BOSQUEJO HISTÓRICO DEL ÁLGEBRA LINEAL

JUAN BOZA CORDERO*

"L'histoire ... c'est la science même." B. Pascal.

INTRODUCCION

Es importante plantearse la comprensión de un campo de la matemática, como es el álgebra lineal, tomando en cuenta una perspectiva histórica. El álgebra lineal es una rama relativamente joven, que experimentó un desarrollo impresionante a partir de finales del siglo XVIII, y se consolidó apenas por la década de los cuarenta del presente siglo. Los métodos lineales continúan aplicándose en las más diversas formas y en casi todos los campos de la matemática y las ciencias, y es claro que el álgebra lineal sigue en pleno desarrollo.

Para quienes inician sus estudios universitarios en matemáticas y deben cursar esta asignatura, normalmente se les presenta como excesivamente abstracta y de difícil comprensión. Además, por deficiencias de los planes de estudio, muchas veces se les pide que aprendan los rudimentos del álgebra lineal como si ella fuera un fin en sí misma, sin tomar en cuenta que esta disciplina se desarrolló en buena medida para satisfacer demandas de la física, la geometría y las ecuaciones diferenciales.

Una indagación histórica que tome en cuenta la génesis de los principales conceptos y métodos del álgebra lineal, puede ayudar a una mejor comprensión de la asignatura, presentándola de una manera más persuasiva e interesante a los jóvenes estudiantes. A quienes ya posean conocimientos de la materia, una ubicación histórica les puede ampliar su comprensión de la forma en que diversos conceptos y enfoques se interrelacionan.

Este trabajo empieza con una discusión acerca del carácter del álgebra, para luego realizar una primera delimitación del campo más específico del álgebra lineal. Para esto último se explicitan las principales características de los problemas lineales, recurriendo a consideraciones intuitivas que realmente se encuentran cerca del origen mismo de las matemáticas. Se pasa enseguida a temas más específicos, que fueron el centro de una febril actividad a lo largo de los siglos XVIII y XIX, cuando se sentaron las bases de lo que actualmente se conoce como álgebra moderna o abstracta. Aquí se desarrolla, en particular, lo que hoy se considera que fue el principal torrente generador del álgebra lineal.

---

* * Profesor Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

EL ÁLGEBRA EN PERSPECTIVA

Es pertinente preguntarse por la naturaleza propia del álgebra, es decir, por los rasgos que la distinguen de otros campos de la matemática. Pero, eso sí, tomando las precauciones del caso para no caer en el error de buscar límites tajantes que presenten al álgebra como suma autosuficiente y definitiva de conocimientos. Vale la pena recordar las consideraciones de <u>C. Chevalley</u> [Ch, Prefacio] cuando expresa:

"<u>El álgebra es no solamente parte de las matemáticas; ella juega dentro de las matemáticas el rol que la matemática misma jugó por un largo tiempo con respecto a la física ... El álgebra no es sólo un fin en sí misma; ella tiene que escuchar demandas externas provenientes de varias partes de las matemáticas...el algebrista debe tener oídos sensibles y la habilidad de derivar beneficio de lo que él perciba que está sucediendo fuera de su propio dominio. La matemática está cambiando continuamente, y el álgebra debe reflejar esos cambios si quiere permanecer viva</u>..."

El álgebra estudia estructuras, construcciones abstractas en las cuales se trata de rescatar propiedades esenciales de los objetos, que se presentan reiteradamente en diversas situaciones particulares. Con este proceso se persigue aislar o distinguir, de entre las múltiples características de los objetos, aquellas que la intuición o el conocimiento adquirido hasta el momento, indican que son las adecuadas para la deducción lógica (o matemática), de propiedades más complejas, las cuales se expresarán luego como teoremas. La experiencia histórica concreta enseña que este proceso no se realiza de un modo esquemático o sencillo. De hecho, la intuición, que nunca se deja enmarcar dentro de límites estrechos, juega el papel principal en el establecimiento de las más importantes conclusiones matemáticas, las cuales son luego sometidas, para su comprobación y consecuente comunicación, al tamiz de la deducción rigurosa en los marcos del sistema axiomático pertinente. También se da el caso de que la estructuración de cierto sistema axiomático permite adquirir nuevos conocimientos, a los cuales previamente no se tenía acceso (sobre los temas de este párrafo, puede consultarse la interesante discusión que aparece en : [Kl, Cap. 14, 15]).

