Rev. Reflexiones 90 (1): 161-173, ISSN: 1021-1209 / 2011

EL ANÁLISIS POST-OPTIMAL EN PROGRAMACIÓN LINEAL APLICADA A LA AGRICULTURA

POST-OPTIMAL ANALYSIS IN LINEAL PROGRAMMING APPLIED TO AGRICULTURE

Jorge Alvarado Boirivant[1]
aboiriva@gmail.com

Fecha de recepción: 25 octubre 2010 - Fecha de aceptación 13 diciembre 2010

Resumen

Encontrar el óptimo de un modelo o problema de optimización es solo una parte del proceso de solución. En este artículo, se hace un análisis de los precios duales, los coeficientes de la función objetivo, el costo reducido de cada variable, los rangos de sensibilidad y la holgura de los valores del lado derecho de las restricciones después de procesar, mediante un programa computacional, un modelo de programación lineal de maximización de ganancias aplicado a una empresa agrícola.

El análisis post-optimal revela información importante al agricultor, quien opera en un contexto dinámico, para tomar la mejor decisión sobre las opciones de variación de determinados parámetros del modelo de un proyecto a ejecutar y mejorar así el valor óptimo de la función objetivo. El productor agrícola logra conocer como el plan óptimo de producción puede mantenerse igual y, al mismo tiempo, conseguir que las ganancias aumenten sujetas a algunos cambios, ya sea en el entorno del problema o de la empresa misma, alcanza saber las necesidades reales sobre los recursos disponibles, puede también enterarse de cuál sería la mejor alternativa de decisión para mejorar el valor óptimo al considerar simultáneamente la ganancia marginal que representa el precio dual y el incremento permitido en el valor del lado derecho de cada restricción.

Palabras claves: *Programación lineal, precio dual, análisis de sensibilidad, holgura, solución óptima, valor óptimo, restricción, optimización, maximización, función objetivo.*

Abstract

Finding the peak of an optimization problem or model is just part of the solution process. This paper analyzes dual prices, objective function coefficients, the reduced cost of each variable, sensitivity ranges, and the width of the values in the right side of restrictions by means of a computer program, and a profit maximization lineal programming model applied to an agricultural business.

The post optimal analysis reveals vital information to farmers who operate in a dynamic context for the best decisions to be made in regards to variation options of determined parameters in a model of a future project to upgrade the optimum value of the objective function. The agricultural producer gets to know how the optimal production plan may remain the same while increasing profits that are subject to variations in the boundaries of the problem or the business itself. He gets to assess the real needs of available resources and might find out what would be the best choices and decisions to improve the optimal value when

1. Sede de Guanacaste, Universidad de Costa Rica

simultaneously considering the marginal profit that the dual price represents and the allowed increase in the value on the right side of each restriction.
Key words: *Lineal programming, dual price, sensitivity analysis, width, optimal solution, optimal value, restriction, optimization, maximization, objective function.*

Introducción

La programación lineal es un método de planificación muy útil para tomar decisiones que requieren una elección entre un gran número de alternativas. La importancia de su aplicación radica en su fortaleza para modelar problemas complejos y la posibilidad que tienen los usuarios para resolver modelos de gran escala mediante programas de cómputo sustentados en el procedimiento de resolución simplex. No obstante, lo más importante es el análisis *post-optimal*, el cual nos permite hacer cambios en el modelo original con la finalidad de encontrar un valor óptimo aún mejor o conocer los resultados que se daría si se cambia el plan de producción antes de ejecutar el proyecto representado en el modelo. En este trabajo, se realiza un análisis el cual comprende el estudio de los precios duales, los coeficientes de la función objetivo, el costo reducido de cada variable, los rangos de sensibilidad y la holgura de los valores del lado derecho de las restricciones. Para hacer más fácil el entendimiento de este análisis, se procede a construir y resolver un modelo de maximización de ganancias para un proyecto agrícola, se resuelve mediante el uso de un paquete informático y se procede a interpretar y analizar los resultados de los aspectos antes mencionados.

