono, mientras que E2 mueve la regla de arriba hacia abajo, E3 voltea las manos juntas, E1 gira la cabeza (como se observa en la Figura 6)].

Figura 6. E2, E3 y E1 (de izquierda a derecha) movilizan diferentes gestos para expresar una misma idea.



Fuente: Chaparro (2019)

Con el propósito de hacer comprensible para todos la idea inicialmente expresada por E1, el profesor retoma brevemente las acciones realizadas por el grupo. Al enfatizar que se esperaba una suma, tres estudiantes responden simultáneamente que el resultado obtenido fue una multiplicación. Aunque verbalmente utilizan la misma expresión, cada una moviliza

recursos semióticos distintos: E2 agita la regla, E3 gira sus manos juntas y E1 asiente con la cabeza. Más que entender estos movimientos como reacciones aisladas, consideramos relevante analizarlos en articulación con el discurso verbal y las ideas abordadas previamente. En conjunto, estos recursos participan en la producción compartida de significado alrededor de la relación suma-multiplicación, sugiriendo que significa una forma de mediatizar los PO para alcanzar la comprensión crítica (Radford, 2008).

Asimismo, la intervención de E1 sugiere un desplazamiento momentáneo de su atención: luego de celebrar la validación de su idea, intenta contribuir a que E2 comprenda la explicación. Interpretamos esta acción como una manifestación del componente *acogida* asociado al vector *responsabilidad* de la EC, “interés por la comprensión o no de los compañeros” (Lasprilla, 2021, p. 171). En otras palabras, E1 pone en pausa su expresión de alegría para “hacerse cargo” —otra forma de definir acogida— de E2, sus prioridades han cambiado, ahora su principal objetivo es que E2 también entienda.

El desenlace del episodio se da de la siguiente manera:

P [...] una multiplicación. Ustedes [haciendo referencia al grupo de la subtarea B] tenían que partir unas líneas, cuando uno parte unas líneas se supone que uno está [...].

E2: Restando.

P: [...] restando; pero resulta que termina dividiendo ¿Cuál es la idea del mensaje?

E2: (ver Figura 7) La regla sirve para sumar multiplicar [agita la regla hacia al frente dos veces (izquierda)], [sube la regla (centro)] restar y dividir [regla hacia atrás, agita dos veces (derecha)].

Figura 7. E2 recurre al MSO denominado “operaciones dos a dos”, para explicar la forma de pensar logarítmicamente multiplicar sumando, dividir restando.



Fuente: Chaparro (2019)

Finalmente, luego de la labor conjunta desarrollada entre estudiantes y docente, el episodio alcanza un punto particularmente significativo. Reconocemos un proceso de objetivación en la medida en que E2 logra expresar, mediante recursos verbales y gestuales articulados, la forma de pensamiento esperada en la tarea. En la Figura 7, se observan movimientos que constituyen recursos semióticos que contribuyen a comunicar dicha comprensión: dos golpes —con la regla— hacia adelante indicando la relación suma-multiplicación y seguidamente dos golpes hacia atrás para la relación resta-división. Algunas investigaciones (Vergel, 2016; Pantano, 2021) han documentado movimientos y agrupamientos gestuales semejantes, interpretándolos como medios semióticos movilizadas por los estudiantes.

Ahora bien, en el desenlace del episodio también se identifica en E2 una movilización del componente *encuentro*, vinculado al vector *cuidado del otro* de la EC. Esto ocurre en la medida en que E2 logra extraer “cosas positivas de las experiencias y eventos difíciles que se presentan para mejorar las relaciones con otras personas” (Lasprilla, 2021, p. 171). Su rostro inicial de desconcierto y aparente frustración se transforma progresivamente en una expresión de seguridad al comunicar una idea que ha logrado comprender y compartir con los demás. En este tránsito, la *tensión emocional* se resignifica: la dificultad inicial no desaparece simplemente, sino que deviene en una experiencia que fortalece tanto la comprensión del objeto matemático como las relaciones de colaboración entre los participantes. En este sentido, el cuidado del otro no aparece como un medio instrumental para alcanzar la tarea, sino como una condición de posibilidad de la labor conjunta (Radford, 2021a).

En conjunto, el episodio analizado permite observar cómo la comprensión de la forma MSDR del logaritmo no emerge como un proceso exclusivamente individual o cognitivo, sino como una producción colectiva mediada por distintos medios semióticos, tales como gestos, movimientos, lenguaje verbal e interacciones entre los participantes. La evidencia empírica presentada sugiere que los procesos de objetivación y subjetivación aparecen profundamente imbricados en el desarrollo mismo del trabajo conjunto, en consonancia con lo planteado por Radford (2017).

Asimismo, como ha sido el foco central de este artículo, las emociones no constituyen un elemento periférico de la Actividad matemática. Por el contrario, retomando a Radford (2015a), son parte de los procesos de subjetivación mediante los cuales los sujetos se posicionan culturalmente en las prácticas sociales. En este sentido, las tensiones emocionales identificadas no operaron simplemente como obstáculos para el propósito de la tarea matemática; por el contrario, en articulación con los vectores de la ética comunitaria, participaron en la reorganización de las relaciones entre los sujetos y en la construcción compartida de significado.

5. CONCLUSIONES Y CONSIDERACIONES FINALES

Este análisis da cuenta de algunos PO y PS que emergieron cuando estudiantes de grado noveno se enfrentaron a una tarea vinculada con una forma de pensamiento histórico-cultural del logaritmo. Se destaca cómo, en la Actividad, ambos procesos se manifiestan de manera simultánea a través de emociones, gestos, lenguaje e interacciones colectivas, lo que revalida la idea de Radford al señalar que “[...] una misma actividad puede contener procesos de objetivación y subjetivación. Implicados en la misma actividad, los procesos de objetivación y subjetivación no corren separadamente. Si nosotros hablamos de ellos como cosas distintas es simplemente por comodidad de análisis” (Radford, 2017, p. 146).

La articulación de estos procesos permite evidenciar que las emociones constituyen un componente esencial en la actualización del Saber como conocimiento y del Ser en devenir. Este resultado no es fortuito, sino que se inscribe en una concepción de sujeto histórico-cultural, situado en lo social, que invita a problematizar el tipo de interacciones que configuran las formas de colaboración en el aula. Si bien se reconocen los aportes de enfoques como el DA y la CVT en la explicación de las emociones individuales, se propone ampliar el campo

de investigación hacia el análisis de las relaciones sociales en su vínculo dialéctico con la dimensión emocional. Se trata de una línea sugerida incluso desde la CVT (Schoenherr et al., 2025), pero cuya comprensión más profunda podría requerir el andamiaje teórico de la perspectiva sociocultural.

Asimismo, se reconoce que los vectores de la EC no emergen de manera abstracta, sino a través de la lectura de sus *componentes* en la interacción de los sujetos. En el componente *exposición*, E2 manifiesta abiertamente su necesidad de comprender, lo que permitió identificar una movilización del *compromiso* con la tarea; en la *acogida*, E1 desplaza momentáneamente el centro de su atención hacia la comprensión de su compañera, evidenciando una forma de *responsabilidad* hacia el otro; finalmente, en el *encuentro*, la dificultad inicial se resignifica colectivamente, posibilitando el *cuidado* del otro. En este sentido, los componentes no solo operan como categorías analíticas para reconocer la movilización de los vectores de la EC, sino que también sugieren una vía pertinente para comprender cómo ciertas tensiones emocionales podrían configurarse y transformarse en la labor matemática colectiva.

No obstante, es importante reconocer que los alcances interpretativos de este análisis están condicionados por las características propias del estudio realizado. La investigación se desarrolló en un contexto particular, con un grupo específico de estudiantes y a partir del examen detallado de un episodio seleccionado dentro de una tarea matemática determinada. En consecuencia, los resultados deben comprenderse como una interpretación situada de las relaciones entre tensiones emocionales y ética comunitaria, más que como una descripción generalizable de estos fenómenos.

De manera que, este estudio plantea una pregunta que demanda mayor rigor investigativo y el diseño de instrumentos analíticos más sofisticados: ¿qué tipo de relaciones se establecen entre una ética de orientación comunitaria y las tensiones de carácter emocional en el aula de matemáticas? Actualmente, esta cuestión orienta nuevas exploraciones investigativas, cuyo alcance abre un amplio abanico de posibilidades y supone una tarea ambiciosa, dadas las múltiples variables que intervienen, tales como la población, el tipo de saber matemático involucrado y las particularidades de cada contexto.

En conjunto, los resultados sugieren que la EC podría mediar en las tensiones emocionales. No se trata de eliminar las emociones, como si fueran obstáculos o adversarios del aprendizaje —en sintonía con Lev Vygotsky sobre el ser natural—, sino de indagar cómo los vectores de la EC —la responsabilidad, el cuidado y el compromiso— pueden dotar de mayor elasticidad una dimensión encarnada tanto en el intelecto como en las relaciones. Desde esta perspectiva, la EC no se reduce a un marco normativo de convivencia, sino que podría erigirse como una posibilidad de mediación colectiva de las tensiones inherentes al aprendizaje matemático. En consecuencia, se reafirma la necesidad de profundizar su estudio desde una perspectiva sociocultural en educación matemática.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

PCR concibió la idea presentada, desarrolló su fundamentación teórica, adaptó la metodología, elaboró y aplicó los instrumentos, así como el análisis de los datos y las discusiones y conclusiones.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la persona autora PCR con previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a los estudiantes del Colegio Isla del Sol por su participación en esta investigación, así como al profesor Cristian Hurtado Moreno por sus sugerencias teóricas y de estilo, y al doctor Rodolfo Vergel Causado por sus observaciones en los orígenes de este manuscrito.

6. REFERENCIAS

- Banco Mundial. (2016). *Guía del docente: Paso a paso. Caja de herramientas para el desarrollo de habilidades socioemocionales en niños y adolescentes (2ª ed.)*. Programa de publicaciones del grupo Banco Mundial. <https://www.worldbank.org/en/topic/education/publication/step-by-step-sel-curricula>
- Blanco, L., Caballero, A., Piedehierro, A., Guerrero, E., & Gómez, R. (2010). El Dominio afectivo en la Enseñanza/ Aprendizaje de las Matemáticas: Una revisión de investigaciones locales. *Campo abierto*, 29(1), 13-31.
- Chaparro, P. (2019). *Un acercamiento a los procesos de objetivación y subjetivación en el contexto de tareas histórico-culturales del logaritmo: una experiencia con estudiantes de grado noveno* [Trabajo de grado de maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. <http://hdl.handle.net/11349/22874>
- D'Mello, S., & Graesser, A. (2012). Dynamics of affective states during complex learning. *Learning and Instruction*, 22(2), 145–157. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2011.10.001>
- Debellis, V. A., & Goldin, G. A. (2006). Affect and meta-affect in mathematical problem solving: A representational perspective. *Educational Studies in Mathematics*, 63(2), 131–147. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-9026-4>

- Di Martino, P. (2019). Pupils' view of problems: the evolution from kindergarten to the end of primary school. *Educational Studies in Mathematics*, 100(3), 291–307. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9850-3>
- Elias, N. (1990). *La sociedad de los individuos* (M. Schröter, Ed.; J. Alemany, Trans.). Ediciones Península.
- Ernest, P. (2021). Una auditoría ética de las matemáticas en la educación y en la sociedad. En L. Radford & M. Silva (Eds.), *Ética: Entre Educación y Filosofía* (pp. 73–105). Ediciones Uniandes.
- Ferrari-Escolá, M., & Farfán-Márquez, R. M. (2017). Multiplicar sumando: una experiencia con estudiantes de bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 20(2), 137–166. <https://doi.org/10.12802/relime.17.2021>
- Ferrari-Escolá, M., Martínez-Sierra, G., & Méndez-Guevara, M. E. M. (2016). “Multiply by adding”: Development of logarithmic-exponential covariational reasoning in high school students. *The Journal of Mathematical Behavior*, 42, 92–108. <https://doi.org/10.1016/J.JMATHB.2016.03.003>
- Galeano, M. (2020). *Diseño de Proyectos en la Investigación Cualitativa*. Centro de publicaciones Universidad Eafit.
- González Rey, F. L. (2011). *El sujeto y la subjetividad en la psicología social: Un enfoque histórico-cultural*. Noveduc.
- Hannula, M. S. (2012). Exploring new dimensions of mathematics-related affect: embodied and social theories. *Research in Mathematics Education*, 14(2), 137–161. <https://doi.org/10.1080/14794802.2012.694281>
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación*. (6ª ed.). McGraw-Hill
- Lasprilla, A. (2021). *Constitución dialéctica de los procesos de objetivación y subjetivación con una ética comunitaria en Actividades desarrolladas al abordar tareas de generalización de patrones* [Tesis doctoral, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. <https://repository.udistrital.edu.co/items/27decbb2-2072-446a-b9fb-455c23ae7669>
- Lasprilla, A. (2022). *La ética comunitaria en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas en educación primaria*. IDEP.
- Lasprilla, A., Radford, L., & León, O. (2021). La labor conjunta en actividades de enseñanza-aprendizaje a partir del estudio de los vectores de la ética comunitaria. *REMATEC*,

- 16(39), 228–245. <https://doi.org/10.37084/rematec.1980-3141.2021.n39.p228-245.id498>
- Lévinas, E. (2002). *Totalidad e infinito: ensayo sobre la exterioridad* (6a ed.). Ediciones Sígueme.
- Mandler, G. (1989). Affect and learning: Causes and consequences of emotional interactions. In D. McLeod & V. Adams (Eds.), *Affect and mathematical problem solving* (pp. 3–19). Springer.
- Martínez-Padrón, O. (2005). Dominio afectivo en educación matemática. *Paradigma*, 26(2), 7-34. http://www2.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512005000200002&lng=en&nrm=iso
- Marx, K. (1844/2003). *Manuscritos de economía y filosofía* (F. Rubio, Trad.). Alianza Editorial.
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: A reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: A project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 576–596). Macmillan Publishers.
- Middleton, J. A., Wiesel, A., Jansen, A., & Smith, E. P. (2023). Tracing mathematics engagement in the first year of high school: relationships between prior experience, observed support, and task-level emotion and motivation. *ZDM - Mathematics Education*, 55(2), 427–445. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01432-9>
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. Ministerio de educación nacional. https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf
- Miranda, I., Radford, L., Vergel, R., & Salinas-Hernández, U. (2025). Processes of subjectification: Positioning, power, and emotions in the mathematics classroom. *ZDM - Mathematics Education*, 57, 1411-1423. <https://doi.org/10.1007/s11858-025-01719-7>
- Pantano, Ó. (2021). *Formas de pensamiento aditivo en estudiantes de tercero de primaria (8-9 años): Una aproximación desde la Teoría de la Objetivación* [Tesis doctoral]. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. <http://hdl.handle.net/11349/29801>
- Pekrun, R. (2006). The control-value theory of achievement emotions: Assumptions, corollaries, and implications for educational research and practice. *Educational Psychology Review*, 18(4), 315–341. <https://doi.org/10.1007/S10648-006-9029-9>

- Pekrun, R., Vogl, E., Muis, K. R., & Sinatra, G. M. (2016). Measuring emotions during epistemic activities: the Epistemically-Related Emotion Scales. *Cognition and Emotion*, 31(6), 1268–1276. <https://doi.org/10.1080/02699931.2016.1204989>
- Perdomo, J., & Fernández, A. (2018). Estudio exploratorio de las emociones en la cotidianidad de las clases de Matemáticas. *Revista Electrónica de investigación Educativa*, 20(4), 133–143. <https://doi.org/10.24320/redie.2018.20.4.1748>
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, 103-129. <https://www.redalyc.org/pdf/335/33509906.pdf>.
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different context. *ZDM Mathematics Education*, 40(1), 83-96.
- Radford, L. (2014). De la teoría de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7(2), 132–150.
- Radford, L. (2015a). Of Love, Frustration, and Mathematics: A Cultural-Historical Approach to Emotions in Mathematics Teaching and Learning. In: Pepin, B., Roesken-Winter, B. (eds) *From beliefs to dynamic affect systems in mathematics Education* (pp. 25–49). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-319-06808-4_2
- Radford, L. (2015b). The epistemological foundations of the theory of objectification. In: L. Branchetti (Ed.), *Teaching and learning mathematics: Some past and current approaches to mathematics education* (pp. 127-149). Isonomia Epistemologica.
- Radford, L. (2017). Ser, Subjetividad y Alienación. En B. D'Amore & L. Radford (Eds.), *Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: problemas semióticos, epistemológicos y prácticos* (pp. 137–165). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Radford, L. (2021a). La ética en la teoría de la objetivación. En L. Radford & M. Silva Acuña (Eds.), *Ética: Entre Educación y Filosofía* (pp. 107–141). Ediciones Uniandes.
- Radford, L. (2021b). Mathematics teaching and learning as an ethical event. *La matematica e la sua didattica*, 29(2), 185–198.
- Radford, L. (2023a). *La teoría de la objetivación: Una perspectiva vygotskiana sobre saber y devenir en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Ediciones Uniandes.
- Radford, L. (2023b). ¿Qué significa aprendizaje colectivo? ¿Cómo lograrlo en la clase de matemáticas? *Μαθηματικά: Epistemologia e Educação*, 1, e2023101. <https://doi.org/10.51359/2965-1794.2023.257280>

- Radford, L., Arzarello, F., Edwards, L., & Sabena, C. (2017). The multimodal material mind: Embodiment in mathematics education. In J. Cai (Ed.), *First compendium for research in mathematics education* (pp. 700-721). NCTM.
- Roth, W.-M., & Walshaw, M. (2019). Affect and emotions in mathematics education: toward a holistic psychology of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 111–125. <https://doi.org/10.1007/s10649-019-09899-2>
- Satyam, V. R., Bae, Y., Smith, J. P., & Levin, M. (2022). Affect graphing: leveraging graphical representations in the study of students' affect in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 110(3), 481–501. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10131-3>
- Schoenherr, J., Schukajlow, S., & Pekrun, R. (2025). Emotions in mathematics learning: a systematic review and meta-analysis. *ZDM - Mathematics Education*, 57, 603-620. <https://doi.org/10.1007/s11858-025-01651-w>
- Schukajlow, S., Rakoczy, K., & Pekrun, R. (2017). Emotions and motivation in mathematics education: theoretical considerations and empirical contributions. *ZDM - Mathematics Education*, 49(3), 307–322. <https://doi.org/10.1007/s11858-017-0864-6>
- Schukajlow, S., Rakoczy, K., & Pekrun, R. (2023). Emotions and motivation in mathematics education: Where we are today and where we need to go. *ZDM - Mathematics Education*, 55(2), 249–267. <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01463-2>
- Sierpiska, A., Bobos, G., & Knipping, C. (2008). Sources of students' frustration in pre-university level, prerequisite mathematics courses. *Instructional Science*, 36(4), 289–320. <https://doi.org/10.1007/s11251-007-9033-6>
- Secretaría de Educación Distrital. (2025). *Escuelas con emociones: malla de aprendizajes en habilidades socioemocionales*. Oficina de Convivencia Escolar. <https://oce.educacionbogota.edu.co/escuela-con-emociones>
- Valero, P., & Jørgensen, K. M. (2021). ¿A la educación se le perdió la ética! Y... ¿por qué queremos reencontrársela? En L. Radford & M. Silva Acuña (Eds.), *Ética: Entre Educación y Filosofía* (pp. 257–276). Ediciones Uniandes.
- Vergel, R. (2016). *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. <https://doi.org/10.14483/9789588972244>
- Vygotski, L. S. (2000). *Obras escogidas* (Vol. 3) (L. Kuper, Trad.). Visor. (Original publicado en 1931).



LA SIMBOLIZACIÓN COMO NÚCLEO EPISTEMOLÓGICO EN LA ENSEÑANZA DE LA LÓGICA MATEMÁTICA: UN ANÁLISIS DESDE LA TEORÍA DE LA SIMBOLISTA DE EDUCACIÓN EN MATEMÁTICA PURA

SYMBOLIZATION AS THE EPISTEMOLOGICAL CORE IN THE
TEACHING OF MATHEMATICAL LOGIC: AN ANALYSIS FROM THE
SYMBOLIST THEORY OF PURE MATHEMATICS EDUCATION

Juan Carlos Ruiz Castillo¹



ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-2218-1442>

RESUMEN

El presente estudio analiza la enseñanza de la lógica matemática desde la Teoría Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP), la cual sitúa el lenguaje simbólico como núcleo epistemológico del conocimiento matemático. Mediante un enfoque cualitativo con apoyo cuantitativo descriptivo, se diseñó y aplicó un instrumento evaluativo orientado a identificar estructuras de pensamiento formal en estudiantes universitarios, más allá de la simple obtención de respuestas correctas. El análisis de las producciones permitió clasificar tres niveles de apropiación del lenguaje simbólico: receptivo, resolutivo y autónomo. Los resultados evidencian predominancia del nivel resolutivo, caracterizado por la ejecución operativa de procedimientos sin una comprensión estructural plenamente consolidada, así como una menor presencia del nivel autónomo, donde los estudiantes manifiestan dominio del sistema formal mediante el uso coherente de cuantificadores, la aplicación explícita de reglas de inferencia y la construcción de demostraciones válidas. Las dificultades identificadas trascienden lo procedimental y revelan obstáculos epistemológicos vinculados con la ruptura entre lenguaje natural y lenguaje formal, el uso instrumental de las reglas lógicas y la falta de justificación en los procesos deductivos. En diálogo crítico con enfoques centrados en la multiplicidad de representaciones, los hallazgos sugieren que la comprensión matemática requiere consolidar el lenguaje simbólico como sistema estructural. El estudio aporta evidencia empírica sobre las limitaciones de enfoques tradicionales y propone una reconfiguración didáctica fundamentada

¹ Universidad de San Carlos de Guatemala, Guatemala, Guatemala. Correo electrónico: jcefpem@profesor.usac.gt



en la TSEMP, orientada a formar sujetos capaces de operar en sistemas formales con rigor, autonomía y coherencia lógica.

Palabras clave: lógica matemática, simbolización, demostración, educación matemática, TSEMP.

ABSTRACT

This study analyzes the teaching of mathematical logic from the perspective of the Symbolist Theory of Pure Mathematics Education (TSEMP), which places symbolic language at the epistemological core of mathematical knowledge. Through a qualitative approach supported by descriptive quantitative analysis, an assessment instrument was designed and applied to identify structures of formal thinking in university students, beyond the mere production of correct answers. The analysis of students' written work made it possible to classify three levels of appropriation of symbolic language: receptive, procedural, and autonomous. The results show a predominance of the procedural level, characterized by the operational execution of procedures without a fully consolidated structural understanding, as well as a lower presence of the autonomous level, in which students demonstrate mastery of the formal system through the coherent use of quantifiers, the explicit application of rules of inference, and the construction of valid proofs. The difficulties identified go beyond procedural aspects and reveal epistemological obstacles related to the rupture between natural language and formal language, the instrumental use of logical rules, and the lack of justification in deductive processes. In critical dialogue with approaches focused on the multiplicity of representations, the findings suggest that mathematical understanding requires the consolidation of symbolic language as a structural system. The study provides empirical evidence regarding the limitations of traditional approaches and proposes a didactic reconfiguration grounded in TSEMP, aimed at forming individuals capable of operating within formal systems with rigor, autonomy, and logical coherence.

Keywords: mathematical logic, symbolization, proof, mathematics education.

1. INTRODUCCIÓN

La enseñanza de la matemática en el ámbito universitario se encuentra atravesada por una tensión estructural que no puede ser reducida a un problema meramente didáctico, sino que responde a una fractura de orden profundamente epistemológico: aquella que se configura entre los enfoques de carácter intuitivo, centrados en la accesibilidad del significado, y las aproximaciones formales, orientadas a la coherencia interna del sistema matemático. Esta tensión no es contingente ni reciente; por el contrario, expresa dos modos radicalmente distintos de comprender la naturaleza del conocimiento matemático. Mientras una tradición privilegia la construcción de sentido a partir de contextos cercanos a la experiencia del estudiante, otra reconoce que la matemática, en su desarrollo más riguroso, se constituye como un sistema autónomo de relaciones formales cuya validez descansa en la precisión simbólica, la consistencia lógica y la estructura deductiva.

Esta problemática adquiere una especial densidad en el campo de la lógica matemática, disciplina que no solo ocupa un lugar fundacional dentro de las

matemáticas, sino que constituye, en sentido estricto, el lenguaje mediante el cual se articulan sus estructuras más profundas. Sin embargo, su enseñanza ha sido orientada con frecuencia hacia enfoques predominantemente semánticos, en los que la interpretación de proposiciones en lenguaje natural, el uso de ejemplos contextualizados y la construcción de tablas de verdad ocupan un lugar central. Si bien estas estrategias pueden facilitar un acceso inicial al campo lógico, resultan insuficientes para la formación de un pensamiento deductivo riguroso, pues desplazan el eje del conocimiento desde la estructura formal hacia la interpretación contextual, debilitando la comprensión del sistema lógico como totalidad coherente.

En contraste, desde los trabajos fundacionales de Boole (1854) y Frege (1884/1893/1903), la lógica ha sido concebida como un sistema formal autónomo, en el cual los símbolos no operan como simples representaciones de significados externos, sino como elementos constitutivos de una arquitectura rigurosamente organizada. En este marco, el sentido no antecede al símbolo, sino que emerge de su inserción en un sistema regido por reglas precisas de formación e inferencia. Comprender la lógica, por tanto, no implica interpretar enunciados en función de contextos particulares, sino habitar un sistema de signos en el que la validez se determina exclusivamente por la coherencia interna de las transformaciones que en él se realizan.

Es precisamente en este horizonte donde adquiere relevancia la Teoría de la Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP), la cual propone una reconfiguración sustantiva del proceso de enseñanza al situar el símbolo como objeto epistemológico central y no como un recurso instrumental. Desde esta perspectiva, el aprendizaje matemático no se concibe como la traducción de significados previamente comprendidos al lenguaje formal, sino como un proceso de apropiación progresiva de un sistema simbólico en el que el pensamiento se constituye a través de la manipulación rigurosa de signos, la organización axiomática del conocimiento y la práctica sistemática de la demostración. En este sentido, la simbolización no es una etapa posterior al entendimiento, sino la condición misma de posibilidad del pensamiento matemático formal.

En consecuencia, el presente artículo tiene como propósito analizar la pertinencia de la TSEMP en la enseñanza de la lógica matemática en el nivel universitario, examinando críticamente los enfoques tradicionales que privilegian la accesibilidad en detrimento del rigor y proponiendo una alternativa fundamentada en la centralidad del lenguaje simbólico. Más allá de una discusión metodológica, el trabajo se inscribe en una reflexión de mayor alcance sobre la naturaleza del conocimiento matemático y las condiciones necesarias para su enseñanza efectiva, particularmente en la formación de docentes, donde el dominio del lenguaje formal no constituye un refinamiento académico opcional, sino una exigencia estructural para la comprensión y transmisión del saber matemático en su forma más rigurosa.

Desde este horizonte, la TSEMP permite comprender la enseñanza de la lógica matemática como un proceso de apropiación progresiva del lenguaje simbólico, la axiomatización y la demostración, situando el símbolo no como un recurso auxiliar, sino como el eje epistemológico del pensamiento matemático formal.

2.1 Fundamentos epistemológicos del formalismo matemático

El formalismo matemático constituye uno de los pilares fundamentales en la comprensión contemporánea de la naturaleza del conocimiento matemático, en la medida en que propone una ruptura radical con las concepciones empiristas e intuicionistas que históricamente han intentado fundamentar la disciplina. Desde esta perspectiva, las matemáticas no son concebidas como una descripción del mundo ni como una construcción derivada de la experiencia sensible, sino como un sistema autónomo de signos cuya validez se establece en virtud de su coherencia interna y de las reglas que rigen su manipulación.

Esta transformación epistemológica encuentra su consolidación en el programa formalista impulsado por David Hilbert, quien planteó la necesidad de fundamentar las matemáticas sobre bases estrictamente formales, libres de ambigüedades semánticas y de dependencias intuitivas. En este marco, los objetos matemáticos no poseen significado en sí mismos fuera del sistema en el que están inscritos; su identidad está determinada por su función dentro de una estructura axiomática, y su legitimidad se deriva exclusivamente de su deducibilidad a partir de reglas previamente establecidas (Hilbert & Ackermann, 1928).

Desde esta concepción, el lenguaje matemático adquiere un estatuto ontológico singular: deja de ser un medio de representación para convertirse en el espacio mismo en el que el conocimiento se configura. Esta idea, que encuentra antecedentes en la obra de Gottlob Frege, particularmente en su *Begriffsschrift* (1879), inaugura una nueva forma de entender la relación entre pensamiento y simbolización. Frege no solo introduce un lenguaje formal para la lógica, sino que establece que la precisión del pensamiento depende de la precisión del lenguaje en el que este se expresa. En consecuencia, la ambigüedad del lenguaje natural se convierte en un obstáculo epistemológico que debe ser superado mediante la formalización.

En esta misma línea, los desarrollos posteriores en lógica matemática, especialmente los aportes de Alfred Tarski, permiten profundizar en la distinción entre sintaxis y semántica, al establecer que la verdad en los sistemas formales no puede ser comprendida en términos puramente intuitivos, sino que requiere una definición rigurosa dentro de un marco estructurado (Tarski, 1944). Esta precisión no desplaza la centralidad de la sintaxis; por el contrario, permite reconocerla como eje organizador del sistema, en tanto las reglas formales garantizan la validez de las inferencias.

Por otra parte, los resultados de Kurt Gödel introducen una dimensión crítica al programa formalista, al demostrar que todo sistema formal suficientemente potente es necesariamente incompleto, en el sentido de que existen proposiciones verdaderas que no pueden ser demostradas dentro del sistema. Lejos de debilitar el formalismo, estos resultados permiten comprender con mayor profundidad sus alcances y limitaciones, evidenciando que la consistencia y la completitud no pueden ser garantizadas simultáneamente en sistemas complejos (Gödel, 1931). Esta tensión no invalida la perspectiva formalista, sino que la sitúa en un horizonte más amplio, donde el rigor

interno del sistema sigue siendo condición necesaria, aunque no suficiente, para la fundamentación total de las matemáticas.

En este contexto, el formalismo no debe entenderse como una reducción mecanicista del pensamiento matemático, sino como una reconfiguración de su naturaleza, en la que la actividad matemática se concibe como una práctica simbólica rigurosa. El acto de hacer matemáticas consiste, desde esta perspectiva, en operar dentro de sistemas de signos conforme a reglas explícitas, donde cada transformación es legítima en la medida en que respeta la estructura del sistema. La demostración, en este sentido, no es una verificación externa, sino un proceso interno que garantiza la coherencia del discurso matemático.

Desde esta articulación, la TSEMP proyecta los principios del formalismo al ámbito educativo, al concebir el aprendizaje matemático como apropiación progresiva del lenguaje simbólico. En este proceso, el símbolo no representa simplemente una idea previa, sino que constituye el medio formal mediante el cual el pensamiento matemático adquiere estructura, precisión y validez.

Desde esta perspectiva, la enseñanza de la lógica matemática adquiere una relevancia particular, pues constituye uno de los dominios donde el formalismo se manifiesta con mayor pureza. La lógica proporciona herramientas para el análisis del razonamiento y, al mismo tiempo, encarna principios fundamentales del pensamiento formal: axiomatización, inferencia y coherencia estructural. Por ello, su enseñanza requiere superar la mera interpretación de enunciados o la resolución mecánica de ejercicios, orientándose hacia la formación de sujetos capaces de operar con autonomía dentro de sistemas simbólicos.

Los fundamentos epistemológicos del formalismo matemático permiten comprender la matemática como una construcción simbólica autónoma, regida por principios internos de coherencia, antes que como un reflejo inmediato de la realidad. Esta concepción, lejos de desvincularla de la experiencia, la sitúa en un plano donde el pensamiento alcanza su máxima precisión. En el ámbito educativo, asumir esta perspectiva implica reconocer que aprender matemáticas exige ingresar progresivamente en un sistema formal, donde el rigor, la consistencia y la explicitación constituyen condiciones esenciales del conocimiento.

2.2 La lógica matemática como sistema simbólico y su problematización en la educación matemática

La lógica matemática, en tanto sistema formal por excelencia, representa el punto culminante de la estructuración simbólica del pensamiento. No obstante, su enseñanza ha sido objeto de múltiples tensiones en el campo de la educación matemática, particularmente en lo que respecta a la relación entre el lenguaje natural, los registros de representación y la formalización rigurosa. Estas tensiones revelan una problemática de fondo: la dificultad de transitar desde formas de pensamiento intuitivo hacia estructuras simbólicas autónomas.

Desde una perspectiva estrictamente formal, la lógica proposicional y de predicados se configura como un sistema cerrado, regido por reglas de formación, transformación e inferencia. En este contexto, el significado de las expresiones no depende de su interpretación en el mundo, sino de su posición dentro del sistema y de las relaciones que establecen con otras expresiones. Esta concepción, heredera directa del formalismo hilbertiano, sitúa a la lógica como una disciplina en la que la sintaxis no solo organiza el discurso, sino que lo constituye.

Sin embargo, en el ámbito educativo, esta visión ha sido matizada —e incluso cuestionada— por diversos enfoques que subrayan la importancia de la comprensión semántica y de la diversidad de representaciones en el aprendizaje matemático. En particular, la teoría de los registros de representación semiótica desarrollada por Raymond Duval ha tenido una influencia significativa al plantear que la comprensión matemática no puede reducirse a un único sistema de signos, sino que requiere la coordinación entre múltiples registros (gráfico, algebraico, verbal, simbólico, entre otros). Según Duval (2006), el aprendizaje se produce en la capacidad de transformar y convertir representaciones entre distintos registros, lo que implica una actividad cognitiva compleja que trasciende la mera manipulación formal.

La perspectiva de los registros de representación aporta elementos valiosos para comprender diversos procesos de aprendizaje; sin embargo, al ser examinada desde el formalismo matemático, revela una tensión epistemológica significativa. Para la Teoría Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP), la diversidad de registros puede favorecer el acceso inicial al conocimiento, pero no sustituye el dominio del lenguaje simbólico formal. Cuando la interpretación contextual desplaza la estructura formal, existe el riesgo de debilitar el rigor propio del pensamiento matemático. En consecuencia, la TSEMP plantea que la comprensión profunda exige consolidar el lenguaje simbólico como sistema estructural capaz de sostener la coherencia, la generalidad y la validez del conocimiento matemático.

Esta postura guarda cierta afinidad con la epistemología genética de Jean Piaget, particularmente en la idea de que el desarrollo del pensamiento lógico supone una progresiva interiorización de operaciones intelectuales. Sin embargo, mientras Piaget subraya el papel de la acción y de la interacción con el entorno en la construcción del conocimiento, la TSEMP orienta el análisis hacia la internalización de sistemas simbólicos formales, concebidos no como representaciones directas de la realidad, sino como marcos autónomos desde los cuales el pensamiento matemático se organiza y adquiere rigor.

Por otro lado, desde la perspectiva de la teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau, el aprendizaje matemático se concibe como el resultado de la interacción entre el estudiante, el medio y las situaciones problemáticas diseñadas por el docente. Si bien este enfoque ha permitido comprender la importancia del contexto en la construcción del conocimiento, también ha contribuido a consolidar una tendencia en la que el problema contextual se convierte en el eje del aprendizaje, relegando en ocasiones la formalización a un plano secundario.

En contraste, la TSEMP sostiene que la lógica matemática, en tanto sistema formal, no debe ser introducida únicamente a través de situaciones contextualizadas, sino mediante una inmersión progresiva en el lenguaje simbólico que la constituye. Esto implica reconocer que la dificultad en el aprendizaje de la lógica no radica exclusivamente en la complejidad de sus conceptos, sino en la naturaleza misma de su lenguaje, que exige un tipo de pensamiento radicalmente distinto al del lenguaje natural.

En este punto, resulta pertinente considerar las aportaciones de Lev Vygotsky, particularmente en lo relativo al papel del lenguaje como mediador del pensamiento. Desde esta perspectiva, el desarrollo cognitivo está profundamente vinculado a la internalización de sistemas simbólicos culturalmente construidos. No obstante, la TSEMP introduce una distinción crucial: no todos los sistemas simbólicos poseen el mismo estatuto epistemológico. El lenguaje matemático, en su forma formalizada, no es simplemente un medio de comunicación, sino una estructura que redefine las posibilidades mismas del pensamiento.

En consecuencia, la enseñanza de la lógica matemática debe ser concebida como un proceso de transición epistemológica, en el que el estudiante abandona progresivamente la dependencia del lenguaje natural para adentrarse en un sistema simbólico autónomo. Esta transición no es trivial, ni puede ser reducida a la práctica repetitiva de ejercicios; requiere una reorganización profunda de las estructuras cognitivas, en la que la precisión, la explicitación y la coherencia se convierten en principios rectores.

Desde esta perspectiva, los errores cometidos por los estudiantes — particularmente en el uso de cuantificadores, en la aplicación de reglas de inferencia o en la construcción de demostraciones— no deben ser interpretados únicamente como fallas procedimentales, sino como manifestaciones de una tensión epistemológica no resuelta entre dos formas de pensamiento: la intuitiva y la formal. La persistencia de estos errores evidencia que el acceso al lenguaje matemático no se logra mediante la simplificación del contenido, sino a través de un proceso de apropiación progresiva de su estructura simbólica.

La lógica matemática, entendida como sistema simbólico autónomo, plantea desafíos significativos en el ámbito educativo que no pueden ser abordados desde perspectivas exclusivamente interpretativas o contextuales. La TSEMP ofrece un marco teórico que permite reconfigurar estos desafíos, situando la simbolización en el centro del proceso de aprendizaje y reivindicando el carácter formal del conocimiento matemático como condición necesaria para su comprensión profunda.

2.3 La simbolización como núcleo epistemológico del conocimiento matemático: fundamentación desde la TSEMP

La simbolización, tradicionalmente concebida en el ámbito educativo como un recurso de representación o como una herramienta de traducción de ideas previamente comprendidas, adquiere en el marco de la Teoría Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP) un estatuto epistemológico central. Desde esta perspectiva, no se limita

a cumplir una función auxiliar o comunicativa, sino que opera como principio estructurante del conocimiento matemático, en la medida en que posibilita la constitución, organización y legitimación de sus objetos, relaciones y procedimientos formales.

Esta reconceptualización implica una ruptura profunda con las concepciones representacionistas del conocimiento, las cuales asumen que los objetos matemáticos existen con anterioridad al lenguaje que los describe. Desde la TSEMP, por el contrario, se sostiene que dichos objetos no poseen una existencia independiente de su formulación simbólica; es en la estructura del símbolo donde el objeto adquiere identidad, coherencia y operatividad. En este sentido, la simbolización no es posterior al pensamiento: es condición de posibilidad del pensamiento matemático.

Esta idea encuentra resonancia en la tradición lógica inaugurada por Gottlob Frege, quien ya advertía que la precisión del pensamiento depende de la precisión del lenguaje en que este se articula. Sin embargo, mientras Frege mantiene una distinción entre sentido y referencia, la TSEMP radicaliza esta postura al afirmar que, en el ámbito matemático, el símbolo no remite a un referente externo, sino que constituye un nodo dentro de una red formal de relaciones. El significado no se encuentra fuera del sistema, sino que emerge de la posición estructural que ocupa cada expresión dentro de él.

Desde esta perspectiva, la actividad matemática puede comprenderse como una práctica de manipulación simbólica rigurosamente regulada, en la cual cada operación adquiere validez por su conformidad con las reglas internas del sistema. Esta concepción guarda continuidad con el formalismo hilbertiano, pero lo proyecta hacia el campo didáctico al señalar que no basta con reconocer el carácter formal de las matemáticas; es necesario diseñar procesos de enseñanza que favorezcan la apropiación progresiva de dicho sistema en toda su complejidad estructural.

En este punto, la TSEMP introduce una distinción fundamental **entre** uso del símbolo y dominio del sistema simbólico. Mientras el primero puede lograrse mediante la repetición de procedimientos o la aplicación mecánica de reglas, el segundo implica una internalización profunda de las estructuras que organizan el lenguaje matemático. Esta distinción permite explicar por qué muchos estudiantes, aun siendo capaces de resolver ejercicios, no logran construir demostraciones coherentes ni operar con autonomía dentro del sistema formal.