De la consideración sistemática de una estructura, una vez dejadas de lado algunas cuestiones accesorias propias de los casos particulares (modelos), se espera obtener propiedades interesantes de los objetos en estudio y contar así con información valiosa, que quizás no se evidenciaba considerando los modelos por separado.

Es así como la estructura de grupo, por ejemplo, engloba características de muchos tipos especiales de grupos, a la vez que deja de lado, por supuesto, otras muchas propiedades de ejemplos concretos. Para explicar esto, se puede observar que en el concepto abstracto de grupo no se incluye la propiedad de conmutatividad y la teoría de grupos empieza derivando propiedades válidas tanto para los grupos conmutativos como para los no conmutativos; para los finitos y para los infinitos. Claro que la matemática ha evolucionado tanto que hoy existen una teoría de grupos finitos, otra de los grupos infinitos, etc.

Hay que tomar en cuenta que en casi todas las áreas de la matemática se estudian estructuras. Propio del enfoque algebraico es que hace abstracción máxima de las cualidades particulares de los objetos presentes en los ejemplos, y en sus deducciones acude únicamente, y en primera instancia, a las propiedades generales abstraídas de los objetos concretos. Tales propiedades se enuncian, como se dijo antes, en el cuerpo de axiomas de la estructura en estudio. Para una comprensión más cabal de estos asuntos, se invita al lector a pensar en otra área de la matemática, como el análisis real, cuyos principales objetos de estudio son las funciones reales de variable real, entes que son bastante más concretos que muchos de los que estudia el álgebra.

Es claro que las cosas no deben llevarse a extremos caprichosos y creer que el mundo algebraico se pasea allá por las nubes. Pues al igual que en toda la matemática, en el álgebra se da una estrecha y constante relación dialéctica entre lo concreto y lo abstracto. En efecto, la estructura de grupo, por ejemplo, sólo surgió cuando ya matemáticos como Lagrange, Gauss y Galois, se ocupaban de estudiar algunos grupos particulares, aunque todavía no empleaban el nombre genérico de grupo. Por otra parte, la consideración de ejemplos concretos de grupos ha sido y será fuente de inspiración para avanzar hipótesis generales sobre clases más amplias. Hipótesis sujetas, por cierto, a comprobación matemática, es decir, abstracta.

Una última reflexión. Las consideraciones anteriores enfatizan el carácter abstracto del álgebra, asunto de importancia en un proceso de enseñanza-aprendizaje. En efecto, los conceptos de espacio vectorial o independencia lineal, por ejemplo, se comprenderán mejor si el estudiante tiene a mano varios ejemplos concretos de espacios vectoriales y de situaciones de independencia lineal de vectores, en los cuales él pueda interpretar los teoremas demostrados. Es de esperar, asimismo, que el estudiante inicie un proceso personal en que abstraiga de casos concretos propiedades más generales, que luego pueda demostrar rigurosamente. Por cierto, el desarrollo de estas habilidades requiere un trabajo tesonero de solución de ejercicios y problemas, algunos meramente operativos, y otros que constituyen verdaderas demostraciones.

En el próximo párrafo se hacen algunas acotaciones acerca de la naturaleza de los problemas lineales, los cuales aparecieron originalmente en los más diversos campos de la ciencia y sus aplicaciones, así como en algunas áreas de la matemática, y constituyeron la base sobre la cual se edificó propiamente el álgebra lineal.

NATURALEZA DE LOS PROBLEMAS LINEALES

El álgebra se ha ocupado tradicionalmente de la solución de ecuaciones de muy diversos tipos. De entre éstas, las ecuaciones lineales y, para ser más precisos, los sistemas de ecuaciones lineales, son tema principal del álgebra lineal.

Ya muchos siglos antes de nuestra era, las más antiguas civilizaciones como la babilónica, la egipcia y la china, se vieron en la necesidad de plantear y resolver problemas lineales, muchos de los cuales desembocaban en la conocida "regla de tres", que requiere la solución de ecuaciones del tipo $ax=b$.

Pero estas culturas fueron más allá y por imperativos prácticos también se ocuparon de sistemas de ecuaciones lineales, para cuya solución establecieron ciertas reglas. Llegaron a dominar el método de la eliminación sucesiva de incógnitas, por el cual un sistema se transforma paso a paso hasta llegar al punto en que tan sólo se debe despejar la x en una expresión como: $ax=b$, para luego hallar las demás incógnitas.