Importancia de la programación lineal

Para Weber (1984: 718:), el problema de programación lineal trata acerca de la maximización o minimización de una función lineal de diversas variables primarias, llamada función objetivo, con sujeción a un conjunto de igualdades o desigualdades lineales llamadas restricciones, donde ninguna de las variables puede ser negativa. Sin embargo, una variable negativa se puede expresar como la diferencia de dos variables positivas. En otras palabras, la programación lineal es un método matemático de resolución de problemas donde el objetivo es optimizar (maximizar o minimizar) un resultado a partir de seleccionar los valores de un conjunto de variables de decisión, respetando restricciones correspondientes a disponibilidad de recursos, especificaciones técnicas, u otras condicionantes que limiten la libertad de elección.

Esta técnica se ha aplicado en número creciente a la toma de decisiones en la industria. ¿Dónde deberían localizarse las instalaciones de producción y almacenaje con respecto a las fuentes de materias primas y los mercados del producto acabado? ¿Qué mezcla de ingredientes minimizan el costo de la producción de alimentos, gasolina o fertilizantes? ¿Cómo se puede planear la producción para alcanzar el mayor resultado a partir de unas instalaciones dadas? Estas son algunas preguntas que las técnicas de programación lineal pueden ayudar a resolver.

Los conceptos teóricos en los cuales se basa el método son conocidos desde hace muchos años, no obstante, fue durante la Segunda Guerra Mundial e inmediatamente después cuando se dio importancia a su aplicación a los problemas de planificación. Es importante resaltar que su utilidad hubiera sido limitada a no ser por el desarrollo tecnológico de las computadoras, pues se requiere un gran número de cálculos para resolver un modelo. Moya (1998, 63) menciona que fue George B. Dantzig y otro grupo de personas asociadas que, en el año 1947, acatando la solicitud de autoridades militares del gobierno de los Estados Unidos, se dedicaron a investigar cómo se podía aplicar las matemática y la estadística para resolver problemas de planeación y programación con fines puramente militares. En ese mismo año, Dantzig y sus colaboradores plantean por primera vez la estructura matemática básica del problema de programación lineal.

Bazaraa y Jarvis (1991:7) afirman que desde que el matemático George B. Dantzig desarrolló el método simplex en 1947, la programación lineal se ha utilizado ampliamente en el área militar, industrial, gubernamental y planificación urbana entre otras. El método simplex consiste en la utilización de un algoritmo para optimizar el valor de la función objetivo teniendo en cuenta las restricciones planteadas, el procedimiento es iterativo, pues mejora los resultados de la función objetivo en cada etapa hasta alcanzar la solución buscada. Caro (2000:1) comenta que se considera a L. V. Kantoróvich uno de sus creadores de la programación lineal, quien presentó en su libro en 1939 "Métodos matemáticos para la organización y la producción" y la desarrolló en su trabajo sobre la transferencia de masas (1942). Kantoróvich recibió el premio Nobel de economía en 1975 por sus aportaciones al problema de la asignación óptima de recursos humanos.

Muchas personas clasifican el desarrollo de la programación lineal entre los avances científicos más importantes de mediados del siglo XX, su impacto desde 1950 ha sido extraordinario. En la actualidad, es una herramienta de uso normal que ha ahorrado millones de dólares a muchas compañías o negocios, incluyendo empresas medianas en los distintos países industrializados del mundo. Llama la atención un caso en 1958 en el cual se aplicaron los métodos de la programación lineal a un problema concreto: el cálculo del plan óptimo del transporte de arena de construcción a las obras de edificación de la ciudad de Moscú. En este problema había 10 puntos de partida y 230 de llegada. El plan óptimo de transporte, calculado con el ordenador Strena en 10 días del mes de junio, redujo un 11% los gastos respecto a los costes previstos.