La simbolización, en tanto núcleo epistemológico, exige entonces una serie de condiciones que trascienden lo meramente procedimental. En primer lugar, requiere una comprensión de la **sintaxis formal**, es decir, de las reglas que determinan la correcta formación de expresiones. En segundo lugar, implica el dominio de las **reglas de inferencia**, entendidas no como algoritmos aislados, sino como transformaciones estructuralmente válidas dentro del sistema. Finalmente, demanda una capacidad de **articulación deductiva**, mediante la cual el sujeto es capaz de construir cadenas de razonamiento coherentes, explícitas y verificables.

Esta triple exigencia configura una forma de pensamiento distinta de la que opera en el lenguaje cotidiano. Mientras el lenguaje natural permite ciertos márgenes de

ambigüedad, elipsis o redundancia, el lenguaje matemático formal demanda un mayor grado de precisión, explicitación y coherencia en la construcción de sus enunciados. La transición entre ambos registros constituye uno de los desafíos centrales de la educación matemática y, desde la TSEMP, representa el núcleo del proceso mediante el cual el estudiante se apropia progresivamente del pensamiento formal.

En diálogo crítico con la teoría de los registros de representación semiótica de Raymond Duval, la TSEMP reconoce que la conversión entre registros puede desempeñar un papel inicial en la construcción del significado; no obstante, advierte que dicha diversidad no puede sustituir el dominio del lenguaje simbólico formal. Mientras que Duval (2006) enfatiza la coordinación entre registros como condición de comprensión, la TSEMP sostiene que la comprensión matemática plena solo se alcanza cuando el sujeto es capaz de operar exclusivamente dentro del registro simbólico, sin necesidad de apoyos externos.

Esta postura no implica una negación de la diversidad representacional, sino una jerarquización epistemológica en la que el lenguaje simbólico ocupa el nivel superior. En este sentido, la simbolización no es un registro más entre otros, sino el espacio en el que se sintetizan y formalizan las distintas formas de representación, permitiendo su generalización y su integración en un sistema coherente.

Por otra parte, la TSEMP redefine el papel de la abstracción en el aprendizaje matemático. Más que entenderla como un alejamiento de la realidad, la concibe como un proceso de depuración conceptual que permite transitar desde situaciones particulares hacia relaciones, patrones y estructuras generales. En este sentido, la abstracción no implica pérdida de significado, sino ampliación de la capacidad formal del pensamiento, pues posibilita operar con objetos matemáticos que exceden los casos concretos y alcanzan validez dentro de un sistema simbólico más amplio.

En este contexto, la demostración emerge como la práctica privilegiada en la que la simbolización alcanza su máxima expresión. Demostrar implica no solo manipular símbolos, sino organizar un discurso formal en el que cada paso se encuentra justificado por reglas explícitas. Es en este proceso donde el sujeto matemático se constituye plenamente, al asumir el control del sistema simbólico y desplegar su capacidad deductiva.

Desde una perspectiva educativa, asumir la simbolización como núcleo epistemológico implica una transformación profunda de las prácticas de enseñanza. No se trata de simplificar el contenido ni de adaptarlo a formas intuitivas, sino de diseñar trayectorias formativas que conduzcan progresivamente al estudiante hacia el dominio del lenguaje formal. Esto requiere una didáctica que privilegie la explicitación, la coherencia y el rigor, en lugar de la mera resolución de problemas contextualizados.

La TSEMP propone una concepción del conocimiento matemático en la que la simbolización no es un medio, sino un fin en sí mismo. Aprender matemáticas no consiste en interpretar el mundo a través de símbolos, sino en habitar un sistema simbólico en el que el pensamiento adquiere su forma más precisa. Esta perspectiva no solo redefine la naturaleza del aprendizaje matemático, sino que ofrece un marco

teórico sólido para comprender las dificultades que emergen en el proceso de formalización y para orientar prácticas pedagógicas que favorezcan una apropiación auténtica del lenguaje matemático.

2.4 Obstáculos epistemológicos en el aprendizaje de la lógica matemática: una lectura desde la TSEMP

El estudio de las dificultades en el aprendizaje de la lógica matemática ha sido tradicionalmente abordado desde perspectivas psicológicas o didácticas que tienden a interpretar los errores como deficiencias cognitivas, vacíos conceptuales o fallas en la instrucción. No obstante, una lectura más profunda —anclada en la epistemología de las ciencias— permite comprender estos fenómenos no como simples equivocaciones, sino como manifestaciones de **obstáculos epistemológicos**, en el sentido propuesto por Gaston Bachelard, quien sostiene que el conocimiento científico no avanza de manera lineal, sino a través de rupturas con formas previas de pensamiento que, lejos de ser ingenuas, poseen una coherencia interna que resiste su superación.

Desde esta perspectiva, el aprendizaje de la lógica matemática implica una transformación estructural del pensamiento, en la que el sujeto debe abandonar progresivamente los esquemas propios del lenguaje natural para adentrarse en un sistema simbólico formal regido por principios de precisión, explicitación y coherencia interna. Este tránsito no es meramente técnico, sino profundamente epistemológico, en tanto supone una reconfiguración de las condiciones mismas bajo las cuales se produce el conocimiento.

En el marco de la TSEMP, estos obstáculos adquieren una significación particular, ya que la teoría sitúa la simbolización como el núcleo del conocimiento matemático. En consecuencia, las dificultades observadas en el uso del lenguaje lógico no pueden ser interpretadas únicamente como errores operativos, sino como indicadores de una **no apropiación del sistema simbólico en su dimensión estructural**.

Uno de los obstáculos más persistentes se manifiesta en la ruptura entre el lenguaje natural y el lenguaje formal. Aunque los estudiantes pueden mostrar una comprensión semántica adecuada de los enunciados en su formulación verbal, esta no siempre logra traducirse en una representación simbólica coherente. Tal situación evidencia la tensión entre dos sistemas de significación: uno intuitivo, vinculado al lenguaje cotidiano, y otro formal, que exige reorganizar el pensamiento bajo principios de precisión, explicitación y coherencia lógica. Desde esta perspectiva, la dificultad para establecer correspondencias entre ambos sistemas no constituye una simple limitación técnica, sino un indicio de que el estudiante aún no ha internalizado las **reglas** propias del sistema simbólico.

En estrecha relación con lo anterior, se identifica un segundo obstáculo caracterizado por el **uso instrumental de las reglas lógicas**. En este caso, los estudiantes aplican procedimientos como el *Modus Ponens*, el *Modus Tollens* o las *leyes de De Morgan* de manera mecánica, sin una comprensión profunda de su función dentro del sistema formal. Esta forma de operar responde a lo que puede denominarse

una racionalidad algorítmica, en la que el conocimiento se reduce a la ejecución de pasos predefinidos, desprovistos de una articulación estructural. Desde la TSEMP, este fenómeno es interpretado como una manifestación de un aprendizaje superficial, en el que el símbolo es utilizado, pero no comprendido como parte de un sistema coherente.

Un tercer obstáculo, de especial relevancia, se presenta en el **manejo de cuantificadores y estructuras de dependencia lógica**. Expresiones como $\forall x \exists y$ y $\exists y \forall x$, cuya diferencia radica en la estructura de las relaciones que establecen, suelen ser tratadas por los estudiantes como equivalentes o intercambiables. Esta dificultad no puede atribuirse únicamente a la complejidad de la notación, sino que pone de manifiesto una carencia en la comprensión de la organización interna del discurso lógico. El manejo adecuado de cuantificadores implica no solo habilidades simbólicas, sino una capacidad de estructuración del pensamiento que permita reconocer jerarquías, dependencias y condiciones de validez.

También, se observa de manera recurrente una **ausencia de justificación explícita en los procesos deductivos**. A pesar de que los estudiantes logran en algunos casos alcanzar conclusiones correctas, estas no se encuentran sustentadas por una cadena de inferencias claramente articulada. La presencia de saltos inferenciales, la omisión de leyes lógicas y la falta de explicitación en los pasos intermedios evidencian que el pensamiento formal no ha sido plenamente internalizado. Este fenómeno resulta particularmente significativo desde la TSEMP, ya que la demostración constituye el espacio privilegiado en el que el dominio del sistema simbólico se hace evidente.

En diálogo con la teoría de situaciones didácticas de Guy Brousseau, puede afirmarse que estos obstáculos no son únicamente inherentes al sujeto, sino que emergen en la interacción con el medio didáctico. Sin embargo, la TSEMP introduce una matización fundamental: no basta con diseñar situaciones que favorezcan la construcción del conocimiento; es necesario garantizar que dichas situaciones conduzcan efectivamente hacia la formalización simbólica. De lo contrario, existe el riesgo de consolidar formas de pensamiento que, aunque funcionales en contextos específicos, no permiten el acceso al sistema matemático en su totalidad.

Por otra parte, desde la perspectiva sociocultural de Lev Vygotsky, el lenguaje desempeña un papel central en la mediación del pensamiento. No obstante, la TSEMP enfatiza que el lenguaje matemático formal no puede ser asimilado de la misma manera que el lenguaje natural, dado que exige un nivel de explicitación y rigor que supera las prácticas comunicativas cotidianas. En este sentido, la zona de desarrollo próximo no solo implica la adquisición de nuevos conceptos, sino la incorporación de una forma de pensamiento estructuralmente distinta.

En este marco, los obstáculos epistemológicos identificados no deben ser concebidos como fallas a corregir mediante la simplificación del contenido, sino como indicadores de señales de un proceso de aprendizaje que aún no termina. La tarea del docente, desde la TSEMP, no consiste en evitar estos obstáculos, sino en **hacerlos visibles, problematizarlos y utilizarlos como punto de partida para la construcción del conocimiento formal**.

En síntesis, el aprendizaje de la lógica matemática implica una ruptura con formas previas de pensamiento que no puede ser lograda mediante estrategias puramente procedimentales o contextualizadas. Los obstáculos epistemológicos identificados evidencian la necesidad de una didáctica que asuma la simbolización como eje central, orientando el proceso educativo hacia la apropiación del sistema formal en su complejidad estructural. Solo a través de esta apropiación es posible alcanzar una comprensión profunda y autónoma del conocimiento matemático.

2.5 La demostración matemática como práctica epistemológica central

La demostración matemática constituye, sin lugar a duda, el núcleo estructurante del conocimiento matemático, en tanto configura el criterio último de validez, legitimidad y coherencia dentro de los sistemas formales. Más allá de su función como herramienta de verificación, la demostración se erige como una práctica epistemológica compleja, en la que convergen la simbolización, la inferencia y la organización deductiva del pensamiento. En este sentido, no es posible comprender la naturaleza de la matemática —ni su enseñanza— sin situar la demostración en el centro del análisis.

Desde la tradición formalista, la demostración es concebida como una secuencia finita de fórmulas, cada una de las cuales se deriva de las anteriores mediante la aplicación de reglas de inferencia explícitas, partiendo de un conjunto de axiomas. Esta concepción encuentra una de sus formulaciones más influyentes en los sistemas axiomáticos desarrollados por Hilbert, para quien la validez de un enunciado no depende de su evidencia intuitiva ni de su correspondencia directa con la realidad, sino de su deducibilidad dentro del sistema formal (Hilbert & Ackermann, 1938). En consecuencia, demostrar no equivale a “convencer” en un sentido retórico, sino a garantizar la coherencia interna del discurso matemático.

Aunque esta definición ofrece una caracterización precisa, resulta insuficiente para comprender la prueba matemática en toda su complejidad cognitiva y educativa. En el campo de la educación matemática, su enseñanza ha sido interpretada de diversas maneras: en algunos casos, como un procedimiento técnico; en otros, como una actividad reservada para niveles avanzados de formación. Frente a estas concepciones, la Teoría Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP) sitúa la actividad demostrativa como una práctica central desde las etapas iniciales del aprendizaje, pues permite que el estudiante se apropie progresivamente del sistema simbólico y desarrolle una relación más rigurosa con el conocimiento formal.

Demostrar implica mucho más que encadenar inferencias válidas; supone la construcción de un **discurso formal coherente**, en el que cada afirmación se encuentra justificada y articulada dentro de una estructura lógica rigurosa. Este proceso exige una serie de competencias que trascienden lo meramente procedimental: dominio de la sintaxis formal, comprensión de las reglas de inferencia, capacidad de anticipación estructural y habilidad para organizar el pensamiento de manera explícita y sistemática.

En este contexto, resulta pertinente considerar las aportaciones de Imre Lakatos, quien, en su obra *Proofs and Refutations*, propone una visión dinámica de la demostración, entendida como un proceso de construcción y revisión en el que los

errores desempeñan un papel fundamental. Si bien esta perspectiva introduce una dimensión heurística valiosa, la TSEMP enfatiza que, en su forma final, la demostración debe alcanzar un nivel de formalización que garantice su validez dentro del sistema. Es decir, el proceso puede ser exploratorio, pero el producto debe ser rigurosamente formal.

Por otra parte, investigaciones en educación matemática, como las de Nicolas Balacheff, han puesto de manifiesto que los estudiantes suelen confundir la demostración con la verificación empírica o con la validación basada en ejemplos. Esta confusión revela una concepción epistemológica limitada, en la que la verdad matemática se asocia con la evidencia perceptiva en lugar de con la deducción formal. Desde la TSEMP, este fenómeno se interpreta como una consecuencia directa de la falta de apropiación del lenguaje simbólico, ya que es en dicho lenguaje donde la demostración adquiere su forma plena.

La demostración puede ser entendida como el punto de convergencia entre simbolización y pensamiento deductivo. No es posible demostrar sin operar con símbolos, ni es posible dotar de significado a los símbolos sin insertarlos en una estructura deductiva. Esta interdependencia refuerza la tesis central de la TSEMP: el conocimiento matemático no reside en los objetos, sino en las relaciones que se establecen entre ellos dentro de un sistema formal.

Además, la demostración desempeña una función formativa de primer orden, en la medida en que obliga al estudiante a abandonar formas de pensamiento implícitas y a explicitar cada paso de su razonamiento. Este proceso favorece la claridad, la precisión y la construcción de una actitud epistemológica caracterizada por el rigor, la coherencia y la responsabilidad intelectual. Aunque el descubrimiento matemático puede implicar intuición, ensayo y creatividad, su validación requiere una organización argumentativa rigurosa, capaz de transformar la conjetura en conocimiento matemáticamente justificado (Pólya, 1945/2004).

Desde una perspectiva didáctica, asumir la demostración como práctica central implica una reconfiguración de las estrategias de enseñanza. No se trata de presentar demostraciones acabadas para su reproducción, sino de involucrar al estudiante en su construcción, guiándolo en la identificación de estructuras, en la selección de estrategias y en la articulación de argumentos. Este enfoque requiere un equilibrio delicado entre la exploración y la formalización, en el que el docente actúa como mediador en el proceso de transición hacia el pensamiento formal.

En el marco de la TSEMP, esta transición se concibe como un proceso de **constitución del sujeto matemático**, en el que el estudiante deja de ser un ejecutor de procedimientos para convertirse en un agente capaz de operar dentro del sistema simbólico con autonomía. La demostración, en este sentido, no es solo una técnica, sino una práctica que configura la identidad del sujeto en relación con el conocimiento matemático.

La demostración matemática no puede ser reducida a un conjunto de pasos o a una técnica de validación; es una práctica epistemológica fundamental que articula la

simbolización, la inferencia y la estructura del conocimiento matemático. Desde la TSEMP, su enseñanza no es opcional ni secundaria, sino constitutiva del proceso de aprendizaje. Solo a través de la participación activa en la construcción de demostraciones es posible alcanzar una comprensión profunda, rigurosa y autónoma de las matemáticas.

Desde este posicionamiento teórico, se configura un abordaje metodológico que no busca medir únicamente resultados, sino interpretar el grado de apropiación del lenguaje simbólico formal

2.6 Implicaciones didácticas del formalismo lógico: hacia una pedagogía de la simbolización

La concepción de la lógica como sistema formal, enmarcada en la tradición hilbertiana y reinterpretada desde la Teoría de la Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP), no se limita a una redefinición epistemológica de la matemática, sino que exige, de manera inevitable, una transformación profunda del acto didáctico. En efecto, si el conocimiento matemático se constituye en y por el lenguaje simbólico, entonces la enseñanza no puede seguir orientándose hacia la mera comprensión intuitiva o la traducción semántica de enunciados, sino que debe configurarse como un proceso de inserción progresiva en sistemas formales rigurosamente estructurados.

Desde esta perspectiva, la didáctica deja de ser un espacio de mediación entre el conocimiento y el estudiante, para convertirse en un campo de configuración epistemológica, en el cual se diseñan las condiciones que posibilitan la apropiación del lenguaje formal como herramienta de pensamiento. No se trata, por tanto, de “facilitar” el acceso al conocimiento mediante simplificaciones o analogías, sino de construir trayectorias formativas que conduzcan al estudiante hacia el dominio operativo y estructural del sistema simbólico.

En este marco, la enseñanza de la lógica matemática adquiere un estatuto particular. Lejos de concebirse como un conjunto de técnicas para evaluar la validez de argumentos, se configura como un espacio privilegiado para la formación del pensamiento formal. Cada actividad didáctica debe ser diseñada no en función de la resolución de ejercicios, sino en función de la producción de discurso matemático formalmente coherente. Esto implica que la traducción del lenguaje natural al lenguaje lógico no puede ser tratada como un ejercicio mecánico, sino como un proceso de reconfiguración epistemológica, en el que el estudiante aprende a reconocer las estructuras subyacentes que organizan el pensamiento.

En este marco, el error adquiere valor didáctico porque revela tensiones epistemológicas en el proceso de simbolización. Desde la TSEMP, no debe corregirse únicamente de manera inmediata, sino analizarse como indicio de una relación todavía externa con el sistema formal. Las dificultades con cuantificadores, justificaciones o transformaciones lógicas permiten identificar cómo el estudiante comprende y organiza el lenguaje simbólico. Por ello, la enseñanza debe asumir el error como punto de partida para reconstruir el conocimiento y fortalecer la apropiación del sistema formal.

Esta concepción exige reconfigurar el rol docente. El profesor no se limita a transmitir contenidos ni a facilitar aprendizajes contextualizados; actúa como agente de formalización, orientando al estudiante hacia las reglas, estructuras y exigencias del sistema simbólico. Para ello, resulta indispensable mantener rigor en la presentación de los contenidos y promover la explicitación sistemática de los procesos deductivos. Así, la demostración se comprende como una práctica central de la formación matemática y no como una actividad reservada exclusivamente para niveles avanzados.

En contraste con enfoques que privilegian la multiplicidad de registros de representación como vía de acceso al conocimiento (Duval, 2006), la TSEMP sostiene que dicha diversidad, si bien puede cumplir una función transitoria, no debe desplazar el papel central del lenguaje simbólico. La comprensión matemática no se consolida en la traducción entre registros, sino en la estabilización del sujeto dentro del sistema formal. De igual manera, frente a perspectivas socioepistemológicas que enfatizan el origen contextual del conocimiento (Godino et al., 2007; Radford, 2014), la TSEMP propone que el sentido matemático no emerge de la práctica social en sí misma, sino de la estructuración simbólica que dicha práctica puede alcanzar.

Así, la didáctica del formalismo lógico, en el marco de la TSEMP, se orienta hacia la formación de sujetos capaces de operar con autonomía dentro de sistemas formales, reconociendo en el símbolo no un medio de representación, sino el espacio mismo donde el pensamiento adquiere forma. Enseñar lógica, desde esta perspectiva, no consiste en enseñar a “pensar mejor” en términos generales, sino en enseñar a pensar matemáticamente en sentido estricto: esto es, a operar dentro de un sistema de reglas, a justificar cada inferencia y a construir conocimiento a partir de la coherencia interna del lenguaje.

En última instancia, esta articulación entre teoría y didáctica permite comprender que la enseñanza de la matemática no es una simple transmisión de contenidos, sino un proceso de transformación epistemológica del sujeto. La TSEMP no propone una didáctica más, sino una reconfiguración radical del acto educativo, en la que el acceso al conocimiento matemático se produce no por reducción de su complejidad, sino por la inmersión progresiva en la estructura formal que lo constituye.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

3.1 Enfoque epistemológico y tipo de investigación

La presente investigación adopta un enfoque cualitativo de corte interpretativo, sustentado en una perspectiva epistemológica que concibe el conocimiento matemático como una construcción formal mediada por sistemas simbólicos. En coherencia con la Teoría Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP), el estudio no busca medir variables aisladas, sino analizar las producciones simbólicas de los estudiantes como expresiones de su grado de apropiación del lenguaje matemático formal.

Desde esta perspectiva, el objeto de estudio no se reduce a los resultados obtenidos en los exámenes, sino que se centra en las estructuras de razonamiento que subyacen a dichas producciones. Esto implica un desplazamiento metodológico desde

la evaluación de respuestas correctas o incorrectas hacia la interpretación de los procesos simbólicos que configuran el pensamiento lógico del estudiante.

El diseño adoptado es de tipo **analítico-descriptivo con alcance interpretativo**, en la medida en que busca caracterizar los niveles de formalización alcanzados por los estudiantes, así como identificar los obstáculos epistemológicos presentes en su proceso de aprendizaje. Este enfoque permite articular el análisis empírico con el marco teórico, generando una comprensión integrada del fenómeno estudiado.

3.2 Contexto y participantes

La investigación se desarrolló en el contexto de la formación inicial de docentes de matemática, específicamente en estudiantes de nivel universitario que cursan asignaturas vinculadas a la lógica matemática y al pensamiento formal. Este contexto resulta particularmente pertinente, ya que los participantes se encuentran en una etapa formativa en la que se espera la transición hacia el dominio del lenguaje matemático riguroso.

Los participantes fueron seleccionados mediante un muestreo intencional, considerando criterios de accesibilidad y relevancia académica. Se trabajó con un grupo de estudiantes que habían sido expuestos previamente a contenidos de lógica proposicional y lógica de predicados, incluyendo el uso de cuantificadores, equivalencias lógicas y reglas de inferencia.

Desde la perspectiva de la TSEMP, estos sujetos no son considerados meros receptores de contenido, sino agentes en proceso de constitución como sujetos matemáticos, cuyo nivel de apropiación del sistema simbólico puede ser analizado a través de sus producciones formales.

3.3 Instrumento de recolección de datos

El instrumento principal de recolección de datos fue un examen estructurado, diseñado para evaluar el nivel de formalización lógica alcanzado por los estudiantes en el contexto de la lógica matemática. Más que una prueba convencional orientada a verificar respuestas correctas o incorrectas, se concibió como un dispositivo analítico de carácter epistemológico, cuyo propósito fue develar la estructura del pensamiento matemático en su manifestación simbólica. De este modo, el examen permitió analizar no solo los resultados del razonamiento, sino también la organización interna del discurso lógico producido por los estudiantes.

Desde el marco de la Teoría de la Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP), el diseño del instrumento respondió a la necesidad de situar al estudiante frente a situaciones que exigieran una interacción directa, consciente y rigurosa con el lenguaje formal. Por ello, cada ítem fue construido con una intencionalidad precisa: provocar procesos de simbolización que pusieran en evidencia el grado de apropiación del sistema lógico, así como la capacidad del estudiante para operar dentro de él con coherencia estructural. De esta manera, el examen trascendió la función evaluativa tradicional para constituirse en un espacio de producción matemática donde el sujeto debía asumir el control del sistema simbólico.

El instrumento incluyó tareas que implicaban la traducción de enunciados del lenguaje natural al lenguaje lógico formal, lo cual permitió analizar la capacidad de los estudiantes para establecer correspondencias estructurales entre distintos niveles de expresión. Este proceso, lejos de ser una simple conversión lingüística, exigió la identificación de relaciones lógicas subyacentes, la correcta jerarquización de conectores y la adecuada formalización de dependencias entre variables.

Igualmente, se incorporaron situaciones que requerían el uso de cuantificadores en contextos estructuralmente complejos, lo que posibilitó evaluar no solo la manipulación simbólica de estos elementos, sino la comprensión de su alcance lógico y de las relaciones de dependencia que establecen dentro de una proposición. Este componente resultó particularmente relevante, dado que el manejo de cuantificadores constituye uno de los indicadores más sensibles del nivel de formalización alcanzado.

El examen también contempló la aplicación explícita de reglas de inferencia, con el propósito de observar si los estudiantes reconocían y justificaban las transformaciones realizadas dentro del sistema lógico. Más que valorar únicamente la conclusión alcanzada, el análisis se centró en la legitimidad de los procesos inferenciales que la sustentan, en coherencia con una concepción del conocimiento matemático fundada en la validez estructural.

De igual manera, se incluyeron tareas orientadas a la construcción de demostraciones formales, entendidas como el núcleo de la actividad matemática en el marco de la TSEMP. Estas tareas exigieron la articulación secuencial de proposiciones, el uso adecuado de axiomas y reglas de inferencia, así como la coherencia global del argumento. La demostración fue abordada no como un producto final, sino como un proceso en el que se hace visible la organización del pensamiento lógico.

Se solicitó la justificación detallada de cada paso en los procesos deductivos, con el fin de evitar la presencia de inferencias implícitas o saltos argumentativos. Esta exigencia permitió analizar el grado de explicitación del razonamiento, así como la capacidad del estudiante para reconocer las leyes que sustentan cada transformación dentro del sistema.

En conjunto, cada uno de estos componentes fue diseñado para activar distintos niveles de simbolización, posibilitando una lectura profunda del desempeño estudiantil. El instrumento, en consecuencia, no se limitó a registrar ejecuciones procedimentales, sino que permitió examinar la coherencia interna, la consistencia lógica y el grado de estructuración del discurso matemático, elementos fundamentales para comprender el proceso de apropiación del lenguaje formal desde la perspectiva de la TSEMP.

3.4 Procedimiento de aplicación

La aplicación del instrumento se llevó a cabo bajo condiciones rigurosamente controladas, con el propósito de garantizar la validez epistemológica de las producciones obtenidas. Para ello, se estableció un entorno de trabajo individual, en el que cada estudiante desarrolló el examen sin acceso a recursos externos —ya sean tecnológicos, bibliográficos o colaborativos— que pudieran incidir en la naturaleza de sus respuestas. Esta decisión no responde únicamente a un criterio de control

evaluativo, sino a una exigencia teórica fundamental: asegurar que las producciones reflejen de manera auténtica el estado de apropiación del lenguaje matemático formal.

Desde la perspectiva de la Teoría de la Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP), la evaluación no puede reducirse a la verificación de resultados, sino que debe orientarse hacia la observación del pensamiento en acto, tal como se manifiesta en la construcción simbólica. En consecuencia, el procedimiento de aplicación fue concebido como un dispositivo que favorece la emergencia del discurso matemático propio del estudiante, evitando interferencias que pudieran enmascarar su estructura cognitiva real. La ausencia de apoyos externos permitió así acceder a un tipo de evidencia particularmente valiosa: aquella que emerge de la interacción directa entre el sujeto y el sistema formal.

Adicionalmente, se solicitó la justificación detallada de cada paso desarrollado en las soluciones. Este requisito permitió identificar el nivel de simbolización alcanzado por los estudiantes, al evidenciar si sus respuestas se apoyaban en leyes lógicas explícitas, transformaciones válidas y argumentos internamente coherentes. De este modo, la explicitación del razonamiento se convirtió en un elemento clave para distinguir entre procedimientos meramente intuitivos y procesos deductivos formalmente fundamentados.

En este marco, la omisión de justificaciones, la presencia de saltos inferenciales o la utilización de resultados sin fundamentación fueron considerados indicadores relevantes en la caracterización del desempeño estudiantil. Más que errores aislados, tales manifestaciones fueron interpretadas como señales de una relación aún no consolidada con el sistema formal, en la que el estudiante no ha internalizado plenamente la necesidad de operar bajo criterios de validez explícita.

De esta manera, el procedimiento de aplicación contempló la asignación de un tiempo suficiente para el desarrollo reflexivo de las tareas, evitando presiones que pudieran inducir respuestas apresuradas o mecánicas. Este aspecto resulta particularmente significativo en el contexto de la lógica matemática, donde la construcción de una demostración exige no solo precisión, sino también un proceso deliberado de organización del pensamiento.

El diseño del procedimiento de aplicación permitió crear las condiciones necesarias para que el examen funcionara como un espacio de producción matemática auténtica, en el que los estudiantes no solo resolvieran problemas, sino que se vieran obligados a posicionarse frente al sistema simbólico y a operar dentro de él con distintos grados de coherencia y rigor. De esta manera, la información recolectada adquiere un valor analítico profundo, en tanto posibilita comprender el proceso de apropiación del lenguaje formal desde una perspectiva estructural, en plena consonancia con los postulados de la TSEMP.

3.5 Criterios de análisis

El análisis de los datos se desarrolló a partir de una estrategia de categorización cualitativa orientada por criterios epistemológicos, cuyo propósito central consistió en interpretar el grado de apropiación del lenguaje simbólico formal evidenciado en las

producciones de los estudiantes. En coherencia con los postulados de la Teoría de la Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP), el interés no se centró en la cuantificación de aciertos o errores, sino en la comprensión de la estructura interna del discurso lógico, tal como se manifiesta en la actividad escrita.

Desde esta perspectiva, el proceso analítico se fundamentó en una lectura interpretativa de las respuestas, en la que cada producción fue considerada como una unidad de significado susceptible de revelar el nivel de formalización alcanzado. En lugar de aplicar categorías predefinidas de manera rígida, se optó por un procedimiento inductivo de codificación progresiva, mediante el cual emergieron patrones recurrentes en el uso del lenguaje lógico. Este proceso iterativo permitió identificar regularidades en la manera en que los estudiantes construyen, articulan y justifican sus expresiones simbólicas, dando lugar a la configuración de tres niveles fundamentales de apropiación: nivel autónomo, nivel resolutivo y nivel receptivo.

La distinción entre estos niveles no obedece a una jerarquía meramente cuantitativa, sino a diferencias cualitativas en la relación que el sujeto establece con el sistema formal. En este sentido, cada nivel representa una forma particular de habitar el lenguaje matemático, caracterizada por distintos grados de coherencia, explicitación y control estructural. Así, la categorización no constituye un mecanismo de clasificación externa, sino una herramienta interpretativa que permite comprender las modalidades de pensamiento presentes en las producciones analizadas.

El análisis se orientó a partir de un conjunto de criterios interrelacionados que permitieron examinar la consistencia del discurso lógico en múltiples dimensiones. En primer lugar, se consideró la coherencia sintáctica de las expresiones, entendida como la capacidad del estudiante para construir fórmulas bien formadas conforme a las reglas del sistema, respetando la jerarquía de conectores y la correcta organización de los símbolos. Este aspecto resulta fundamental, ya que constituye la base estructural sobre la cual se edifica cualquier razonamiento formal.

En segundo lugar, se analizó el uso de cuantificadores, prestando especial atención a su correcta interpretación y aplicación en contextos de dependencia lógica. Este criterio permitió identificar no solo la manipulación adecuada de símbolos como $\forall$ y $\exists$, sino también la comprensión de las relaciones que estos establecen entre variables, particularmente en situaciones que implican anidamiento o negación de cuantificadores.

De esta forma, se examinó la aplicación explícita de reglas de inferencia, con el objetivo de determinar si los estudiantes eran capaces de reconocer y justificar las transformaciones realizadas dentro del sistema lógico. La explicitación de estas reglas constituye un indicador clave del nivel de formalización, en tanto refleja el grado de conciencia que el sujeto tiene sobre los mecanismos que regulan el tránsito entre proposiciones.

Otro criterio central fue la estructura de las demostraciones, entendida como la organización secuencial y coherente de los argumentos. Este análisis permitió valorar la capacidad del estudiante para articular una cadena inferencial válida, en la que cada

proposición se derive legítimamente de las anteriores, sin rupturas ni inconsistencias. La demostración, en este sentido, fue concebida como el espacio privilegiado donde se hace visible la arquitectura del pensamiento lógico.

Definitivamente, se consideró el nivel de justificación en los procesos deductivos, atendiendo a la presencia o ausencia de fundamentación explícita en cada paso. Este criterio permitió identificar la existencia de inferencias implícitas, saltos argumentativos o conclusiones no sustentadas, elementos que revelan una relación aún incipiente con el lenguaje formal.

Es importante subrayar que cada uno de estos criterios fue interpretado no como un indicador aislado, sino como parte de una red estructural de significación, en la que los distintos componentes del discurso lógico se articulan de manera interdependiente. De este modo, el análisis permitió acceder a una comprensión integral del proceso de formalización, en la que la coherencia, la consistencia y la explicitación se constituyen como dimensiones inseparables del pensamiento matemático.

Este enfoque analítico posibilita una lectura profunda de las producciones estudiantiles, alineada con la concepción de la TSEMP, según la cual el conocimiento matemático no se mide por la corrección de los resultados, sino por la capacidad del sujeto para operar dentro de un sistema simbólico con autonomía, rigor y coherencia estructural.

3.6 Estrategia de interpretación

La interpretación de los resultados se desarrolló desde una perspectiva hermenéutica rigurosamente fundamentada, en la que las producciones escritas de los estudiantes fueron concebidas como textos matemáticos susceptibles de ser leídos, analizados e interpretados en su dimensión estructural. Bajo esta concepción, cada respuesta no fue tratada como un simple registro de aciertos o errores, sino como una manifestación concreta del modo en que el sujeto organiza su pensamiento dentro del sistema lógico. Esta aproximación permitió desplazar el foco de la evaluación hacia la comprensión profunda de la lógica interna que articula el razonamiento, reconociendo en cada producción una configuración particular del vínculo entre el estudiante y el lenguaje formal.

Desde este posicionamiento, la actividad interpretativa no se limitó a describir resultados, sino que buscó reconstruir los procesos subyacentes que dieron lugar a dichos resultados. En este sentido, el análisis asumió que toda expresión simbólica es portadora de una estructura de pensamiento, la cual puede ser develada mediante una lectura atenta a la coherencia, a las rupturas y a las regularidades presentes en el discurso. La interpretación, por tanto, se constituyó como un proceso de desentrañamiento de significados, en el que cada elemento —desde la elección de símbolos hasta la organización de las inferencias— fue considerado en relación con el sistema formal que lo sustenta.

En coherencia con la TSEMP, el análisis se centró en comprender los obstáculos epistemológicos evidenciados en las producciones estudiantiles. Los errores no fueron asumidos únicamente como fallas individuales, sino como manifestaciones de tensiones estructurales vinculadas con la apropiación del lenguaje matemático. En particular, permitieron reconocer una relación todavía incipiente con el sistema simbólico, marcada por la oscilación entre formas de pensamiento intuitivas y exigencias de formalización rigurosa.

Uno de los ejes interpretativos centrales estuvo constituido por la tensión entre el lenguaje natural y el lenguaje formal. En múltiples producciones, se evidenció que los estudiantes logran construir significados en el plano semántico, pero encuentran dificultades al intentar expresarlos dentro de las restricciones sintácticas del sistema lógico. Esta disociación fue interpretada como un punto crítico en el proceso de simbolización, en el que el tránsito desde la comprensión intuitiva hacia la formalización estructurada no se ha completado. La hermenéutica adoptada permitió, en este sentido, identificar no solo la presencia de esta tensión, sino las formas específicas en que se manifiesta en el discurso.

De igual manera, la interpretación se orientó a analizar el grado de internalización del sistema simbólico, entendido como la capacidad del estudiante para operar dentro de él sin recurrir a apoyos externos o a intuiciones no formalizadas. Este aspecto se hizo visible en la consistencia de las expresiones, en la explicitación de las reglas de inferencia y en la coherencia global de las demostraciones. La ausencia de estos elementos fue leída no como un simple error técnico, sino como un indicador de que el sistema aún no ha sido incorporado como herramienta de pensamiento.

Además, la estrategia hermenéutica permitió reconocer que las producciones estudiantiles no son homogéneas, sino que reflejan distintos niveles de relación con el lenguaje matemático. Cada respuesta fue interpretada en su singularidad, pero también en relación con patrones más amplios que emergieron del conjunto de datos, lo que posibilitó articular una lectura individual y colectiva del fenómeno estudiado.

Esta estrategia interpretativa permitió analizar el aprendizaje de la lógica matemática a partir del valor epistemológico de los errores, las inconsistencias y las rupturas presentes en las producciones estudiantiles. Estos elementos no fueron tratados únicamente como fallas a corregir, sino como indicios de las formas en que los estudiantes organizan su pensamiento durante el proceso de formalización. Así, el análisis permitió reconocer las condiciones bajo las cuales el conocimiento matemático se construye, se tensiona y se transforma.

3.7 Consideraciones éticas

El desarrollo de la presente investigación se sustentó en un marco ético riguroso, orientado a salvaguardar la integridad de los participantes y la legitimidad del proceso investigativo. En este sentido, se adoptaron principios fundamentales de la ética en investigación educativa, garantizando en todo momento el respeto por la dignidad, la autonomía y la confidencialidad de los estudiantes involucrados.

La información recolectada fue tratada bajo criterios estrictos de anonimato, evitando cualquier tipo de identificación directa o indirecta de los participantes. Las producciones analizadas fueron codificadas de manera que su interpretación se centrara exclusivamente en los aspectos epistemológicos del razonamiento matemático, sin vinculación con identidades individuales. Este procedimiento permitió preservar la privacidad de los estudiantes y, al mismo tiempo, asegurar la objetividad del análisis.

Asimismo, se garantizó que los datos obtenidos fueran utilizados exclusivamente con fines académicos y de investigación, descartando cualquier uso que pudiera incidir en la evaluación formativa o sumativa de los participantes dentro del curso. Esta separación permitió evitar la superposición entre los procesos institucionales de evaluación y los objetivos analíticos del estudio, resguardando la relación pedagógica entre docente e investigador. Además, los estudiantes fueron informados sobre el propósito de la investigación, el tipo de análisis a realizar y el uso de sus producciones, asegurando condiciones de transparencia y participación voluntaria, sin coerción ni condicionamiento académico.

Desde una perspectiva más amplia, el abordaje ético adoptado se alinea con la concepción de la TSEMP, en la medida en que reconoce al estudiante no como un objeto de evaluación, sino como un sujeto epistémico en proceso de construcción de conocimiento. En consecuencia, las producciones analizadas fueron tratadas con el respeto que implica reconocerlas como manifestaciones legítimas de pensamiento, evitando juicios reduccionistas o interpretaciones que desvirtúen su sentido formativo.

La investigación se orientó por el principio de responsabilidad académica, procurando que los resultados obtenidos contribuyan no solo al avance del conocimiento en educación matemática, sino también a la mejora de las prácticas de enseñanza. Desde este enfoque, la dimensión ética no se limita al resguardo de los participantes, sino que se extiende al compromiso de generar conocimiento pertinente, riguroso y respetuoso de la complejidad del proceso educativo.

4. RESULTADOS

4.1 Estratificación cognitiva en el uso del lenguaje lógico formal

El análisis de las producciones escritas, complementado con el tratamiento estadístico de las calificaciones obtenidas en el instrumento aplicado ($n=33$), permitió identificar una estructura diferenciada de niveles de apropiación del lenguaje matemático formal. Esta estratificación no se reduce a una clasificación cuantitativa del desempeño, sino que revela formas cualitativamente distintas de relación con el sistema simbólico. En coherencia con los principios de la Teoría de la Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP), estos niveles deben ser comprendidos como configuraciones epistemológicas que expresan distintos grados de internalización del lenguaje formal.

La distribución empírica obtenida muestra que el **nivel resolutivo constituye el grupo predominante (40.86%)**, seguido por el **nivel autónomo (37.71%)** y, finalmente, el **nivel receptivo (21.43%)**. Esta configuración no solo describe el

comportamiento del grupo, sino que ofrece una evidencia concreta del estado actual de la apropiación del lenguaje lógico en el contexto analizado.

En el nivel autónomo se sitúan aquellos estudiantes cuya producción evidencia una apropiación estructural del sistema simbólico. En estos casos, el lenguaje lógico deja de operar como un instrumento externo para convertirse en un espacio de pensamiento plenamente habitado. Las expresiones presentan una coherencia sintáctica rigurosa, el uso de cuantificadores se realiza sin ambigüedad y las demostraciones se articulan mediante cadenas deductivas explícitas, en las que cada inferencia es justificada conforme a reglas formales claramente identificadas. Este nivel no solo expresa dominio técnico, sino una transformación epistemológica profunda: el sujeto ha internalizado el sistema simbólico como forma de pensamiento autónoma.