Para iniciar el acercamiento a la naturaleza de los problemas lineales, son sugerentes las palabras de H. G. Grassmann (1809-1877), brillante matemático alemán del siglo pasado : "... la velocidad (S) debida a fuerzas combinadas es una suma geométrica de las velocidades (P,Q) debidas a las fuerzas individuales...”[Co, t. II, p. 408]. En efecto, en los procesos lineales se manifiestan los influjos de diversos factores, y un modelo matemático adecuado ha de reflejar la forma particular en que ellos se combinan para producir el resultado final.

La función lineal $y=ax+b$, cuya gráfica es una recta, se caracteriza completamente por el hecho de que el incremento en la variable independiente y, es proporcional al incremento en x. En efecto, el incremento $y = ax+b - (ax_0+b) = a(x-x_0) = a\ \ x$. Recíprocamente, si para cierta función $y=y(x)$ se tiene $y = a\ \ x$, entonces

$$y-y_0=a(x-x_0)=ax-ax_0, \text{ es decir, } y=ax+(y_0-ax_0),$$

de donde se concluye que y es lineal.

Considerando ahora una función lineal de varias variables: $y=a_1x_1+ a_2x_2+\ldots+ a_nx_n$, se observa que ella queda determinada por las dos propiedades siguientes (como puede comprobar fácilmente el lector):

"1. El incremento de una función lineal, cuando sólo una de las variables recibe un incremento, permaneciendo fijas las demás, es proporcional al incremento de dicha variable.
2. El incremento de una función lineal, calculado cuando se incrementa todas las variables independientes, es igual a la suma algebraica de los incrementos obtenidos cuando se incrementa por separado cada variable."

Las reflexiones anteriores llevan a que los problemas lineales pueden caracterizarse por las dos afirmaciones siguientes :

"1. (Propiedad de proporcionalidad) La repercusión de cada factor por separado es proporcional a su valor.

2. (Propiedad de independencia) El resultado total de una acción es la suma de los resultados de las acciones por separado." [Al, Cap. 15]

LOS ALBORES

Dos fuentes principales de problemas estimularon el desarrollo del álgebra lineal. Ellas son la solución de sistemas de ecuaciones lineales, por una parte; y por otra, consideraciones y demandas geométricas y físicas, donde aparecían magnitudes y conceptos que no se podían tratar como escalares.

Como se dijo antes, el estudio de problemas lineales se remonta hasta los orígenes de las civilizaciones. Así, por ejemplo [Co, t. I, p.177], en el libro El arte matemático en nueve secciones, un clásico chino que data de un par de siglos antes de la era cristiana [Ri, p. 31], se acomete la solución de un sistema no homogéneo de tres ecuaciones lineales en tres incógnitas x, y, z, para lo cual se considera la matriz asociada, sobre la cual se efectúan operaciones elementales, hasta reducir todo el problema a despejar z de una ecuación del tipo : $az=b$, para luego averiguar y y x a partir de sendas ecuaciones lineales (Para tener una mejor idea de los problemas concretos que ellos resolvían con ayuda de sistemas lineales, el lector interesado puede consultar [Ri, p. 34-36].)

Los chinos denominaban "cheng" a los números positivos y los señalaban en rojo en el ábaco o en el papel; los negativos eran "fu", de color negro. Para resolver un sistema de ecuaciones lineales, ellos aislaban los coeficientes, es decir, los separaban de las incógnitas, disponiéndolos de manera muy parecida a las actuales matrices. Esta "matriz" era sucesivamente transformada para llevarla a la forma escalonada y luego proceder a determinar las incógnitas sucesivamente como se hace aún hoy (método de reducción de Gauss). En dicho proceso ellos operaban con números positivos y negativos, manipulación a la cual se referían como "cheng-fu."

También los babilonios se ocuparon de resolver sistemas de ecuaciones lineales, e incluso lo hicieron 'de manera bastante elegante', según Bourbaki [Bo, p. A III.205].