Los primeros esfuerzos para aplicar la programaci6n lineal a los problemas agrícolas fueron difíciles y produjeron pocos resultados validos. Las subsiguientes mejoras del método, el desarrollo de los ordenadores electrónicos y de las rutinas prácticas de cálculo, han hecho de la programación lineal un instrumento eficaz para analizar y optimizar la organización de una explotación agrícola. Boussard (1977:11) comenta que el primer intento de aplicación de la programación lineal a estudios relacionados con la agricultura se debe a Jerome Cornfield en el año 1941, quien trataba de atender las necesidades nutricionales de animales de granja a un costo mínimo.

La típica explotación agrícola dispone de recursos e sibles planes de producción en el sector agropecuario se cifra en millones, a causa de los diversos recursos utilizados y del amplio abanico de alternativas de producción que son posibles en una empresa agropecuaria.

Por ello, la principal ventaja de la programación lineal como método de planificación no es tanto la conducción a un plan esquemático y sencillo, sino la consecución de un método para analizar una variedad de decisiones alternativas.

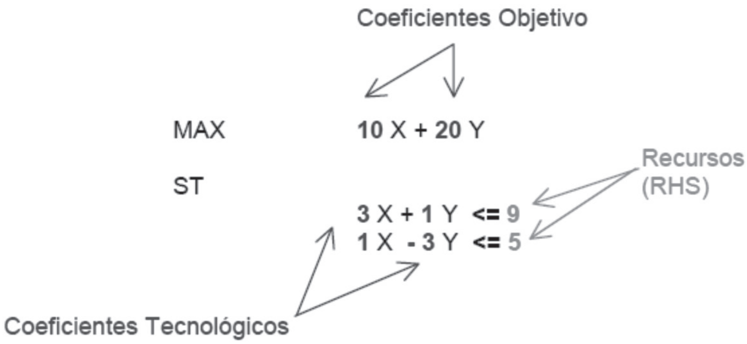
La construcción de un modelo de programación lineal

En programación lineal, un sistema de producción se representa mediante un modelo o matriz en el que se incluyen:

- Costos e ingresos generados por unidad de actividad (función objetivo).
- Aportes y requerimientos de insumos y productos por unidad de cada actividad considerada (coeficientes insumo/producto).
- Disponibilidad de recursos, especificaciones técnicas y empresariales a respetar (valores del lado derecho de las restricciones).

El modelo general de un problema de programación lineal consta de dos partes: la función objetivo lineal y un conjunto de restricciones o desigualdades lineales.

Alvarado (2009:92) muestra un ejemplo donde se reconocen los valores que conforman esas dos partes en un modelo de maximización:



Se tiene una función objetivo que se va a maximizar constituida por las variables X, Y con sus respectivos coeficientes técnicos, luego están las restricciones con las variables y su coeficiente tecnológico y los valores del lado derecho que son los recursos con que dispone la unidad de producción.

La función objetivo lineal

La función objetivo lineal constituye un hiperplano en el espacio n-dimensional. Se desplaza paralelamente y es la que determina el nivel de optimización.

La función objetivo lineal se puede representar de las siguientes maneras:

Minimizar(Maximizar) Z = Cl X1 + C2 X2 +...... + Cn Xn

o

$$Z = \sum_{j=1}^{n} Cj\ Xj$$

Donde:

Z = Función objetivo lineal.

C = Precio neto o costo unitario, según sea el modelo.

X = Actividad o proceso.

El objetivo puede ser la maximización de algunas variables de ingreso que pueden variar desde los ingresos netos o brutos, dependiendo según se estructure el modelo. La programación lineal puede también aplicarse a los problemas de minimización de costos y estos programas parten de un diferente conjunto de criterios para su optimización.

Los coeficientes C1, C2...., Cn son los coeficientes de costo (conocidos) o de ingresos, X1, X2. . . . , Xn son las variables de decisión (variables, o niveles de actividad) que deben determinarse.