En contraste, el nivel resolutivo, que se presenta como el predominante, se caracteriza por un dominio operativo de las reglas del sistema, aunque aún carente de una comprensión estructural completa. Los estudiantes logran aplicar procedimientos correctos y resolver tareas específicas; sin embargo, sus producciones evidencian una dependencia de esquemas algorítmicos y una formalización incompleta en la transición del lenguaje natural al lenguaje simbólico. Las justificaciones suelen ser implícitas o parciales, lo que revela una relación funcional con el sistema lógico, pero no una apropiación plena de su estructura.

Por su parte, el nivel receptivo pone de manifiesto una relación aún externa con el lenguaje matemático formal. Las producciones muestran intentos iniciales de simbolización, pero se encuentran marcadas por inconsistencias estructurales, errores en el uso de cuantificadores y dificultades en la aplicación de reglas de inferencia. La resolución se apoya predominantemente en la intuición, lo que indica que el sistema simbólico no ha sido aún internalizado como herramienta de pensamiento. Desde la TSEMP, este nivel se interpreta como una fase de transición, no como un déficit.

Esta estratificación permite sostener que el aprendizaje de la lógica matemática no puede evaluarse únicamente en términos de aciertos, sino que exige un análisis de la estructura del discurso producido. La diferencia entre niveles no radica en la cantidad de conocimiento, sino en la organización interna del mismo dentro del sistema simbólico.

4.2 Dificultades epistemológicas en la apropiación del sistema simbólico

El análisis detallado de las producciones permitió identificar patrones de error recurrentes que, lejos de ser contingentes, configuran obstáculos de naturaleza epistemológica. Estas dificultades reflejan una apropiación incompleta del lenguaje simbólico, en la que el estudiante no ha logrado reorganizar plenamente su pensamiento conforme a las exigencias del sistema formal. En este marco, se observa una disociación persistente entre el lenguaje natural y el lenguaje formal, ya que una comprensión semántica adecuada de los enunciados no siempre conduce a una formalización simbólica coherente. Este hecho evidencia la coexistencia de dos sistemas de significación no integrados:

uno intuitivo, vinculado al lenguaje cotidiano, y otro estructural, propio del sistema lógico-formal.

De manera correlativa, se identifica un uso instrumental de las reglas de inferencia. Procedimientos como el *Modus Ponens* o las leyes de De Morgan son aplicados de forma mecánica, sin integrarse en una red estructural de relaciones lógicas. Esta aproximación algorítmica limita la consolidación del pensamiento formal, pues el estudiante opera con reglas sin reconocer plenamente su función dentro del sistema deductivo. Particularmente relevante resulta la debilidad en el manejo de cuantificadores, observable en errores de negación y en la confusión entre estructuras de dependencia lógica como $\forall x \exists y$ y $\exists y \forall x$, lo cual constituye un indicador clave del nivel de formalización alcanzado.

Definitivamente, la ausencia de justificación explícita en los procesos deductivos sugiere que la demostración no ha sido internalizada como práctica cognitiva. La presencia de saltos inferenciales y la omisión de leyes utilizadas ponen en evidencia una relación todavía parcial con el sistema simbólico, en la que el estudiante puede alcanzar ciertos resultados, pero sin articular de manera rigurosa las razones que los sostienen.

Esta versión responde a las observaciones porque une los párrafos relacionados, evita cortes bruscos y mantiene una progresión más clara: primero la disociación lenguaje natural/lenguaje formal, luego el uso mecánico de reglas, después los cuantificadores y, finalmente, la falta de justificación demostrativa.

4.3 Interpretación integradora de los resultados desde la TSEMP

La articulación entre la distribución empírica de los niveles cognitivos y las dificultades epistemológicas observadas permite construir una interpretación integrada del fenómeno estudiado. El predominio del nivel resolutorio, evidenciado tanto en el análisis cualitativo como en la distribución porcentual, indica que los estudiantes han desarrollado una competencia operativa, pero no han internalizado el sistema formal en su totalidad.

Las medidas estadísticas obtenidas (media =78.5, mediana =82, asimetría negativa) refuerzan esta interpretación, mostrando una concentración en desempeños medios-altos con una dispersión moderada. Esta configuración es consistente con un grupo en el que predominan habilidades procedimentales, pero donde la formalización rigurosa aún no se ha generalizado.

Desde la TSEMP, estos resultados confirman que el aprendizaje matemático no consiste en la acumulación de conocimientos, sino en la apropiación de un sistema simbólico que redefine las condiciones del pensamiento.

Con el propósito de fortalecer la trazabilidad entre los datos obtenidos y las conclusiones del estudio, se incorporan a continuación tres evidencias representativas de producciones estudiantiles derivadas del instrumento aplicado. No se presenta el examen completo, sino un ítem que permite observar el modo en que los estudiantes

formalizan, infieren, justifican y estructuran simbólicamente sus razonamientos. Esta decisión responde a la necesidad de mostrar evidencias empíricas que sustenten la clasificación en los niveles receptivo, resolutivo y autónomo.

Figura 1. Resolución del tercer ítem del examen

III. INFERENCIA Y DEMOSTRACIÓN (10 pts)

Se presenta el siguiente razonamiento:

$$(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge (\neg r) \wedge p$$

Se sabe que la conclusión esperada es:

$$\neg q$$

Se pide:

1. Reescribir la premisa principal usando equivalencias lógicas.
2. Desarrollar una demostración formal completa que conduzca a la conclusión.
3. Indicar claramente en cada paso si se utiliza:
 - una equivalencia lógica, o
 - una ley de inferencia.
4. Explicar por qué la conclusión no es inmediata sin transformación previa.

Se presenta el siguiente razonamiento:

$$(p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q), \quad p \vee r$$

La conclusión propuesta es:

$$q \vee \neg q$$

Se pide:

1. Demostrar formalmente la conclusión.
2. Explicar el papel de la disyunción inicial en la estructura del razonamiento.
3. Justificar por qué este argumento siempre conduce a una tautología.
4. Señalar en qué momento se utiliza razonamiento por casos.

Considere el siguiente razonamiento:

$$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r), \quad \neg r$$

Se desea llegar a la conclusión:

$$\neg p$$

Se pide:

1. Transformar las premisas usando equivalencias lógicas hasta obtener una forma útil.
2. Desarrollar la demostración formal.
3. Explicar el papel de la contraposición en el razonamiento.
4. Justificar por qué no es posible obtener directamente la conclusión sin transformación previa.

Fuente: Elaboración propia.

Nota. La figura presenta tres ítems seleccionados del apartado “Inferencia y demostración” del instrumento aplicado a los estudiantes. Los ejercicios fueron diseñados para valorar la capacidad de reescribir premisas mediante equivalencias lógicas, desarrollar demostraciones formales completas, justificar cada paso mediante leyes de inferencia y explicar la estructura deductiva del razonamiento. En el primer caso, se analiza una implicación anidada que conduce a la conclusión $\neg q$; en el segundo, se examina un razonamiento por casos que permite obtener $q \vee \neg q$; y en el tercero, se estudia el uso de la contraposición y del *Modus Tollens* para llegar a $\neg p$. Estos ítems permiten evidenciar el grado de apropiación del lenguaje simbólico formal y la coherencia deductiva de las producciones estudiantiles desde la perspectiva de la Teoría de la Simbolización y Enseñanza Matemática Pura.

Figura 2. Evidencia de producción estudiantil en el Ítem III: inferencia y demostración formal.

III Inferencia y Demostración

Se presenta el siguiente razonamiento
 $(p \rightarrow (q \rightarrow r)) \wedge (\neg r) \wedge p$

Conclusión esperada: $\neg q$

① $\equiv \neg p \vee \neg q \vee r$	Equiva. de Impl. y AD.
② $(\neg p \vee \neg q \vee r) \wedge \neg r \wedge p$	Premisa
③ $\neg p \vee \neg q \vee r$	Simp. 2
④ $\neg r$	Simp. 2
⑤ p	Simp. 2
⑥ $\neg p \vee \neg q$	SD ② y ④
⑦ $\neg q$	SD ⑥ y ⑤

③ ¿Por qué siempre conduce a una tautología?

Porque $q \vee \neg q$

Es una tautología (ley del tercero excluido)

- desde p se obtiene q
- desde r se obtiene $\neg q$.

No depende de valores particulares siempre es verdadero

④ ¿Dónde usamos razonamiento por casos?

⑫ → Eliminación de la disyunción

Porque partimos de $p \vee r$

Analizamos caso p y caso r y en ambos llegamos a la misma conclusión.

⑪ Justificar

Porque MP necesita q , no $\neg r$, y si no hacemos sería una falacia por ende se necesita transformar.

Se presenta el siguiente razonamiento
 $(P \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q), p \vee r$

① $(P \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow \neg q)$	
② $P \vee r$	
③ $P \rightarrow q$	Simp. de ①
④ $r \rightarrow \neg q$	Simp. de ①
⑤ $p \vee r$	Premisa
⑥ p	Suposición
⑦ q	Modus Ponens: ③ y ⑥
⑧ $q \vee \neg q$	A
⑨ r	S.
⑩ $\neg q$	MP ④ y ⑦
⑪ $q \vee \neg q$	A
⑫ $q \vee \neg q$	Elim. de D. ⑧ y ⑩

Considera el siguiente razonamiento
 $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r), \neg r$

① $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	Premisa
② $\neg r$	Premisa
③ $p \rightarrow q$	①
④ $q \rightarrow r$	①
⑤ $\neg r \rightarrow \neg q$	Contr. ④
⑥ $\neg q$	Modus P. ③ y ⑤
⑦ $\neg q \rightarrow \neg p$	Contr. ③
⑧ $\neg p$	⑥ y ⑦ MP.

③ Papel de contraposición

Es clave porque, no puedes usar directamente $q \rightarrow r$ con $\neg r$, pero al convertirlo en $\neg r \rightarrow \neg q$ ahora sí se puede usar MP.

Fuente: Producción estudiantil recolectada en el instrumento aplicado.

Nota. La figura presenta fragmentos de la resolución desarrollada por una estudiante en el Ítem III del instrumento evaluativo, correspondiente al apartado de inferencia y demostración. En las evidencias se observa el tratamiento de tres razonamientos lógicos: el primero orientado a obtener la conclusión $\neg q$ a partir de una implicación anidada; el segundo centrado en el razonamiento por casos para alcanzar $q \vee \neg q$; y el tercero dirigido a demostrar $\neg p$ mediante el uso de contraposición y reglas de inferencia. La producción estudiantil muestra una apropiación significativa del lenguaje simbólico, en tanto separa premisas, transforma implicaciones, utiliza reglas como *Modus Ponens*, *Modus Tollens*, simplificación, silogismo disyuntivo y eliminación de la disyunción. No obstante, también se identifican algunos pasos abreviados y ciertas justificaciones que podrían explicitarse con mayor rigor formal. En conjunto, la evidencia permite ubicar la producción en un nivel resolutivo alto con rasgos de autonomía formal, desde la perspectiva de la Teoría de la Simbolización y Enseñanza Matemática Pura.

4.4 Discusión

Los resultados obtenidos permiten sostener con mayor precisión que la dificultad estructural en la enseñanza de la lógica matemática no reside en la complejidad inherente de sus contenidos, sino en la configuración didáctica desde la cual estos han sido históricamente abordados. La predominancia del nivel resolutivo no debe interpretarse como un logro suficiente, sino como un indicador de una formación incompleta: los estudiantes han desarrollado destrezas operativas funcionales, pero no han alcanzado una apropiación estructural del sistema formal que les permita ejercer un pensamiento matemático autónomo.

En este marco, la Teoría de la Simbolista de Educación Matemática Pura (TSEMP) se consolida no solo como una propuesta didáctica, sino como un marco interpretativo de alto alcance epistemológico, al situar el lenguaje simbólico como condición constitutiva del conocimiento matemático. La evidencia empírica obtenida refuerza esta postura: los estudiantes que alcanzan el nivel autónomo no se distinguen únicamente por la corrección de sus respuestas, sino por la coherencia interna de sus producciones, la explicitación rigurosa de sus inferencias y, fundamentalmente, por una internalización estructural del sistema formal que les permite operar en él con consistencia lógica.

Por el contrario, los niveles resolutivo y receptivo ponen de manifiesto formas de relación incompletas con el conocimiento matemático. En el primero, se observa una ejecución adecuada de procedimientos que, sin embargo, no está acompañada de una comprensión profunda de las estructuras que los sustentan; en el segundo, predomina una aproximación fragmentaria, en la que el lenguaje simbólico no ha sido incorporado como herramienta de pensamiento, sino que permanece como un conjunto de reglas externas al sujeto. En ambos casos, la dependencia de intuiciones no formalizadas y la ausencia de control sintáctico evidencian una brecha significativa entre operar en el sistema y comprenderlo en su totalidad.

Particularmente reveladora resulta la ausencia sistemática de justificación en las demostraciones, la cual no puede reducirse a una omisión técnica, sino que debe

interpretarse como un síntoma de una desconexión más profunda entre la naturaleza del conocimiento matemático —intrínsecamente deductiva y estructurada— y las prácticas de enseñanza que lo median. Este hallazgo refuerza la necesidad de restituir la demostración no como un elemento complementario, sino como el eje articulador del aprendizaje matemático formal.

En diálogo crítico con enfoques como el de Duval, los resultados obtenidos permiten cuestionar la suficiencia de la multiplicidad de registros de representación como vía para la comprensión. Si bien la conversión entre registros puede favorecer ciertos procesos cognitivos, la evidencia sugiere que dicha diversidad no garantiza la apropiación del conocimiento si no se consolida el dominio del registro simbólico como espacio privilegiado de producción de significado. Desde la perspectiva de la TSEMP, esta limitación se interpreta como consecuencia de haber desplazado el centro epistemológico del conocimiento fuera del sistema formal que le da coherencia.

En consecuencia, los hallazgos de este estudio no solo ofrecen respaldo empírico a los postulados de la TSEMP, sino que plantean la necesidad de una reconfiguración didáctica profunda, orientada a formar sujetos capaces de habitar el lenguaje matemático como un sistema formal autónomo. Esto implica promover una enseñanza que privilegie la explicitación, la coherencia lógica y el rigor simbólico, con el propósito de desarrollar una autonomía intelectual que trascienda la mera ejecución de procedimientos y se instale en el dominio estructural del pensamiento matemático.

5. CONCLUSIONES

La presente investigación ha permitido evidenciar que la enseñanza de la lógica matemática, cuando es abordada desde la Teoría de la Simbolización y Enseñanza Matemática Pura (TSEMP), trasciende el ámbito de la instrucción procedimental para situarse en un plano eminentemente epistemológico. Los resultados obtenidos no solo describen niveles diferenciados de desempeño estudiantil, sino que revelan grados distintos de internalización del lenguaje matemático como sistema formal autónomo.

En este sentido, puede formularse una generalización teórica fundamental: el aprendizaje matemático, particularmente en dominios como la lógica, no depende primariamente de la comprensión semántica ni de la contextualización intuitiva, sino del grado de apropiación del sistema simbólico que estructura el pensamiento. La simbolización no opera como un medio de expresión posterior al pensamiento, sino como la condición misma de posibilidad del pensamiento matemático. Esta afirmación, sostenida empíricamente en el presente estudio, refuerza el núcleo epistemológico de la TSEMP y plantea la necesidad de reconsiderar los fundamentos sobre los cuales se diseñan los procesos de enseñanza en matemática.

Desde esta perspectiva, las diferencias observadas entre los niveles receptivo, resolutivo y autónomo no deben interpretarse únicamente como escalas de rendimiento, sino como manifestaciones de distintas formas de relación con el conocimiento matemático. Mientras que en los niveles iniciales predomina una interacción externa con el sistema simbólico, en el nivel autónomo se evidencia una apropiación estructural que permite al sujeto operar dentro del sistema con coherencia, rigor y control deductivo.

Esta distinción aporta un marco analítico potente para comprender las dificultades persistentes en la enseñanza de la matemática formal.

En cuanto a las implicaciones educativas, los hallazgos del estudio sugieren la necesidad de una reorientación profunda de las prácticas de enseñanza. No resulta suficiente promover la comprensión de conceptos en términos intuitivos o contextuales si esta no se traduce en una formalización rigurosa. En consecuencia, se plantea la urgencia de diseñar propuestas didácticas que sitúen la simbolización en el centro del proceso formativo, privilegiando la explicitación, la demostración y la coherencia sintáctica como criterios fundamentales de aprendizaje. Asimismo, la evaluación debe transformarse en un espacio de análisis del pensamiento matemático, en el que la justificación de los procesos tenga un valor central por encima de la simple obtención de resultados correctos.

Este enfoque implica también una reconsideración del rol del docente, quien deja de ser un mediador de significados contextualizados para convertirse en un formador de pensamiento formal, capaz de guiar al estudiante en el tránsito hacia la apropiación del lenguaje matemático en su forma más rigurosa. Lejos de simplificar el contenido, esta perspectiva apuesta por acompañar al estudiante en la construcción progresiva de estructuras formales cada vez más complejas.

En relación con las líneas futuras de investigación, el presente trabajo abre múltiples posibilidades de profundización. Resulta pertinente extender este análisis a otros campos de la matemática, como el álgebra abstracta, el análisis matemático o la teoría de números, con el fin de explorar la validez y el alcance de la TSEMP en distintos dominios formales. Asimismo, se plantea la necesidad de desarrollar estudios longitudinales que permitan observar la evolución de la simbolización a lo largo del proceso formativo, así como investigaciones comparativas que contrasten este enfoque con otros modelos didácticos contemporáneos.

De igual manera, futuras investigaciones podrían centrarse en el diseño y validación de instrumentos específicos que permitan medir con mayor precisión los niveles de apropiación del lenguaje simbólico, así como en la construcción de secuencias didácticas fundamentadas explícitamente en los principios de la TSEMP.

Este estudio no solo aporta evidencia empírica sobre las dificultades en la enseñanza de la lógica matemática, sino que propone una reconfiguración del horizonte educativo, en la que la simbolización se reconoce como el núcleo constitutivo del conocimiento matemático. Asumir esta perspectiva implica un cambio paradigmático que, aunque exigente, se presenta como una condición necesaria para la formación de sujetos capaces de habitar el pensamiento matemático en su dimensión más rigurosa y profunda.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORES

JCR concibió la idea presentada y desarrolló la teoría. adaptó la metodología a este contexto, crearon los modelos, realizaron las actividades y recopilaron los datos. JCR analizó los datos. El autor participó activamente en la discusión de los resultados, reviso y aprobó el trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los datos que respaldan los resultados de este estudio estarán disponibles por la persona autor correspondiente, JCRC previa solicitud razonable.

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa su profundo agradecimiento a los estudiantes del curso de Matemática Discreta con Teorías Axiomáticas, cuya participación, compromiso y esfuerzo intelectual hicieron posible el desarrollo del presente estudio. Sus producciones académicas no solo constituyeron la base empírica de este trabajo, sino que reflejan el proceso de apropiación del lenguaje matemático formal en un contexto real de formación.

Asimismo, se reconoce el valioso respaldo institucional de la Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media (EFPEM) de la Universidad de San Carlos de Guatemala, por su compromiso con la formación rigurosa de docentes en matemática y por propiciar espacios académicos que permiten el desarrollo de propuestas innovadoras en educación matemática. Para finalizar a mi mentor MSc Luis Solorzano, gracias por todo.

6. REFERENCIAS

- Boole, G. (1854). *An investigation of the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*. ISBN: 978-0486600284
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131. <https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Enderton, H. B. (2001). *A mathematical introduction to logic* (2nd ed.). Academic Press.
- Ewald, W. (Ed.). (2005). *From Kant to Hilbert: a source book in the foundations of mathematics*. Oxford University Press. <https://doi.org/10.1093/oso/9780198505358.001.0001>
- Frege, G. (1879). *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete formelsprache des reinen denkens*. Nebert.
- Frege, G. (1884). *Die Grundlagen der Arithmetik* Koebner.
- Frege, G. (1893/1903). *Grundgesetze der Arithmetik*. Pohle.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The ontosemiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 39(1–2), 127–135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Hilbert, D., & Ackermann, W. (1938). *Grundzüge der theoretischen Logik*.

- Pólya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press. (Original work published 1945)
- Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44(1), 7–44. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.44.1.0007>
- Ruiz Castillo, J. C. (2025). *Teoría simbolista de la educación matemática pura (TSEMP)*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.17797210>
- Ruiz Castillo, J. C. (2026). *Enseñanza del álgebra booleana desde la teoría de la simbolización y enseñanza matemática pura en un contexto axiomático universitario*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.19342697>
- Ruiz Castillo, J. C. (2026b). *Enseñanza del álgebra booleana desde la teoría de la simbolización y enseñanza matemática pura en un contexto axiomático Universitario*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.19342697>
- Ruiz Castillo, J. C. (2026c). *La demostración matemática: desarrollo epistemológico y formal desde la teoría simbolista de educación matemática pura (TSEMP)*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.18751757>
- Ruiz Castillo, J. C. (2026d). *Teoría simbolista de educación matemática pura (TSEMP) leyes de inferencia, deducción fitch y lógica de predicados capítulo con teoría, demostraciones y ejemplos resueltos*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.18687124>
- Ruiz Castillo, J. C. (2026e). *Teoría simbolista de educación matemática pura (TSEMP) y la enseñanza formal de tablas de verdad, conectivas y leyes lógicas*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.18653159>
- Ruiz Castillo, J. C. (2026f). *Boolean algebra, formal logic and karnaugh maps a formal, structural and epistemological exposition from the theory of symbolization and pure mathematical teaching (TSEMP)*. Zenodo. <https://doi.org/10.5281/zenodo.18529473>
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.
- Stanford Encyclopedia of Philosophy. (2016).



GENERALIZATION PROCESSES IN A LEARNING SITUATION RELATED TO THE TRIGONOMETRIC FOURIER SERIES

PROCESOS DE GENERALIZACIÓN EN UNA SITUACIÓN DE APRENDIZAJE RELATIVA A LA SERIE TRIGONOMÉTRICA DE FOURIER

Fabián W. Romero Fonseca¹

 ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-4472-963X>

Rosa María Farfán Márquez²

 ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-1229-8521>

ABSTRACT

This research deals with the processes of mathematical generalization when constructing the Trigonometric Fourier Series, since, from its epistemology, the importance of these processes for its adequate construction is evidenced. This approach responds to the Theory of Operative Generalization, which allows glimpsing the generalization processes from the students' actions. The analysis of the students' productions and interactions were based on the consideration of analytical questions resulting from the theoretical position to characterize their actions, what they do and how they do it, the elements of the actions and the relationships between these elements, what they do it on, and their symbolization, by means of how they do it. Three organizing categories of the actions and their invariants in the process of generalization emerged from the analysis: 1) those related to fixing the causes that provoke the behaviour of the system, 2) those concerning the recognition that the phenomenon is susceptible to reach a stable, or stationary, state, 3) those related to the relation between the convergence of the series with the stability of the system, and 4) those concerning the calculation of the Fourier coefficients. In

¹ Universidad de Costa Rica, San José, Costa Rica. Correo electrónico: fabian.romero@ucr.ac.cr

² Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Ciudad de México, México. Correo electrónico: rfarfan@cinvestav.mx



addition, relationships are established between these categories that allow the identification of extensional generalizations.

Keywords: Mathematical generalization, Operative generalization, Series convergence.

RESUMEN

Esta investigación aborda los procesos de generalización matemática en la construcción de la Serie de Fourier trigonométrica, ya que, desde su epistemología, se evidencia la importancia de estos procesos para su adecuada construcción. Este enfoque responde a la Teoría de la Generalización Operativa, la cual permite vislumbrar los procesos de generalización a partir de las acciones de los estudiantes. El análisis de las producciones e interacciones de los estudiantes se basó en la consideración de preguntas analíticas derivadas de la postura teórica, con el fin de caracterizar sus acciones, qué hacen y cómo lo hacen, los elementos de dichas acciones y las relaciones entre estos elementos, sobre qué lo hacen, así como su simbolización, mediante qué lo hacen. Del análisis emergieron cuatro categorías organizadoras de las acciones y sus invariantes en el proceso de generalización: 1) aquellas relacionadas con la fijación de las causas que provocan el comportamiento del sistema, 2) aquellas concernientes al reconocimiento de que el fenómeno es susceptible de alcanzar un estado estable (o estacionario), 3) aquellas relacionadas con la relación entre la convergencia de la serie y la estabilidad del sistema, y 4) aquellas relativas al cálculo de los coeficientes de Fourier. Además, se establecen relaciones entre estas categorías que permiten la identificación de generalizaciones extensionales.

Palabras clave: Generalización matemática, Generalización operativa, Convergencia de series.

1. INTRODUCTION

The Trigonometric Fourier Series (TFS) has been the subject of numerous studies in Mathematics Education. Specifically, a research group at the Department of Mathematics Education at Cinvestav-IPN in the field of higher education, which has focused on the study of series and their convergence (Farfán, 2012), as well as on positioning the trigonometric series as the most advanced stage in the development of trigonometric thinking (Montiel, 2011).

Romero (2016), on his study, even though it is not the main theme, highlighted the importance of considering generalization processes that emerge when constructing the TFS. This is because meaning must be derived from the use of the series before generalizing the trigonometric series representation of a function. However, to the best of our knowledge, there has not been an in-depth exploration of the generalization processes associated with the TFS. Despite Romero and Farfán (2016) conducting a synthesis of research related to the TFS, in which they address various aspects such as its historical genesis, the periodicity hypothesis, and notions of heat and convergence, among others, the following paragraphs present additional research findings related to the TFS and discussions of the generalization process associated with the series, both directly and indirectly.

Farfán (2012) showed that the controversy surrounding the vibrating string problem¹ is not about the solution itself, but rather about what constitutes the general solution and the methodology used to find it. It is the desire to generalize results that leads to a debate lasting

¹ The statement of this problem and a detailed explanation can be found in Farfán (2012).

nearly a century and that questions the very foundations of Mathematical Analysis at the time. The problem is solved in Fourier's work (1822), and in an effort to generalize his results, what it's known today as Fourier coefficients emerged driven by the prevailing positivist paradigm, characterized by applied mathematics and phenomenological empiricism, deeply rooted in the French Enlightenment and the École Polytechnique tradition (Friedman, 1977).

Within the context of heat propagation, Fourier's trigonometric series emerged as a mathematical tool for representing temperature distributions in steady-state conditions. Regarding this notion of steady state, Marmolejo (2006) pointed out that there is a generalized idea in school discourse asserting that the steady state is achieved when temperature variations become infinitesimally small over an infinitely long time. The phenomenological environment plays a crucial role here, as "it allows us to pre-establish boundary conditions, which not only serve the purpose of obtaining a particular solution to the heat transfer problem, but also guide or regulate the student's intuition, constraining their thinking." (Marmolejo, 2006, p. 77). In other words, the boundary conditions derived from the phenomenological environment do more than only helping to find particular solutions; for instance, they guide students' thinking towards understanding the general behaviour of the heat propagation phenomenon. This involves an inductive process, seeking to generalize the results from studying particular cases to grasp the overall behaviour of the phenomenon. To enable such generalization, Ulín (1984) asserted that it is impossible to separate the physical phenomenon from its mathematization. However, schools do not provide the necessary theoretical and empirical tools on the physical level for understanding the phenomenon of heat propagation (Morales, 2010), let alone for its mathematization.

With respect to the convergence of the TFS, Farfán (2012) and Albert (1996) highlighted Leibniz's principle of permanence as an epistemological obstacle. This principle leads both, students and teachers, to transfer properties of partial sums (e.g., continuity, oscillatory behaviour) to the limit function. In other words, they overgeneralize results from the finite case to the infinite case, which warrants careful attention when dealing with generalizations when working with the TFS. In addition, it must be considered that "Fourier's generalizations are for intervals of finite length, not over all of $\mathbb{R}$ " (Vásquez, 2006, p. 45). Yet, there is a generalized trend in the school discourse regarding the series in which its periodic property dominates within a purely mathematical context. This fosters the overgeneralization of properties since it does not allow for the confrontation of the idea that the convergence value of a function series does not necessarily possess the same properties as the terms of the series (Vásquez, 2006).

Regarding the convergence of numerical series, Flores (1992) argues that its investigation involves five stages, the last two being conjecturing and generalizing. During the conjecturing stage, he highlighted the importance of examining particular cases in order to develop general criteria for assessing convergence. Although Flores (1992) refers to Cauchy's convergence criteria, these emerged within a mathematical framework developed after Fourier's work and focused primarily on numerical series. In the context of the TFS, by contrast, the analysis of particular cases of trigonometric series precedes the calculation of Fourier coefficients (Romero, 2016; Farfán & Romero, 2017). Furthermore, Flores (1992) argues that generalization "consists of the formal statement and rigorous proof of new convergence criteria" (p. 201), conceiving such criteria as sufficient conditions under which a series converges. That is, in this sense, to generalize means to determine and prove a

sufficient condition for convergence. Keeping in mind the epistemological difference between Cauchy's and Fourier's work, the question arises: What is the meaning of generalizing in Fourier's work, assuming one must start from particular cases to derive meaning? This is one of the key concerns of the present study.

1.1 Problem definition

As previously discussed, the TFS has been problematized in various research studies to understand the functioning of the didactic system and the conceptions held by students and teachers regarding the related mathematical ideas involved in the series. Considering the contributions made by all these researchers, Romero (2016) analyzes the practices associated with the emergence of the TFS in its historical context. He also mentions that, in the context of heat transfer phenomena, constructing the series requires the existence of:

[As] a context of meaning, the modelling of a stationary phenomenon with periodic and bounded variation, for which the TFS becomes a predictive tool, where the act of interpretation plays a fundamental role by enabling the validation of mathematical argumentation within the physical phenomenon. (Romero, 2016, p. 127)

The above characterizes the necessary phenomena to evolve trigonometric thinking from functionality to formality. On the other hand, referring to the notion of variation in the phenomenological context of heat transfer, as Solís (1993) stated:

The culmination of handling this notion of variation occurs when, being able to operate with the symbols of variation, an individual is capable of establishing the laws that govern a phenomenon of variation—that is, constructing a model that allows the phenomenon to become predictable. (p. 2)

Therefore, it is through the mathematization of the heat transfer phenomenon that one can deeply understand its behavior and make it predictable, that is, to determine its steady state in Fourier's terms. A general model of the phenomenon can then be expressed when it is mathematized through variation symbols²; in other words, when the differential equation that models the phenomenon is established.

For instance, in the vibrating string problem, the differential equation given by D'Alembert (1747) represents the general model of a variation phenomenon.

$$a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad (1)$$

In equation (1), $y(x, t)$ represents the position (height) of each point of the string over time, and a is a constant depending on the tension and the linear mass density of the string. After establishing the model, the discussion centers around what the general solution to the equation is. This posed a question that was not clearly answered by the mathematicians of the 18th century. Bernoulli (1755) proposed a solution as a superposition of waves, arriving at the

² According to Solís (1993), variation symbols refer to differentials and partial derivatives, such as: Δx , dy , $\frac{\partial T}{\partial z}$, etc.

idea that the initial shape of the string (an arbitrary function) can be represented by a trigonometric series.

Euler strongly opposed this solution because, according to him, "Bernoulli bases his opinions on no mathematical argument; thus, there is no proof of the generality that a function can be represented in such a way; in addition, there are no indications of any method to compute the coefficients" (Farfán, 2012, p. 66). The controversy around the vibrating string problem was resolved through Fourier's work on heat propagation, whose differential equation is another example of generalizing the behaviour of a variation phenomenon:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{K}{C \cdot D} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad (2)$$

In equation (2), $v(x, y, z, t)$ represents the temperature at point (x, y, z) in a solid body at time t , and the constants K , C , and D represent thermal conductivity, specific heat capacity, and material density, respectively. By using this equation to solve the problem of heat propagation in an infinite plate³, Fourier, through extensive algebraic mastery, was able to determine the coefficients of a trigonometric series that converged to a specific value. This led him to generalize his results, for which "he stated and proved what the most prominent mathematicians of the 18th century deemed unacceptable: the possibility of representing an arbitrary function as a trigonometric series" (Farfán, 2012, p. 128).

Romero (2016) accounts for the geometric-analytical meaning behind Fourier's reasoning in calculating the coefficients, and proposes two key moments in the construction of the TFS: (i) Moment A seeks to understand that particular trigonometric series may converge to a function; (ii) and Moment B aims to generalize the trigonometric series representation to an arbitrary function, assuming it meets Dirichlet conditions, that means to determine the series' coefficients.

Moment B in the social construction of the TFS arises from Moment A. Given the need for generalization in mathematics, it becomes natural to ask the reverse question: if the function to which the series converges is known, what is the series? Moment B does not aim to determine the conditions under which a function can be represented by a trigonometric series. It rather assumes from the start that such representation is possible and focuses exclusively on how the coefficients are calculated. It is shown that behind Fourier's work lies a foundation of graphic and geometric argumentation that allows the coefficient calculation to be meaningful (Romero, 2016, p. 128).

Therefore, Moment B cannot occur without Moment A; it is necessary to derive meaning from the use of the series before generalizing the trigonometric series representation for an arbitrary function that satisfies Dirichlet conditions. Hence, it is hypothesized that, to achieve the generalization of the representation of a function in a TFS, one must first construct meaning for the series itself through its use, and then construct meaning for the calculation of its coefficients.

³ The statement of this problem and a detailed explanation can be found in Farfán (2012).

Regarding the calculation of the Fourier coefficients (i.e., the Moment B of the social construction of the TFS), Romero (2016) and Farfán and Romero (2017) show that Fourier's initial arguments for computing the series coefficients are found within the geometric-analytical register (area under the curve and orthogonality of trigonometric functions) before transitioning to algebraic arguments. In other words, the calculation of the coefficients requires the articulation of at least two representation registers: the geometric-analytical and the algebraic, to validate the latter through the former.

This analysis, discussed in greater detail in Romero (2016) and Romero and Farfán (2018), leads us to propose the hypothesis that the generalization process involved in calculating Fourier coefficients demands an entirely mathematical starting point. However, this process is grounded in geometric-analytical concepts, where the symbolic representation of the elements of the actions facilitates the construction of the relationship between the formulas (the integrals) and the area under the curve. This ultimately provides meaning to the former through the latter.

Stemming from prior research and the historical-epistemological reflections presented above on the TFS, we note the importance of considering the generalization processes that accompany its construction. From this perspective, meaning must emerge through the use of the series before its representation as a function can be generalized. Despite the relevance of this issue, the generalization processes associated with the TFS have not been thoroughly studied. Therefore, the objective of the present paper is to identify the components of the generalization process involved in the construction of the TFS. In particular, emphasis is placed on identifying the invariants of action according to the process of operative generation described by Dörfler (1991).

2. THEORETICAL FRAMEWORK: OPERATIVE GENERALIZATION

Dörfler (1991) proposed that in the process of generalization, actions or systems of actions, in the sense of Piaget (2009), are the starting point for the construction of mathematical knowledge. These actions are introduced by the subject in a situation or stimulus that creates a state of disequilibrium. The term "action" should be understood as broadly as necessary; for instance, even the purest mathematical operations must be considered as actions due to the cyclical nature of the generalization process. In the formation of a mathematical concept, at an elementary level, an action may consist of grouping specific material objects, while at a higher level of the same concept, the action may take the form of mathematical operations (e.g., ordering or addition, operating on abstract elements).

Actions or systems of actions can be imaginary, material, or symbolic, but they are always concrete actions. They focus the subject's attention on the elements of those actions, which are certain material or ideal objects. The goals set, the means employed, and the course of such actions direct the subject's attention toward certain relationships and connections among the elements of the actions. These relationships appear as invariant when the actions are repeated and are called invariants of the actions.

Establishing these invariants, however, requires some symbolic description, as symbols must be introduced to represent elements of the actions or the relevant quantities. These

symbols may be verbal, iconic, geometric, arithmetic, or algebraic in nature. In any case, the invariants are described through these symbols and thus are fixed in this way. Initially, the symbols serve as mere representations and play only a descriptive role.

The establishment of invariants and their symbolic description is a process of abstraction, since certain properties and relationships are highlighted and foregrounded. Through this process, they gain a degree of independence from the original elements or objects with which they were associated, resulting in the objectification of the symbols. It is important to note that this process clearly corresponds to constructive abstraction, in which what is abstracted arises from actions and gains meaning and existence through those very actions.

Initially, the concrete symbols have a range of reference defined by the context of the action; in this sense, they are referential variables. The invariants, in their symbolic description, will serve as a search screen for the possibility of identical actions, due to the substitutability and interchangeability of the action's elements (empirical generalization) and of the action itself. Therefore, the structure of the declared actions must be maintained through the scheme and the invariants, constituting a form of extensional generalization. Later, the invariants will become the criteria for selecting objects as elements of action, and the symbols used at the beginning will evolve into variables with substitution properties.

As the symbolic description of the invariants is reflected upon, the symbols gradually begin to replace the elements of the actions. At this point, these symbols take on the character of objects; they become the elements of actions and serve as representatives, or "carriers," of the invariant relationships. The symbol thus shifts from its original range of reference, becoming an independent object whose meaning and significance stem from the relationships (the invariants) and from the operators for which they function as symbolic objects. In this way, the symbols transform into objects, both objectively and within the student's cognition, defined by the invariants described above.

Thus, a new object of thought is developed, a mathematical object whose signifier and intentional meaning resides in the invariants. Since it has a broader range of reference, this mental object is a generality. In this object, symbols now have the primary quality of variables with the status of objects. This reification (objectification) of variables and symbols completes the process of abstraction that began with the fixation of invariants. In this way, the invariants are separated from their original "carriers", gaining independence and forming the abstracted generality. Here, abstraction is how intentional generalization is developed.

The constructed generality, expressed using concrete variables similar to objects (for action elements and actions), later serves for further extensional generalization (both from a subjective-cognitive and an objective-epistemological perspective). By properly interpreting the variables, new systems of actions can be included within the generality whose reference range has now extended. This can result in the construction of new action systems through generality, making the invariants expressed in the generality, present and "valid" there.

The described process (see Figure 1) results in a variable object, both in the subject's cognition and in its quality as a mathematical object. Due to the operative character of the constructed generality, one can design tasks that allow for the gathering of evidence on the degree of success students have achieved in constructing a general concept. Such evidence will appear, first and foremost, through the students' own productions, as expressed in written

or verbal explanations and expressions used for calculations, which will be how key elements of the process can be assessed. These elements are: the actions, the invariants of the actions, and the results of the process (i.e., the constructed generalizations).

Figure 1. Diagram of the process of generalization of actions and invariants of actions.



Source: Dörfler (1991, p. 74).

We should emphasize the cyclical nature of the generalization process. Every constructed generalization can become the object of a new action by the subject and serve as the starting point for a new generalization. In this sense, the last two stages of the theoretical framework gain importance, where the focus may shift from the conditions of the action to its results. During these processes, students use conceptual schemas (Piaget, 2009), through which they construct new schemas and establish relationships between the newly constructed and already existing schemas, reinforcing the consistency of the latter.

It is worth mentioning that Dörfler (1991) does not specify how the initial situation that triggers the subject's action (or system of actions) should be constructed. He assumes that it is a matter of the designer's insight to pose appropriate tasks for the subject according to the generalization process one aims to provoke.

3. METHOD

This research follows a qualitative approach with a case study design (Yin, 2017), employing a detailed and in-depth focus to understand a specific phenomenon within its natural context. This design allows for the exploration of the experiences, perceptions, and processes involved in the phenomenon under study through multiple sources of data, such as direct observations and analysis of relevant documents. According to Hernández et al. (2014), the case study focuses on the description and in-depth analysis or examination of one or more units and their context in a systemic and holistic manner.

Thus, studying the process of generalization required a starting situation for the construction of the TFS. For this purpose, it is used a learning situation based on a physical-geometric model of planetary motion proposed by Farfán and Romero (2019). Although this situation was not originally designed to address the generalization process, the theoretical framework used considers action, in the Piagetian sense (2009), as an observable practice in the subject's activity, which creates an appropriate environment for identifying action invariants relevant to the TFS, which is the object of this research.