Cuando se habla de los aportes de las antiguas civilizaciones, es frecuente escuchar que sus matemáticas no superaron los primeros niveles de una ciencia restringida a necesidades prácticas inmediatas. Si bien es cierto que la misma, y en particular el álgebra, nació en estrecho intercambio con las tecnologías y otras ciencias, y en muchos aspectos no es posible distinguirla de ellas, queda a veces la sensación de que en Occidente no se valora adecuadamente su verdadero desarrollo, quizás por falta de testimonios escritos. Pero los admirables éxitos de tantas civilizaciones (incluida la maya), por ejemplo en la astronomía, la geometría, la física y la contabilidad, indican que la ciencia matemática alcanzó niveles muy superiores a los de meras colecciones de reglas de cálculo. Esta opinión se ve reforzada al observar, guardando las distancias del caso, cuánta matemática está realmente involucrada cuando hoy se resuelven problemas prácticos de la ingeniería, la economía y otras ciencias. Por eso nos parece acertada la reflexión de Bourbaki, quienes al referirse a las matemáticas de los árabes de la Edad Media y del Renacimiento [Bo, AIII.204] expresan : "pero estos [los manuales] no pueden haber constituido otra cosa que un extracto, para el uso de los practicantes, de teorías científicas más avanzadas."

HACIA LA SISTEMATIZACIÓN

A mediados del siglo XVIII se inicia, con los aportes de Euler (1707-1773) y de Cramer (1704-1752), un sostenido trabajo de sistematización de lo que se conocería posteriormente como álgebra lineal. Preocupábale a Euler, por ejemplo, que hubiera sistemas de ecuaciones lineales, con igual número de ecuaciones e incógnitas, para los cuales, sin embargo, no podían determinarse efectivamente los valores numéricos de todas las incógnitas [Do, p.228-230]. Los sistemas por él considerados eran de bajas dimensiones, y en ellos, luego de aplicar las operaciones básicas a las ecuaciones (multiplicar por un escalar una ecuación, sumar dos de ellas, etc.), se encontraba con que una o varias de las incógnitas al final quedaban a lo más expresadas en términos de otras. Ante esta situación, Euler considera que : "Cuando uno dice que para determinar n cantidades incógnitas, es suficiente tener n ecuaciones dando sus relaciones mutuas, debe agregarse la observación de que éstas sean diferentes o que ninguna esté confinada [encerrada] en las otras."[Do, p. 230].

Comentando este pasaje, Dornier llama a no precipitarse y creer que Euler había llegado ya al concepto de "dependencia lineal" (de las ecuaciones), y más bien propone que él tenía en mente algo así como la idea de "dependencia inclusiva". Estas agudas observaciones de Euler pasaron desapercibidas por casi una centuria, pues nadie, ni él mismo, profundizó en dichos fenómenos, al menos en las direcciones insinuadas en sus escritos. Como se hizo claro al cabo de muchos años, los fenómenos detectados por él, que en realidad se refieren a la existencia de sistemas indeterminados o inconsistentes, fueron los que, estudiados a profundidad, desembocaron en los conceptos de dependencia lineal y de rango [Do, p. 230].

Cramer, contemporáneo de Euler, se ocupó principalmente de investigar las propiedades de los determinantes, estudios que pronto se desarrollaron hasta alcanzar el nivel de una teoría completa. En ésta, por cierto, quedó subsumido por largo tiempo todo lo referente a la solución de sistemas de ecuaciones lineales.

Quizás el principal estudio anterior a los de Euler y Cramer sean algunos trabajos de Leibniz (1646-1716) de finales del siglo XVII, en los que expone la solución de algunos sistemas de ecuaciones lineales. Aislando los coeficientes de las ecuaciones y disponiéndolos ya en forma de matriz (por ese entonces no se tenían aún los conceptos de matriz ni determinante), les asigna índices según su posición y se acerca, aunque sin detectarlo, al concepto de determinante. Él considera [Co, t. II, p. 129] un sistema de tres ecuaciones en dos incógnitas, que en escritura moderna es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
a_{10}+a_{11}x+a_{12}y &= 0,\\
a_{20}+a_{21}x+a_{12}y &= 0,\\
a_{30}+a_{31}x+a_{22}y &= 0.
\end{aligned}
$$

Después de realizar operaciones sobre la matriz de coeficientes, observa que para que exista una solución x, por ejemplo, ha de anularse el determinante $|a_{ij}|$ (recuérdese que él no utilizaba el término determinante).

Las principales contribuciones al desarrollo de los determinantes se remontan al siglo XVIII, y se deben a MacLaurin, Cramer, Bézout, Vandermonde, Lagrange y Laplace. Tradicionalmente se considera la "regla de Cramer" (que debería atribuirse colectivamente a Taylor, MacLaurin y Cramer), como uno de los mayores logros del período previo al siglo XIX [Co, t. II, p.417]. Tal regla establece un algoritmo para determinar los valores de las incógnitas de un sistema $n \times n$ no homogéneo cuya matriz de coeficientes posee determinante no nulo (ha de observarse que los sistemas considerados en este contexto poseen igual número de ecuaciones que incógnitas.)