El conjunto de restricciones o desigualdades lineales

Las restricciones y desigualdades lineales están compuestas por los coeficientes técnicos (Aij), las actividades o procesos (Xn), las cuales también se tomaron en cuenta en la función objetivo y además los niveles o limitaciones (Bi). El conjunto de restricciones se presentan de la siguiente manera:

Sujeto a:

$$
\begin{array}{l}
A11\ X1 + A12\ X2 + \ldots\ldots + A1n\ Xn\ (\leq=\geq)\ B1 \\
A21\ X1 + A22\ X2 + \ldots\ldots + A2m\ Xn\ (\leq=\geq)\ B2 \\
\quad . \qquad\quad . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \qquad . \\
\quad . \qquad\quad . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad . \qquad . \\
\quad . \ . \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad . \qquad . \\
Am1\ X1 + Am2\ X2 + \ldots\ldots + Amn\ Xn\ (\leq=\geq)\ Bm \\
X1, X2, \ldots\ldots Xn \geq 0
\end{array}
$$

Según Beneke y Winterboer, mencionado por Alvarado (2009), hay tres tipos básicos de restricciones: de máximo (≥), de mínimo (≤) y de igualdad (=), y estas pueden ser clasificadas en razón a su objetivo;

- Restricciones de recursos o entradas: como tales pueden incluirse terreno, capital, mano de obra e instalaciones.
- Restricciones externas: esta clase incluye conceptos tales como las asignaciones gubernamentales de superficie de terreno y los límites de crédito asignados a los productos.
- Restricciones subjetivas: estas restricciones se las impone el propio operador. Los límites pueden ser difíciles de definir, pero frecuentemente son reales y significativos en el proceso de planificación. A menudo las restricciones impuestas provienen de los propios objetivos personales o del negocio del planeador. Entre las limitaciones de ese tipo pueden citarse las siguientes:
- Limitaciones sobre la cantidad de otro nivel de crédito que el planeador está dispuesto a utilizar. En muchas ocasiones, es inferior a la cantidad que los prestamistas están dispuestos a aportar. La motivación típica para tal tipo de limitaciones es el deseo poco explícito de evitar los azares de la deuda.
- Restricciones por el riesgo del nivel de las actividades que presentan aspectos ligados a ingresos altamente variables como pueden ser la cría de ovejas o de ganado mayor.
- Restricciones de mínimos respecto a que el operador considere deseable por razones no propiamente de ingresos directos como puede ser el mantener vacas de raza pura, vacas lecheras o cultivos para mantener las cualidades del terreno.

Construcción y resolución de un modelo de programación lineal

Para realizar el análisis *Post-Optimal* en programación lineal y dejar clara su importancia en la toma de decisiones en las empresas agropecuarias lo mejor es construir un modelo, procesarlo y analizar el comportamiento de los resultados ante algunos cambios que se le aplicará al modelo.

El autor presenta un proyecto agrícola que servirá de base para construir el modelo y luego de ser resuelto someterlo a este análisis.

El proyecto consiste en alquilar por trece meses (enero a enero) una finca que dispone de riego por aspersión, la cual mide 5 hectáreas y se ubica en la provincia de Cartago de Costa Rica. Asimismo se realiza un estudio histórico de precios y se resuelve sembrar varios cultivos, cuya cosecha coincida con los meses con los precios más altos en el mercado de mayoreo CENADA (Centro Nacional de Abastecimiento y Distribución de Alimentos). Dado que se desea maximizar las ganancias de este proyecto, se opta por utilizar la programación lineal y con base en la información del cuadro 1 se genera la función objetivo.