3.1 Participants

The study involved the voluntary participation of 13 individuals (3 women and 10 men), aged between 20 and 27 years, all fifth-semester students from a higher education institution in central Mexico. The participants were labelled M1 to M3 (for the women) and H1 to H10 (for the men). It was agreed with the participants that they would complete the learning tasks in three sessions, two tasks per session, three hours per task. Additionally, all participants signed a consent form for the use of the collected records and their productions for research purposes.

3.2 Implementation and data collection

The implementation was carried out in the computer lab of the Department of Mathematics Education at the Center for Research and Advanced Studies of IPN. A total of 10 individuals actively participated in the sessions, H5 and H10 did not participate in any session, and H8 did not participate in the third session. The tasks were carried out in four teams of up to three students each.

Generally, for each part, at first, students worked in teams. However, despite being grouped, most students worked individually, sparsely interacting with their teammates, and limited themselves to validating their responses. Then, a plenary session followed, where different answers to each question were shared and discussed, aiming for consensus or explicitly acknowledging when there wasn't any.

During implementation, the researcher acted as the instructor. In addition, a non-participant observer collaborated in the process. This observer considered aspects ranging from the organization of space and time to the interaction between students and the mathematical knowledge involved.

The primary data source consisted of the students' final products, which were their responses to the tasks of the learning situation. The non-participant observer's notes served as a secondary data source, along with audio recordings of student team interactions and video recordings of the plenary discussions.

3.3 Data analysis

To identify the invariants of actions, the data analysis was divided into stages to clearly show how the theoretical model was applied. Below are the stages in which the data analysis was organized:

Stage 0: Sample selection and data organization

To select the participants whose productions and interactions would be analyzed, the following criteria were used:

- 1) Their engagement during the implementation phase, which include active participation and discussion with team members.
- 2) Their consistency in working with the same team across the three sessions allowed for analysis not only at the individual level but also at the team level.

Based on these criteria, and in collaboration with the observer, the following students were selected: M2, M3, H1, H3, and H4. This allowed for case analysis at three levels: individual, team, and group (considering the group video recordings of the plenary sessions).

After the sample selection, the data was organized by transferring the task responses into a table that included: task number, task objective, task parts, and questions along with their instructional intentions (Figure 2)⁴.

⁴ The initial data organization for the six tasks of the learning situation can be consulted in Romero (2020, Appendix 9.6).

Figure 2. Initial data organization table for Task #1

TASK #1

Task	To characterize the behavior of the system in a qualitative way, which will allow a deeper understanding of the phenomenon, beyond what can be perceived through direct sensory observation.				
Objective:					
Part I. What does this model allow us to explain?					
Intention:	To understand why the Alexandrian model can explain what the Greek model could not. The aim is to promote a deep understanding of the system, in the same way that Fourier understood the behavior of the heat propagation phenomenon through empirical observation before proposing his mathematical model of the phenomenon (Farfán & Romero, 2017).				
Student	M2	M3	H1	H3	H4
Question a					
Question b					
Question c					
Intentionality	In items a, b, and c, students are expected to relate the change in luminosity and the seasons of the year to the distance between T and P. Therefore, a circular model does not allow explaining these phenomena, since this distance never changes, unlike the model with 2, 3, and 4 circles, where the distance from P to T changes throughout the trajectory. Regarding the retrograde motion phenomenon, its explanation lies in the loops generated in the model with 4 circles.				
Part II. What if we increase the number of epicycles?					
Intention:	With the support of an applet, the aim is to gain insight into the notion of system stability. For this purpose, the applet allows increasing the number of circles up to thirty, in order to analyze the changes in the system's behavior.				
Student	M2	M3	H1	H3	H4
Question a					
Intentionality	The aim is for students to conclude qualitatively that the radii of the circles tend to zero. For this, students may use expressions such as "they decrease," "they become smaller," among others.				
Question b					
Intentionality	Through the study of change, students are expected to infer that the speed of points on each circle keeps increasing without bound. They may use expressions such as "it goes faster," "in the same time it travels increasingly greater distances," among others. According to the pilot test, it is possible that for question b students may interpret the graph as representing the trajectory of the planet when adding circles, when in fact it refers to the motion of each point on each circle.				
Question c					
Intentionality	The intention is for students to identify the qualitative stable character of the system, using expressions such as "when there are many circles, the trajectory shape hardly changes as more are added," "it tends to resemble..." etc. To do so, they are expected to analyze changes in the trajectory shape as more circles are added. It is expected that they express that "something strange was happening on the left side of the trajectory," which is important since not the entire trajectory is stable.				
Question d					
Intentionality	The aim is to confront how the planet's trajectory changes (stability) with what causes this change. However, determining how it changes and what produces the change is a cognitively very complex task in the study of steady-state phenomena (Farfán, 2012; Romero, 2016). It is expected that, with the teacher's support and based on students' ideas, they approach the notion that as the radii of the circles tend to zero and the velocity of the point tends to infinity, stability is achieved. That is, adding a very small circle with a very fast-moving point does not produce significant changes in the overall system.				

Source: Authors' own elaboration.

To continue with the next stages, it was necessary to identify the components of the generalization process as it relates to the construction of the TFS. It is important to note that, based on the task intentions from Farfán and Romero (2019) and the generalization framework adopted in this research, Tasks #1, #2, #3, and #5 correspond to variations of the action system for Moment A of the social construction of the TFS. However, Task #4 aims to analyze a different phenomenon (the Gibbs phenomenon) without a direct relation to the situational context. Thus, even though the situation was implemented in its entirety, Task #4 was not analyzed.

Furthermore, since Tasks #2 and #3 shared the same objectives and intentions, the initial organization of the data allowed for a comparison of students' productions and revealed that Task #3 did not provide additional information beyond Task #2. Therefore, Task #3 was excluded from the analysis. Consequently, Tasks #1, #2, #5, and #6 were analyzed through the following two stages.

Stage 1: Identification of actions

Since action is the starting point in the generalization model adopted for this research, its identification and initial characterization are essential. Thus, "[action] can be associated with the questions: What do they do? and How do they do it?" (Cruz, 2019, p. 82). These questions served as analytical prompts for identifying and characterizing the students' actions. For this, three rows were added to the initial data table under each task intention:

- 1) What do they do?

- 2) How do they do it?
- 3) Arguments and confrontations presented.

Additionally, two columns were added: Team 3 and Plenary Session. These helped conduct the analysis at the three levels mentioned earlier: individual, team, and group.

Stage 2: Identification of invariant of actions

After identifying actions in the previous stage (What do they do? and how do they do it?), the next step involves determining the elements of the actions, the relationships among those elements, and their symbolization, according to the adopted generalization model:

- Since action elements correspond to material or ideal objects the subject focuses on while acting, they were identified with the question: Upon which objects is the action carried out?
- As action invariants refer to relationships among these elements that remain invariant when the actions are repeated, identifying these relationships first involved the question: Upon which relationships is the action carried out?
- The question: By means of what is the action carried out? was used to identify the symbolic descriptions of both the action elements and their relationships, which was a necessary step for establishing invariants.

These questions functioned as analytical tools for identifying and characterizing the invariants of the actions. Accordingly, four rows were added to the initial data table, again considering the columns Team 3 and Plenary Session, under each task intention:

- 1) Upon which objects is it carried out?
- 2) Upon which relationships is it carried out?
- 3) By means of what is it carried out?
- 4) Invariants of actions.

For the first three points, the questions refer to the actions identified in Stage 1. The last point involves a horizontal perspective, examining relationships among the action elements, since invariants are identified through the repetition of actions. In this research, frequency was analyzed at the individual, team, and plenary levels.

You can find the complete analysis tables for Stages 1 and 2 in Romero (2020, Appendix 9.7). Due to the volume of information, the next section presents a synthesis of the most important findings.

4. RESULTS

This section discusses the generalization processes developed by the students when engaging with the situation. While the broader study identified a wide range of invariant relationships, this section focuses specifically on those that most clearly illuminate the generalization schema underpinning the present analysis.

When organizing the invariants of the actions, three organizing categories of actions and their invariants were identified:

- 1) those related to identifying the causes that generate the system's behaviour,

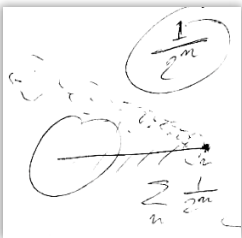
- 2) those concerning the recognition that the phenomenon is capable of reaching a stable or stationary state,
- 3) those regarding the relationship between the convergence of the series and the stability of the system, and
- 4) those related to the calculation of Fourier coefficients.

Regarding the invariants connected to focusing on the causes behind the system's behaviour, such as the variation in the sequence of radii and in the sequence of angular velocities, the results from Task #1 of the situation reveal interesting observations. Specifically, students used phrases like “they get smaller and smaller” to describe the sequence of radii and “they go faster and faster” to describe the sequence of angular velocities (see Table 1). However, this was not enough to conclude that the first sequence converges to zero and the second to infinity; instead, the invariant relationships established remained in terms of the monotonicity of the sequences. Mainly, since the radii sequence was decreasing, and the angular velocity sequence was increasing.

It was necessary, during the class-wide discussion in Task #5, for the instructor to question whether monotonicity alone a strong enough condition was to ensure system stability. For instance, the instructor asked what would happen if the sequence of radii decreased but was always bounded below by some positive number. This prompted students to identify the intended relationship.

Perhaps this preference for monotonicity over limits in sequences stemmed from the nature of the mathematical objects being studied. Since the radii are always positive, assuming a decreasing behaviour might have seemed sufficient to imply convergence to zero (a similar assumption may have been made for the angular velocities). It is important to pay attention to this phenomenon for future research or to consider redesigning the learning situation.

Table 1. Beginning of the generalization process related to the causes of the system's behaviour.

Actions What is done and how	Reflection on the action system and establishment of invariants What is it applied to?	Symbolisation* By means of what?
Observe Enables the perception of changes in the radii directly from the applet, without making a direct comparison between one radius and another — it is observed from the applet that the radii decrease. Estimate	<i>Elements of the action</i> The sequence of radii. <i>Invariant relationship</i> The measurement of the radii decreases.	Verbal: The radii. Algebraic: r_n or A_n . 

Attempts to quantify the variation based on perception from the applet/figure, without directly comparing one state to another — it is observed that the radii decrease by half; the closer to the axis, the faster the point moves.		Verbal: From the figure, it can be seen that the radii decrease. Algebraic: $r_n > r_{n+1}$ for all natural n. Algebraic: $\frac{R}{2^n}$, where R is the radius of the first circle.
Measure Directly measures the radii in order to compare them. Compare Compares the radii, either based on their measurements or by using the first radius as a reference. In the case of slopes, compares the slopes of the lines.	<i>Elements of the action</i> The sequence of angular velocities. <i>Invariant relationships</i> The speed of the points increases.	Verbal: The velocities. Algebraic: ω_n.  Verbal: The slope in the graph for the points on larger circles is greater than for those on circles with fewer subdivisions. Algebraic: $\omega_n < \omega_{n+1}$ for all natural n.

***Note:** This column contains the English translation of the participating students' responses and dialogues, with an effort to remain as faithful as possible to the original wording.

Source: Authors' own elaboration.

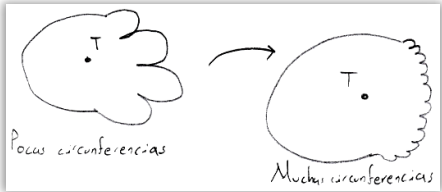
Regarding the recognition that the phenomenon is likely to reach a stable (or stationary) state, the results show that students were able to establish as an invariant relationship that, when many circles are added, the trajectory takes on a defined shape (see Table 2). In fact, as early as Task #1, students mention the notion of convergence in relation to this fact, even though the instructional design does not directly reference series convergence until Task #2 – Part II (specifically in question f).

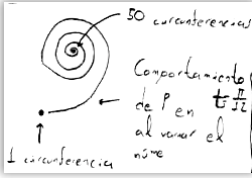
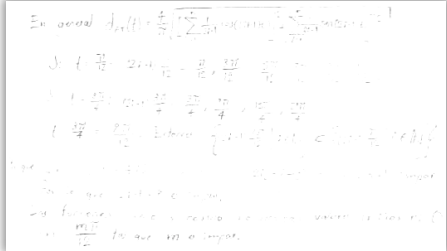
We can observe how these two categories, focusing on the causes of the phenomenon's behaviour and recognizing that the phenomenon reaches a stable state, are organized in a way that facilitates what Dörfler (1991) refers to as an initial extensional generalization. This occurs at the end of Task #1, as the structure of the previously established invariants is preserved. This type of generalization consists of linking the causes of the phenomenon with its behaviour. Specifically, the students identified the following as an invariant relationship: *adding a very small circle and a point on it that moves very quickly does not significantly change the shape of the trajectory*. This relationship is associated with the action of comparing to infinity, which has a predictive character, as it does not only consider variation, but also the causes of that variation in order to describe its future behaviour, in this case, at infinity.

Later, in Task #5, the relationships concerning the causes of the phenomenon's behaviour appear as elements of the action of establishing necessary conditions for the

system's stability, which gives them the status of object, thereby concluding the abstraction process that began with the identification of invariants.

Table 2. Beginning of the generalization process related to the behaviour of the system.

Actions What is done and how	Reflection on the action system and establishment of invariants What is it applied to?	Symbolization* By means of what?
Observe Allows the perception of local changes in the trajectory directly from the applet, without making a direct comparison between one trajectory and another — it is observed from the applet that as the number of circles increases, there are more oscillations in the trajectory. Compare locally Allows the perception of local changes in the trajectory directly from the applet, making comparisons between one trajectory and another — the oscillations become more frequent and increasingly smaller.	<i>Elements of the action</i> Trajectories with different numbers of circles. <i>Invariant relationship</i> The number of oscillations in the trajectory depends on the number of circles.	Verbal: The trajectory. Task #1 Verbal: The number of oscillations increases as the number of circles increases. Verbal: The number of loops increases, with one being larger and the rest decreasing in size.
	<i>Elements of the action</i> Trajectories with different numbers of circles. <i>Invariant relationships</i> The trajectory takes on a defined shape as more circles are added.	Verbal: The trajectory. Task #1 Verbal: It seems that the trajectory tends towards an ellipse with the Earth at one of the foci.  Verbal: I observed an apparent convergence towards a very well-defined trajectory. Verbal: Smaller and smaller arcs are added, which will model a smooth curve when a large number of circles is added. Task #2 Verbal: The trajectory starts to take on a particular shape. Verbal: In the central part, the loops seem to come closer together until they form two parallel lines. Verbal: As more circles are added, the central part of the trajectory approaches a straight line, while the ends resemble circles.

Compare with infinity Enables the relation between the convergence of the series and the stability of the system. Compare Compares partial sums at specific moments in time, either using the applet or algebraically. This makes it possible to identify points in the trajectory where the system is not stable.	<i>Elements of the action</i> The planet, the Earth, and a given moment in time. <i>Invariant relationships</i> The distance between the planet and the Earth at a given moment in time.	Algebraic: Let P be the planet and T the Earth.  Task #2 Verbal: For $t = \frac{\pi}{12}$, we observe a tendency towards stability, with the distance to the planet converging to a specific value.  Verbal: For $t = \pi$ y $t = 2\pi$, as more circles are added, the distance PT increases. Algebraic: 
--	--	---

***Note:** This column contains the English translation of the participating students' responses and dialogues, with an effort to remain as faithful as possible to the original wording.

Source: Authors' own elaboration.

For the category concerning the relationship between the convergence of the series and the stability of the system, the identified invariants provide evidence that the students were able to interpret the convergence of the series. Such interpretation was constructed by mathematizing the given model, in terms of the system's stability at specific time values. Then, they identified convergence through the study of the graphs of the sequence of partial sums (see Table 3). In the specific case of Task #1, it had been hypothesized that examining the partial sums might lead students to believe the series was divergent as it oscillates between the values 1 and -1 (Romero & Farfán, 2019). This indeed occurred during the implementation. However, identifying the nature of the convergence value (a function) enabled them to distinguish between the limit of functions (or sequences) and the convergence of a series of functions.

Once again, the categories of recognizing that the phenomenon reaches a stable state and linking the convergence of the series with the system's stability are structured in such a way that they support another initial extensional generalization in Task #2: "the series converges to a function." This is carried out through the action of comparing to infinity, which

has a predictive character, as it enables the prediction of the behaviour of the physical phenomenon via its representation in terms of the TFS. The students indicated that its meaning lies in the fact that the formula describes the planet's trajectory.

Later, in Task #5, both the system's stability and the convergence value of the series (the function) appear as elements of the action recognizing periodic behaviour through the regularity of its repetition, which gives them the status of object, thus concluding the abstraction process that began with the identification of invariants.

It is important to emphasize that the generalization processes described thus far did not occur in a linear fashion; rather, they unfolded simultaneously during the development of the situation. Separating them using the categories as a guiding thread was a strategy to present them in an organized manner and to clearly reveal the fixation of invariants up to the point where symbols are considered as objects.

Table 3. Beginning of the generalization process related to the convergence of the series and the stability of the system.

Actions What is done and how	Reflection on the action system and establishment of invariants What is it applied to?	Symbolization* By means of what?
Distinguish Allows the perception of the relationship between the convergence of the series and the stability of the system for specific time values, that is, by studying particular numerical series. Compare with infinity Enables the connection between the convergence of the series and the convergence of the sequence of partial sums through their graphs. Identify Allows for differentiation between the notion of series convergence and that of the limit of functions, in order to accept that convergence occurs.	<i>Elements of the action</i> Formula evaluated at specific time values. <i>Invariant relationship</i> The convergence of the series takes significance through the stability of the system.	Verbal: Plug t into the formula and check for convergence. Task #2 Verbal: H1: Ah::: it's that the formula explains::: the shape that the figure takes. P: Right! And regarding what you said earlier about it taking on a defined shape? H4: We'd need to look at the convergence values. Plug t into the formula and check for convergence.
	<i>Elements of the action</i> The convergence value. <i>Invariant relationships</i> The graph converges to a function.	Verbal: The convergence value. Task #2 Verbal: It converges to a step function. Verbal: It converges to a function.

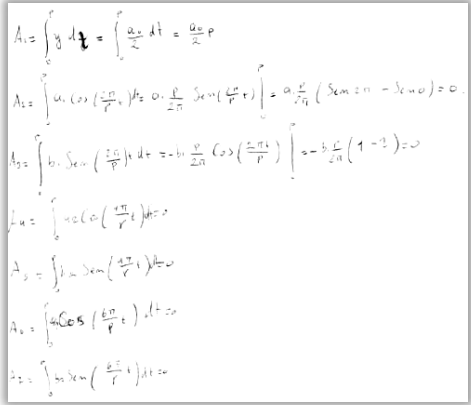
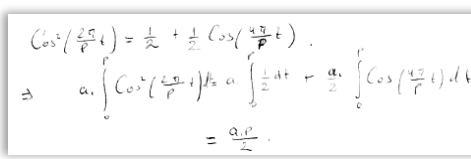
***Note:** This column contains the English translation of the participating students' responses and dialogues, with an effort to remain as faithful as possible to the original wording.

Source: Authors' own elaboration.

Regarding the calculation of the Fourier coefficients (Task #6 of the situation), there is no clear variation in the system of actions; only the initial part of the generalization process can be considered for each of the characterized actions (see Table 4).

Table 4. Beginning of the generalization process related to the calculation of the Fourier coefficients.

Actions What is done and how	Reflection on the action system and establishment of invariants What is it applied to?	Symbolization* By means of what?
Compare Compares the areas of the shaded regions. Geometrise Determines the area under the curve using known geometric figures.	<i>Elements of the action</i> The shaded regions. <i>Invariant relationship</i> The shaded regions have the same area.	Verbal: The shaded region. Verbal: The value of each shaded area is the same. Verbal: Both regions in the interval p have an area of 0, since they are symmetrical. Verbal: The sum of the areas of the double-shaded regions is equal to the sum of the areas of the single-shaded regions.
Calculate Determines the value of the areas under the curve as requested.	<i>Elements of the action</i> The region under the curve $y = \frac{a_0}{2}$ in the interval $[0, p]$. <i>Invariant relationships</i> The area under the curve $y = \frac{a_0}{2}$ in the interval $[0, p]$ is equal to the area of the rectangle whose sides measure p and $\frac{a_0}{2}$.	Verbal: The shaded region. Verbal: [VG]-6-[01:22:28]- $y = \frac{a_0}{2}$ the teacher asked who first used the rectangle argument, and H1 raised their hand. 2. Verbal: [VG]-6-[02:45:54] P: Did everyone do it that way? H9: Well::: yes, if it's by symmetry, the area ends up being the same, so you just calculate the area of the rectangle and divide it by 2.
	<i>Elements of the action</i> The region under the curve $y = a_1 \cos^2\left(\frac{2\pi}{p}t\right)$ in the interval $[0, p]$. <i>Invariant relationships</i> The value of the area under the curve over an interval of length p is equal to the value of the definite integral of that curve over the same interval.	Algebraic:

	 Algebraic: 
--	---

***Note:** This column contains the English translation of the participating students' responses and dialogues, with an effort to remain as faithful as possible to the original wording.

Source: Authors' own elaboration.

It is worth mentioning that this task aims to articulate the geometric–analytic and algebraic registers in order to validate the latter through the former. It was observed that, although this was achieved through the work on the situation, students still show a strong attachment to the algebraic register, since their initial strategies in most cases were algebraic (e.g., calculating integrals). This may be due to the fact that the situation attempted to handle both registers simultaneously. For instance, the graph was always presented along with its analytical expression, which should be taken into account in a redesign of the learning situation.

In this regard, a redesign could consider a purely geometric–analytic approach, that is, working with graphs without having access to the analytical expressions, and then moving on to algebraic work as a variation in the system of actions. This might help broaden the analysis within the generalization process.

Undoubtedly, more empirical research is needed to delve deeper into the object of study. The generalization processes related to the TFS seem to open a promising line of inquiry. It will be necessary to explore other variations in the system of actions and a diversity of mathematical knowledge. What lies ahead appears to be promising.

5. CONCLUSION

In line with the objective of the present paper, this study identified the components of the generalization process involved in the construction of the TFS through a learning situation

grounded in a physical–geometric model of planetary motion. The qualitative, case-study-based approach enabled an in-depth analysis of student actions, their invariants, and the underlying reasoning structures developed throughout the tasks.

The results show that generalization does not occur linearly but rather emerges progressively and in parallel across different conceptual dimensions. The identification of action invariants allowed us to trace key transitions in the abstraction process. These were categorized into four domains: (1) identifying the causes behind system behaviour, (2) recognizing the potential for a stable or stationary state, (3) relating series convergence to system stability, and (4) understanding the role of Fourier coefficients.

In particular, the students' focus on monotonicity rather than limits when analyzing sequences in Task #1 revealed both intuitive reasoning and epistemological obstacles. Although they initially failed to infer convergence toward zero or infinity, class discussions (especially during Task #5) enabled refinement of their conceptual tools, supported by teacher questioning. This suggests the need for didactic designs that explicitly problematize such assumptions.

Moreover, students demonstrated an early understanding of system stability by recognizing that adding more circles in the geometric model produced a defined trajectory shape. This led to a first instance of what Dörfler (1991) describes as extensional generalization: the structure of the invariants is preserved while extending the system toward infinity. The convergence of the TFS (initially misunderstood in Task #1) was later correctly interpreted in Task #2 as convergence to a function, which the students linked to the trajectory of the planet. This was a significant step in abstracting mathematical objects from operational actions.

Task #6, focused on calculating Fourier coefficients, showed that students remained predominantly algebraic in their strategies, despite the situation's attempt to integrate geometric–analytic and algebraic representations. This preference for algebraic manipulation points to a need for more deliberate separation and sequencing of representational registers in future designs. A redesign that initially restricts access to analytic expressions, allowing students to rely solely on graphical information, might foster deeper engagement with geometric reasoning and support a richer process of generalization.

The study also underscores the potential of TFS-based analyses to illuminate subtle conceptual developments and support more robust modelling of generalization in mathematics education. Although this research was limited to a single case and specific context, the findings suggest fruitful directions for further empirical investigation. Future work could explore additional variations in the system of actions and extend the framework to other areas of mathematical knowledge.

In conclusion, the investigation highlights that fostering generalization requires more than exposing students to diverse mathematical content. It rather needs environments that allow for meaningful action, reflection, and abstraction. The promising results obtained here invite further research into TFS as both an analytical tool and a pedagogical objective.

AUTHOR CONTRIBUTION STATEMENTS

FRF and RFM conceived the presented idea. FRF developed the theory. FRF adapted the methodology, carried out the activities, collected, and analyzed the data. All authors actively participated in the discussion of the results and reviewed and approved the final manuscript.

DATA AVAILABILITY STATEMENT

The data that support the findings of this study will be available from the corresponding authors, FRF and RFM, upon reasonable request.

5. REFERENCES

- Albert, J. (1996). *La convergencia de series en el nivel superior: Una aproximación sistémica* [Unpublished doctoral dissertation]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Bernoulli, D. (1755). Réflexions et éclaircissemens sur les nouvelles vibrations des cordes exposées dans les mémoires de l'Académie de 1747 & 1748. *Mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-Lettres*, 9, 147–172.
- Cruz, M. (2019). *Linealidad y angularidad en la esfera: un nuevo escenario de trabajo geométrico* [Master's thesis]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. doi:10.13140/RG.2.2.25114.49604
- D'Alembert, J. (1747). Recherches sur la courbe que forme une corde tendue mise en vibration. *Histoire de l'Académie Royale des Sciences et des Belles-Lettres de Berlin*, 3, 214–219.
- Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. Bishop, S. Mellin-Olsen y J. Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: its growth through teaching* (pp. 63-85). Kluwer Academic Publishers.
- Farfán, R. (2012). *Socioepistemología y ciencia: el caso del estado estacionario y su matematización*. Gedisa S. A.
- Farfán, R., & Romero, F. (2017). Construcción social del conocimiento matemático: La serie trigonométrica de Fourier desde la Socioepistemología. *Perspectivas da Educação Matemática – INMA/UFMS*, 10(23), 483–503.
- Farfán, R., & Romero, F. (2019). Learning situation for the trigonometric Fourier series from a Socio-epistemological standpoint. *Acta Scientiae*, 21(2), 28–48. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss2id5019>
- Flores, R. (1992). *Sobre la construcción del concepto de convergencia en relación al manejo heurístico de los criterios* [Unpublished master's thesis]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Fourier, J. (1822). *Théorie analytique de la chaleur* (Reimpressions Editions Jacques Gabay (1988) ed.). París: Chez Firmin Didot, père et fils. Libraires pour les mathématiques, l'architecture hydraulique et la marine. Rue Jacop. No. 24.

- Friedman, R. (1977). The Creation of a New Science: Joseph Fourier's Analytical Theory of Heat. *Historical Studies in the Physical Sciences*, 8, 73–99. <https://doi.proxyucr.elogim.com/10.2307/27757368>
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta ed.). McGraw Hill.
- Marmolejo, R. (2006). *Estudio de la noción de estado estacionario en el ámbito fenomenológico de la transferencia de calor* [Unpublished master's thesis]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Montiel, G. (2011). *Construcción de conocimiento trigonométrico: Un estudio socioepistemológico*. Díaz de Santos.
- Morales, F. (2010). *Causas y efectos de la ambigüedad en el tratamiento didáctico de la noción de calor. Una caracterización del pensamiento fisicomatemático* [Unpublished doctoral dissertation]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Piaget, J. (2009). *Psicología de la inteligencia* (Juan C. Foix, trad.). Editorial Crítica. (Original work published in 1947).
- Romero, F. (2016). *Construcción social de la serie trigonométrica de Fourier: Pautas para un diseño de intervención en el aula* [Master's thesis]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. doi:10.13140/RG.2.2.14118.63048
- Romero, F. (2020). *Sobre los Procesos de Generalización en Entornos de Construcción Social de Conocimiento: el caso de la serie trigonométrica de Fourier* [Doctoral dissertation]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México. doi:10.13140/RG.2.2.11916.54405
- Romero, F., & Farfán, R. (2016). Estado actual de la investigación alrededor de la serie trigonométrica de Fourier. In F. Rodríguez, R. Rodríguez, y L. Sosa (Eds.), *Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 1*, pp. 275–282. Oaxaca, México: Red de Centros de Investigación en Matemática Educativa A. C.
- Romero, F., & Farfán, R. (2018). Cálculo de los coeficientes de Fourier. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, 31(2), 1567–1575.
- Solís, M. (1993). *Estudio de la noción de variación en contextos físicos: El fenómeno de la propagación de calor* [Unpublished master's thesis]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Ullín, C. (1984). *Análisis histórico-crítico de la difusión de calor: el trabajo de Fourier* [Unpublished master's thesis]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Vásquez, R. (2006). *Sobre el papel de la hipótesis de periodicidad en las series de Fourier* [Unpublished master's thesis]. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Yin, R. (2017). *Case Study Research and Applications: Design and Methods*. Washington DC: Sage Publications.



O DESENVOLVIMENTO DO JOGO DIGITAL MATH-MON PARA O ENSINO DE EDUCAÇÃO FINANCEIRA: potencialidades na Educação Básica

**DEVELOPMENT OF THE DIGITAL GAME MATH-MON FOR FINANCIAL
EDUCATION TEACHING: potentialities in Basic Education**

José Vitor Novaes Moreira¹



ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0007-3533-9011>

Raquel Carneiro Dörr²



ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0001-6453-7032>

RESUMO

Este artigo apresenta o processo de desenvolvimento e a fundamentação pedagógica do jogo educativo digital Math-mon, elaborado para o ensino de Educação Financeira no Ensino Fundamental. A abordagem tradicional da matemática financeira escolar frequentemente incentiva a memorização de fórmulas, distanciando-se de práticas relacionadas ao letramento financeiro e à tomada de decisões no cotidiano. Nesse contexto, o jogo foi desenvolvido utilizando ferramentas de baixo custo computacional, buscando possibilitar sua utilização em escolas públicas sem a necessidade de laboratórios de informática complexos. A proposta adota uma estética inspirada em jogos de captura de monstros e integra desafios contextualizados relacionados ao consumo consciente, planejamento financeiro e identificação de armadilhas financeiras. O desenvolvimento do jogo fundamenta-se em discussões sobre jogos digitais, ludicidade, aprendizagem baseada em jogos e Educação Financeira escolar, articulando elementos de interação, trabalho colaborativo e resolução de problemas. Conclui-

¹Universidade Federal de Viçosa, Florestal, Minas Gerais, Brasil. E-mail: jose.novaes@ufv.br

²Universidade de Brasília, Brasília, Distrito Federal, Brasil. E-mail: raqueldorr@unb.br



se que o Math-mon constitui uma proposta pedagógica digital voltada à aproximação entre Educação Financeira, ludicidade e ensino de Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental.

Palavras-chave: jogo digital, educação financeira, educação matemática, ensino fundamental, ludicidade.

ABSTRACT

This article presents the development process and pedagogical foundation of the digital educational game Math-mon, designed for teaching Financial Education in Elementary School. Traditional approaches to financial mathematics in schools often encourage formula memorization, distancing students from practices related to financial literacy and everyday decision-making. In this context, the game was developed using low computational cost web technologies, aiming to enable its use in public schools without requiring complex computer laboratories. The proposal adopts an aesthetic inspired by monster-catching games and incorporates contextualized challenges related to conscious consumption, financial planning, and the identification of financial traps. The game development is grounded in discussions on digital games, playfulness, game-based learning, and school Financial Education, articulating elements of interaction, collaborative work, and problem-solving. It is concluded that Math-mon constitutes a digital pedagogical proposal aimed at bringing together Financial Education, playfulness, and Mathematics teaching in Elementary School.

Keywords: digital game, financial education, mathematics education, elementary school, playfulness.

1. INTRODUÇÃO

A Educação Financeira tem ampliado sua presença nos debates educacionais e nas propostas curriculares da Educação Básica, especialmente após sua incorporação como Tema Contemporâneo Transversal pela Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (Brasil, 2018). Nesse contexto, o ensino de conceitos relacionados ao consumo consciente, planejamento financeiro e tomada de decisões econômicas passou a ser compreendido como parte da formação cidadã dos estudantes. Mais do que desenvolver habilidades operacionais de cálculo, a Educação Financeira escolar busca favorecer a construção de conhecimentos que permitam aos estudantes interpretar situações do cotidiano e refletir criticamente sobre práticas de consumo e organização financeira.

Apesar dos avanços promovidos pela inserção da Educação Financeira nos currículos escolares, seu ensino ainda enfrenta desafios importantes na Educação Básica. Em muitos contextos, a abordagem da matemática financeira permanece centrada na aplicação mecânica de fórmulas e procedimentos operatórios, frequentemente desvinculados das experiências cotidianas dos estudantes. Conforme discutem Fernandes e Vilela (2019), a associação da Educação Financeira à disciplina de Matemática frequentemente reforça uma abordagem centrada em cálculos e planejamento individual, deixando em segundo plano reflexões mais críticas relacionadas às práticas financeiras e ao contexto social dos estudantes. Nesse cenário, torna-se necessário buscar estratégias pedagógicas que aproximem os estudantes dos conteúdos trabalhados de maneira mais contextualizada e significativa.

Nesse contexto, os jogos digitais têm sido apontados como possibilidades pedagógicas relevantes para o ensino de Matemática, especialmente por favorecerem maior participação e

interação dos estudantes durante as atividades escolares. Estudos recentes indicam que abordagens baseadas em jogos podem contribuir para tornar as aulas mais dinâmicas e aproximar os conteúdos matemáticos de situações práticas do cotidiano (Shaker & Brignell, 2025; Santos et al., 2024). Além disso, recursos digitais lúdicos possibilitam a exploração de desafios, tomada de decisões e resolução de problemas em ambientes interativos, favorecendo práticas pedagógicas alinhadas às discussões sobre metodologias ativas e aprendizagem baseada em jogos.

Diante desse cenário, o desenvolvimento de recursos digitais próprios voltados ao contexto escolar surge como uma possibilidade para aproximar os conteúdos matemáticos da realidade dos estudantes. Foi nesse contexto que surgiu o jogo digital educativo *Math-mon*, elaborado com foco no ensino de Educação Financeira nos anos finais do Ensino Fundamental. O jogo foi desenvolvido utilizando ferramentas de baixo custo computacional e planejado para aplicação coletiva em sala de aula, buscando favorecer a interação entre os estudantes por meio de desafios contextualizados relacionados ao cotidiano financeiro, como consumo consciente, descontos, planejamento de gastos e identificação de possíveis golpes financeiros.

A proposta do jogo articula elementos de ludicidade, resolução de problemas e aprendizagem colaborativa, aproximando-se das discussões sobre metodologias ativas e aprendizagem baseada em jogos digitais. Além disso, o desenvolvimento do *Math-mon* buscou considerar aspectos relacionados à realidade das escolas públicas, especialmente no que se refere à limitação de recursos tecnológicos e à necessidade de estratégias pedagógicas acessíveis ao ambiente escolar.

Dessa forma, este artigo tem como objetivo apresentar o processo de desenvolvimento e os fundamentos pedagógicos do jogo digital *Math-mon*, discutindo suas potencialidades para o ensino de Educação Financeira no Ensino Fundamental a partir das relações entre jogos digitais, ludicidade e ensino de Matemática. A pesquisa se desenvolve no âmbito da formação continuada em um programa de Mestrado Profissional de uma universidade pública brasileira.

2. EDUCAÇÃO FINANCEIRA E JOGOS DIGITAIS NO ENSINO BÁSICO

2.1 Jogos digitais, ludicidade e ensino de Matemática

Os jogos digitais vêm sendo investigados como possibilidades pedagógicas relevantes para o ensino de Matemática, especialmente diante da busca por estratégias que favoreçam maior participação e engajamento dos estudantes durante as atividades escolares. Guidio, Silva e Miola (2024), ao realizarem uma revisão sistemática sobre tecnologia e jogos digitais no ensino de Matemática no Ensino Fundamental, destacam que diferentes pesquisas apontam o potencial desses recursos para promover maior envolvimento dos estudantes, ampliar sua autonomia e favorecer práticas mais interativas em sala de aula.

Segundo Huizinga (2019), o jogo constitui uma atividade cultural marcada pela presença de regras, desafios e participação voluntária, características que contribuem para experiências de envolvimento e interação. No contexto educacional, elementos lúdicos podem

favorecer ambientes de aprendizagem mais dinâmicos, especialmente quando associados à interpretação de situações-problema e à construção coletiva de estratégias.

Nesse contexto, o potencial pedagógico dos jogos digitais não está relacionado apenas ao caráter lúdico das atividades, mas também à possibilidade de promover uma participação mais ativa dos estudantes no processo de aprendizagem. Conforme discutem Brandão et al. (2023), a utilização de jogos no ensino da Matemática contribui para romper com práticas centradas na transmissão de conteúdos, favorecendo o desenvolvimento da autonomia, do raciocínio lógico, da tomada de decisões e da resolução de problemas. Além disso, quando incorporados ao planejamento pedagógico, esses recursos podem tornar as aulas mais dinâmicas e aproximar os conteúdos matemáticos de situações mais próximas da realidade dos estudantes.

Além disso, discussões relacionadas à aprendizagem baseada em jogos digitais apontam que esse tipo de abordagem pode contribuir para aproximar os conteúdos escolares de situações práticas do cotidiano. Santos et al. (2024), ao investigarem o uso de um jogo digital no ensino de Matemática, destacaram o envolvimento dos estudantes durante as atividades e o potencial dos recursos digitais para favorecer experiências mais interativas em sala de aula.

Nesse cenário, os jogos digitais constituem uma estratégia pedagógica capaz de integrar ludicidade e aprendizagem matemática, permitindo que conceitos abstratos sejam explorados em situações mais próximas da realidade dos estudantes. Quando planejados de forma intencional pelo professor, esses recursos favorecem não apenas o desenvolvimento de conhecimentos matemáticos, mas também competências relacionadas à resolução de problemas, à tomada de decisões e ao trabalho colaborativo.

2.2 Educação Financeira escolar e seu ensino

A Educação Financeira escolar envolve mais do que o ensino de cálculos relacionados a juros, porcentagens ou uso de fórmulas. Sua abordagem no contexto educacional também envolve reflexões relacionadas ao consumo consciente, à tomada de decisões e à compreensão de situações financeiras presentes no cotidiano dos estudantes. Nesse sentido, diferentes pesquisas apontam a necessidade de superar práticas centradas apenas na memorização de fórmulas e procedimentos operatórios, buscando estratégias mais contextualizadas e interativas, como jogos digitais e simulações de situações financeiras relacionadas ao cotidiano dos estudantes (Fernandes & Vilela, 2019; Passos & Costa, 2025).

Fernandes e Vilela (2019) discutem que a associação da Educação Financeira à disciplina de Matemática frequentemente reforça abordagens técnicas voltadas ao cálculo e ao planejamento individual, deixando em segundo plano discussões mais críticas relacionadas às práticas financeiras e ao contexto social dos estudantes. Dessa forma, torna-se necessário desenvolver estratégias pedagógicas que aproximem os conteúdos matemáticos das experiências cotidianas dos estudantes.

Hartmann e Maltempi (2021) defendem que a Educação Financeira escolar deve ultrapassar o ensino de conteúdos estritamente matemáticos, contribuindo para que os estudantes desenvolvam conhecimentos e competências que favoreçam escolhas financeiras mais conscientes e responsáveis. Nessa perspectiva, o ambiente escolar assume um papel

fundamental ao promover situações de aprendizagem que favoreçam a reflexão crítica sobre consumo, planejamento e tomada de decisões financeiras, contribuindo para que os estudantes relacionem os conhecimentos matemáticos às situações vivenciadas em seu cotidiano.