Ya en los primeros años del siglo XIX se conocían las principales reglas operativas de los determinantes, vale decir, su comportamiento frente a las operaciones elementales por filas o columnas, reglas que se aplicaban con éxito al estudio de los sistemas de ecuaciones lineales, en el sentido recién mencionado. De hecho, durante bastante tiempo, predominó en la consideración de sistemas el interés por llegar a las soluciones de manera efectiva, y no fue sino lentamente que empezó a abrirse paso la indagación de algunas características generales de los conjuntos de soluciones, en una actitud más teórica. Cabe mencionar a H. J. S. Smith [Do, p. 231], quien estableció una estrecha relación entre el orden del mayor menor no nulo y el número máximo de soluciones independientes. Importante fue que se empezaron a considerar de modo sistemático, sistemas con más ecuaciones que incógnitas, para lo cual el rango de la matriz de coeficientes se mostró muy útil.

El concepto de rango surgió originalmente dentro de la teoría de los determinantes, como un invariante frente a las operaciones elementales. Pronto se vio la conexión de la noción de rango con el 'tamaño' del conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales (o, como se dice actualmente, con la dimensión del espacio de soluciones). Por medio del rango se expresaba el número máximo de soluciones independientes, lo mismo que el número máximo de ecuaciones independientes. Los principales resultados al respecto se deben a Sylvester, Cayley, Baltzer y otros [Do, p.232].

Por esos tiempos también se estableció una manera de salir adelante en la solución de sistemas $n \times n$ cuyo determinante se anula (y al cual, por ende, no se puede aplicar la regla de Cramer). En particular, se vio la importancia de los "menores", es decir, los determinantes obtenidos del determinante principal por eliminación "en cruz" de una fila y una columna. Decisivo resultó ser el orden r del mayor menor no nulo, pues tal r guarda una relación precisa con el tamaño del conjunto de soluciones, el cual posee $n-r$ soluciones independientes. Estos resultados, que se ubican entre los más útiles y bellos del álgebra lineal, se trasladaron al poco tiempo sin mayor problema al caso de sistemas $n \times m$ [Fa].

El concepto de rango es importante sobre todo en la solución de sistemas de ecuaciones lineales. El mismo era, sin embargo, bastante restringido para los efectos más amplios de la naciente álgebra lineal, donde se impuso el concepto de dimensión. El asunto, puesto en breve, es que el rango está muy ligado a la teoría de determinantes, en tanto que el proceso de axiomatización del concepto de espacio vectorial (el concepto central del álgebra lineal), se fue apartando lentamente del punto de vista de los determinantes, tomando fuerza más bien la noción de dimensión.

En la primera mitad del siglo XIX se empezó a trabajar de modo sistemático en la teoría de matrices. Líneas arriba se mencionó que ya los matemáticos chinos de la antigüedad, resolvieron sistemas de ecuaciones lineales aislando los coeficientes y disponiéndolos en forma de una tabla adecuada para los cálculos. En fechas más cercanas a la época en que se desarrolló el álgebra lineal, también matemáticos como Leibniz, Euler y Cramer procedieron de modo análogo. Pero cabe a

Cayley (1821-1895), matemático irlandés del siglo pasado, el mérito de considerar las matrices como objetos matemáticos importantes, que desde entonces son una herramienta poderosa. él sentó las bases del álgebra de matrices, que facilitó el estudio de sistemas de ecuaciones $\underline{n} \times \underline{n}$.

Quizá el antecedente más cercano a los trabajos de Cayley sean ciertas consideraciones de Gauss (1777-1855), realizadas en sus estudios [Ga, § 268, 270] en torno a las formas cuadráticas. Él asigna un arreglo de números del tipo: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha\_ & \beta\_ & \gamma\_ \\ \alpha\_\_ & \beta\_\_ & \gamma\_\_ \end{pmatrix}$ 1a determinada transformación, observando que a la composición de dos transformaciones le corresponde entonces el arreglo que hoy conocemos como el producto de las matrices: $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha\_ & \beta\_ & \gamma\_ \\ \alpha\_\_ & \beta\_\_ & \gamma\_\_ \end{pmatrix} 2 \begin{pmatrix} \delta & \varepsilon & \zeta \\ \delta\_ & \varepsilon\_ & \zeta\_ \\ \delta\_\_ & \varepsilon\_\_ & \zeta\_\_ \end{pmatrix} 3$.