Cuadro 1
Cultivos a sembrar durante 13 meses y ganancia neta ($) por hectárea

Variable	Actividad actividad	Periodo cultivo		Coeficiente
Código	(Cultivo)	Desde	Hasta	Ganancia en dólares
CH1	Chile dulce	Febrero	Julio	4.437,00
CH2	Chile dulce	Agosto	Enero	4.760,00
ZA1	Zanahoria	Enero	Abril	3.227,00
ZA2	Zanahoria	Mayo	Agosto	7.192,00
ZA3	Zanahoria	Setiebre	Diciembre	7.568,00
RE1	Repo1lo	Mayo	Julio	2.847,00
RE2	Repo1lo	Setiembre	Noviembre	2.712,00
CE1	Cebolla	Marzo	Julio	15.335,00
CE2	Cebolla	Agosto	Diciembre	17.659,00
PA1	Papa	Marzo	Junio	3.978,00
PA2	Papa	Setiembre	Diciembre	5.764,00

Fuente: Elaboración propia

A la función objetivo le corresponde la fila 1.

Al estimar la ganancia neta por hectárea para cada cultivo se tomó en cuenta el costo de alquiler de terreno por trece meses.

Función Objetivo:

Maximizar Z= 4437CH1 + 4760CH2 + 3227ZA1 + 7192ZA2 + 7568ZA3 + 2847RE1 + 2712RE2 + 15335CE1 + 17659CE2 + 3978PA1 + 5764PA2

En el Cuadro 2, se muestran las restricciones de tierra, el cuadro presenta los cultivos que están ocupando terreno en cada mes o periodo de meses.

El área ocupada por los semilleros no se considera en las restricciones de tierra por ser áreas sumamente pequeñas.

La mano de obra eventual disponible en la zona es de dos mil horas y las horas que requiere cada cultivo se muestran como los coeficientes de cada variable en el Cuadro 3.

Cuadro 2
Restricciones de tierra.

Fila	Restricción	Periodo
2	ZA1 <= 5	Enero
3	CH1 + ZA1 <= 5	Febrero
4	CH1 + ZA1 + CE1 + PA1 <= 5	Marzo - Abril
5	CH1 + ZA2 + RE1 + CE1 + PA1 <= 5	Mayo - Junio
6	CH1 + ZA2 + RE1 + CE1 <= 5	Julio
7	CH2 + ZA2 + CE2 <= 5	Agosto
8	CH2 + ZA3 + RE2 + CE2 + PA2 <= 5	Set. - Oct. - Nov.
9	CH2 + ZA3 + CE2 + PA2 <= 5	Diciembre
10	CH2 <= 5	Enero

Fuente: Elaboración propia

Cuadro 3
Restricciones de mano de obra

Fila	Restriccion	Periodo
11	251ZA1 + 171CE1 <= 2000	Enero
12	389CH1 + 171ZA1 + 91CE1 <= 2000	Febrero
13	204CH1 + 139ZA1 + 65RE1 + 858CE1 + 292PA1 <= 2000	Marzo
14	780CH1 + 75ZA1 + 51RE1 + 182CE1 + 200PA1 <= 2000	Abril
15	184CH1 + 237ZA2 + 367RE1 + 147CE1 + 100PA1 <= 2000	Mayo
16	270CH1 + 157ZA2 + 143RE1 + 111CE2 + 91CE1 + 288PA1 <= 2000	Junio
17	252CH1 + 125ZA2 + 203RE1 + 45RE2 + 31CE2 + 1179CE1 <= 2000	Julio
18	337CH2 + 61ZA2 + 11RE2 + 847CE2 <= 2000	Agosto
19	189CH2 + 237ZA3 + 367RE2 + 171CE2 + 256PA2 <= 2000	Setiembre
20	765CH2 + 157ZA3 + 143RE2 + 147CE2 + 196PA2 <= 2000	Octubre
21	189CH2 + 125ZA3 + 203RE2 + 91CE2 + 100PA2 <= 2000	Noviembre
22	295CH2 + 81ZA3 + 1199CE2 + 308PA2 <= 2000	Diciembre
23	277CH2 <= 2000	Enero

Fuente: Elaboración propia

Se consideró en este grupo de restricciones las horas hombre requeridas para los semilleros de los cultivos de cebolla y repollo, los cuales se realizan durante los dos meses antes del establecimiento del cultivo, específicamente en los siguientes meses: CE1 en enero y febrero, CE2 en junio y julio, RE2 en julio y agosto.