Diante desse contexto, diferentes pesquisas têm indicado que abordagens contextualizadas e interativas podem favorecer maior participação dos estudantes durante as aulas (Passos & Costa, 2025). Dessa forma, a Educação Financeira escolar demanda propostas pedagógicas que ultrapassem práticas baseadas exclusivamente na memorização de fórmulas, buscando favorecer a construção de conhecimentos mais significativos e contextualizados. Nesse cenário, diferentes pesquisas têm explorado estratégias lúdicas e interativas para o ensino de Educação Financeira. Coutinho e Rodrigues (2024), por exemplo, analisaram a utilização do jogo de tabuleiro LIA (Liga de Investidores Arrojadados) em atividades relacionadas à Educação Financeira, observando resultados mais significativos em comparação a abordagens expositivas tradicionais. No contexto dos jogos digitais, Passos e Costa (2025), ao investigarem o jogo Reallife, observaram que a simulação de situações financeiras cotidianas envolvendo orçamento, consumo e tomada de decisões contribuiu para ampliar o interesse dos estudantes, estimular reflexões relacionadas ao uso do dinheiro e favorecer a aprendizagem de conceitos de Educação Financeira.

2.3 Juros simples como fundamento da proposta didática

Um campo de conhecimento basilar para o desenvolvimento da Educação Financeira escolar é a Matemática Financeira uma vez que ela possibilita aos estudantes compreender e analisar situações relacionadas ao consumo, ao planejamento financeiro, aos investimentos e ao endividamento, além de fazer a associação entre a matemática teórica com a prática cotidiana. Entre os conteúdos introdutórios desse objeto matemático, destacam-se os juros simples, conceito que permite interpretar diferentes situações presentes no cotidiano e aplicar conhecimentos matemáticos na tomada de decisões financeiras. Nessa perspectiva, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) reconhece a Educação Financeira como um Tema Contemporâneo Transversal, incentivando a abordagem de situações contextualizadas que favoreçam a compreensão crítica das relações entre Matemática e cotidiano (Brasil, 2018).

Nas escolas participantes desta pesquisa, o material didático adotado é a coleção A Conquista (4ª ed., 2018), selecionada pelos professores da rede municipal de ensino. Nesse material, o estudo dos juros é apresentado a partir de situações relacionadas ao consumo, ao planejamento financeiro e às consequências das decisões econômicas, destacando que esse mecanismo pode atuar tanto a favor quanto contra o indivíduo, dependendo das escolhas realizadas. Além disso, o manual do professor orienta que o estudo desse conteúdo seja acompanhado de reflexões sobre planejamento financeiro, consumo consciente e organização da vida financeira, aproximando os conceitos matemáticos das experiências cotidianas dos estudantes.

Segundo Iezzi, Hazzan e Degenszajn (2013), os juros simples são obtidos pelo produto entre o capital, a taxa de juros e o prazo da aplicação, sendo necessário que a taxa e o período estejam expressos na mesma unidade de tempo para que o cálculo seja realizado corretamente. Por constituírem um dos primeiros conceitos da Matemática Financeira trabalhados nos anos finais do Ensino Fundamental, os juros simples possibilitam aos estudantes compreenderem a relação entre tempo, capital e rendimento, servindo como base para a resolução de

problemas contextualizados e para o estudo posterior de outros conceitos financeiros, como os juros compostos.

A análise da coleção *A conquista da Matemática* (Giovanni Júnior & Castrucci, 2018) evidencia que o conteúdo de juros simples é introduzido por meio de situações cotidianas envolvendo empréstimos, compras a prazo e aplicações financeiras, favorecendo a contextualização do tema. Em seguida, o material propõe atividades voltadas à interpretação dessas situações e à realização de cálculos relacionados aos juros simples.

Entretanto, observa-se que a obra privilegia a aplicação prática do conceito, oferecendo menor ênfase à compreensão de sua fundamentação matemática. A fórmula de juros simples é apresentada de maneira direta, como uma ferramenta para o cálculo, sem que haja uma demonstração ou dedução algébrica que explique o porquê de sua estrutura. Embora o manual do professor recomende a realização de simulações para evidenciar que os juros simples incidem sempre sobre o capital inicial, essa construção conceitual não é transposta de forma explícita para os estudantes no livro. Dessa maneira, o material enfatiza a resolução de problemas contextualizados, mas dedica menor atenção à compreensão das relações matemáticas que fundamentam o cálculo.

3. PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS E DESENVOLVIMENTO DO JOGO MATH-MON

3.1 Concepção da proposta

Esta investigação encontra-se em desenvolvimento no contexto de um programa de Mestrado Profissional de uma universidade pública brasileira, no qual a construção do jogo digital *Math-mon* constitui o produto educacional vinculado à pesquisa. Trata-se de um recorte de uma pesquisa de abordagem quali-quantitativa (métodos mistos), de natureza aplicada, voltada ao desenvolvimento e à análise de um produto educacional. Além disso, a proposta também está relacionada à atuação de um dos pesquisadores como docente da Educação Básica em escola pública, aspecto que contribuiu diretamente para a identificação das dificuldades e demandas pedagógicas observadas no ensino de Educação Financeira.

O desenvolvimento do jogo digital *Math-mon* surgiu a partir da necessidade de buscar estratégias pedagógicas que aproximassem os conteúdos de Educação Financeira da realidade dos estudantes do Ensino Fundamental, especialmente entre o 6º e o 9º ano. A proposta foi concebida considerando as dificuldades frequentemente observadas no ensino tradicional da Matemática, muitas vezes centrado na repetição de cálculos e procedimentos descontextualizados do cotidiano dos estudantes.

Inicialmente, o projeto foi inspirado em jogos digitais de captura de criaturas, buscando explorar elementos de progressão, desafios e tomada de decisões presentes nesse tipo de dinâmica. Entretanto, ao longo do desenvolvimento, optou-se pela construção de uma identidade visual própria para o jogo, evitando o uso direto de personagens ou elementos vinculados a franquias comerciais. Essa escolha possibilitou o desenvolvimento de uma proposta autoral mais adequada ao contexto educacional e às possibilidades acadêmicas do projeto.

Além do aspecto visual, o desenvolvimento do *Math-mon* buscou integrar situações relacionadas ao cotidiano financeiro dos estudantes, envolvendo desafios sobre consumo consciente, descontos, planejamento de gastos e identificação de possíveis golpes financeiros.

Figura 1. Exemplo de desafio financeiro apresentado no jogo Math-mon.



Fonte: Dados da pesquisa (2026)

3.2 Estrutura e funcionamento do jogo

O *Math-mon* foi desenvolvido como um jogo digital educativo baseado em desafios contextualizados relacionados à Educação Financeira. Sua dinâmica utiliza elementos inspirados em jogos de aventura e captura de criaturas, nos quais os estudantes precisam resolver situações-problema para avançar nas atividades propostas.

Durante o jogo, os participantes são desafiados a analisar situações envolvendo consumo consciente, descontos, planejamento financeiro e tomada de decisões relacionadas ao cotidiano. As questões são apresentadas em formato interativo, permitindo que os estudantes discutam alternativas e escolham respostas a partir da interpretação das situações apresentadas pelo jogo.

A Figura 1 apresenta um exemplo de desafio financeiro presente no *Math-mon*. Nessa situação, os estudantes devem analisar se uma promoção envolvendo produtos vendidos em conjunta realmente representa vantagem financeira, considerando os valores individuais dos itens e o benefício oferecido pelo estabelecimento.

Os desafios presentes no jogo foram planejados para relacionar diferentes mecânicas da dinâmica digital com conteúdos de Educação Financeira e situações do cotidiano escolar. A Tabela 1 apresenta algumas das relações entre elementos do jogo e os conteúdos trabalhados durante as atividades.

versões utilizavam referências mais próximas de jogos comerciais populares entre os estudantes, especialmente títulos baseados em captura de criaturas, porém apresentavam poucas opções de personalização. Entretanto, observou-se a necessidade de construir uma identidade visual própria, evitando limitações relacionadas ao uso de personagens e elementos vinculados a franquias comerciais, além de outras mudanças focadas em game design.

O processo de desenvolvimento também envolveu adaptações relacionadas às mecânicas do jogo e à forma de apresentação das atividades financeiras. Inicialmente, algumas questões apresentavam foco excessivo em cálculos diretos e respostas objetivas. Ao longo do desenvolvimento, buscou-se priorizar desafios mais contextualizados, envolvendo comparação de alternativas, interpretação de situações cotidianas e tomada de decisões relacionadas ao consumo e planejamento financeiro.

Outra preocupação presente durante o desenvolvimento do projeto esteve relacionada às condições estruturais das escolas públicas. Por esse motivo, optou-se pela utilização de tecnologias web de baixo custo computacional e pela organização de uma dinâmica coletiva em sala de aula, permitindo que o jogo pudesse ser aplicado mesmo em contextos com limitações de infraestrutura tecnológica.

Pensando nisso, o *Math-mon* foi desenvolvido utilizando tecnologias de fácil manuseio, especialmente HTML e CSS, buscando garantir maior acessibilidade e baixo custo computacional para utilização em ambientes escolares. Essa escolha permite que o jogo seja executado em diferentes dispositivos, como computadores e smartphones, sem a necessidade de equipamentos de alto desempenho.

3.4 Validação com professores

Em outubro de 2025, foi realizada uma etapa de validação inicial do jogo *Math-mon* com professores de Matemática da rede pública municipal na qual posteriormente ocorrerá a aplicação da proposta com estudantes do Ensino Fundamental. Participaram da atividade nove professores, convidados a conhecer e experimentar o jogo em uma dinâmica coletiva semelhante à planejada para utilização em sala de aula.

A atividade teve duração aproximada de 120 minutos e foi organizada em três momentos principais. Inicialmente, realizou-se uma apresentação do projeto, abordando os objetivos pedagógicos do jogo, sua proposta metodológica, funcionamento e possibilidades de aplicação em contextos escolares. Durante esse momento, os professores também puderam esclarecer dúvidas relacionadas ao funcionamento técnico do jogo, incluindo questões sobre acesso à internet, desempenho e utilização em diferentes dispositivos.

Em seguida, os participantes foram organizados em três grupos com três integrantes cada, realizando uma experiência prática cooperativa com o *Math-mon* em dinâmica semelhante à prevista para aplicação com estudantes. Durante aproximadamente 40 minutos, os grupos interagiram com os desafios financeiros presentes no jogo e discutiram coletivamente as alternativas propostas pelas atividades.

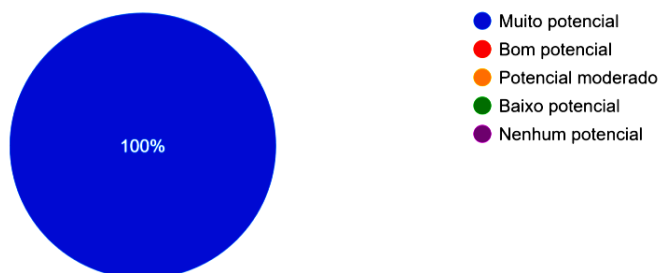
Ao final da experiência, os professores responderam a um questionário elaborado no Google Forms, contendo questões abertas relacionadas às potencialidades pedagógicas do jogo, sugestões de melhoria e percepções sobre sua utilização em sala de aula. Também foi

incluída uma questão objetiva sobre o potencial do jogo para promover engajamento dos estudantes durante as atividades escolares. As respostas obtidas foram organizadas para análise, sendo as questões objetivas apresentadas por meio da frequência das respostas e as questões abertas examinadas a partir das percepções e sugestões registradas pelos participantes, subsidiando a discussão dos resultados apresentada na seção seguinte.

Figura 3. Avaliação dos professores sobre o potencial de engajamento do jogo Math-mon.

Na sua opinião, o jogo tem potencial para engajar os estudantes durante a aula?

9 respostas



Fonte: Dados da pesquisa (2025)

A etapa de validação contribuiu para identificar potencialidades e limitações do jogo em relação à sua utilização no contexto escolar, possibilitando a realização de ajustes posteriores na interface, no tempo de resposta das atividades e na organização de alguns elementos visuais do *Math-mon* antes da aplicação com os estudantes.

4. RESULTADOS

4.1 Percepções dos professores sobre o jogo

Os resultados obtidos durante a etapa de validação indicaram uma percepção positiva dos professores em relação ao potencial pedagógico do Math-mon para o ensino de Educação Financeira. Na questão objetiva relacionada ao potencial de engajamento do jogo durante as aulas, todos os participantes classificaram o recurso como possuindo "muito potencial" para promover engajamento e interesse dos estudantes nas atividades escolares.

Além da avaliação quantitativa, as respostas discursivas foram organizadas a partir de temas recorrentes identificados nos relatos dos participantes, contemplando aspectos relacionados ao potencial de engajamento do jogo, à ludicidade, à integração entre os conteúdos matemáticos e a dinâmica do jogo, bem como às possibilidades de utilização do recurso em diferentes contextos pedagógicos. Entre os elementos mais destacados, os professores apontaram a integração entre os conteúdos matemáticos e a dinâmica do jogo, a proposta lúdica, a estética visual, os efeitos sonoros e o potencial do recurso para estimular a concentração e a participação dos estudantes durante as aulas.

Alguns participantes também ressaltaram a possibilidade de utilização do jogo em diferentes conteúdos e contextos pedagógicos, destacando a flexibilidade da proposta e sua aproximação com os interesses dos estudantes. Um dos professores destacou que o jogo apresenta uma "dinâmica estimulante para a aula" e a "possibilidade de despertar interesses diversos de forma lúdica", enquanto outro participante ressaltou que o Math-mon "faz a turma se concentrar e participar da aula", evidenciando percepções relacionadas ao potencial de engajamento da atividade.

As percepções apresentadas pelos professores reforçam os fundamentos teóricos discutidos neste estudo, especialmente no que se refere ao potencial dos jogos digitais para favorecer maior participação e envolvimento dos estudantes nas aulas de Matemática. Esses resultados aproximam-se das contribuições de Guidio, Silva e Miola (2024), que destacam os jogos digitais como recursos capazes de promover práticas pedagógicas mais interativas e ampliar a autonomia dos estudantes. Da mesma forma, dialogam com Brandão et al. (2023), ao evidenciarem que a utilização de jogos pode favorecer a participação ativa, a resolução de problemas e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Além disso, a percepção dos professores sobre a articulação entre ludicidade e Educação Financeira também está em consonância com Passos e Costa (2025), que observaram maior envolvimento dos estudantes quando conceitos financeiros foram trabalhados por meio de jogos digitais contextualizados.

4.2 Ajustes realizados após a validação

A etapa de validação também contribuiu para a identificação de aspectos específicos que poderiam ser aprimorados no Math-mon antes de sua aplicação com os estudantes da Educação Básica. Entre as principais sugestões apresentadas pelos professores, destacaram-se observações relacionadas à legibilidade das questões, ao tempo disponível para resposta e às possibilidades de ampliação da dinâmica do jogo em sala de aula.

As sugestões apresentadas pelos professores também foram organizadas em dois eixos principais: aspectos técnicos e aspectos pedagógicos. Entre os aspectos técnicos, diversos participantes sugeriram o aumento do tamanho das letras e das fontes utilizadas nos desafios apresentados pelo jogo, buscando facilitar a leitura coletiva durante a projeção em sala de aula. Também foram apontadas observações relacionadas ao tempo de resposta das questões, indicando a necessidade de adaptação do sistema para diferentes níveis de dificuldade das atividades propostas.

No que se refere aos aspectos pedagógicos, alguns professores sugeriram possibilidades de ampliação da dinâmica do jogo, como a criação de modalidades competitivas ou campeonatos que possibilitassem maior continuidade das atividades ao longo das aulas. Embora essa funcionalidade ainda não tenha sido implementada, a sugestão evidencia o potencial percebido pelos participantes para utilização do Math-mon em diferentes estratégias pedagógicas e contextos de ensino.

As sugestões apresentadas pelos professores demonstram a importância da etapa de validação no processo de desenvolvimento de produtos educacionais. Além de identificar aspectos técnicos passíveis de aprimoramento, essa etapa possibilitou aperfeiçoar elementos relacionados à usabilidade e ao potencial pedagógico do jogo. Esses resultados reforçam a importância de incorporar a participação de professores durante o desenvolvimento de

recursos educacionais digitais, favorecendo sua adequação às demandas do contexto escolar e às práticas de ensino de Matemática.

A partir das contribuições obtidas durante a validação, foram realizadas modificações significativas no jogo, incluindo o aumento do tamanho das fontes, melhorias na interface visual, implementação de opções de controle de som e reorganização do sistema de tempo das atividades. Após as alterações, o tempo de resposta passou a variar entre 60 e 90 segundos, considerando o nível de dificuldade das questões apresentadas aos estudantes. Essas modificações evidenciam que o processo de validação não se restringiu à avaliação do produto, mas contribuiu diretamente para seu aperfeiçoamento antes da aplicação com os estudantes do Ensino Fundamental.

Figura 4. Menu do jogo após as atualizações.



Fonte: Dados da pesquisa (2026)

5. CONCLUSÃO

O presente artigo buscou apresentar o processo de desenvolvimento e os fundamentos pedagógicos do jogo digital *Math-mon*, elaborado como proposta para o ensino de Educação Financeira nos anos finais do Ensino Fundamental. A partir das discussões relacionadas às limitações de abordagens centradas exclusivamente na memorização de fórmulas, procurou-se desenvolver um recurso pedagógico capaz de aproximar os conteúdos matemáticos de

situações presentes no cotidiano dos estudantes por meio de desafios contextualizados, elementos lúdicos e interação coletiva.

O processo de validação inicial realizado com professores de Matemática da rede pública permitiu identificar percepções positivas relacionadas ao potencial pedagógico do jogo, especialmente quanto ao engajamento, à participação dos estudantes e às possibilidades de contextualização dos conteúdos financeiros durante as atividades escolares. Além disso, as contribuições obtidas durante essa etapa favoreceram a realização de ajustes importantes na interface, no sistema de tempo das questões e na organização visual do jogo, contribuindo para o aprimoramento do produto educacional.

Nesse sentido, o Math-mon evidencia potencialidades do uso de recursos lúdicos e digitais para a Educação Financeira escolar discutidas ao longo deste estudo. Ao propor desafios contextualizados em um ambiente interativo, o jogo afasta-se da aplicação mecânica de fórmulas, limitação frequentemente apontada por Fernandes e Vilela (2019) no ensino tradicional da Educação Financeira. Em contrapartida, a dinâmica busca aproximar os conteúdos matemáticos de situações práticas relacionadas ao consumo, ao planejamento financeiro e à tomada de decisões, aspecto que dialoga com os achados de Passos e Costa (2025) e Coutinho e Rodrigues (2024) sobre o potencial de atividades lúdicas e simulações para ampliar o interesse e a reflexão crítica dos estudantes. Além disso, a proposta reforça discussões apresentadas por Guidio, Silva e Miola (2024) e Santos et al. (2024), evidenciando que a utilização de jogos digitais pode contribuir para tornar as aulas mais dinâmicas, favorecendo o engajamento, a interação e a construção coletiva de estratégias para resolução de problemas.

É importante reforçar que a pesquisa ainda se encontra em desenvolvimento e atualmente segue em processo de avaliação ética para posterior aplicação com estudantes do Ensino Fundamental. Como próximos passos, espera-se investigar as contribuições do *Math-mon* para o ensino de Educação Financeira em contexto escolar real, analisando aspectos relacionados à aprendizagem dos estudantes, ao engajamento durante as atividades e às possibilidades pedagógicas de utilização de jogos digitais no ensino de Matemática.

DECLARAÇÃO DE CONTRIBUIÇÃO DOS AUTORES

JVMN e RCD conceberam a proposta apresentada. JVMN desenvolveu o jogo digital, realizou a fundamentação teórica, organizou a metodologia, conduziu a validação com professores e analisou os dados obtidos durante a pesquisa. RCD orientou o desenvolvimento da pesquisa, contribuiu para a discussão teórica e metodológica e revisou criticamente o trabalho. Todos os autores participaram da discussão dos resultados, revisaram e aprovaram a versão final do artigo.

DECLARAÇÃO DE DISPONIBILIDADE DE DADOS

Os dados que respaldam os resultados deste estudo estarão disponíveis mediante solicitação razoável aos autores correspondentes, JVMN e RCD.



AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem aos professores participantes da etapa de validação pelas contribuições, sugestões e discussões realizadas durante o desenvolvimento do jogo *Math-mon*.

6. REFERÊNCIAS

- Brandão, L. M., Castro, G. G., Gomes, A. L. M., & Gregório, E. F. (2023). Uso de jogos no ensino da matemática: Uma revisão integrativa. *Brazilian Journal of Education, Technology and Society*, 16(2), 255–265. <https://doi.org/10.14571/brajets.v16.n2.255-265>
- Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/>
- Coutinho, M., & Rodrigues, J. M. S. (2024). A educação financeira, aplicada de forma lúdica, através de um jogo sério: Um estudo de caso realizado em uma escola de Belém do Pará. *Revista Nova Paideia - Revista Interdisciplinar em Educação e Pesquisa*, 6(1), 114–142. <https://ojs.novapaideia.org/index.php/RIEP/article/view/331>
- Fernandes, L. F. B., & Vilela, D. S. (2019). Educação financeira na escola básica brasileira: um olhar sociológico. *Hipátia*, 4(1), 176–186. <https://ojs.ifsp.edu.br/hipatia/article/view/1098>
- Giovanni Júnior, J. R., & Castrucci, B. (2018). *A conquista da Matemática: Manual do professor – 8º ano* (4ª ed.). FTD.
- Guidio, R., Silva, D. M., & Miola, A. F. S. (2024). Tecnologia e jogos digitais em matemática do ensino fundamental: uma revisão de relatos de pesquisa. *Educação Matemática em Revista*, 29(85), 1–13. <https://doi.org/10.37001/emr.v29i85.3939>
- Hartmann, A. L. B., & Maltempi, M. V. (2021). A abordagem da educação financeira na educação básica sob o ponto de vista de docentes formadores de futuros professores de matemática. *Em Teia – Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*, 12(2).
- Huizinga, J. (2019). *Homo ludens: o jogo como elemento da cultura* (9ª ed.). Perspectiva.
- Iezzi, G., Hazzan, S., & Degenszajn, D. (2013). *Fundamentos de matemática elementar: Vol. 11. Matemática comercial, matemática financeira e estatística descritiva* (9ª ed.). Atual.
- Passos, M. R., & Costa, R. C. da. (2025). Desenvolvimento do jogo Reallife para a atividade de aprendizagem de matemática e educação financeira de estudantes da rede pública de ensino. *Revista Multidisciplinar do Nordeste Mineiro*, 15, 1–41. <https://doi.org/10.61164/ewxhg640>
- Santos, A. B., Magnani, A. C. M., Facini, L. S., Dordan, F., & Rosa, T. C. (2024). Uso de jogo digital em aula de matemática: Um desafio para engajar os alunos no aprendizado.

Perspectivas da Educação Matemática, 17(48).
<https://doi.org/10.46312/pem.v17i48.20415>

Shaker, A. J., & Brignell, C. (2025). Fostering student engagement, learning communities and student performance through game-based learning. *Student Engagement in Higher Education Journal*, 6(1), 241–261. <https://doi.org/10.66561/sehej.v6i1.1244>



EL LENGUAJE MATEMÁTICO ANTE LA INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA: ANÁLISIS CONCEPTUAL DE SU INCIDENCIA EN LAS RESPUESTAS DE ESTUDIANTES, DOCENTES Y UNA TIPOLOGÍA DE PROMPTS

MATHEMATICAL LANGUAGE IN THE FACE OF GENERATIVE ARTIFICIAL INTELLIGENCE: A CONCEPTUAL ANALYSIS OF ITS INCIDENCE ON STUDENTS' AND TEACHERS' RESPONSES AND A TYPOLOGY OF PROMPTS

Reiman Yitsak Acuña Chacón¹



ORCID iD: <https://orcid.org/0000-0002-0094-3282>

RESUMEN

La incorporación de la inteligencia artificial (IA) generativa en la educación matemática se discute, sobre todo, en clave de integridad académica y de gobernanza institucional. Este artículo, de naturaleza teórico-metodológica y no empírica, desplaza la mirada hacia el lenguaje matemático mismo, entendido, desde Duval, Pimm y Alcalá, como el medio semiótico, discursivo y notacional en el que se constituyen los objetos matemáticos. Sostiene que los modelos generativos no solo resuelven problemas, sino que reorganizan la actividad semiótica de quienes los usan. El estudio se sustenta en una revisión narrativa y crítica de literatura reciente, complementada con una lectura documental de marcos institucionales. A partir de este abordaje, se examina la incidencia de la inteligencia artificial en las respuestas producidas por estudiantes y docentes, mediante la articulación de las nociones de fluidez sintética, génesis instrumental y contrato didáctico. Sobre esa base se deriva una tipología de seis categorías de prompts en las que el manejo del lenguaje matemático es la decisión de diseño central, orientada a preservar los procesos de representar y comunicar; cada categoría se ilustra con ejemplos y con episodios, de carácter exploratorio e ilustrativo, de una experiencia de aula desarrollada en un curso universitario de ecuaciones diferenciales. El aporte es un marco inicial para orientar la práctica de aula y la formación docente, susceptible de validación empírica posterior. Se concluye que el riesgo central no es que la IA produzca matemática incorrecta, sino matemática impecable y uniforme, que disuelve la fricción entre registros de la que depende el aprendizaje.

¹ Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica. Correo electrónico: reiacuna@itcr.ac.cr



Palabras clave: lenguaje matemático, registros de representación semiótica, inteligencia artificial generativa, prompts, educación matemática.

ABSTRACT

The integration of generative artificial intelligence (AI) into mathematics education is mostly discussed in terms of academic integrity and institutional governance. This theoretical-methodological and non-empirical paper shifts the focus toward mathematical language itself, understood, following Duval, Pimm and Alcalá, as the semiotic, discursive and notational medium in which mathematical objects are constituted, and argues that generative models not only solve problems but reorganize the semiotic activity of those who use them. The study is based on a narrative and critical review of recent literature, complemented by a documentary analysis of institutional frameworks. From this approach, it examines the influence of artificial intelligence on the responses produced by students and teachers by articulating the notions of synthetic fluency, instrumental genesis, and didactical contract. On this basis it derives a typology of six categories of prompts in which the handling of mathematical language is the central design decision, aimed at preserving the processes of representing and communicating; each category is illustrated with examples and with episodes, of an exploratory and illustrative nature, from a classroom experience in a university differential-equations course. The contribution is an initial framework to guide classroom practice and teacher education, open to subsequent empirical validation. It concludes that the central risk is not that AI produces incorrect mathematics, but impeccable and uniform mathematics that dissolves the friction between registers on which learning depends.

Keywords: mathematical language; semiotic registers of representation; generative artificial intelligence; prompts; mathematics education.

1. INTRODUCCIÓN

La irrupción de las herramientas de inteligencia artificial (IA) generativa ha transformado, en muy pocos años, las preguntas que docentes e investigadores se formulan sobre la enseñanza de la matemática. Las revisiones disponibles coinciden en que estas tecnologías abren oportunidades de personalización, retroalimentación y acceso, a la vez que plantean desafíos relativos a la integridad académica, los sesgos y la dependencia cognitiva (Kasneci et al., 2023; Qian, 2025; Walkington, 2025; Zawacki-Richter et al., 2019). En paralelo, numerosos sistemas educativos han comenzado a regular su uso mediante políticas públicas y marcos institucionales (MICITT, 2024).

El debate ha tendido a concentrarse en dos ejes: la integridad académica (¿produjo la respuesta el estudiante o la máquina?) y la gobernanza ética (¿qué reglas aseguran un uso responsable?). Ambos ejes son legítimos y necesarios; sin embargo, comparten el supuesto de que el problema se agota en quién produce la respuesta y bajo qué normas, de modo que bastaría un buen detector y una buena política para resolverlo.

Este trabajo sostiene que hay una cuestión más profunda y menos atendida. La matemática no es únicamente un conjunto de respuestas correctas, sino, ante todo, una actividad que se realiza en y a través de un lenguaje. Quien interviene ese lenguaje interviene la actividad. La pregunta decisiva no es solo quién produjo la respuesta, sino qué le ocurre al lenguaje matemático cuando estudiantes y docentes lo producen mediados por un mismo modelo.

La cuestión es de interés internacional, pues atañe a cualquier sistema que incorpore IA generativa en la enseñanza de la matemática. A manera de caso ilustrativo, este artículo recurre a la experiencia costarricense, cuya Reforma de la Educación Matemática incluyó, desde 2012, la representación y la comunicación entre sus cinco procesos fundamentales (MEP, 2012; Ruiz, 2013), donde marcos curriculares internacionales, como los estándares del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), también los colocan en el centro. Se trata, precisamente, de la actividad semiótica que la IA generativa pone en riesgo. El caso costarricense no es, así, un localismo, sino un caso bien documentado de un fenómeno global, que ofrece un vocabulario curricular preciso para nombrar un problema transferible a cualquier sistema que comparta esos procesos.

El objetivo es fundamentar, desde una perspectiva teórico-metodológica, la incidencia de los modelos generativos sobre las respuestas matemáticas y derivar una tipología de prompts orientada a preservar la actividad semiótica. No se trata de un estudio empírico, sino de una construcción conceptual que se ofrece como marco inicial y reconoce la necesidad de validación posterior. El manuscrito se organiza de la siguiente manera. Tras esta introducción, la sección 2 reúne los fundamentos teóricos, el análisis conceptual de la incidencia de la IA en las respuestas del estudiantado y del profesorado, y el caso costarricense. La sección 3 expone el abordaje metodológico. La sección 4 presenta y discute la tipología de prompts, la experiencia de aula que la ilustra, sus implicaciones y sus limitaciones. Finalmente, la sección 5 ofrece las conclusiones.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

La fundamentación se organiza en cuatro ejes teóricos que, leídos en conjunto, delimitan el problema que el trabajo aborda. En cada eje se construye un argumento antes que un catálogo de autores. Posteriormente, estos fundamentos se aplican al análisis conceptual de la incidencia de la IA en las respuestas del estudiantado y del profesorado y se sitúan en el caso costarricense.

2.1 El lenguaje matemático: registros, registro discursivo y simbolización

A diferencia de los objetos de otras ciencias, los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, pues solo se accede a ellos a través de signos, es decir, de representaciones semióticas (Duval, 2006). En matemática, operar sobre el objeto y operar sobre su representación son inseparables, de modo que la actividad semiótica no es periférica al pensamiento, sino su sustancia.

Duval (2006) organiza esa actividad en torno a registros de representación como el lenguaje natural, la escritura simbólica y las representaciones gráficas, numéricas y tabulares. Asimismo, distingue los tratamientos, que permanecen dentro de un registro, de las conversiones, que implican el tránsito entre registros. La comprensión se evidencia, sobre todo, en la capacidad de convertir una representación en otra sin perder el objeto, y es en este proceso de conversión entre registros donde se localiza la mayoría de las dificultades de aprendizaje.

Esta mirada cognitiva se completa con su dimensión lingüística. Pimm (1987) mostró que la matemática escolar puede analizarse como un lenguaje, con un registro,

en sentido hallidayano, de vocabulario y sintaxis específicos, realizado en modalidades habladas y escritas que no se corresponden punto por punto. En su obra sobre los símbolos, Pimm (1995) anticipó, ante las primeras máquinas con capacidades matemáticas, la tensión entre fluidez y comprensión que hoy reaparece. En el ámbito hispanohablante, Alcalá (2002) desarrolló la perspectiva de la matemática como lenguaje, subrayando los procesos de simbolización y la apropiación progresiva de los códigos notacionales. Reunidas, estas miradas convergen: el lenguaje matemático es el medio constitutivo del pensamiento, con una cara representacional (Duval, 2006), una discursiva (Pimm, 1987) y una génesis escolar entendida como simbolización progresiva (Alcalá, 2002). De ahí se desprende una definición operativa según la cual una respuesta matemática no es un dato, sino una producción semiótica.

2.2 Fluidez sintética, génesis instrumental y comprensión

El efecto más estudiado de los modelos generativos sobre el trabajo estudiantil ha sido denominado fluidez sintética, entendida como la capacidad de producir resultados correctos y soluciones pulidas sin recorrer los procesos de razonamiento que construyen la comprensión (Wang et al., 2025). El fenómeno es congruente con hallazgos revisados por pares sobre la IA generativa, que tiende a homogeneizar el contenido y a reducir su diversidad colectiva (Doshi y Hauser, 2024) y que plantea riesgos de dependencia cognitiva, junto a oportunidades que la misma literatura reconoce (Kasneci et al., 2023). Este paralelismo entre fluidez y comprensión no es del todo nuevo (Pimm, 1995), pero la fluidez sintética lo lleva a un extremo en el que el producto puede desligarse por completo del proceso.

La noción de génesis instrumental ayuda a explicar por qué resulta relevante la forma en que la inteligencia artificial se integra en la actividad cognitiva del estudiante (Vérillon y Rabardel, 1995). Un artefacto no constituye por sí mismo un instrumento de aprendizaje, sino que llega a serlo cuando el aprendiz lo incorpora a su actividad cognitiva. En este proceso coexisten la instrumentación, mediante la cual el artefacto moldea el pensamiento del usuario, y la instrumentalización, por medio de la cual el usuario orienta el artefacto hacia sus propios fines.

El uso formativo de la inteligencia artificial exige que predomine la instrumentalización. Sin embargo, la evidencia preliminar describe un predominio de la instrumentación, en el que el modelo opera como una prótesis que ejecuta el trabajo en lugar del estudiante (Wang et al., 2025). En la misma línea, revisiones recientes advierten sobre el riesgo de sobredependencia y de externalización de habilidades cognitivas y metacognitivas que deberían permanecer en el estudiante (Qian, 2025).

En paralelo, la literatura internacional ha examinado la interacción entre seres humanos e inteligencia artificial y el aprendizaje mediado por esta tecnología. Estos fenómenos se han abordado mediante revisiones sistemáticas y estudios panorámicos (Holmes y Tuomi, 2022; Luckin et al., 2016; Zawacki-Richter et al., 2019), así como desde posiciones críticas (Selwyn, 2019). Asimismo, se han desarrollado bancos de evaluación del razonamiento matemático de los propios modelos, como GSM8K y MATH. Estos recursos documentan avances notables, pero también la persistencia de errores en la resolución de problemas de varios pasos (Cobbe et al., 2021; Hendrycks et al., 2021).

La distinción reactiva la de Skemp (1976) entre comprensión instrumental, la de seguir la regla sin razones, y comprensión relacional, el saber qué hacer y por qué. La fluidez sintética constituye un caso límite, pues el estudiante puede producir el resultado sin poseer siquiera la regla.

2.3 Contrato didáctico y la distinción entre ejercicio y problema

Brousseau (1997) describió el contrato didáctico como el conjunto de expectativas implícitas que regulan la relación entre docente, estudiante y saber. Asignar un problema supone, tácitamente, que resolverlo exige comprometerse con la matemática subyacente. Los modelos generativos pueden romper ese contrato al satisfacer la condición visible de la tarea, como una respuesta correcta, sin su finalidad educativa, en una forma sistematizada del efecto Topaze.

La ruptura del contrato no siempre resulta visible, pues la condición explícita de la tarea queda satisfecha. La evidencia experimental reciente permite observar sus huellas. Cuando estudiantes de matemática practicaron con un modelo generativo sin salvaguardas, su desempeño mejoró durante la práctica, pero cayó por debajo del grupo de control una vez retirada la herramienta (Bastani et al., 2025); en términos del contrato didáctico, la tarea se cumplió sin que ocurriera el compromiso con el saber que la justificaba. El fenómeno se ha descrito también como una forma de externalización o descarga cognitiva (cognitive offloading), en la que el aprendiz delega en un recurso externo procesos que la tarea pretendía ejercitar (Risko y Gilbert, 2016).

La distinción entre ejercicio y problema, central en el enfoque costarricense (Ruiz, 2013), resulta aquí decisiva. Un ejercicio aplica un procedimiento ya conocido; un problema obliga a construirlo y, por ello, moviliza los procesos de representar y comunicar. La evidencia disponible sugiere que, en ausencia de instrucciones que exijan lo contrario, las salidas de los modelos tienden a adoptar la forma del ejercicio, es decir, de un procedimiento indicado de antemano que el estudiante solo debe seguir (Bastani et al., 2025; Jia et al., 2024). Se trata de una tendencia observada y no de una propiedad inevitable; precisamente por ello, la tipología del apartado 4.1 sitúa en el prompt la decisión que puede revertirla.

2.4 Homogeneización del registro y valor epistémico

La literatura sobre escritura asistida por IA documenta un fenómeno de homogeneización según el cual los textos producidos con estos modelos tienden a converger hacia los mismos patrones léxicos y retóricos, que reflejan las regularidades del entrenamiento más que la voz de cada autor (Doshi y Hauser, 2024). En matemática, la voz del estudiante no es un asunto de estilo, sino el conjunto de sus elecciones representacionales y de sus conversiones.

La homogeneización no opera solo sobre el producto final, sino también sobre el repertorio de elecciones que lo precede. Cuando la conversión entre registros se delega en el modelo, lo que se descarga no es un cálculo auxiliar, sino el proceso en el que Duval (2006) sitúa la comprensión. Por ello, la descarga cognitiva puede resultar razonable para tareas rutinarias, pero problemática cuando recae sobre la operación que constituye el aprendizaje (Risko y Gilbert, 2016). De ahí que diversas propuestas de alfabetización en IA insistan en que el usuario debe conservar la capacidad de evaluar y contrastar las salidas del modelo, y no solo la de obtenerlas (Ng et al., 2021).

Esta convergencia tiene un costo epistémico. En los términos de Artigue (2002), el valor pragmático de la herramienta, es decir, su eficacia para resolver la tarea, puede ser alto mientras su valor epistémico (su capacidad de sostener la construcción de significado) queda vacío si la instrumentalización no ocurre. Una respuesta correcta puede, paradójicamente, tener valor epistémico nulo.

2.5 Incidencia de la IA en las respuestas del estudiantado

El marco anterior permite examinar cómo inciden los modelos generativos sobre las respuestas del estudiantado.

La respuesta mediada por IA puede diluir la voz del estudiante, es decir, el modo particular en que pasa del enunciado a la figura, las hesitaciones y las conversiones fallidas que corrige. Considérese la consigna “determine y clasifique los extremos de $f(x) = x^3 - 3x$ ”. Una respuesta genuina de aprendiz suele ser desigual, por ejemplo, tantea valores, esboza la parábola de $f(x) = 3x^2 - 3$, se equivoca con el signo de la segunda derivada y se corrige; y esa producción imperfecta es densa en información diagnóstica. La respuesta generada por un modelo llega ya en forma canónica; plantea $f'(x) = 3x^2 - 3 = 0$, obtiene $x = \pm 1$, evalúa $f''(x) = 6x$ y concluye un máximo local en $x = -1$ y un mínimo local en $x = 1$, con prosa pulcra y genérica. El resultado es correcto y el registro intachable; pero la fricción semiótica, es decir, los procesos de representar y comunicar en acto, desaparece, y con ella el rastro del pensamiento.

El riesgo es doble. Por una parte, la conversión, motor cognitivo para Duval (2006), puede dejar de ejercitarse. Por otra, las respuestas pierden la heterogeneidad que les daba valor diagnóstico, como los errores productivos y las representaciones propias. En ese escenario, el aula se desplazaría hacia un registro único, el del modelo, justamente el desenlace que la reforma costarricense quiso evitar al rechazar las meras operaciones mecánicas (MEP, 2012). Conviene subrayar el estatus de esta afirmación, que es una hipótesis teórica fundada en el fenómeno documentado de homogeneización (Doshi y Hauser, 2024) y no una constatación empírica sobre aulas concretas.

A escala agregada, la evidencia preliminar muestra que la correlación entre el desempeño en tareas no supervisadas, donde la IA está disponible, y el de exámenes presenciales tiende a debilitarse a medida que el contenido se vuelve más conceptual, señal de que el rendimiento no supervisado puede reflejar fluidez sintética antes que comprensión interiorizada (Wang et al., 2025).