Un aspecto de la mayor importancia es que en esta época el uso de la matriz de coeficientes de un sistema arrojó luz sobre el fenómeno de la dependencia de ecuaciones (recordar a Euler), trasladándolo a una situación de dependencia de las filas, las cuales ya empezaban aconsiderarse como n-tuplas, vale decir, vectores.

Una última observación, se refiere a los estudios (sobre todo de Frobenius) de finales del siglo pasado, para desarrollar un enfoque de la teoría de sistemas de ecuaciones lineales en que la técnica de los determinantes no ocupara un lugar tan preponderante. Frobenius logró ubicar los argumentos de determinantes como auxiliares importantes, aunque no los sustituyó del todo.

OTRAS FUENTES Y LA AXIOMATIZACIÓN

Llama poderosamente la atención el influjo ejercido por las ecuaciones diferenciales en el desarrollo del álgebra lineal. Ya durante el siglo XVIII matemáticos como D'Alambert (1717-1783), (1736-1813) y Euler sabían que la solución general de una ecuación diferencial lineal homogénea de orden n puede expresarse como combinación lineal de n soluciones "fundamentales". Sólo que ellos no utilizaban esta terminología, y tampoco tenían una demostración rigurosa. También sabían que la solución general de una ecuación diferencial lineal no homogénea se obtiene sumando una solución particular a la solución general de la homogénea asociada. Y el mismo Lagrange estableció el método de variación de las constantes, que hoy lleva su nombre, para obtener una solución particular de la ecuación no homogénea, a partir de la solución de la homogénea. La fundamentación analítica rigurosa de estos asuntos fue realizada a mediados del siglo XIX por Cauchy, pero el acertado enfoque algebraico de los fundadores se mantuvo.

A finales del siglo XVIII Lagrange hizo interesantes aportes a la solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, utilizando conceptos y técnicas muy cercanos a los modernos de valor propio y vector propio de una matriz. Justo es decir que estos enfoques lineales en el campo de las ecuaciones diferenciales confluyeron con métodos similares utilizados en otros campos (geometría, mecánica) sólo hacia mediados del siglo XIX.

El álgebra vectorial en el plano también constituyó fuente importante de inspiración para el concepto de espacio vectorial. El recurso a consideraciones geométricas ha sido siempre muy útil, como referente material para avanzar hipótesis más o menos generales. La interpretación geométrica de los números complejos como pares ordenados de números reales, en la cual trabajaron varios matemáticos a finales del siglo XVIII y principios del XIX, y que fue finalmente resuelta por Gauss hacia 1831, reforzó la utilidad de considerar sistemáticamente los vectores en el plano y en el espacio.

Sin embargo, y aunque parezca extraño, el paso a los espacios de cuatro o más dimensiones, no fue automático. De hecho, matemáticos como Möbius, que estudiaron de cerca estos asuntos, no llegaron a considerarlos importantes, por la carencia de referentes concretos para espacios de dimensiones superiores [Do, p. 240]. De algún modo era un problema de perspectiva filosófica. El posterior paso a la consideración abstracta de los espacios de dimensión cuatro o más, se vio propiciado por el camino que estaba abriendo por esos años el descubrimiento de las geometrías no euclídeas [Bz], las cuales validaron los enfoques axiomáticos. El desarrollo al que se estaba aproximando el álgebra lineal, es decir, su ruta hacia la axiomatización, también se vio reforzado por las amplias avenidas que inauguró el descubrimiento de los cuaterniones [B-M, p. 236; Kl, p.106]. A éstos llegó Hamilton por caminos totalmente abstractos, y llamaron la atención, entre otras cosas, por ser el primer ejemplo de un álgebra no conmutativa.

Hacia mediados del siglo pasado el matemático alemán H. Grassmann estableció una "teoría de la extensión", en la cual incluyó una lista de propiedades fundamentales de ciertos sistemas, que son un claro antecedente del concepto moderno de espacio vectorial. En su estudio dedicó especial atención a los conceptos de generación, base y dimensión. Asimismo, demostró con gran claridad la fórmula que relaciona las dimensiones de dos subespacios: $dim(E+F) = dim\ E + dim\ F - dim\ (E \cap F)$.