El valor óptimo o ganancia óptima se alcanzaría al obtener como resultado las áreas de terreno que se deben sembrar de cada cultivo durante el periodo de alquiler de la tierra, siendo esto la solución óptima o plan óptimo. Una vez procesado el modelo por medio del programa de cómputo denominado “LINDO” (Linear Interactive Discrete Optimization), se muestran a continuación los siguientes resultados: valor óptimo (máxima ganancia), solución óptima (plan óptimo de producción), precios duales y los rangos de los coeficientes objetivo y valores del lado derecho de las restricciones. Toda esta información es de vital importancia para realizar el análisis sensibilidad y de los precios duales.

Valor óptimo

El valor óptimo obtenido es de ***109.704,00 dólares***, este monto equivale a la máxima ganancia que se puede obtener del área agrícola (5 hectáreas) de la Finca. Esto se logra explotando durante el período de alquiler de la tierra los cultivos o actividades indicados en la solución óptima.

Solución óptima

La solución óptima es la cantidad de terreno que se debe cultivar de cada una de las actividades o variables que integran la función objetivo, si las variables de la función objetivo son sustituidas por esas áreas se obtiene entonces el valor óptimo. En el Cuadro 4, se detalla el área de terreno, en hectáreas, de los cultivos que deben explotarse y que maximizan la función objetivo.

Cuadro 4
Actividades o cultivos que maximizan la función objetivo

Cultivos o variables	Area a sembrar (Hectáreas)
ZA1	3,750518
ZA2	3,573345
ZA3	3,573345
RE1	0,177173
CE1	1,249482
CE2	1,426655

Fuente: Elaboración propia

Las variables estructurales son aquellas con las que se planteó originalmente el modelo de programación lineal, dentro de las variables estructurales podemos distinguir variables básicas (definen la solución óptima) y las variables no básicas las cuales no aparecen en la solución óptima.

El análisis *Post-Optimal*

Una vez encontrado el óptimo económico y la solución óptima, se procede a realizar el análisis *post-optimal*, el cual comprende el estudio de los precios duales, los coeficientes de la función objetivo, el costo reducido de cada variable, los rangos de sensibilidad y la holgura de los valores del lado derecho de las restricciones. El análisis comprende la variación de los datos del modelo individualmente, es decir, se analiza la sensibilidad de los resultados modificando un dato a la vez, asumiendo que todos los demás permanecen sin ninguna alteración (céteris paribus). Esto es importante tomarlo en cuenta cuando se sensibiliza.

Los precios duales y los valores del lado derecho de las restricciones

Alvarado (2009:102) explica que cada precio dual estará asociado a una restricción del problema e indica en cuánto "mejoraría" la función objetivo si dicha restricción se "relajase" en una unidad. En el contexto anterior, "mejorar" significa "aumentar" en el caso de un problema de maximización, y "disminuir" en el caso de un problema de minimización. Por su parte, "relajar" una restricción en una unidad significa: "incrementar" el lado derecho de la restricción en una unidad en caso de que la restricción sea con <=, y "disminuir" el lado derecho en una unidad en caso de que la restricción sea con >=.

Cuando el objetivo es maximizar el resultado, el costo de oportunidad o precio dual es el beneficio que se deja de percibir por no contar con una unidad adicional de un recurso.