2.6 Incidencia de la IA en las respuestas del profesorado

Los modelos inciden también sobre el docente, en dos facetas que conviene distinguir. En la faceta evaluativa, las señales tradicionales de comprensión se debilitan. El docente, que antes podía interpretar la matemática de un trabajo mediante el seguimiento de las conversiones y la localización del punto en que se quebraba el razonamiento, se ve ahora empujado a determinar la autenticidad del texto. La detección automática de texto generado por IA es, sin embargo, poco fiable. Una evaluación de catorce herramientas concluyó que no son ni exactas ni confiables, que tienden a clasificar el texto como humano y que su desempeño empeora ante la paráfrasis (Weber-Wulff et al., 2023). Apoyar la evaluación en estos instrumentos resulta, por tanto, frágil y potencialmente injusto; de ahí que distintos sistemas

universitarios opten por enfoques formativos antes que prohibicionistas (UCR, 2025). La salida que se perfila no es un mejor detector, sino un rediseño de la evaluación hacia procesos observables como defensas orales, trabajo en clase, tareas que exijan justificar las conversiones (Walkington, 2025).

En la faceta productiva, las orientaciones institucionales alientan el uso de la inteligencia artificial para preparar clases y corregir ejercicios (MEP, 2026). Este uso ofrece beneficios reales, como una retroalimentación más abundante y descriptiva y herramientas capaces de afinar el discurso del aula (Kasneci et al., 2023; Walkington, 2025). Sin embargo, el riesgo de homogeneización también opera en este ámbito, y la calidad de la retroalimentación automática no está garantizada. Un estudio comparativo halló que las sugerencias generadas por IA para resolver problemas matemáticos resultaban menos precisas que las elaboradas por docentes (Jia et al., 2024).

Si los problemas, las explicaciones y la retroalimentación provienen del mismo modelo, el registro del aula puede converger hacia una única forma de expresión. En ese escenario, el docente corre el riesgo de dejar de ser una fuente distintiva de lenguaje matemático y convertirse, sin advertirlo, en transmisor del registro del modelo.

Este panorama debe equilibrarse con la evidencia de efectos positivos y diferenciados. Un metaanálisis de 35 estudios experimentales reportó un efecto positivo moderado de ChatGPT sobre los resultados de aprendizaje, con variaciones según la materia, la duración y la modalidad instruccional (Wu et al., 2026). Asimismo, un ensayo aleatorizado halló que un tutor de IA diseñado con andamiaje pedagógico explícito superó a una clase de aprendizaje activo en física universitaria (Kestin et al., 2025).

El estudio de mayor interés para este trabajo es el de Bastani et al. (2025), realizado en matemática escolar. En este estudio, el acceso a un modelo sin salvaguardas mejoró el desempeño durante la práctica, pero lo redujo una vez retirada la herramienta. En cambio, una versión cuyo comportamiento fue configurado mediante prompts orientados a preservar el razonamiento mitigó ese deterioro.

La lectura conjunta de estos resultados no contradice la tesis de este artículo, sino que la precisa. El efecto de la IA sobre el aprendizaje no constituye un atributo inherente de la tecnología, sino que depende del diseño de la interacción, el cual se define, en buena medida, mediante el prompt. Existen incluso indicios de que el andamiaje mediado por IA puede favorecer procesos considerados vulnerables en este trabajo, como la resolución de problemas matemáticos (Zhou et al., 2025). Esta evidencia refuerza la necesidad de criterios de diseño como los propuestos en el apartado 4.1, pero también delimita sus condiciones de éxito. La tipología presupone la intervención de un docente que selecciona, revisa y depura las salidas del modelo, así como un uso deliberado de la herramienta; por ello, cabe esperar que resulte menos efectiva en contextos de uso masivo y no supervisado.

2.7 El caso costarricense: política, currículo e instituciones

A manera de caso, conviene leer en conjunto los tres niveles en que Costa Rica ha abordado la IA en educación, pues ilustran tanto una fortaleza como un punto ciego de interés general.



En el nivel nacional, la Estrategia Nacional de Inteligencia Artificial 2024–2027 fija principios de uso ético, supervisión humana, transparencia y equidad, e incluye la integración de habilidades de IA en todos los niveles educativos (MICITT, 2024). En el nivel escolar, el Ministerio de Educación Pública ha traducido esa estrategia en orientaciones para el aula (MEP, 2026), sobre la base de un currículo que, desde 2012, ya había situado representar y comunicar entre sus procesos centrales (MEP, 2012; Ruiz, 2013). En el nivel universitario, instituciones como la Universidad de Costa Rica han emitido lineamientos y marcos de gobernanza (UCR, 2025), con una coordinación interuniversitaria que ha promovido espacios comunes de reflexión y formación docente.

Leída en conjunto, esta arquitectura de tres niveles resulta valiosa; sin embargo, presenta un punto ciego que interesa a este trabajo. El énfasis dominante de los instrumentos recae sobre la ética, la gobernanza, la protección de datos y la integridad académica, mientras que la dimensión semiótica, es decir, qué ocurre con los procesos de representar y comunicar cuando la respuesta se produce a través de un modelo, permanece subtematizada. La lección es transferible, pues una política de IA en educación matemática que se limite a regular el uso, sin preguntarse por su efecto sobre los procesos que dan sentido al aprendizaje, atiende la superficie del problema y deja intacto su núcleo.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

Este artículo se construye como una propuesta teórico-metodológica fundamentada y no como un estudio empírico. Su elaboración combina tres procedimientos. El primero es una revisión narrativa y crítica de la literatura sobre IA generativa en educación matemática, lenguaje y registros de representación, génesis instrumental y evaluación. La revisión tuvo un carácter selectivo y argumentativo, no sistemático; no se aplicó un protocolo de elegibilidad ni se aspiró a la exhaustividad, de modo que no pretende la reproducibilidad de una revisión sistemática. Las fuentes se localizaron mediante búsquedas realizadas durante 2026 en Google Scholar y SciELO, con una cobertura que privilegió el período 2019–2026 para la literatura sobre IA en educación y que se remonta a las obras fundacionales para los fundamentos semióticos y didácticos. Se priorizaron trabajos revisados por pares y documentos institucionales oficiales; el único preprint incluido se declara como tal y se acompaña de fuentes consolidadas. La selección respondió a la pertinencia conceptual respecto de las dimensiones del lenguaje matemático, y la síntesis se orientó a construir argumentos e identificar la dimensión menos atendida del problema.

El segundo procedimiento es una lectura documental de los marcos que regulan la IA en el sistema educativo costarricense, como la Estrategia Nacional de Inteligencia Artificial (MICITT, 2024), las orientaciones del Ministerio de Educación Pública (MEP, 2026) y los lineamientos universitarios (UCR, 2025), con el fin de situar el problema en un caso concreto.

El tercer procedimiento es la derivación conceptual de la tipología, que no se fijó de antemano, sino que se obtuvo en tres fases. En la primera se identificaron, a partir del marco teórico, las dimensiones del lenguaje matemático vulnerables ante la mediación de un modelo generativo. En la segunda fase, cada dimensión se asoció con

el riesgo específico introducido por la inteligencia artificial y con la decisión de diseño del prompt orientada a mitigarlo. Así, los registros y las conversiones (Duval, 2006) se vincularon con el tránsito entre registros; el sistema escrito de la matemática (Pimm, 1987, 1995), con el uso riguroso de la notación y su adecuada representación; la fluidez sintética (Wang et al., 2025), con la verificación explícita; la diversidad del lenguaje matemático (Alcalá, 2002), con la adecuación del registro al receptor; y el contrato didáctico (Brousseau, 1997), con la distinción entre problema y ejercicio. En la tercera fase, las categorías se contrastaron de manera iterativa con ejemplos redactados para distintas áreas del currículo (Anexo A), lo que permitió depurar sus fronteras y comprobar que cada riesgo identificado quedara cubierto. La Tabla 1 hace explícita la correspondencia resultante. El número de categorías, seis, responde a las dimensiones que el marco identifica como vulnerables y no a una cifra fijada a priori.

Conviene precisar que la tipología se ofrece como un marco inicial y no como un dispositivo empíricamente validado. Su derivación no incluyó la codificación de datos empíricos ni la consulta previa a personas expertas. Asimismo, la experiencia docente presentada en el apartado 4.2 cumple una función estrictamente ilustrativa, pues muestra la plausibilidad de la propuesta, pero no aporta evidencia sistemática. El carácter preliminar y aún no validado empíricamente de la tipología delimita el alcance de la propuesta y define una agenda de validación en tres vías complementarias.

La primera consiste en estudios de aula que documenten el efecto de cada categoría sobre el razonamiento, la representación y la comunicación matemática del estudiantado. La segunda, en análisis de fiabilidad interevaluador que examinen si docentes distintos clasifican los mismos prompts en las mismas categorías. La tercera, en una consulta a especialistas mediante la técnica Delphi que valore la suficiencia del conjunto y la delimitación entre categorías, así como su contraste con otras taxonomías de diseño de prompts.

4. RESULTADOS/DISCUSIÓN

4.1 Una tipología de prompts para preservar la actividad semiótica

Si el riesgo se sitúa en el modo en que se producen las respuestas, la respuesta pedagógica debe situarse en el mismo lugar: el prompt, entendido como la instrucción con la que el docente o el estudiante orienta al modelo. El prompt es el punto en el que se decide si el recurso resultante ejercita o suprime la actividad semiótica, y donde se juega la diferencia entre instrumentación e instrumentalización. Como soporte de redacción, esta sección adopta el modelo de las “Seis R” (rol, resultado, receptor, restricciones, recursos y revisión), propuesto por Ramírez Bogantes et al. (2026) para el diseño de recursos digitales de matemática en secundaria; la sexta R, la revisión, y la curaduría docente posterior operan como el control humano que el marco considera innegociable. A partir de ese soporte se proponen seis categorías de prompts en las que el manejo del lenguaje matemático es la decisión central; los ejemplos completos se ofrecen en el Anexo A.

La primera categoría atiende la notación rigurosa y desambiguada. Responde al criterio de rigor disciplinar y a la advertencia sobre la especificidad del sistema escrito de la matemática (Pimm, 1995), pues los modelos producen con frecuencia una

notación que aparenta corrección, pero la incumple parcialmente; por ejemplo, una base de logaritmo omitida, un nombre de variable que cambia entre ítems o una propiedad falsa presentada como válida. Un prompt de esta categoría fija la notación de antemano y nombra las confusiones que se busca evitar. El principal riesgo de curaduría es que el vocabulario experto aparezca usado con imprecisión, simulando un rigor ausente.

La segunda categoría persigue el tránsito entre registros (Duval, 2006). Busca que el recurso articule simultáneamente al menos dos registros, como el algebraico, el gráfico, el tabular o el verbal, y que haga visible la conversión entre ellos, proceso en el que se evidencia la comprensión. Un explorador que solo muestra una representación incumple el criterio; en cambio, uno que actualiza varios registros de forma sincronizada lo encarna. El riesgo más frecuente es la desincronización entre registros o la incoherencia entre el registro verbal y el gráfico.

La tercera categoría regula el renderizado de la notación. La matemática en texto plano resulta inaccesible, pues el sistema escrito matemático no se reduce a una cadena de caracteres (Pimm, 1987, 1995). Un prompt de esta categoría exige que la simbología se exprese en un lenguaje de marcado matemático y se renderice correctamente, y anticipa los puntos de falla técnica. La fidelidad notacional es, también ella, una condición del lenguaje matemático.

La cuarta categoría introduce la verificación explícita como salvaguarda frente a la fluidez sintética. Dado que los modelos pueden adoptar las marcas formales del rigor sin cumplirlo, por ejemplo, un procedimiento ordenado cuyo último paso no se deduce de los anteriores, y que sus respuestas no siempre son precisas (Jia et al., 2024), un prompt de esta categoría obliga a verificar cada resultado y advierte dónde es probable que el procedimiento falle. La curaduría debe vigilar la coherencia lógica entre pasos que el registro experto fluido tiende a encubrir.

La quinta categoría calibra el registro y la densidad simbólica según el receptor, en la línea de la matemática como apropiación progresiva del lenguaje y de la atención a la diversidad del aula (Alcalá, 2002). El mismo contenido admite distintas dosis de formalización. Para algunas adecuaciones conviene anclar primero la lengua natural y reducir la densidad de símbolos; para el trabajo con altas capacidades, conviene aumentar la formalización y exigir generalización. El riesgo es doble, pues consiste en introducir símbolos sin anclaje verbal o en confundir “mayor dificultad” con “más formalización”.

La sexta categoría procura que el recurso plantee un problema y no un ejercicio. Apoyada en la distinción que vertebra el enfoque costarricense (Ruiz, 2013) y en la noción de contrato didáctico (Brousseau, 1997), busca tareas no rutinarias que movilicen los procesos de representar y comunicar, de modo que el estudiante decida cómo organizar los datos, represente en más de un registro y justifique por escrito su conclusión. El riesgo característico es que el modelo degrade el problema a ejercicio, indicando de antemano el procedimiento que debía construirse.

Las Tablas 1 y 2 presentan, respectivamente, la correspondencia entre las construcciones teóricas y las seis categorías de prompts, así como una síntesis de estas categorías y sus ejemplos. Esta relación no es biunívoca, pues una misma construcción

teórica puede atenderse mediante varias categorías y una categoría puede responder a más de un riesgo. La tipología puede situarse, además, frente a otras taxonomías de diseño de prompts. Los marcos de uso general, como el modelo CLEAR, orientado a la alfabetización informacional mediante prompts concisos, lógicos, explícitos, adaptativos y reflexivos (Lo, 2023), o el propio soporte de las Seis R (Ramírez Bogantes et al., 2026), organizan la forma de la instrucción y son transversales a las disciplinas, pero no se pronuncian sobre el contenido matemático de la interacción. La tipología aquí propuesta se distingue porque su criterio organizador no es la estructura del prompt, sino la dimensión del lenguaje matemático que cada categoría protege, a saber, la notación, la conversión entre registros, el renderizado, la verificación, el registro según el receptor y el estatus de problema. En ese sentido, no compete con los marcos generales, sino que los especializa para la educación matemática.

Tabla 1. Correspondencia entre construcciones teóricas y categorías de prompts

Construcción teórica	Riesgo asociado	Categoría de prompt
Registros de representación y conversión (Duval, 2006)	Recurso de un solo registro; sin conversión	C2 · Tránsito entre registros
Representar y comunicar como procesos curriculares (MEP, 2012; Ruiz, 2013)	La respuesta mediada por IA suprime la actividad semiótica	C6 · Problema, no ejercicio
Fluidez sintética (Wang et al., 2025; Pimm, 1995)	Producto pulido sin razonamiento	C4 · Verificación explícita
Contrato didáctico; ejercicio frente a problema (Brousseau, 1997; Ruiz, 2013)	La IA degrada el problema a ejercicio	C6 · Problema, no ejercicio
Rigor disciplinar y sistema escrito (Pimm, 1987, 1995)	Notación que aparenta corrección, pero la incumple	C1 y C3 · Notación y renderizado
Matemática como lenguaje y diversidad (Alcalá, 2002)	Registro único; densidad simbólica inadecuada	C5 · Registro calibrado al receptor
Instrumentalización frente a instrumentación (Vérillon y Rabardel, 1995; Artigue, 2002)	El modelo opera como prótesis, no como andamiaje	Las seis categorías + curaduría docente

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 2. Síntesis de las seis categorías de prompts y sus ejemplos

Categoría	Eje de lenguaje matemático	Ejemplo (área del Programa MEP)
C1	Notación rigurosa y desambiguada	Logaritmos (Relaciones y álgebra)
C2	Tránsito entre registros	Sistemas 2×2 (Relaciones y álgebra)
C3	Renderizado de la notación	Radicales y exponentes (Números)
C4	Verificación explícita	Ecuaciones con radicales (Relaciones y álgebra)
C5	Registro calibrado al receptor	Perímetro y área (Geometría)
C6	Problema, no ejercicio	Frecuencia relativa (Estadística y probabilidad)

Fuente: Elaboración propia.

4.2 Una experiencia de aula que ilustra la tipología

Esta sección no presenta resultados empíricos ni una validación de la tipología, sino una experiencia de aula que permite ilustrarla mediante una lectura retrospectiva. La tipología se derivó previamente en el plano conceptual; corresponde ahora mostrar cómo algunas de sus categorías se manifestaron en una situación educativa concreta.

Para ello, se recurre a una experiencia desarrollada durante el primer semestre de 2026 en el curso Ecuaciones Diferenciales (EM4610) de la carrera de Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos del Instituto Tecnológico de Costa Rica. Participó un grupo de once estudiantes y se incorporó un componente de uso de IA generativa organizado en cinco actividades breves, realizadas en clase, una por sesión y en parejas o tríos.

Cada actividad se vinculó con un tema del programa y con una herramienta distinta: un resumen en audio con NotebookLM sobre ecuaciones separables y homogéneas; un artefacto interactivo con Claude sobre técnicas de primer orden; un material de estudio redactado conjuntamente con un editor de documentos asistido por IA sobre ecuaciones lineales homogéneas de orden superior; una resolución comparativa entre varios modelos sobre transformada de Laplace; y un informe de síntesis elaborado con una IA de búsqueda sobre las funciones de Heaviside y la delta de Dirac.

El diseño se apoyó en los modelos TPACK (Mishra y Koehler, 2006) y SAMR (Puentedura, 2006). La rúbrica de evaluación no premiaba la mera obtención de la respuesta, sino el criterio mostrado por el estudiante al utilizar la herramienta, como la detección de errores, la reflexión pedagógica y la incorporación de aportes propios. La copia de la salida del modelo recibía una calificación nula (Acuña Chacón, 2026).

Este criterio coincide con el principio rector de la tipología: determinar si el uso de la IA ejercita o suprime la actividad semiótica. Por ello, la experiencia constituye un terreno propicio para ilustrar las categorías. Los episodios que se presentan a continuación provienen de las cinco actividades; se han omitido los nombres del estudiantado y los grupos se identifican de forma genérica.

Actividad 1: resumen en audio

La primera actividad permitió observar tensiones relacionadas con el registro calibrado al receptor (C5). El resumen en audio explicaba los conceptos con fluidez, pero no formulaba ninguna ecuación concreta y omitía las condiciones de existencia y unicidad, así como los dominios de validez.

Ante esta limitación, un grupo propuso una tarea en la que los estudiantes debían contrastar el lenguaje divulgativo del audio con el rigor propio del discurso matemático. Esta propuesta coincide con el propósito de C5, pues exige adecuar el registro al receptor sin renunciar a la precisión conceptual.

Actividad 2: artefacto interactivo

La verificación explícita (C4) y la notación rigurosa (C1) se hicieron visibles en torno a un clasificador de ecuaciones de primer orden generado con Claude. Al examinarlo,

el grupo descubrió que el artefacto no operaba directamente sobre el objeto matemático, sino sobre patrones de texto.

Una ecuación que era simultáneamente separable y homogénea se rotulaba únicamente como separable «por su forma». Además, categorías que no se excluyen entre sí, como lineal y exacta, se trataban como incompatibles. Al repetir la clasificación, los pasos e incluso la categoría asignada cambiaban, y en algunos desarrollos desaparecían términos.

El episodio ilustra la tesis central de este trabajo: una salida fluida puede aparentar corrección mientras incumple el sistema notacional y conceptual que afirma manejar. La corrección no provino de un prompt aislado más afortunado, sino de la curaduría docente, que permitió revisar y reorientar la interacción.

El renderizado de la notación (C3) también apareció en esta actividad. Una pareja exigió en su prompt que toda la matemática se escribiera en LaTeX, pero que se mostrara compuesta mediante una biblioteca de renderizado, de modo que el usuario «nunca viera el código crudo». Esta formulación constituye una manifestación espontánea de C3.

Actividad 3: material de estudio co-redactado

En la tercera actividad se manifestó el problema inverso relacionado con el renderizado de la notación. Al exportar a PDF el material generado en el editor de documentos, las expresiones matemáticas aparecían como código sin compilar y las definiciones de las variables quedaban separadas del texto. Solo después de utilizar otra vía de exportación se recuperó una notación legible.

El episodio confirmó que el sistema escrito de la matemática no se reduce a una cadena de caracteres (Pimm, 1987, 1995). La presentación gráfica de los símbolos, su relación con el texto y la definición explícita de las variables forman parte de la producción del significado matemático.

El documento también incluía espacios para que el estudiante respondiera preguntas y elaborara un ejemplo propio. Al exigir una producción que el aprendiz debía completar, revisar y corregir, la actividad recuperaba la voz que una respuesta cerrada del modelo tiende a borrar. De este modo, se aproximaba a la categoría de problema, no ejercicio (C6).

Actividad 4: resolución comparativa

En la cuarta actividad, los estudiantes resolvieron un mismo problema de transformada de Laplace con dos modelos y mediante un procedimiento manual. Posteriormente, construyeron una tabla en la que compararon la notación, los pasos y los errores de cada solución.

Los estudiantes observaron que uno de los modelos resolvía «de manera más algorítmica, como si ya se entendiera el tema». La ausencia de un desarrollo suficientemente explícito dificultaba comprobar la existencia de errores. Esta observación expresa, en palabras del propio estudiantado, la fluidez sintética y el riesgo

de homogeneización del registro descritos en la literatura (Wang et al., 2025; Doshi y Hauser, 2024).

El grupo concluyó que la IA podía ayudar a avanzar en la resolución, pero que no convenía confiar en sus respuestas sin contrastarlas con el libro o con los materiales proporcionados por el docente. Esta conclusión refleja la verificación explícita (C4) y la curaduría que el marco considera innegociables.

Actividad 5: informe de síntesis

La quinta actividad consistió en elaborar, mediante una IA de búsqueda, un informe de síntesis sobre aplicaciones de las funciones de Heaviside y la delta de Dirac. En este caso, la verificación explícita (C4) se extendió desde el procedimiento matemático hacia la revisión de las fuentes.

La consigna exigía acceder al menos a dos de las fuentes citadas por la herramienta y confirmar que la información fuera fidedigna. Un grupo comprobó que sus cuatro fuentes respaldaban las afirmaciones presentadas. Otro encontró que una referencia atribuida a un texto clásico de ecuaciones diferenciales no sustentaba directamente el modelo específico que pretendía justificar. La obra presentaba el concepto general y un circuito diferente, pero no la aplicación citada.

Este hallazgo prolonga la tesis central hacia el registro de la citación. Una salida puede aparentar respaldo bibliográfico con la misma fluidez con la que aparenta corrección notacional.

En esta actividad también reapareció la tensión entre el registro divulgativo y el rigor matemático (C5). Un grupo observó que la síntesis mencionaba la utilidad del método de Heaviside, pero no formulaba ni resolvía explícitamente la ecuación asociada. Asimismo, se manifestó la necesidad de curar el formato (C3), pues la herramienta de síntesis visual incumplió las especificaciones de diseño y el grupo debió migrar a otra aplicación para obtener el documento solicitado. De los cuatro grupos participantes en esta sesión de cierre, tres entregaron el informe.

La Tabla 3 resume la correspondencia observada entre las actividades y las categorías ilustradas. Conviene, sin embargo, precisar su alcance. La experiencia no constituye una validación empírica de la tipología. Las actividades se diseñaron a partir de TPACK y SAMR, y no con el propósito de poner a prueba las seis categorías. Por tanto, la lectura realizada es ilustrativa y retrospectiva.

Además, el número de estudiantes es reducido, la experiencia corresponde a un único grupo y la categoría de tránsito entre registros (C2) quedó menos representada que las restantes. El aporte de la experiencia consiste en ofrecer evidencia de plausibilidad: las categorías permiten nombrar decisiones y dificultades que emergen de manera espontánea en el trabajo real de futuros docentes. Asimismo, proporciona un punto de partida concreto para el proceso de validación que se plantea más adelante.

Tabla 3. Correspondencia entre las actividades del rubro y las categorías ilustradas

Actividad (herramienta)	Tema del programa	Categorías ilustradas
1 · Resumen en audio (NotebookLM)	ED separables y homogéneas	C5; tensión fluidez-rigor
2 · Artefacto interactivo (Claude)	Técnicas de primer orden	C1, C3, C4; instrumentalización
3 · Material co-redactado (editor con IA)	ED lineales de orden superior	C3, C6; voz del estudiante
4 · Resolución comparativa (varios modelos)	Transformada de Laplace	C1, C3, C4; curaduría docente
5 · Informe de síntesis (IA de búsqueda)	Heaviside y Delta de Dirac	C3, C4, C5; verificación de fuentes

Fuente: Elaboración propia.

4.3 Implicaciones para la práctica y la formación docente

De lo anterior se desprende una orientación que no se reduce a la falsa disyuntiva entre prohibir y permitir. Las guías institucionales ganarían en profundidad si, además de regular el uso ético, formularan cómo preservar los procesos de representar y comunicar. El criterio rector no debería ser solo si el uso es honesto y seguro, sino si ejercita o suprime la actividad semiótica del estudiante. En el plano didáctico, conviene privilegiar la instrumentalización sobre la instrumentación, es decir, enseñar a interrogar al modelo, a leer críticamente sus salidas y a contrastarlas con definiciones formales, y rediseñar la evaluación hacia procesos observables, especialmente en los cursos de servicio masivos. Finalmente, la retroalimentación apoyada en IA debe permanecer específica y anclada en el trabajo de cada estudiante, no delegarse por completo.

4.4 Limitaciones

Este trabajo presenta limitaciones que conviene explicitar. La primera es su naturaleza teórico-metodológica, pues la tipología es una propuesta conceptual aún no validada en el aula, por lo que sus efectos sobre el razonamiento, la representación y la comunicación deben verificarse empíricamente. La experiencia ilustrativa del apartado 4.2, basada en un único grupo reducido y de lectura retrospectiva, no supe esa validación. La segunda es que parte de la evidencia sobre la fluidez sintética proviene de literatura muy reciente y, en algún caso, preliminar (Wang et al., 2025), lo que aconseja prudencia interpretativa. La tercera es que el caso analizado es costarricense; aunque la lección se plantea como transferible, su traslado a otros contextos requiere atender sus particularidades. Estas limitaciones definen, a la vez, una agenda de investigación que comprende estudios de aula sobre el efecto de las categorías de prompts en la actividad semiótica, análisis de fiabilidad interevaluador, consultas a especialistas y análisis comparados de los marcos institucionales que regulan la IA en educación matemática.

5. CONCLUSIONES

Este trabajo se propuso fundamentar, desde una perspectiva teórico-metodológica, la incidencia de los modelos generativos sobre las respuestas matemáticas de estudiantes y docentes, y derivar una tipología de prompts orientada a

preservar la actividad semiótica. Ambos propósitos convergen en una misma constatación conceptual. El medio de la matemática es el lenguaje, de modo que aprender matemática es, en gran medida, aprender a moverse entre registros y a apropiarse de un sistema notacional. Los modelos generativos se han instalado como coautores de ese lenguaje a ambos lados del aula, y moldean tanto las respuestas del estudiantado como las del profesorado. El riesgo no proviene del error de la máquina, sino de su corrección uniforme, que amenaza con disolver la fricción semiótica de la que vive el aprendizaje.

Antes que prohibir o permitir, la tarea consiste en mantener viva y humana la actividad semiótica, y en traducir esa convicción en decisiones de diseño como la tipología aquí propuesta. Esa convicción encuentra apoyo en la evidencia reciente, pues los efectos de la IA sobre el aprendizaje matemático se muestran positivos o perjudiciales según el diseño de la interacción (Bastani et al., 2025; Kestin et al., 2025), lo que confirma que el prompt, y no la herramienta en abstracto, es el lugar pedagógicamente decisivo. Queda pendiente su validación en el aula y su articulación con los marcos institucionales, de modo que la política no solo regule el uso de la IA, sino que proteja las condiciones en que la actividad matemática conserva su valor epistémico. En último término, quien moldea el lenguaje matemático moldea la matemática que se aprende.

DECLARACIÓN ÉTICA Y DE CONSENTIMIENTO INFORMADO

La experiencia documentada se desarrolló en el marco de la actividad docente ordinaria del curso. El estudiantado otorgó su consentimiento informado para el uso, con fines exclusivamente académicos y de forma anonimizada, de sus producciones. No se reportan nombres, números de carné ni otros datos que permitan la identificación de las personas participantes.

DECLARACIÓN DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

RAC concibió la idea presentada, desarrolló el marco teórico-metodológico, diseñó e implementó el rubro de uso de IA en el curso, derivó la tipología de prompts, analizó los episodios de aula y redactó, revisó y aprobó la versión final del manuscrito.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Los materiales que respaldan los hallazgos de este estudio, las consignas del rubro y las producciones anonimizadas del estudiantado están disponibles, previa solicitud razonable y con resguardo de la confidencialidad, por parte del autor correspondiente, RAC.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece a las personas estudiantes del curso EM4610 (Ecuaciones Diferenciales, I semestre 2026) de la carrera de Enseñanza de la Matemática con Entornos Tecnológicos del Instituto Tecnológico de Costa Rica, cuyas producciones hicieron posible la experiencia ilustrativa que aquí se documenta.

6. REFERENCIAS

- Acuña Chacón, R. (2026). *Uso de IA generativa (5 %): actividades de diseño de modelos interactivos y resolución de problemas con IA* [Programa del curso EM4610, Ecuaciones Diferenciales]. Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica.
- Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Graó.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245–274. <https://doi.org/10.1023/A:1022103903080>
- Bastani, H., Bastani, O., Sungu, A., Ge, H., Kabakcı, Ö. y Mariman, R. (2025). Generative AI without guardrails can harm learning: Evidence from high school mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 122(26), e2422633122. <https://doi.org/10.1073/pnas.2422633122>
- Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics: Didactique des mathématiques, 1970–1990*. Kluwer Academic Publishers.
- Cobbe, K., Kosaraju, V., Bavarian, M., Chen, M., Jun, H., Kaiser, L., Plappert, M., Tworek, J., Hilton, J., Nakano, R., Hesse, C. y Schulman, J. (2021). *Training verifiers to solve math word problems* [Preprint]. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2110.14168>
- Doshi, A. R. y Hauser, O. P. (2024). Generative AI enhances individual creativity but reduces the collective diversity of novel content. *Science Advances*, 10(28), eadn5290. <https://doi.org/10.1126/sciadv.adn5290>
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143–168.
- Hendrycks, D., Burns, C., Kadavath, S., Arora, A., Basart, S., Tang, E., Song, D. y Steinhardt, J. (2021). Measuring mathematical problem solving with the MATH dataset. En J. Vanschoren y S. Yeung (Eds.), *Proceedings of the Neural Information Processing Systems Track on Datasets and Benchmarks* (Vol. 1). Neural Information Processing Systems Foundation. <https://datasets-benchmarks-proceedings.neurips.cc/paper/2021/hash/be83ab3ecd0db773eb2dc1b0a17836a1-Abstract-round2.html>
- Holmes, W. y Tuomi, I. (2022). State of the art and practice in AI in education. *European Journal of Education*, 57(4), 542–570. <https://doi.org/10.1111/ejed.12533>
- Jia, J., Wang, T., Zhang, Y. y Wang, G. (2024). The comparison of general tips for mathematical problem solving generated by generative AI with those generated by human teachers. *Asia Pacific Journal of Education*, 44(1), 8–27. <https://doi.org/10.1080/02188791.2023.2286920>

- Kasneci, E., Sessler, K., Küchemann, S., Bannert, M., Dementieva, D., Fischer, F., Gasser, U., Groh, G., Günemann, S., Hüllermeier, E., Krusche, S., Kutyniok, G., Michaeli, T., Nerdel, C., Pfeffer, J., Poquet, O., Sailer, M., Schmidt, A., Seidel, T., ... Kasneci, G. (2023). ChatGPT for good? On opportunities and challenges of large language models for education. *Learning and Individual Differences*, 103, 102274. <https://doi.org/10.1016/j.lindif.2023.102274>
- Kestin, G., Miller, K., Klales, A., Milbourne, T. y Ponti, G. (2025). AI tutoring outperforms in-class active learning: An RCT introducing a novel research-based design in an authentic educational setting. *Scientific Reports*, 15, 17458. <https://doi.org/10.1038/s41598-025-97652-6>
- Lo, L. S. (2023). The CLEAR path: A framework for enhancing information literacy through prompt engineering. *The Journal of Academic Librarianship*, 49(4), 102720. <https://doi.org/10.1016/j.acalib.2023.102720>
- Luckin, R., Holmes, W., Griffiths, M. y Forcier, L. B. (2016). *Intelligence unleashed: An argument for AI in education*. Pearson.
- Ministerio de Ciencia, Innovación, Tecnología y Telecomunicaciones [MICITT]. (2024). *Estrategia Nacional de Inteligencia Artificial 2024–2027*. MICITT. https://www.micitt.go.cr/gobierno_digital/inteligencia_artificial
- Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de estudio de Matemáticas: I y II ciclo de la Educación Primaria, III ciclo de Educación General Básica y Educación Diversificada*. <https://www.mep.go.cr/sites/default/files/media/matematica.pdf>
- Ministerio de Educación Pública. (2026). *Guía docente para el uso de la inteligencia artificial en el aula*. <https://www.mep.go.cr/sites/default/files/2026-02/GuiaDocenteIA.pdf>
- Mishra, P. y Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017–1054. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM.
- Ng, D. T. K., Leung, J. K. L., Chu, S. K. W. y Qiao, M. S. (2021). Conceptualizing AI literacy: An exploratory review. *Computers and Education: Artificial Intelligence*, 2, 100041. <https://doi.org/10.1016/j.caeai.2021.100041>
- Pimm, D. (1987). *Speaking mathematically: Communication in mathematics classrooms*. Routledge & Kegan Paul.
- Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics*. Routledge.
- Puentedura, R. R. (2006). *Transformation, technology, and education*. Hippasus. <http://hippasus.com/resources/tte/>

- Qian, Y. (2025). Pedagogical applications of generative AI in higher education: A systematic review of the field. *TechTrends*, 69, 1–18. <https://doi.org/10.1007/s11528-025-01100-1>
- Ramírez Bogantes, M., Gutiérrez Montenegro, M., Acuña Chacón, R. y Meza Cascante, L. G. (2026). *De la idea al aula. Diseñar experiencias de aprendizaje con IA: prompts para crear recursos interactivos en secundaria*. Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica. <https://hdl.handle.net/2238/18937>
- Risko, E. F. y Gilbert, S. J. (2016). Cognitive offloading. *Trends in Cognitive Sciences*, 20(9), 676–688. <https://doi.org/10.1016/j.tics.2016.06.007>
- Ruiz, Á. (2013). La reforma de la educación matemática en Costa Rica. Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8(número especial). <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem>
- Selwyn, N. (2019). *Should robots replace teachers? AI and the future of education*. Polity.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20–26.
- Universidad de Costa Rica. (2025). *Lineamientos generales para la implementación de la inteligencia artificial en la Universidad de Costa Rica* (Resolución de Rectoría R-469-2025). UCR. <https://www.cu.ucr.ac.cr/gacetas/2025/a70-2025.pdf>
- Vérillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education*, 10(1), 77–101. <https://doi.org/10.1007/BF03172796>
- Walkington, C. (2025). The implications of generative artificial intelligence for mathematics education. *School Science and Mathematics*. Publicación anticipada en línea. <https://doi.org/10.1111/ssm.18356>
- Wang, S., Xia, Q. y Ye, Q. (2025). *Synthetic fluency and epistemic offloading in undergraduate mathematics in the age of AI* [Preprint]. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arXiv.2512.21045>
- Weber-Wulff, D., Anohina-Naumeca, A., Bjelobaba, S., Foltýnek, T., Guerrero-Dib, J., Popoola, O., Šigut, P. y Waddington, L. (2023). Testing of detection tools for AI-generated text. *International Journal for Educational Integrity*, 19(1), 26. <https://doi.org/10.1007/s40979-023-00146-z>
- Wu, X., Zhu, P., Zhang, J., Yin, M. y Wang, Y. (2026). ChatGPT's impact on student learning outcomes: A meta-analysis of 35 experimental studies. *Humanities and Social Sciences Communications*, 13, 684. <https://doi.org/10.1057/s41599-026-07019-z>
- Zawacki-Richter, O., Marín, V. I., Bond, M. y Gouverneur, F. (2019). Systematic review of research on artificial intelligence applications in higher education: Where are the educators? *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, 16, 39. <https://doi.org/10.1186/s41239-019-0171-0>

Zhou, R., He, X., Fan, Q., Li, Y., Li, Y., Xiao, X. y Fang, J. (2025). Exploring ChatGPT-facilitated scaffolding in undergraduates' mathematical problem solving. *Journal of Computer Assisted Learning*, 41(4), e70077. <https://doi.org/10.1111/jcal.70077>

ANEXO A. EJEMPLOS DE PROMPTS BAJO EL MODELO DE LAS SEIS R

Los siguientes ejemplos ilustran las seis categorías del apartado 4.1. Son ejemplos originales; varían el tema, el área del Programa de Estudios del MEP y el contexto. La estructura sigue las Seis R: [ROL], [RESULTADO], [RECEPTOR], [RESTRICCIONES], [RECURSOS] y [REVISIÓN].

A1. Notación rigurosa y desambiguada (Relaciones y álgebra, décimo año)

[ROL] Diseñador de recursos de matemática para secundaria, con criterio de rigor en notación algebraica. [RESULTADO] Práctica guiada en HTML autocontenido sobre propiedades de los logaritmos y ecuaciones logarítmicas sencillas. [RECEPTOR] Décimo año, 15-16 años. Conocen la definición de logaritmo como exponente. [RESTRICCIONES] Notación obligatoria y consistente: base siempre explícita ($\log_2(x)$, nunca “ $\log x$ ”); distinguir $\log$ de $\ln$; misma incógnita (x) en todos los ítems. Recuadro de ERROR FRECUENTE con la igualdad falsa $\log(a+b)=\log a+\log b$ frente a la propiedad $\log_b(a \cdot c)=\log_b a+\log_b c$. [RECURSOS] Habilidad MEP (Relaciones y álgebra): aplicar propiedades de los logaritmos. Ejemplos verificados: $\log_2(8)=3$; $\log_3(x)=4 \rightarrow x=81$; $\log_5(x)+\log_5(2)=\log_5(10) \rightarrow x=5$. [REVISIÓN] Ninguna expresión “ $\log$ ” sin base; $\log$ y $\ln$ nunca como sinónimos; misma incógnita en todos los ítems; recuadro de error correcto.

A2. Tránsito entre registros (Relaciones y álgebra, décimo año)

[ROL] Diseñador pedagógico atento a la articulación de registros de representación. [RESULTADO] Explorador en HTML autocontenido de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y solución única. [RECEPTOR] Décimo año. Conocen la ecuación de la recta y el plano cartesiano. [RESTRICCIONES] Al mover los coeficientes con deslizadores, se actualizan a la vez CUATRO registros: algebraico ($ax+by=c$), gráfico (las dos rectas y su intersección), tabular (tres pares por recta) y verbal (frase que describe la solución). Los casos sin solución o con infinitas se describen bien. [RECURSOS] Habilidad MEP: resolver sistemas y relacionarlos con la intersección gráfica. Caso inicial: $x+y=5$ y $x-y=1$, solución (3, 2). [REVISIÓN] Al mover un deslizador cambian los cuatro registros; la frase verbal coincide con el gráfico.

A3. Renderizado correcto de la notación (Números, noveno año)

[ROL] Programador educativo de matemática para secundaria. [RESULTADO] Práctica guiada en HTML autocontenido sobre radicales y exponentes racionales, con la notación renderizada. [RECEPTOR] Noveno año. Conocen potencias de exponente entero. [RESTRICCIONES] Toda expresión en LaTeX renderizado por KaTeX (CDN oficial), nunca como texto plano; delimitadores ... correctamente cerrados; el colón costarricense como símbolo de moneda fuera de modo matemático; si se inyectan ítems dinámicamente, reinvocar el renderizado de KaTeX tras insertarlos. [RECURSOS] Habilidad MEP (Números): convertir entre radicales y exponentes racionales. Ejemplos verificados: raíz cúbica de x al cuadrado = $x^{(2/3)}$; raíz de $50 = 5 \cdot \text{raíz de } 2$; $8^{(2/3)} = 4$. [REVISIÓN] Ningún delimitador abierto; raíces y exponentes compuestos; la notación se renderiza también en los ítems generados dinámicamente.