Varios matemáticos italianos tomaron nota de las ideas de Grassmann y avanzaron hacia la axiomatización del concepto de espacio vectorial. Así, por ejemplo, Peano (1858-1932), quien ya había establecido una axiomática para los enteros naturales, propuso hacia 1890 un listado de axiomas para el concepto que nos ocupa, en el cual definió la estructura dando las propiedades de las operaciones. Su esfuerzo no mereció mayor atención de sus colegas. También se ocuparon de la axiomatización Burali-Forti y Marcolongo.

Tema de gran importancia fue precisar el concepto de dimensión, en donde el aporte de Dedekind (1831-1916), realizado a finales del siglo pasado, fue clave. él ofreció la definición correcta a partir de problemas de la teoría de números algebraicos y las extensiones de campos. Hacia 1910 Steinitz ofreció una presentación rigurosa y prácticamente definitiva, de los conceptos de independencia lineal, generación , base y dimensión, a raíz de trabajos en la teoría algebraica de campos.

Ya entrado el siglo XX, hacia 1920, cuatro matemáticos habían propuesto, de manera relativamente independiente, axiomatizaciones del concepto de espacio vectorial. Ellos son : Weyl, Banach, Hahn y Wiener.

La fructífera influencia de la teoría de las ecuaciones diferenciales en el desarrollo del álgebra ya fue parcialmente aludida, y es tema que merecería un estudio especial. A este respecto hay que mencionar también las interrrelaciones entre el álgebra lineal (que se ocupa en gran medida de los espacios vectoriales de dimensión finita), y el nacimiento y posterior consolidación, del análisis funcional. En alguna medida, y sin entrar en detalles, éste último es continuación natural de aquella a los espacios de dimensión infinita.

Se considera que el álgebra lineal se consolidó hacia 1940, tomando como referencia la fecha aproximada de publicación de A Survey of Modern Algebra, de Birkhoff y MacLane y Finite-Dimensional Vector Spaces de Halmos. En ambos libros se exponen los fundamentos con fines didácticos y de alguna manera marcan la introducción de la disciplina en los programas universitarios. Un poco antes, hacia 1930, había sido publicado en Alemania el libro Moderne Algebra, por van der Waerden, que recogía enfoques modernos de destacados matemáticos alemanes, entre ellos, y sobre todo, de Emmy Noether. Este libro ejerció notable influencia en la consideración del álgebra lineal en muchos países.

En las últimas décadas el concepto de módulo, generalización natural de los espacios vectoriales, ha encontrado un lugar central en el álgebra y sus aplicaciones. A partir de los setenta se ha desarrollado un nuevo campo que estudia problemas matriciales, y que se conoce como la teoría de representaciones de bocses. Esta teoría guarda estrechas relaciones con la de representaciones de álgebras, en la cual se han podido plantear y resolver interesantes problemas del álgebra lineal clásica y moderna [Au].

BIBLIOGRAFÍA

[Al] A. D. Alexandrov et al., La matemática : su contenido, método y significado, Alianza Universidad, Madrid, 1973.

[Au] M. Auslander et al., Representation Theory of Artin Algebras, Cambridge Univ. Press, 1995.

[B-M] G. Birkhoff, S. MacLane, A Survey of Modern Algebra, MacMillan, New York, 1962.

[Bo] N. Bourbaki, Elementos de Historia de las Matemáticas, Alianza Universidad, Madrid, 1976.

[Bz] J. Boza, Lobachevski, descubridor de la geometría hiperbólica, Rev. Matemática, vol. 2, n. 1, San José, 1995.

[Ch] C. Chevalley, Fundamental Concepts of Algebra, Academic Press, New York, 1956.

[Co] J.-P. Collette, Historia de las Matemáticas, vol. I, II, Siglo XXI, México, 1986.

[Do] J.-L. Dorier, A general Outline of the Genesis of Vector Space Theory, Hist. Math. 22 (1995), 227-261.

[Fa] I. Farkas, M. Farkas, Introduction to Linear Algebra, Akademiai-Kiadó, Budapest, 1975.

[Ga] C. F. Gauss, Disquisitiones Arithmeticae, Acad. Colombiana de Ciencias, Bogotá, 1995.

[Kl] M. Klein, Matemáticas la pérdida de la certidumbre, Siglo XXI, México, 1994.

[Ri] K. Ríbnikov, Historia de las Matemáticas, Mir, Moscú, 1991.