A4. Verificación explícita (Relaciones y álgebra, décimo año)

[ROL] Diseñador de matemática con criterio de verificación estricta de los procedimientos. [RESULTADO] Práctica guiada en HTML autocontenido sobre ecuaciones con radicales, con énfasis en soluciones extrañas. [RECEPTOR] Décimo año. Resuelven ecuaciones lineales y cuadráticas básicas. [RESTRICCIONES] Cada ejercicio muestra la verificación de cada candidato sustituyéndolo en la ecuación original y declara si es válida o extraña. Incluir al menos un ejercicio con solución extraña y explicar por qué surge. Recuadro con dos errores típicos: dividir entre una expresión que puede ser cero, y olvidar verificar las soluciones. [RECURSOS] Habilidad MEP: resolver ecuaciones con radicales y validar soluciones. Ejemplos verificados: raíz de $(x+3)=x-3 \rightarrow$ candidatas $x=1$ y $x=6$, solo $x=6$ válida; raíz de $(2x+1)=3 \rightarrow x=4$, válida. [REVISIÓN] Cada solución se sustituye en la ecuación original; la extraña se identifica como tal; cada paso se sigue del anterior.

A5. Registro calibrado al receptor (Geometría, octavo año)

[ROL] Diseñador de matemática sensible a la adecuación del registro al estudiantado. [RESULTADO] DOS versiones de una misma práctica guiada en HTML autocontenido sobre perímetro y área de figuras compuestas. [RECEPTOR] Octavo año. Versión A: estudiante con discalculia. Versión B: estudiante con altas capacidades. [RESTRICCIONES] Versión A (densidad simbólica reducida): cada paso primero en lenguaje natural y luego la fórmula; una operación por renglón; apoyo visual de la figura. Versión B (formalización ampliada): notación general ($A=(b \cdot h)/2$ con b y h parámetros), expresar el área como suma algebraica y generalizar con medidas literales. [RECURSOS] Habilidad MEP (Geometría): perímetro y área por descomposición. Figura verificada: rectángulo $6 \text{ cm} \times 4 \text{ cm}$ con triángulo de base 6 cm y altura 3 cm ; área total $24 + 9 = 33 \text{ cm}^2$. [REVISIÓN] En A, una operación por renglón; en B, generalización literal correcta; ambas con el mismo resultado numérico.

A6. Problema, no ejercicio (Estadística y probabilidad, sétimo año)

[ROL] Diseñador pedagógico con enfoque de resolución de problemas. [RESULTADO] Un problema (no un ejercicio) en HTML autocontenido sobre frecuencia relativa, que pida representar los datos de más de una forma y comunicar una conclusión por escrito. [RECEPTOR] Sétimo año. Comparan fracciones y porcentajes sencillos. [RESTRICCIONES] Debe ser un problema: el procedimiento no se indica de antemano. Dos registros: tabla de frecuencias (absoluta y relativa) y gráfico de barras; y una conclusión en lenguaje natural. Espacio para justificar; la retroalimentación valora la justificación, no solo el número. [RECURSOS] Habilidad MEP (Estadística y probabilidad): calcular e interpretar frecuencias relativas. Contexto verificado: encuesta a 25 estudiantes sobre el medio de transporte: 10 a pie, 8 en bus, 5 en bicicleta, 2 en carro. Pregunta: ¿qué medio supera la cuarta parte del grupo y cómo lo justificas? [REVISIÓN] Las frecuencias relativas suman 1 (o 100 %); la tarea no revela el procedimiento; la conclusión exige leer los dos registros.

ANEXO B. PROMPTS REALES DE LA EXPERIENCIA DE AULA (ANONIMIZADOS)

A diferencia del Anexo A, los siguientes son los prompts efectivamente redactados por el estudiantado del curso EM4610 durante las actividades del apartado 4.2. Se reproducen de forma textual —con cortes señalados mediante [...] cuando son extensos— y no contienen datos personales. Cada uno se acompaña de la categoría que ilustra y del aprendizaje que dejó.

B1. Artefacto interactivo de primer orden (actividad 2). Ilustra C1, C3 y C4.

Actúa como un desarrollador experto en React y diseña un artefacto interactivo completamente funcional en un solo archivo, orientado al aprendizaje de ecuaciones diferenciales de primer orden. [...] El artefacto debe integrar dos funcionalidades principales [...]: por un lado, un generador automático de ejercicios con soluciones paso a paso ocultas, y por otro, un detector de errores en soluciones matemáticas. [...] Es muy importante que todas las ecuaciones matemáticas y expresiones se escriban utilizando LaTeX, pero que no se muestren como código LaTeX. En su lugar, deben renderizarse visualmente como matemáticas correctamente formateadas en pantalla (por ejemplo, usando una librería como KaTeX o MathJax). El usuario nunca debe ver el código LaTeX crudo [...]. La generación de ejercicios debe basarse en coeficientes aleatorios sencillos (enteros pequeños) para evitar complejidad innecesaria [...]. En el módulo de detector de errores, [...] estos errores deben ser realistas y representar fallos comunes de los estudiantes, como errores algebraicos, uso incorrecto del factor integrante, mala separación de variables o errores en la integración. [...] Se recomienda el uso de colores con significado pedagógico: verde para indicar respuestas correctas, rojo para errores y azul para acciones o botones interactivos. [...]

La exigencia de renderizar la notación —«el usuario nunca debe ver el código LaTeX crudo»— es una formulación espontánea de C3; el módulo de detección de errores y la

lista de fallos típicos materializan C4. Un prompt correctivo posterior pidió que «el nuevo código [se hiciera] en formato HTML» para resolver una falla en la generación de ejercicios.

B2. Clasificador de ecuaciones de primer orden (actividad 2). Ilustra C1 y C4, y la tesis central.

Hola Claude. Puedes diseñar un clasificador interactivo HTML en donde se le permita al usuario ingresar una ecuación diferencial de primer orden y que el artefacto indique si la ecuación diferencial se debe resolver con los siguientes métodos: separable, homogénea, exacta, Bernoulli, Clairaut, lineales, no exactas y casi homogéneas. Además, según el método que indique, muestra un procedimiento general [...]. Para el input de la ecuación queremos que sea una casilla en donde el usuario pueda ingresar CUALQUIER forma de ED de primer orden y que el artefacto la entienda y sugiera el método [...]. En caso de que el usuario ingrese algo que no corresponda a una ecuación diferencial de primer orden puedes indicar que no es una ED de primer orden.

El grupo descubrió que el artefacto «se generó utilizando regex [...], lo que identifica patrones de texto, no realiza cálculos matemáticos»: una ecuación a la vez separable y homogénea se rotulaba solo como separable, las categorías lineal y exacta se trataban como excluyentes, y al reejecutar la clasificación cambiaban los pasos y «desaparecían números» (por ejemplo, con la ecuación $dy/dx = x + y + xy$). Es el caso más nítido de la tesis del artículo y de la necesidad de verificación explícita (C4).

B3. Material de estudio co-redactado, orden superior (actividad 3). Ilustra C5 y C6.

Necesito que desarrolles un resumen teórico-práctico sobre el tema de ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de orden superior con coeficientes constantes que incluya la ecuación auxiliar, tipos de raíces, formas de la solución general y un ejemplo resuelto. Debes desarrollarlo de tal manera que funcione como un material de estudio para un estudiante que faltó a la clase en la cual se explicó dicho tema. Entonces necesito que se desarrolle un borrador que permita al usuario (estudiantes) editar, corregir y ampliar la información en dicho recurso.

El destinatario explícito —«un estudiante que faltó a la clase»— calibra el registro (C5); pedir un borrador para editar, corregir y ampliar, con espacios para que el estudiante responda preguntas y proponga un ejemplo propio, acerca la tarea a la categoría de problema, no ejercicio (C6). Al exportar el material a PDF, la notación se filtró como código LaTeX sin compilar (C3) y solo se recuperó legible al reexportar por otra vía.

B4. Batalla de IA con la transformada de Laplace (actividad 4). Ilustra C3 y C4.

Resuelve mediante la Transformada de Laplace el siguiente problema de valor inicial: $3y''(t) + y'(t) - y(t) = t \cdot U(t - 1)$, con condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$. Muestra paso a paso: 1. la transformada de cada término; 2. el uso de propiedades de Laplace (derivadas, traslación, función Heaviside); 3. la ecuación en el dominio de s ; 4. la solución $Y(s)$; 5. la transformada inversa para obtener $y(t)$; 6. verifica que la solución cumple las condiciones iniciales. En cada paso, incluye una breve justificación de por qué se aplica esa propiedad o procedimiento.

El mismo problema se resolvió con dos modelos y a mano, y se contrastó en un cuadro. El grupo observó que uno de los modelos resolvía «de manera [...] más algorítmica, haciendo una resolución como si se entendiera ya el tema», lo que volvía «más difícil verificar si hay errores por la falta de desarrollo»: una caracterización, en sus propias palabras, de la fluidez sintética. La exigencia final de entregar la respuesta «en formato LaTeX» vuelve sobre C3, y la conclusión del grupo —contrastar siempre con «libros o el material provisto por el docente»— sobre C4 y la curaduría docente.



MODELO GEOIA-M PARA LA MEDIACIÓN DEL RAZONAMIENTO MATEMÁTICO EN CÁLCULO UNIVERSITARIO CON INTELIGENCIA ARTIFICIAL GENERATIVA Y GEOGEBRA

GEOIA-M MODEL FOR MEDIATING MATHEMATICAL REASONING
IN UNIVERSITY CALCULUS WITH GENERATIVE ARTIFICIAL
INTELLIGENCE AND GEOGEBRA

Marco Gutiérrez Montenegro¹



ORCID iD: <https://orcid.org/0009-0004-0293-1578>

RESUMEN

La incorporación de inteligencia artificial (IA) generativa en la enseñanza universitaria del cálculo ha avanzado con rapidez, pero muchas de las prácticas observadas conservan un carácter instrumental y orientado a la obtención de respuestas, lo que favorece que el estudiante delegue su razonamiento en la herramienta. Este artículo, de naturaleza teórico-metodológica, propone y fundamenta el Modelo GeoIA-M, una arquitectura didáctica para mediar el razonamiento matemático en cursos de cálculo diferencial e integral, en la que la IA generativa actúa como interlocutor que problematiza y GeoGebra como entorno de exploración, representación y validación. A partir de una revisión narrativa y crítica de literatura reciente y del análisis didáctico de tareas prototípicas de cálculo universitario, el modelo se organiza en cinco dimensiones —exploración, visualización, argumentación, metacognición y reflexión ética— y siete fases de implementación, situando el razonamiento del estudiante en el centro del proceso. Se desarrollan dos ejemplos de cálculo universitario, sobre optimización con derivadas y sobre integral definida y acumulación, con protocolos de construcción dinámica, prompts de consulta socrática y criterios de evaluación del proceso. El aporte central es una arquitectura didáctica inicial para orientar prácticas de aula y formación docente en Educación Matemática universitaria, susceptible de validación empírica posterior.

¹Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica. Correo electrónico: vgutierrez@itcr.ac.cr



Palabras clave: razonamiento matemático, cálculo universitario, inteligencia artificial generativa, GeoGebra, mediación didáctica.

ABSTRACT

The integration of generative artificial intelligence (AI) into university calculus teaching has advanced rapidly, yet many observed practices remain instrumental and answer-oriented, which encourages students to delegate their reasoning to the tool. This theoretical-methodological paper proposes and grounds the GeoIA-M Model, a didactic architecture for mediating mathematical reasoning in differential and integral calculus courses, in which generative AI acts as an interlocutor that problematizes and GeoGebra as an environment for exploration, representation and validation. Drawing on a narrative and critical review of recent literature and on the didactic analysis of prototypical university calculus tasks, the model is organized into five dimensions —exploration, visualization, argumentation, metacognition and ethical reflection— and seven implementation phases, placing student reasoning at the center of the process. Two university calculus examples are developed, on optimization with derivatives and on the definite integral and accumulation, including dynamic construction protocols, Socratic querying prompts and process-oriented assessment criteria. The main contribution is an initial didactic architecture to guide classroom practices and teacher education in university Mathematics Education, open to subsequent empirical validation.

Keywords: mathematical reasoning, university calculus, generative artificial intelligence, GeoGebra, didactic mediation.

1. INTRODUCCIÓN

La irrupción de las herramientas de inteligencia artificial (IA) generativa ha modificado, en muy pocos años, las preguntas que docentes e investigadores se formulan sobre la enseñanza universitaria. Las revisiones disponibles coinciden en que estas tecnologías abren oportunidades de personalización, retroalimentación y acceso, al tiempo que plantean desafíos relativos a la integridad académica, los sesgos y la dependencia cognitiva (Michel-Villarréal et al., 2023; Jensen et al., 2024; Qian, 2025). En el campo específico del cálculo, donde el valor formativo reside menos en la respuesta que en el proceso de razonamiento que conduce a ella, esa tensión adquiere un matiz particular: una herramienta capaz de producir soluciones plausibles de manera inmediata puede, paradójicamente, debilitar aquello que la enseñanza pretende cultivar.

El problema no es nuevo en su forma, pero sí en su escala. El uso más extendido de la IA generativa en contextos de aprendizaje matemático consiste en solicitar la solución de un ejercicio; esa práctica, cómoda y comprensible, encierra un riesgo que la investigación reciente ha comenzado a documentar. Un estudio con estudiantes de secundaria mostró que el acceso a tutores basados en IA sin las salvaguardas adecuadas puede perjudicar el aprendizaje, en la medida en que la herramienta opera como un recurso que sustituye el esfuerzo cognitivo (Bastani et al., 2025). Aunque esta evidencia proviene de un contexto escolar y no universitario, su traslado al cálculo universitario debe asumirse con cautela: el estudio no prueba directamente el efecto en educación superior, pero advierte un riesgo relevante para el diseño didáctico. El hallazgo es relevante porque matiza el optimismo: no es la herramienta en sí, sino el modo de uso, lo que determina su efecto formativo.

Frente a este escenario conviene recordar que la educación matemática universitaria cuenta desde hace tiempo con recursos tecnológicos cuyo aporte a la comprensión ha sido documentado de forma consistente. GeoGebra ocupa un lugar central entre ellos. La evidencia acumulada a lo largo de dos décadas sugiere que su uso favorece el logro matemático, en particular en cálculo y geometría (Zhang et al., 2023), y diversos estudios reportan mejoras en la comprensión conceptual y en el razonamiento (Bedada y Machaba, 2022; Negara et al., 2022). Lo que distingue a GeoGebra no es la rapidez del cálculo, sino su capacidad para representar dinámicamente los objetos matemáticos y conectar registros distintos, una propiedad especialmente valiosa para sostener la transición entre la intuición y la formalización (Duval, 2004; Del Río, 2016).

Este artículo parte de una premisa sencilla: si la IA generativa y la visualización dinámica se incorporan de forma separada y fundamentalmente instrumental, su potencial didáctico tiende a diluirse. La IA se usa como solucionador y GeoGebra como verificador pasivo, sin que ninguno active de manera sostenida los procesos de exploración, argumentación y reflexión que dan sentido al aprendizaje del cálculo. Se requiere, por tanto, una propuesta que ordene pedagógicamente esa integración y que ponga el razonamiento, y no la herramienta, en el centro.

El objetivo de este trabajo es proponer y fundamentar el Modelo GeoIA-M, entendido no como una manera de «usar IA y GeoGebra», sino como una arquitectura didáctica para mediar el razonamiento matemático en cálculo universitario. En esta arquitectura, la IA generativa y GeoGebra son medios al servicio de tres ámbitos articulados del trabajo matemático: la exploración y la formulación de conjeturas; el tránsito entre representaciones y la visualización dinámica; y la validación, la argumentación y el control del error. A estos ámbitos se suman, como componentes transversales, la metacognición y el uso ético y crítico de herramientas inteligentes. No se trata de un estudio empírico, sino de una construcción teórico-metodológica que se ofrece como marco inicial y reconoce, desde el principio, la necesidad de validación posterior en el aula.

La contribución del Modelo GeoIA-M es, así, una propuesta de mediación: una manera de organizar la tarea de cálculo para que la potencia de la IA y la visualización no reemplacen el razonamiento del estudiante, sino que lo provoquen, lo sostengan y lo expongan a la crítica. El manuscrito se organiza de la siguiente manera. Tras esta introducción se exponen los elementos teóricos que sustentan la propuesta; luego se describe el abordaje metodológico; a continuación, se presenta el modelo, sus dimensiones y principios, y la secuencia de implementación; después se desarrollan dos ejemplos de cálculo universitario; y, finalmente, se discuten los alcances, las implicaciones para la formación docente y las limitaciones de la propuesta.

2. ELEMENTOS TEÓRICOS

La fundamentación del Modelo GeoIA-M se organiza en torno a seis ejes que, leídos en conjunto, delimitan el vacío didáctico que la propuesta busca atender. En cada eje se construye un argumento (antes que un catálogo de autores) y se cierra señalando de qué modo ese eje alimenta el modelo.

2.1 Inteligencia artificial generativa y razonamiento matemático

El cuerpo de trabajos sobre IA generativa en educación superior es todavía predominantemente exploratorio y se orienta a delimitar oportunidades y riesgos. Las revisiones tempranas advierten que el entusiasmo inicial debe templarse con una mirada crítica (Jensen et al., 2024), y los estudios de percepción muestran actitudes mayoritariamente favorables junto con preocupaciones por la precisión y el desarrollo personal (Chan y Hu, 2023). En el dominio matemático los resultados son prometedores pero condicionados: el uso de IA puede potenciar la comprensión conceptual y la autoeficacia cuando se atienden los sesgos y las limitaciones técnicas (Canonigo, 2024; El Fathi et al., 2025), y en cálculo los estudiantes valoran su efecto sobre la participación (Serhan y Welcome, 2024). Sin embargo, persiste una advertencia doble. Por un lado, la IA generativa puede inducir sobredependencia y la externalización de habilidades cognitivas y metacognitivas que deberían permanecer en el estudiante (Qian, 2025; Zafar et al., 2024). Por otro, sus respuestas no siempre son correctas: un estudio comparativo encontró que las sugerencias generales para resolver problemas matemáticos producidas por IA resultaban menos precisas que las elaboradas por docentes (Jia et al., 2024).

Una línea particularmente pertinente es la de los enfoques de orientación socrática. Distintos trabajos sostienen que un diseño que privilegia el cuestionamiento sobre la entrega de respuestas puede promover el pensamiento autónomo y contrarrestar la sobredependencia (Degen, 2025; Degen y Asanov, 2025; Lee et al., 2025), y en la formación de ingenieros se han descrito sistemas que mejoran las conductas de resolución mediante guía socrática (Goyal et al., 2025). Las revisiones sobre tutores inteligentes matizan, no obstante, que sus efectos suelen ser moderados (Létourneau et al., 2025), lo que invita a no sobrestimar su alcance. Debe tenerse presente, además, que varias de estas fuentes son preprints o protocolos de estudio y que la revisión citada se centra en educación K-12; por ello, más que evidencia consolidada, ofrecen una línea promisorio y resultados preliminares, propios de un campo aún en consolidación, cuyo traslado al cálculo universitario debe asumirse con prudencia. De este eje el modelo retiene un principio operativo: en el aula de cálculo la IA es más valiosa cuando interroga que cuando responde.

2.2 GeoGebra, visualización dinámica y registros de representación

El aporte de GeoGebra a la educación matemática cuenta con respaldo empírico amplio. Un metaanálisis que recoge dos décadas de investigación reporta un efecto positivo de magnitud media a grande sobre el logro matemático, más marcado en cálculo y geometría (Zhang et al., 2023). En el nivel universitario se documentan efectos favorables en cálculo (Bedada y Machaba, 2022; Nonghanpitak et al., 2022) y en la comprensión de las integrales mediante representaciones dinámicas (Milenković et al., 2024), así como avances en el pensamiento computacional en lecciones de cálculo (Chytas et al., 2024). En lengua española, un estudio universitario reporta mejoras en el aprendizaje de transformaciones lineales y una reducción de la ansiedad matemática (Tejada Ramírez, 2025), y se ha argumentado el valor de GeoGebra como recurso de equidad en el acceso a la matemática (Vásquez Bernal, 2024). Lo que la literatura sostiene de manera convergente es que el valor de GeoGebra reside en sus posibilidades

de exploración y de conexión de representaciones, más que en su desempeño como calculadora (Kllogjeri y Kllogjeri, 2024).

Este aporte se comprende mejor a la luz de la teoría de los registros de representación semiótica. Duval (2004) sostiene que la actividad matemática exige movilizar y coordinar distintos registros (gráfico, numérico, algebraico, verbal) y que la comprensión radica precisamente en la capacidad de convertir una representación en otra sin perder el objeto. Las investigaciones sobre representaciones múltiples confirman que la representación potencia el razonamiento cuando se acompaña de andamiajes y tareas secuenciadas, y no por su mera presencia (Ünal et al., 2023; Abraham y Prediger, 2024; Medina Herrera et al., 2024). De aquí el modelo deriva una exigencia: en GeoGebra la visualización no es un fin, sino un puente que debe conducir a la conversión consciente entre registros y, desde allí, a la argumentación.

2.3 Argumentación, validación y control del error en cálculo

Si las respuestas de la IA no siempre son precisas (Jia et al., 2024) y su desempeño en tareas visuales y en idiomas locales presenta limitaciones (Švičević et al., 2025, evidencia procedente de un contexto de competición escolar que debe trasladarse con cautela al ámbito universitario), entonces la validez matemática no puede delegarse en la herramienta. En cálculo, esto significa que la argumentación comprende la justificación de por qué un punto crítico es máximo, de por qué una integral representa una acumulación y de por qué una aproximación converge; esa labor de validación matemática debe permanecer como responsabilidad del estudiante. El error, lejos de ser un fracaso, se convierte en objeto de análisis: una respuesta plausible pero incorrecta de la IA o una conjetura fallida del propio estudiante, ofrecen material privilegiado para discutir condiciones, dominios y supuestos. El modelo incorpora, por tanto, el control del error como una actividad deliberada y no como un accidente.

2.4 Metacognición en la resolución de problemas de cálculo

La dimensión metacognitiva aparece en la literatura de dos maneras complementarias. Por un lado, como una capacidad que la IA mal empleada podría debilitar, en la medida en que la externalización de procesos puede alcanzar también a la planificación y la autorregulación (Qian, 2025). Por otro, como un componente que ciertos diseños incorporan de manera intencionada: se han descrito sistemas para matemática avanzada que integran retroalimentación y elementos metacognitivos para apoyar la preparación de los estudiantes (Fang et al., 2024). La lectura conjunta sugiere que la metacognición no es un subproducto automático del uso de tecnología, sino un objetivo que debe diseñarse. El modelo la sitúa como cierre explícito de cada tarea de cálculo.

2.5 Formación docente y contexto latinoamericano

La integración efectiva de tecnologías emergentes depende de manera crítica de las competencias y decisiones del docente. La literatura sobre GeoGebra es explícita: sus beneficios se ven limitados por la formación insuficiente y el acceso desigual (Batiibwe, 2024). En el caso de la IA generativa se insiste en la necesidad de alfabetización específica y de un diseño curricular que conciba estas herramientas como apoyo y no sustituto de la función docente (Chan y Colloton, 2024; Kurtz et al., 2024; van den Berg y du Plessis, 2023; Eager y Brunton, 2023). Para la educación superior

latinoamericana esta condición es decisiva: la región cuenta con una comunidad activa de usuarios de GeoGebra y con experiencias documentadas en español (Del Río, 2016; Tejada Ramírez, 2025; Vásquez Bernal, 2024), pero la valoración de la calidad de los procesos de estudio exige criterios explícitos de idoneidad didáctica (Godino, 2013). Puede inferirse que cualquier modelo que articule IA y GeoGebra será tan eficaz como lo permita la mediación del docente que lo implementa.

2.6 El vacío didáctico que justifica el Modelo GeoIA-M

La síntesis anterior permite formular el vacío que motiva este trabajo. La literatura ofrece evidencia robusta sobre el aporte de GeoGebra a la comprensión y la visualización, y un cuerpo creciente, aunque más exploratorio, sobre las oportunidades y los riesgos de la IA generativa. Existen también aproximaciones a la mediación socrática, a los registros de representación y a la metacognición. Sin embargo, estos campos tienden a desarrollarse en paralelo. No se identificó una propuesta que articule de modo explícito y secuenciado la IA generativa, la visualización dinámica, la argumentación, la metacognición y la reflexión ética en un mismo diseño orientado al cálculo universitario. Esa articulación, más que la incorporación aislada de cada recurso, constituye el espacio en el que se inscribe el Modelo GeoIA-M.

2.7 El Modelo GeoIA-M frente a marcos consolidados

Conviene situar la propuesta en relación con marcos teóricos consolidados, no para reemplazarlos sino para precisar su aporte. Respecto de la idoneidad didáctica (Godino, 2013), el Modelo GeoIA-M no la sustituye: puede dialogar con ella como una concreción orientada al diseño de tareas que incorporan inteligencia artificial generativa y GeoGebra en cálculo universitario, en la medida en que sus dimensiones pueden interpretarse en términos de las facetas epistémica, cognitiva y mediacional. El modelo TPACK (Mishra y Koehler, 2006) ayuda a comprender los saberes tecnológicos, pedagógicos y disciplinares que el docente requiere para integrar tecnología; el Modelo GeoIA-M, en cambio, no describe esos saberes sino que propone una arquitectura didáctica y una secuencia concreta para mediar el razonamiento. Por su parte, la orquestación instrumental (Drijvers et al., 2010) permite comprender cómo el docente organiza los artefactos y las configuraciones del aula; el Modelo GeoIA-M especifica una forma particular de orquestar la IA generativa y GeoGebra al servicio de la exploración, la visualización, la argumentación, la metacognición y la reflexión ética.

Así entendida, la originalidad del Modelo GeoIA-M no reside en una ruptura con estos marcos, sino en la articulación de componentes que suelen estudiarse por separado (mediación socrática con IA, visualización dinámica, argumentación, metacognición y reflexión ética) en un diseño secuenciado y específico para el cálculo universitario. En esa articulación, la dimensión de visualización se apoya en los registros de representación semiótica de Duval (2004), que el modelo integra en lugar de confrontar.

3. ABORDAJE METODOLÓGICO

Este artículo se construye como una propuesta didáctico-metodológica fundamentada, no como un estudio empírico. Su elaboración combina dos procedimientos. El primero es una revisión narrativa y crítica de literatura reciente sobre IA generativa en educación superior y matemática, GeoGebra y visualización dinámica,

representaciones semióticas, metacognición y formación docente. No se trata de una revisión sistemática con protocolo de elegibilidad y síntesis cuantitativa, sino de una lectura interpretativa orientada a construir argumentos y a identificar un vacío didáctico.

El segundo procedimiento es el análisis didáctico de dos tareas prototípicas de cálculo universitario: la optimización con derivadas y la integral definida. Estas tareas ilustran la operatividad del modelo y muestran cómo operaría en contenidos concretos; no constituyen, sin embargo, evidencia empírica de su eficacia. El diseño de estas tareas prototípicas se orienta por la coordinación de registros de representación (Duval, 2004) y por criterios de idoneidad didáctica, especialmente en sus facetas epistémica, cognitiva y mediacional (Godino, 2013), de modo que los ejemplos funcionen como ilustraciones analíticas del modelo y no como resultados de implementación.

La revisión narrativa siguió un procedimiento transparente. Se consideraron fuentes localizadas en bases y repositorios académicos como Scopus, Web of Science, ERIC, SciELO, Redalyc, Dialnet y Google Académico, complementadas con repositorios institucionales y de acceso abierto. Para la inteligencia artificial generativa y GeoGebra se priorizó literatura reciente, publicada aproximadamente entre 2022 y 2025, mientras que los marcos teóricos clásicos (registros de representación, idoneidad didáctica y metacognición) se consultaron sin restricción temporal.

La búsqueda combinó descriptores en español e inglés, entre ellos inteligencia artificial generativa, ChatGPT, razonamiento matemático, cálculo universitario, GeoGebra, visualización dinámica, tutoría socrática, metacognición y registros de representación, así como generative AI, mathematical reasoning, calculus education, dynamic visualization, Socratic tutoring y metacognition. Como criterios de inclusión se consideraron trabajos arbitrados pertinentes para la mediación del razonamiento en matemática y educación superior; como criterios de exclusión se descartaron aquellos centrados en aspectos técnicos de los modelos sin implicaciones didácticas o ajenos al objeto de estudio. Los preprints se utilizaron de manera prudente y quedan señalados como tales.

Conviene precisar que el Modelo GeoIA-M se presenta como una propuesta teórico-metodológica y no como un modelo empíricamente validado. En consecuencia, el artículo no reporta resultados de implementación en aula, sino que articula aportes de la literatura reciente con una reflexión didáctica orientada al diseño de tareas en educación matemática universitaria. Esta condición no reduce el valor de la propuesta, pero sí delimita su alcance: el modelo requiere futuras investigaciones que analicen su pertinencia, sus posibilidades de transferencia y sus efectos sobre el razonamiento, la argumentación y la metacognición matemática del estudiantado.

Cabe precisar, asimismo, el papel de la experiencia docente universitaria del autor. Esta experiencia funciona como antecedente profesional y como criterio de problematización didáctica que orienta la identificación de tensiones y la formulación de la propuesta, pero no constituye una fuente de datos empíricos ni evidencia de eficacia. En consecuencia, el artículo no reporta resultados de aula, no analiza datos de estudiantes ni implementaciones con participantes humanos, por lo que no procede declarar un conjunto de datos empíricos asociado al estudio.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

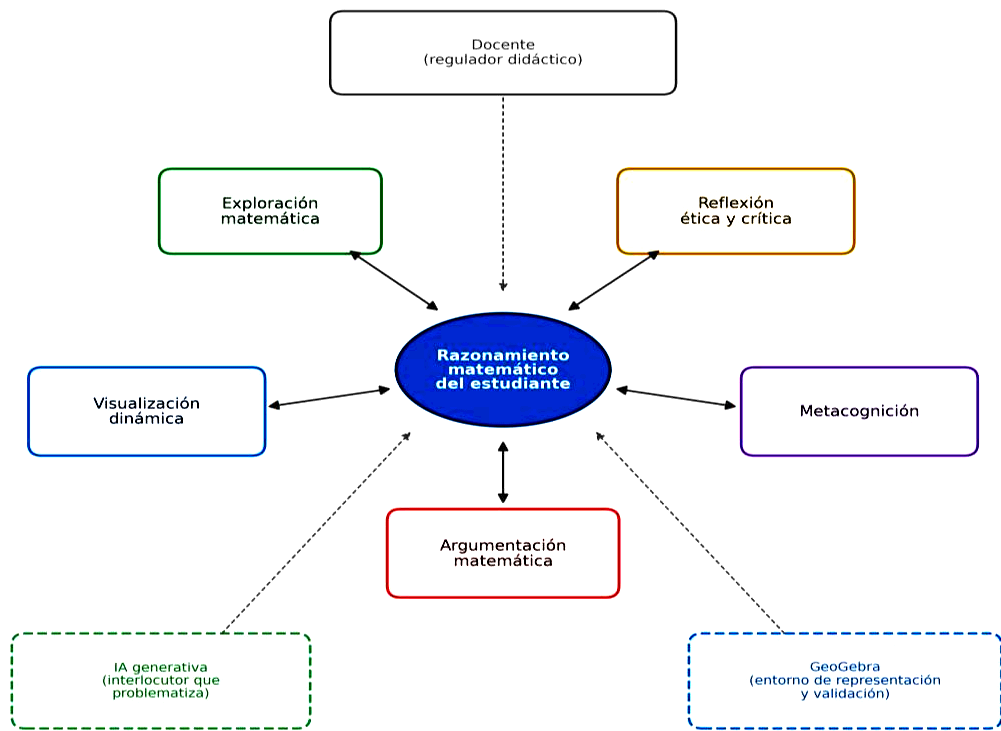
4.1 Modelo GeoIA-M: arquitectura de mediación del razonamiento

El Modelo GeoIA-M se sostiene sobre tres premisas que se desprenden de la revisión anterior. La primera es que el aprendizaje del cálculo se beneficia de la manipulación y conexión de representaciones, pero solo cuando la representación se inscribe en una tarea con propósito y va acompañada de mediación (Duval, 2004; Abraham y Prediger, 2024). La segunda es que la IA generativa resulta más valiosa cuando interroga que cuando responde, pues el cuestionamiento puede activar un pensamiento más deliberado mientras la evidencia disponible advierte que el acceso sin salvaguardas puede producir efectos contrarios, si bien dicha evidencia procede de contextos escolares y debe trasladarse con cautela a la educación universitaria (Degen, 2025; Bastani et al., 2025). La tercera es que la validez matemática no puede delegarse en la herramienta, dado que sus respuestas no siempre son precisas (Jia et al., 2024; Švičević et al., 2025). De estas premisas surge el principio rector del modelo: la IA provoca, cuestiona, acompaña y retroalimenta; el razonamiento matemático permanece en manos del estudiante.

4.2 Dimensiones del modelo

El Modelo GeoIA-M puede entenderse como una estructura de cinco dimensiones organizadas en torno al razonamiento del estudiante, que ocupa el centro del proceso. Las dimensiones no operan de manera lineal ni independiente, sino que se entrelazan a lo largo de una situación de aprendizaje. La exploración matemática asistida sitúa a la IA como apoyo para generar preguntas, reformular problemas y proponer conjeturas que el estudiante examina con criterio. La visualización dinámica corresponde al territorio de GeoGebra: representar, manipular y simular para conectar registros y poner a prueba conjeturas. La argumentación matemática exige justificar, contrastar, validar o refutar tanto las propias conjeturas como las respuestas de la IA. La metacognición invita a reflexionar sobre procedimientos, errores y estrategias. La reflexión ética y crítica busca que el estudiante use la IA reconociendo sus límites, sesgos y responsabilidades académicas. La Figura 1 representa esta arquitectura y la Tabla 1 precisa la función de cada recurso en cada dimensión. Las relaciones entre el razonamiento del estudiante, que ocupa el centro, y cada una de las dimensiones son bidireccionales: el razonamiento orienta el uso de cada recurso y, a la vez, se nutre de lo que cada dimensión aporta.

Figura 1. Arquitectura del Modelo GeoIA-M para la mediación del razonamiento matemático



Fuente: Elaboración propia.

Las flechas dobles indican relaciones bidireccionales entre el razonamiento del estudiante y cada dimensión; la IA y GeoGebra actúan como mediadores y el docente como regulador del proceso.

Tabla 1. Dimensiones didácticas del Modelo GeoIA-M

Dimensión	Función de la IA generativa	Función de GeoGebra	Evidencia de razonamiento matemático
Exploración matemática	Genera preguntas, reformula el problema y sugiere conjeturas y variantes.	Permite variar parámetros y observar regularidades antes de formalizar.	El estudiante delimita el problema y formula conjeturas propias.
Visualización dinámica	Propone qué representaciones conviene contrastar y por qué.	Representa y conecta los registros gráfico, numérico y simbólico.	El estudiante convierte entre registros y los interpreta.

Argumentación matemática	Devuelve preguntas que exigen justificar afirmaciones y descartar casos.	Ofrece material gráfico-numérico para sostener o refutar la conjetura.	El estudiante justifica con criterios matemáticos y valida resultados.
Metacognición	Pregunta por las estrategias, los errores y las decisiones tomadas.	Permite revisar la construcción y rehacer el camino seguido.	El estudiante explicita y regula su propio proceso de resolución.
Reflexión ética y crítica	Se somete a verificación; se discuten sus límites y posibles sesgos.	Sirve de contraste independiente frente a la respuesta automática.	El estudiante usa la IA con criterio y asume la responsabilidad académica.

Fuente: Elaboración propia.

4.3 Principios pedagógicos

La arquitectura se traduce en siete principios que ordenan las decisiones didácticas del docente.

Primero, la centralidad del razonamiento: el criterio último de cualquier tarea es que el razonamiento permanezca en el estudiante (Qian, 2025; Bastani et al., 2025, evidencia procedente de contextos escolares que se traslada con cautela al nivel universitario).

Segundo, la visualización como puente entre intuición y formalización, de modo que la representación dinámica conduzca a la conversión consciente entre registros (Duval, 2004; Zhang et al., 2023).

Tercero, la IA como mediación y no como sustitución: la herramienta debe preguntar más de lo que responde (Degen, 2025; van den Berg y du Plessis, 2023).

Cuarto, el error como oportunidad: las respuestas imprecisas de la IA y las conjeturas fallidas se aprovechan como material de análisis (Jia et al., 2024).

Quinto, la argumentación como condición de validez: ninguna respuesta se acepta sin justificación.

Sexto, la metacognición como cierre del proceso, diseñada de manera intencionada (Fang et al., 2024).

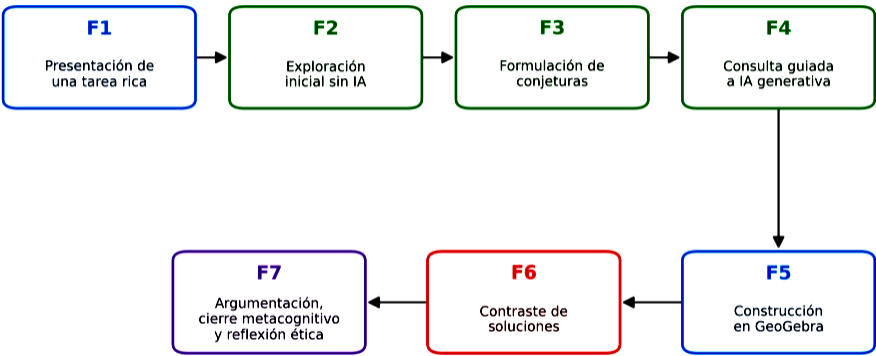
Séptimo, el uso ético y crítico de herramientas inteligentes, que debe enseñarse y no suponerse (Michel-Villarreal et al., 2023; Hashmi y Bal, 2024).

4.4 Secuencia de implementación didáctica

El modelo se concreta en una secuencia de siete fases que el docente adapta según el contenido y el nivel del curso. La secuencia, representada en la Figura 2 y descrita en la Tabla 2, busca que la IA y GeoGebra intervengan en momentos específicos y no como reemplazo del trabajo autónomo inicial. La ubicación de la exploración sin IA antes de la consulta a la herramienta no es casual: responde a evidencia que, aunque procede de contextos escolares, advierte que el acceso temprano y sin restricciones a

respuestas automáticas puede operar como un apoyo que desplaza el razonamiento autónomo y debilita el aprendizaje; su traslado al cálculo universitario se asume aquí como un supuesto didáctico prudente, no como una prueba directa (Bastani et al., 2025). Reservar un espacio inicial de trabajo autónomo y emplear después la IA con un propósito de cuestionamiento (Degen, 2025) preserva el valor formativo del esfuerzo propio.

Figura 2. Secuencia didáctica del Modelo GeoIA-M (siete fases)



Fuente: Elaboración propia.

La secuencia es orientadora y admite ajustes según el contenido y el contexto.

Tabla 2. Fases de implementación didáctica del Modelo GeoIA-M

Fase	Acción del estudiante	Acción del docente	Uso de la IA generativa	Uso de GeoGebra y evidencia esperada
F1	Interpreta una tarea rica de cálculo con más de una vía.	Plantea la situación y explicita el objetivo de razonamiento.	—	Sin uso aún; se espera la comprensión del problema.
F2	Explora con lápiz y papel y activa conocimientos previos.	Observa y registra concepciones iniciales.	Sin uso (trabajo autónomo).	Sin uso; se espera una primera conjetura propia.
F3	Formula conjeturas y anticipa el	Promueve la explicitación de las conjeturas.	Sin uso (autonomía).	Esbozo gráfico opcional; se espera una

	comportamiento del objeto.			hipótesis argumentable.
F4	Consulta a la IA con preguntas, no pide la solución.	Regula el intercambio para que la IA problematice.	Devuelve preguntas y rutas; no entrega respuestas cerradas.	Se espera el refinamiento de la conjetura.
F5	Construye y manipula el objeto dinámicamente.	Orienta la construcción y la lectura de registros.	Sugiere qué representaciones contrastar.	Construcción dinámica; se espera la conexión entre registros.
F6	Compara solución analítica, respuesta de IA y gráfico.	Problematiza discrepancias y pide criterios.	Se somete a verificación frente al desarrollo propio.	Contraste visual; se espera la detección de errores.
F7	Argumenta, revisa estrategias y valora el uso de la IA.	Cierra con discusión metacognitiva y ética.	Objeto de reflexión sobre límites y responsabilidad.	Revisión de la construcción; se espera una justificación validada.

Fuente: Elaboración propia.

4.5 Ejemplos de aplicación en cálculo universitario

A continuación, se desarrollan dos ejemplos de cálculo universitario. En cada caso se muestra el desarrollo matemático, el protocolo de construcción dinámica en GeoGebra, el prompt de consulta a IA y la forma en que las siete fases del Modelo GeoIA-M se concretan en la tarea.

4.5.1 Ejemplo 1. Optimización con derivadas

Enunciado. Con una lámina rectangular de $40 \text{ cm} \times 25 \text{ cm}$ se desea construir una caja sin tapa recortando cuadrados iguales de lado x en las esquinas y doblando las pestañas. Determinar el valor de x que maximiza el volumen de la caja.

Objetivo didáctico y conceptos. Modelar una función a partir de una situación, identificar su dominio físico, derivar e interpretar los puntos críticos y distinguir el máximo pertinente del contexto. Se ponen en juego la modelación, el dominio, la derivada, los puntos críticos y el criterio de la segunda derivada.

Tabla 3. Aplicación de las fases del Modelo GeoIA-M al ejemplo de optimización con derivadas

Fase	Acción del estudiante	Acción del docente	Uso de la IA generativa	Uso de GeoGebra y evidencia esperada
F1	Interpreta la situación de la caja sin tapa, identifica la lámina de 40 cm × 25 cm, el corte de lado x y el volumen por maximizar.	Presenta el reto y aclara que se valorará la modelación, el dominio, la validación y no solo el resultado.	No se usa todavía.	Sin uso; se espera comprensión de datos, variables y objetivo de la tarea.
F2	Dibuja la lámina, reconoce que las dimensiones cambian con x y anticipa que el volumen dependerá de una función.	Solicita explicar qué representa x y qué restricciones físicas aparecen.	No se usa todavía.	Puede apoyarse en un bosquejo manual; se espera una primera representación del problema.
F3	Propone $V(x)=x(40-2x)(25-2x)$ y conjetura que el máximo debe estar dentro del dominio físico.	Pide justificar la función y revisar si todas las expresiones tienen sentido en el contexto.	No se usa para resolver.	Se espera una conjetura funcional y un dominio preliminar.
F4	Consulta a la IA con un prompt socrático para revisar función, dominio, puntos críticos y significado del máximo.	Regula que la IA formule preguntas orientadoras y no entregue la solución completa.	Pregunta por el dominio, las dimensiones de la caja y el criterio para validar el máximo.	Se espera refinamiento de la función y del dominio antes de graficar.
F5	Construye el deslizador x, define $V(x)$, grafica la función y representa la caja dinámica.	Orienta la lectura de la gráfica y la relación entre la caja y la función de volumen.	Puede sugerir qué elementos conviene representar, pero no valida por sí sola.	GeoGebra muestra gráfica, punto máximo y variación de la caja; se espera conexión entre registros.

F6	Compara el cálculo analítico, la respuesta de la IA y la gráfica de GeoGebra.	Problematiza discrepancias y pide justificar por qué se descarta $x=50/3$.	La respuesta de IA se somete a verificación mediante el desarrollo propio.	Se espera validar el máximo en $x=5$ y el volumen 2250 cm^3 .
F7	Explica la estrategia seguida, los errores posibles y el aporte de cada herramienta.	Cierra con preguntas sobre dependencia de la IA, validación y responsabilidad matemática.	Puede apoyar preguntas de reflexión, no redactar la conclusión final.	Se espera una reflexión escrita sobre proceso, uso crítico de IA y papel de GeoGebra.

Fuente: Elaboración propia.

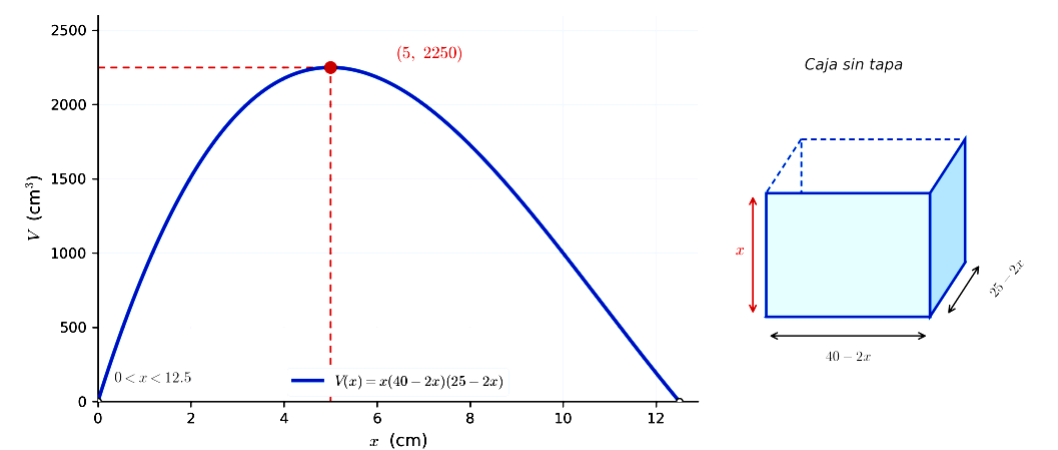
Desarrollo matemático. Al recortar cuadrados de lado x , la base mide $(40 - 2x)$ por $(25 - 2x)$ y la altura es x , de modo que el volumen es

$$V(x) = x(40 - 2x)(25 - 2x) = 4x^3 - 130x^2 + 1000x.$$

El dominio físico es $0 < x < 12,5$, pues la dimensión menor, $25 - 2x$, debe ser positiva. Derivando, $V'(x) = 12x^2 - 260x + 1000$; al igualar a cero y simplificar (dividiendo entre 4) se obtiene $3x^2 - 65x + 250 = 0$, cuyas raíces son $x = 5$ y $x = 50/3 \approx 16,7$. Solo $x = 5$ pertenece al dominio. Como $V''(x) = 24x - 260$ y $V''(5) = -140 < 0$, el punto $x = 5$ es un máximo. El volumen máximo es $V(5) = 5 \cdot 30 \cdot 15 = 2250 \text{ cm}^3$.

Interpretación. Recortar cuadrados de 5 cm de lado produce la caja de mayor capacidad, 2250 cm^3 . En los extremos del dominio el volumen tiende a cero (al no haber altura cuando $x \rightarrow 0$, o al anularse la base cuando $x \rightarrow 12,5$), lo que explica por qué el óptimo es interior. La Figura 3 muestra la gráfica de $V(x)$ y un esquema de la caja; la Tabla 4 detalla el protocolo de construcción en GeoGebra.

Figura 3. Simulación del problema de optimización: volumen $V(x)$ y caja sin tapa



Fuente: Elaboración propia con base en una construcción reproducible en GeoGebra.

Tabla 4. Protocolo de construcción en GeoGebra para el ejemplo de optimización

Paso	Acción en GeoGebra
1	Crear un deslizador x con intervalo $0 < x < 12,5$.
2	Definir largo $= 40 - 2x$.
3	Definir ancho $= 25 - 2x$.
4	Definir altura $= x$.
5	Definir $V(x) = x(40 - 2x)(25 - 2x)$.
6	Graficar $V(x)$ restringido al dominio válido.
7	Hallar el máximo con la herramienta correspondiente o con Extremo (V , 0, 12.5).
8	Construir una caja dinámica simplificada que dependa de x .
9	Observar el comportamiento cuando x se aproxima a 0 y a 12,5.
10	Comparar el máximo gráfico con el máximo analítico ($x = 5$).

Fuente: Elaboración propia.

Figura 4. Prompt socrático para el problema de optimización con derivadas

Prompt de consulta a IA

Actúa como tutor socrático de cálculo diferencial. No me des la solución completa. Revisa mi planteamiento de la función de volumen y hazme preguntas para identificar el dominio, los puntos críticos y el significado del máximo en el contexto. Si cometo un error, dame una pista, no la respuesta. Además, ayúdame a diseñar una forma de contrastar mi resultado con una construcción en GeoGebra.

Fuente: Elaboración propia.

Contraste y validación. Ante este prompt cabe esperar que la IA pregunte, por ejemplo, qué condición física limita el valor de x o por qué no todo punto crítico es un máximo, en lugar de entregar el número 5. El estudiante debe contrastar tres fuentes: su desarrollo analítico ($x = 5$, $V = 2250 \text{ cm}^3$), la respuesta de la IA que somete a

verificación, atendiendo a su precisión variable (Jia et al., 2024) y la lectura del gráfico, donde el máximo coincide visiblemente con $x = 5$. Preguntas útiles para interrogar a la IA son: ¿descartaste la raíz $x = 50/3$ y por qué?; ¿usaste algún criterio para confirmar que se trata de un máximo y no de un mínimo? En la reflexión metacognitiva el estudiante valora si confió de más en alguna respuesta automática, cómo detectó un posible error y qué papel jugó la visualización en su comprensión.

4.5.2 Ejemplo 2. Integral definida y acumulación

Enunciado. Durante un intervalo de 6 horas, el caudal de entrada de agua a un tanque, en litros por hora, se modela mediante $q(t) = 20 + 6t - t^2$, para $0 \leq t \leq 6$. Determinar la cantidad total de agua que ingresa al tanque durante ese intervalo e interpretar geoméricamente el resultado.

Objetivo didáctico y conceptos. Distinguir entre el valor de la función, el área bajo la curva y la cantidad acumulada; interpretar la integral definida como acumulación y aproximarla mediante sumas de Riemann antes de calcularla de forma exacta. Esta tarea moviliza una dimensión del cálculo distinta de la del primer ejemplo: no la optimización, sino la acumulación.

Tabla 5. Aplicación de las fases del Modelo GeoIA-M al ejemplo de integral definida y acumulación

Fase	Acción del estudiante	Acción del docente	Uso de la IA generativa	Uso de GeoGebra y evidencia esperada
F1	Interpreta el problema del caudal $q(t)=20+6t-t^2$ y reconoce que se busca una cantidad acumulada.	Presenta la situación y enfatiza la diferencia entre caudal instantáneo y volumen acumulado.	No se usa todavía.	Sin uso; se espera comprensión del contexto, intervalo y unidades.
F2	Identifica que $q(t)$ está en litros por hora y que el intervalo de análisis es $0 \leq t \leq 6$.	Pregunta qué representa la función y qué podría representar el área bajo la curva.	No se usa todavía.	Puede realizarse un bosquejo manual; se espera una primera interpretación gráfica.
F3	Conjetura que la cantidad total corresponde al área bajo la	Solicita distinguir entre $q(t)$, integral definida y acumulación total.	No se usa para resolver.	Se espera una conjetura sobre la integral como acumulación.

	curva y puede aproximarse con sumas.			
F4	Usa el prompt socrático para revisar la interpretación de la integral definida y de las sumas de Riemann.	Regula que la IA pregunte por unidades, área y acumulación, sin calcular directamente.	Pregunta qué representa la integral y cómo contrastar una suma aproximada.	Se espera mayor claridad conceptual antes de la construcción dinámica.
F5	Grafica $q(t)$, sombrea el área bajo la curva, calcula la integral y construye sumas de Riemann.	Orienta la lectura de la curva, el área sombreada y el efecto de aumentar n .	Puede sugerir comparaciones entre aproximaciones, sin sustituir la interpretación.	GeoGebra muestra área, integral 156 y sumas; se espera conexión entre gráfico, número y significado.
F6	Compara cálculo exacto, sumas de Riemann, respuesta de IA y visualización.	Problematiza errores como confundir caudal con cantidad acumulada.	Se usa como interlocutor crítico para revisar unidades e interpretación.	Se espera validar que 156 representa litros acumulados.
F7	Explica cómo comprendió la integral, qué aportó la visualización y qué revisó con la IA.	Cierra con preguntas sobre estrategia, errores conceptuales y uso responsable.	Puede apoyar preguntas de reflexión, no redactar el cierre final.	Se espera una reflexión sobre función, área, acumulación y validación matemática.

Fuente: Elaboración propia.

Desarrollo matemático. Como $q(t)$ representa una razón de cambio (litros por hora), la cantidad total acumulada en el intervalo es la integral definida de q entre 0 y 6. Calculando,

$$\int_0^6 (20 + 6t - t^2) dt = \left[20t + 3t^2 - \frac{t^3}{3} \right]_0^6 = 120 + 108 - 72 = 156 \text{ litros.}$$

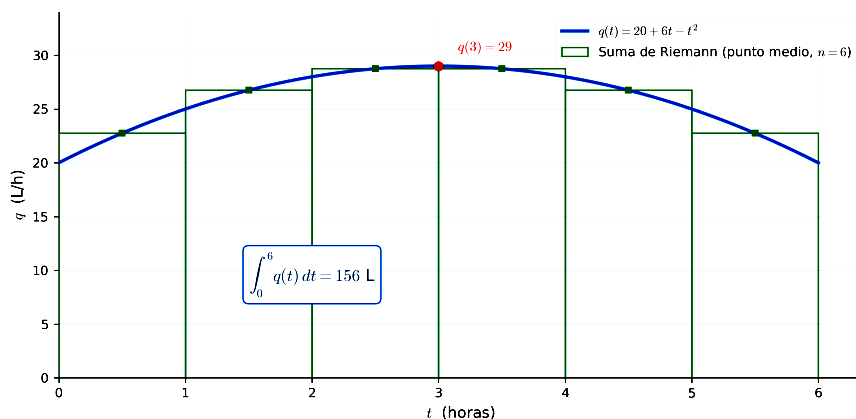
Por lo tanto, ingresan 156 litros de agua al tanque durante el intervalo de seis horas.

El caudal alcanza su valor máximo en $t = 3$, donde $q(3) = 29$ L/h. Una aproximación por sumas de Riemann con $n = 6$ subintervalos de amplitud 1 ilustra la

idea de acumulación: con extremos izquierdos y derechos la suma es 155, mientras que con los puntos medios es 156,5; al aumentar n , la aproximación se acerca al valor exacto de 156 litros.

Interpretación. El número 156 no es un caudal sino un volumen acumulado: el área bajo la curva de q entre $t = 0$ y $t = 6$, expresada en litros. Conviene insistir en esta distinción, pues confundir el valor de $q(t)$ con la cantidad acumulada es un error frecuente. La Figura 5 muestra la función, el área sombreada y los rectángulos de la aproximación por punto medio; la Tabla 6 detalla el protocolo de construcción.

Figura 5. Simulación del problema de integral definida: caudal $q(t)$, área acumulada y sumas de Riemann



Fuente: Elaboración propia con base en una construcción reproducible en GeoGebra.

Tabla 6. Protocolo de construcción en GeoGebra para el ejemplo de integral definida

Paso	Acción en GeoGebra
1	Definir la función $q(t) = 20 + 6t - t^2$.
2	Restringir la visualización al intervalo $0 \leq t \leq 6$.
3	Graficar $q(t)$ y, opcionalmente, marcar su máximo en $t = 3$.
4	Sombrear el área bajo la curva entre $t = 0$ y $t = 6$.
5	Calcular $\text{Integral}(q, 0, 6)$ y mostrar el valor (156).
6	Crear un deslizador n para el número de subintervalos.
7	Construir sumas de Riemann (inferior, superior o de punto medio).
8	Observar cómo cambia la aproximación cuando n aumenta.
9	Comparar la suma aproximada con el valor exacto de la integral.
10	Interpretar el resultado en litros como cantidad acumulada.

Fuente: Elaboración propia.

Figura 6. Prompt socrático para la interpretación de la integral definida y la acumulación

Prompt de consulta a IA

Actúa como tutor socrático de cálculo integral. No resuelvas el problema directamente. Hazme preguntas para interpretar qué representa la integral definida en este contexto. Ayúdame a distinguir entre el valor de la función $q(t)$, el área bajo la curva y la cantidad acumulada. Si propongo una aproximación por sumas de Riemann, revisa mi razonamiento y dame pistas para contrastarlo con GeoGebra.

Fuente: Elaboración propia.

Contraste y validación. Se espera que la IA pregunte qué unidades tiene el resultado de la integral o por qué la suma de Riemann se aproxima al valor exacto al crecer n , antes que ofrecer el número 156. El estudiante contrasta su cálculo exacto, la respuesta de la IA y la construcción en GeoGebra, donde el valor de $\text{Integral}(q, 0, 6)$ y el área sombreada coinciden. Preguntas para interrogar a la IA: ¿el resultado representa un caudal o una cantidad acumulada?; ¿qué ocurre con la aproximación si uso puntos medios en lugar de extremos? En el cierre metacognitivo el estudiante reflexiona sobre la diferencia entre función y acumulación y sobre el papel de la visualización en su comprensión.

4.5.3 Criterios de evaluación del razonamiento mediado

Coherente con el principio de centralidad del razonamiento, la evaluación se orienta al proceso y no solo al resultado. La Tabla 7 propone criterios que el docente puede adaptar a cada tarea de cálculo.

Tabla 7. Criterios de evaluación del razonamiento matemático mediado por IA y GeoGebra

Criterio	Indicador	Evidencia observable
Modelación y dominio	Traduce la situación a una función y delimita su dominio.	Justifica el dominio físico (p. ej., $0 < x < 12,5$).
Conversión entre registros	Conecta los registros gráfico, numérico y simbólico.	Interpreta el gráfico y lo vincula con el desarrollo analítico.
Argumentación y validación	Justifica resultados y no acepta respuestas sin verificarlas.	Confirma el máximo o el valor de la integral con criterios propios.
Control del error	Detecta y analiza errores propios o de la IA.	Descarta soluciones espurias (p. ej., $x = 50/3$) con argumento.
Metacognición	Explicita estrategias, decisiones y dificultades.	Describe cómo reorientó su análisis tras la consulta a la IA.

Uso ético y crítico de la IA	Reconoce límites y responsabilidades en el uso de la herramienta.	Distingue lo aportado por la IA de su propia elaboración.
-------------------------------------	---	---

Fuente: Elaboración propia.

Estos criterios dialogan con marcos consolidados de la educación matemática. La modelación, la corrección matemática, la validación y la argumentación remiten a la idoneidad epistémica; la atención a la comprensión, a los errores y a la metacognición, a la idoneidad cognitiva; y el papel de la IA y de GeoGebra como recursos de mediación, a la idoneidad mediacional (Godino, 2013). A su vez, el hecho de que el docente regule cuándo, cómo y para qué se emplean las herramientas conecta con la orquestación instrumental (Drijvers et al., 2010), pues la evaluación del razonamiento depende también de la forma en que se organiza el uso de los artefactos en el aula. Esta articulación habilita, además, que los criterios de la Tabla 7 sirvan de base para construir indicadores y rúbricas en futuras investigaciones orientadas a validar el modelo.

4.6 Discusión

El aporte del Modelo GeoIA-M conviene leerlo en relación con dos prácticas que procura superar. Frente a una enseñanza del cálculo centrada en la repetición de procedimientos, el modelo recupera el valor de la exploración y de la visualización dinámica, cuyo efecto sobre la comprensión cuenta con respaldo empírico en cálculo y geometría (Zhang et al., 2023). Frente a los usos superficiales de la IA, orientados a obtener la respuesta, propone una configuración en la que la herramienta interroga y acompaña, en línea con la evidencia emergente que asocia los enfoques socráticos con un pensamiento más deliberado, y en contraste con los riesgos documentados del acceso sin salvaguardas (Bastani et al., 2025).

Lo distintivo de la propuesta no reside en ninguno de sus componentes por separado, sino en su articulación. Conviene insistir en una distinción que atraviesa todo el trabajo: usar tecnología y mediar el razonamiento no son lo mismo. Incorporar IA generativa o GeoGebra a una clase de cálculo no garantiza, por sí solo, que el estudiante mejore la profundidad, la autonomía o la calidad argumentativa de su razonamiento; puede incluso ocurrir lo contrario si la herramienta se convierte en un atajo hacia la respuesta. La mediación, en cambio, supone un diseño deliberado en el que cada recurso ocupa una función subordinada a un propósito cognitivo: la IA para problematizar, GeoGebra para representar y contrastar, y el estudiante para conjeturar, argumentar y validar. El modelo ofrece una manera de ordenar esa integración asignando a cada recurso un papel coherente con sus fortalezas y sus límites.

El valor del modelo para el cálculo universitario merece subrayarse. El cálculo diferencial e integral concentra dificultades de aprendizaje bien conocidas: la interpretación del límite, el tránsito entre la pendiente y la derivada, o la comprensión de la integral como acumulación y no solo como antiderivada. En estos contenidos, la posibilidad de coordinar el registro gráfico, el numérico y el simbólico resulta especialmente fértil (Duval, 2004), y GeoGebra ofrece un entorno donde esa coordinación se vuelve manipulable. Los dos ejemplos desarrollados ilustran cómo la

optimización y la integral definida admiten una exploración que parte de la intuición visual y se cierra en la argumentación formal, sin que la herramienta sustituya el trabajo matemático del estudiante.

Subordinar la IA y GeoGebra al razonamiento tiene, además, una consecuencia ética. Dado que las respuestas de la IA no siempre son precisas (Jia et al., 2024) y que su desempeño en tareas visuales y en idiomas locales presenta limitaciones (Švičević et al., 2025), reservar la validación al estudiante y al docente no es una cautela accesoria, sino una condición del sentido formativo del modelo. El estudiante aprende cálculo y, al mismo tiempo, aprende a usar herramientas inteligentes con criterio, distinguiendo lo que aporta la máquina de lo que debe sostener su propio razonamiento.

Para la formación docente, la propuesta abre una agenda concreta. Implementar el modelo exige profesores capaces de diseñar tareas ricas, de configurar la interacción con la IA para que pregunte más de lo que responde y de orquestar el uso de GeoGebra al servicio de la argumentación. Estas competencias no se improvisan; la literatura recuerda que los beneficios de las tecnologías digitales dependen de manera crítica de la mediación docente y se ven limitados por una formación insuficiente (Batiibwe, 2024; van den Berg y du Plessis, 2023). El modelo es, en este sentido, también una propuesta para la formación del profesorado de matemática.

Finalmente, conviene precisar el estatus de la propuesta. El Modelo GeoIA-M se presenta como una construcción teórico-didáctica fundamentada y no como un resultado empíricamente validado. Su formulación surge de la articulación entre la literatura reciente sobre inteligencia artificial generativa, visualización dinámica y educación matemática, y una práctica docente universitaria que, durante los últimos años, ha explorado el uso de herramientas de IA y GeoGebra en tareas de cálculo. Esa experiencia no se asume como evidencia de eficacia, sino como punto de partida para identificar tensiones didácticas, organizar principios de mediación y traducirlos en una arquitectura aplicable al diseño de tareas. En consecuencia, el modelo debe entenderse como un marco inicial susceptible de futuras investigaciones que analicen su pertinencia, sus posibilidades de transferencia y sus efectos sobre el razonamiento, la argumentación y la metacognición matemática del estudiantado.

Limitaciones prácticas del modelo

La propuesta presenta, además, limitaciones prácticas que conviene reconocer. La primera concierne a la fiabilidad de la interacción socrática con la IA: el modelo no siempre sostiene un comportamiento socrático estable, pues puede entregar respuestas directas pese a la instrucción, cometer errores o proporcionar pistas demasiado fuertes que anticipan la solución. Por ello, el papel del docente resulta insustituible, ya que le corresponde diseñar y depurar los prompts, revisar las interacciones, advertir sobre posibles errores y exigir que toda respuesta se someta a validación matemática por parte del estudiante.

La segunda limitación se relaciona con la equidad y el acceso. El modelo presupone disponibilidad de dispositivos, conectividad, un dominio básico de GeoGebra y acceso a herramientas de IA, condiciones que no siempre se cumplen y que pueden generar brechas entre estudiantes. Para atenuarlas conviene prever

alternativas, como el trabajo colaborativo en grupos, el uso de versiones gratuitas de las herramientas, actividades en laboratorios institucionales, prompts comunes proporcionados por el docente, construcciones de GeoGebra previamente preparadas o, cuando sea necesario, momentos de la secuencia sin IA. Estas decisiones forman parte de la mediación docente y deben considerarse al planificar la implementación. En particular, la capa de IA podría ampliar la misma brecha que GeoGebra ayuda a cerrar cuando el acceso a modelos más capaces depende de cuentas, conectividad estable o recursos de pago.

5. CONSIDERACIONES FINALES

El problema del que parte este trabajo es que la incorporación de IA generativa en la enseñanza universitaria de la matemática, cuando es instrumental y orientada a la respuesta, puede debilitar precisamente aquello que la educación matemática busca cultivar: el razonamiento del estudiante. Frente a ello, el Modelo GeoIA-M ofrece una arquitectura didáctica para organizar la mediación entre IA generativa, GeoGebra y tareas de cálculo universitario, asignando a cada recurso una función subordinada al razonamiento, la argumentación, la validación y la reflexión crítica.

El aporte del modelo es ofrecer un marco que ordena la mediación del razonamiento en cursos de cálculo, donde el valor formativo reside menos en la respuesta que en el proceso que conduce a ella. Aunque los ejemplos desarrollados en este artículo se sitúan en cálculo diferencial e integral, los principios del Modelo GeoIA-M: exploración, visualización dinámica, argumentación, metacognición y uso crítico de la IA pueden proyectarse hacia otras áreas de la matemática universitaria, como álgebra lineal, geometría analítica, estadística o precálculo, siempre que las tareas sean rediseñadas según la naturaleza epistemológica de cada contenido. No se afirma que el modelo garantice mejores aprendizajes; se plantea como una posibilidad didáctica fundamentada y prudente, que requiere validación empírica posterior. Las líneas futuras más evidentes son su implementación en cursos reales de matemática universitaria y el diseño de instrumentos que permitan evaluar no solo el producto, sino el razonamiento, la argumentación y la metacognición que el modelo busca movilizar. En un escenario en el que la IA generativa seguirá presentándose como una vía rápida hacia la respuesta, propuestas como esta buscan recordar que, en matemática, el camino sigue siendo parte esencial del aprendizaje.

En cuanto a la agenda de investigación, el modelo abre líneas concretas y accionables: estudios piloto en cursos reales de cálculo universitario; investigación basada en diseño que refine la secuencia en ciclos sucesivos; validación de los criterios y rúbricas de evaluación del razonamiento; análisis de las interacciones entre estudiante e IA; estudios comparativos entre tareas con y sin mediación GeoIA-M; investigaciones sobre la formación docente que el modelo requiere; y análisis de las condiciones de equidad y acceso que condicionan su implementación. Estas líneas permitirían contrastar empíricamente aquello que el artículo, por su carácter teórico-didáctico, no demuestra.

DECLARACIONES DE CONTRIBUCIONES DE LAS PERSONAS AUTORAS

MGM concibió la idea del artículo, formuló el Modelo GeoIA-M, desarrolló la fundamentación teórico-didáctica, diseñó los ejemplos de aplicación en cálculo universitario, elaboró los protocolos de construcción en GeoGebra, redactó el manuscrito, revisó la coherencia matemática de los ejemplos y aprobó la versión final del trabajo.

DECLARACIÓN DE DISPONIBILIDAD DE DATOS

Este artículo corresponde a una propuesta teórico-metodológica fundamentada en revisión narrativa de literatura y análisis didáctico de tareas de cálculo universitario. No se generaron, recopilaron ni analizaron datos empíricos propios de participantes humanos. Por tanto, no existe un conjunto de datos asociado al estudio. Los materiales didácticos, protocolos de construcción y ejemplos presentados en el manuscrito pueden solicitarse al autor correspondiente previa solicitud razonable. Asimismo, las construcciones dinámicas asociadas a las figuras y los applets derivados de los ejemplos podrán compartirse por el autor previa solicitud razonable o mediante repositorios institucionales cuando estén disponibles.

AGRADECIMIENTOS

El autor agradece al equipo editorial de la revista y a la revisora filológica por sus observaciones, que contribuyeron a mejorar la claridad, la organización y la presentación del manuscrito.

REFERENCIAS

- Abraham, M., y Prediger, S. (2024). Scaffolding fifth graders' learning with a digital multi-representation applet: Design research on focusing multiplicative structures with dynamic dot arrays. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 11(2), 219–246. <https://doi.org/10.1007/s40751-024-00156-7>
- Bastani, H., Bastani, O., Sungu, A., Ge, H., Kabakçı, Ö., y Mariman, R. (2025). Generative AI without guardrails can harm learning: Evidence from high school mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 122(5), e2422633122. <https://doi.org/10.1073/pnas.2422633122>
- Batiibwe, M. S. (2024). Integration of GeoGebra in learning mathematics: Benefits and challenges. *East African Journal of Education Studies*, 7(4), 684–697. <https://doi.org/10.37284/eajes.7.4.2454>
- Bedada, T. B., y Machaba, M. (2022). The effect of GeoGebra on students' abilities to study calculus. *Education Research International*, 2022, Article 4400024. <https://doi.org/10.1155/2022/4400024>
- Canonigo, A. M. (2024). Leveraging AI to enhance students' conceptual understanding and confidence in mathematics. *Journal of Computer Assisted Learning*, 40(6), 3215–3229. <https://doi.org/10.1111/jcal.13065>

- Chan, C., y Colloton, T. (2024). *Generative AI in higher education*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003459026>
- Chan, C., y Hu, W. (2023). Students' voices on generative AI: Perceptions, benefits, and challenges in higher education. *International Journal of Educational Technology in Higher Education*, 20, Article 43. <https://doi.org/10.1186/s41239-023-00411-8>
- Chytas, C., van Borkulo, S. V., Drijvers, P., Barendsen, E., y Tolboom, J. (2024). Computational thinking in secondary mathematics education with GeoGebra: Insights from an intervention in calculus lessons. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 10, 228–259. <https://doi.org/10.1007/s40751-024-00141-0>
- Degen, B. (2025). *Resurrecting Socrates in the age of AI: A study protocol for evaluating a Socratic tutor to support research question development in higher education*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arxiv.2504.06294>
- Degen, P., y Asanov, I. (2025). *Beyond automation: Socratic AI, epistemic agency, and the implications of the emergence of orchestrated multi-agent learning architectures*. arXiv. <https://doi.org/10.48550/arxiv.2508.05116>
- Del Río, L. S. (2016). Enseñar y aprender cálculo con ayuda de la vista gráfica 3D de GeoGebra. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 17(1). <https://doi.org/10.18845/rdmei.v17i1.2739>
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., y Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 213–234. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5>
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.
- Eager, B., y Brunton, R. (2023). Prompting higher education towards AI-augmented teaching and learning practice. *Journal of University Teaching and Learning Practice*, 20(5). <https://doi.org/10.53761/1.20.5.02>
- El Fathi, T., Saad, A., Larhzil, H., Lamri, D., y Al Ibrahmi, E. M. (2025). Integrating generative AI into STEM education: Enhancing conceptual understanding, addressing misconceptions, and assessing student acceptance. *Disciplinary and Interdisciplinary Science Education Research*, 7, Article 6. <https://doi.org/10.1186/s43031-025-00125-z>
- Fang, Y., He, B., Liu, Z., Liu, S., Yan, Z., y Sun, J. (2024). Evaluating the design features of an intelligent tutoring system for advanced mathematics learning. In A. M. Olney, I.-A. Chounta, Z. Liu, O. C. Santos e I. I. Bittencourt (Eds.), *Artificial Intelligence in Education. AIED 2024* (Lecture Notes in Computer Science, Vol. 14829, pp. 338–350). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-64302-6_24
- Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en*

- Educación Matemática*, 8(11), 111-132.
<https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/14720>
- Goyal, H., Gupta, R., Sharma, S., Mittal, K., Mehra, A., Sesh, J., y Kumar, D. (2025). *Saksham AI: Advancing AI-assisted coding education for engineering students in India through Socratic tutoring and comprehensive feedback*. *ACM Journal on Computing and Sustainable Societies*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1145/3788679>
- Hashmi, N., y Bal, A. S. (2024). Generative AI in higher education and beyond. *Business Horizons*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1016/j.bushor.2024.05.005>
- Jensen, L. X., Buhl, A., Sharma, A., y Bearman, M. (2024). Generative AI and higher education: A review of claims from the first months of ChatGPT. *Higher Education*, 89, 1145–1161. <https://doi.org/10.1007/s10734-024-01265-3>
- Jia, J., Wang, T., Zhang, Y., y Wang, G. (2024). The comparison of general tips for mathematical problem solving generated by generative AI with those generated by human teachers. *Asia Pacific Journal of Education*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1080/02188791.2023.2286920>
- Kllogjeri, Q., y Kllogjeri, P. (2024). GeoGebra—A great platform for experiential learning, explorations and creativity in mathematics. *Journal of Applied Math*, 2(4), Article 553. <https://doi.org/10.59400/jam.v2i4.553>
- Kurtz, G., Amzalag, M., Shaked, N., Zaguri, Y., Kohen-Vacs, D., Gal, E., Zailer, G., y Barak-Medina, E. (2024). Strategies for integrating generative AI into higher education: Navigating challenges and leveraging opportunities. *Education Sciences*, 14(5), Article 503. <https://doi.org/10.3390/educsci14050503>
- Lee, J., Hung, J.-T., Soyulu, M., Popescu, D. M., Cui, C. Z., Grigoryan, G., Joyner, D. A., y Harmon, S. (2025). Socratic Mind: Impact of a novel GenAI-powered assessment tool on student learning and higher-order thinking. *arXiv*. <https://doi.org/10.48550/arxiv.2509.16262>
- Létourneau, A., Deslandes Martineau, M., Charland, P., Karran, J. A., Boasen, J., y Léger, P.-M. (2025). A systematic review of AI-driven intelligent tutoring systems (ITS) in K-12 education. *npj Science of Learning*, 10, Article 29. <https://doi.org/10.1038/s41539-025-00320-7>
- Medina Herrera, L. M., Juárez Ordóñez, S., y Ruiz-Loza, S. (2024). Enhancing mathematical education with spatial visualization tools. *Frontiers in Education*, 9, Article 1229126. <https://doi.org/10.3389/feduc.2024.1229126>
- Michel-Villarreal, R., Vilalta-Perdomo, E., Salinas-Navarro, D., Thierry-Aguilera, R., y Gerardou, F. S. (2023). Challenges and opportunities of generative AI for higher education as explained by ChatGPT. *Education Sciences*, 13(9), Article 856. <https://doi.org/10.3390/educsci13090856>
- Milenković, A., Takači, Đ., y Božić, R. (2024). The influence of dynamic representations in mobile applications on students' learning achievements in

- solving multiple integrals. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*. Advance online publication. <https://doi.org/10.46328/ijemst.4246>
- Mishra, P., y Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017–1054. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x>
- Negara, H. R. P., Wahyudin, Nurlaelah, E., y Herman, T. (2022). Improving students' mathematical reasoning abilities through social cognitive learning using GeoGebra. *International Journal of Emerging Technologies in Learning*, 17(18), 118–135. <https://doi.org/10.3991/ijet.v17i18.32151>
- Nonghanpitak, P., Yonwilad, W., y Khansila, P. (2022). The effect of GeoGebra software in calculus for mathematics teacher students. *Journal of Educational Issues*, 8(2). <https://doi.org/10.5296/jei.v8i2.20422>
- Qian, Y. (2025). Pedagogical applications of generative AI in higher education: A systematic review of the field. *TechTrends*, 69, 1105–1120. <https://doi.org/10.1007/s11528-025-01100-1>
- Serhan, D., y Welcome, N. B. (2024). Integrating ChatGPT in the calculus classroom: Student perceptions. *International Journal of Technology in Education and Science*. Advance online publication. <https://doi.org/10.46328/ijtes.559>
- Švičević, M., Milenković, A., Vučićević, N., y Stanković, M. (2025). Evaluating the success of AI tools in supporting student performance in Mathematical Kangaroo competition. *Computer Applications in Engineering Education*, 33(5), Article e70063. <https://doi.org/10.1002/cae.70063>
- Tejada Ramírez, F. A. (2025). Impacto del uso de GeoGebra en el aprendizaje universitario de transformaciones lineales en geometría dinámica. *Pedagogical Constellations*, 4(1), Article 90. <https://doi.org/10.69821/constellations.v4i1.90>
- Ünal, Z. E., Ala, A. M., Kartal, G., Özel, S., y Geary, D. (2023). Visual and symbolic representations as components of algebraic reasoning. *Journal of Numerical Cognition*, 9(2), Article e11151. <https://doi.org/10.5964/jnc.11151>
- van den Berg, G., y du Plessis, E. D. (2023). ChatGPT and generative AI: Possibilities for its contribution to lesson planning, critical thinking and openness in teacher education. *Education Sciences*, 13(10), Article 998. <https://doi.org/10.3390/educsci13100998>
- Bernal, M. V.V. (2024). GeoGebra: Software que genera equidad social. *Revista Ingeniería, Matemáticas y Ciencias de la Información*, 11(21), 117–120. <https://doi.org/10.21017/rimci.2024.v11.n21.a157>
- Zafar, S., Shaheen, F., y Rehan, J. (2024). Use of ChatGPT and generative AI in higher education: Opportunities, obstacles and impact on student performance. *iRASD Journal of Educational Research*, 5(1), Article 2463. <https://doi.org/10.52131/jer.2024.v5i1.2463>

Zhang, Y., Wang, P., Jia, W., Zhang, A., y Chen, G. (2023). Dynamic visualization by GeoGebra for mathematics learning: A meta-analysis of 20 years of research. *Journal of Research on Technology in Education*. Advance online publication. <https://doi.org/10.1080/15391523.2023.2250886>



Cuadernos

de Investigación y Formación
en Educación Matemática

Año 2026

Vol. 19

Nº. 2

Presentación.....	05
Sección 1. Artículos de investigación	
1. Trayectorias de formación como profesores de matemáticas incluyentes.....	07-26
<i>Autores: Ashley Daniela Granados Cerinza, Wilmar Cortés Araque y Elizabeth Torres Puentes</i>	
2. La mediación del profesor de matemática en la enseñanza de eventos probabilísticos: un análisis del discurso docente desde las acciones mediadoras y los procesos matemáticos movilizados.....	27-47
<i>Autor: Guillermo Ramírez Montes</i>	
3. Intervención basada en la teoría de registros semióticos para mejorar el rendimiento en números enteros en octavo grado.....	49-72
<i>Autores: Katya Lisseth López-López, Eduardo Adam Navas-López y Cristina Lissette Sandoval-Zúñiga</i>	
4. El impacto de un curso de precálculo en el aprendizaje de los conocimientos previos requeridos en Cálculo.....	73-84
<i>Autores: Luis Rojas-Torres, Kevin Gómez Guillén, Karol Jiménez Alfaro y Diana Chacón Camacho</i>	
5. Sistematización de experiencias vividas en el uso de recursos humorísticos, memes y caricaturas en el aula de matemáticas.....	85-119
<i>Autora: Paola Alejandra Balda Álvarez</i>	
6. La ética comunitaria ante las tensiones emocionales: alegría y frustración al abordar el logaritmo en el aula de matemáticas.....	121-141
<i>Autor: Pedro Elías Chaparro Rueda</i>	
7. La simbolización como núcleo epistemológico en la enseñanza de la lógica matemática: un análisis desde la teoría de la simbolista de educación en matemática pura.....	143-173
<i>Autor: Juan Carlos Ruiz Castillo</i>	
8. Generalization processes in a learning situation related to the trigonometric Fourier series.....	175-196
<i>Autores: Fabián W. Romero Fonseca y Rosa María Farfán Márquez</i>	
9. O desenvolvimento do jogo digital Math-Mon para o ensino de educação financeira: potencialidades na Educação Básica.....	197-211
<i>Autores: José Vitor Novaes Moreira y Raquel Carneiro Dörr</i>	
10. El lenguaje matemático ante la Inteligencia Artificial Generativa: análisis conceptual de su incidencia en las respuestas de estudiantes, docentes y una tipología de prompts.....	213-236
<i>Autor: Reiman Yitsak Acuña Chacón</i>	
11. Modelo GeoIA-M para la mediación del razonamiento matemático en cálculo universitario con inteligencia artificial generativa y GeoGebra.....	237-263
<i>Autor: Marco Gutiérrez Montenegro</i>	