Alvarado (2009:104) comenta que se dan cuatro casos en los resultados de los precios duales:

1. **Cuando el modelo es de minimización y la restricción es menor o igual:** el precio dual siempre será mayor o igual a cero. En este caso, el resultado del precio dual haría que quede igual (en caso de ser cero el precio dual) o mejore en ese monto el valor óptimo ante el aumento de una unidad del valor del lado derecho de la restricción, o sea, que por cada unidad que se aumenta el valor del lado derecho se debe restar el monto del precio dual al valor óptimo, ya que se está minimizando la función objetivo. Si se disminuye el lado derecho, entonces, desmejora (aumenta el valor óptimo) o queda igual.
2. **Cuando el modelo es de minimización y la restricción es mayor o igual:** el precio dual será menor o igual a cero. En este caso, un aumento en una unidad del valor del lado derecho hace que aumente (desmejore) el valor óptimo.
3. **Cuando el modelo es de maximización y la restricción es menor o igual:** el precio dual es mayor o igual a cero. En este caso, el resultado del precio dual hace que aumente en ese monto el valor óptimo ante el aumento de una unidad del valor del lado derecho de la restricción.
4. **Cuando el modelo es de maximización y la restricción es mayor o igual:** el precio dual será menor o igual a cero. En este caso, al aumentar en una unidad el valor del lado derecho entonces el valor óptimo disminuye en el monto que indica el precio dual.

Existe una estrecha relación entre los precios duales y los rangos de sensibilidad de los valores del lado derecho de las restricciones. Las restricciones con precio dual cero son aquellas que no son activas; es decir, tienen holgura diferente de cero.

En este modelo, los únicos precios duales que se presentan se ubican en las restricciones formuladas en las filas 4, 5, 7, 8, 9, 17 y 22; en el Cuadro 5, se presentan esos precios. Si se relaciona estas restricciones con los rangos en que pueden variar los valores del lado derecho de las restricciones para que los precios duales se mantengan iguales, Cuadro 6, se tiene que solamente en las restricciones de las filas 4, 7, 8 17 y 22;

pueden aumentarse los valores del lado derecho para que el valor óptimo o ganancias máximas aumenten. La mejor alternativa de decisión con respecto al aumento del valor óptimo debe considerar la ganancia marginal que representa el precio dual y el incremento permitido en el valor del lado derecho de cada restricción, ambos valores deben tomarse en cuenta simultáneamente al momento de decidir por la mejor opción.

Cuadro 5
Precios duales

Fila	Precio dual (colones)
4	3.227,00
5	920,78
7	5.085,12
8	2.285,00
9	4.941,62
17	9,48
22	4,21

Fuente: Elaboración propia

El tomador de decisiones de la empresa agropecuaria, si desea mejorar el valor óptimo y obtener así más ganancias, sólo puede aumentar la disponibilidad de tierra en las restricciones ubicadas en las filas 4, 7 y 8 o aumentar la disponibilidad de mano de obra en las restricciones de las filas 17 y 22.

Si se desea conocer cuál recurso aumenta o mejora el valor óptimo en mayor proporción, se debe multiplicar el precio dual de las restricciones 4, 5, 7, 8, 9, 17 y 22 por el respectivo máximo incremento permitido. En el Cuadro 7, se presenta los resultados de multiplicar el precio dual por el máximo incremento permitido. En este caso, los resultados indican que el productor puede mejorar su ganancia óptima mediante la aplicación de tres alternativas independientes de aumento del área de terreno, si no hubiera limitación de disponibilidad para alquilar terreno adicional, obviamente la mejor alternativa a seleccionar sería incrementando el área de siembra en 2,47 hectáreas, durante los meses de setiembre a noviembre. Esta decisión permitiría que las ganancias máximas suban 5.660,56 dólares. Si hubiera limitaciones de terreno en el entorno se podría entonces elegir cualquiera de las otras dos opciones que requieren de menor área las cuales también aumentarían el valor óptimo pero en menor monto. El Cuadro 7 también nos informa que mediante el aumento de la disponibilidad de horas hombre en los meses de julio o diciembre (filas 17 y 22); igualmente podría mejorarse el valor óptimo, la alternativa de la fila 22 ocupa el tercer lugar en cuanto a la magnitud del monto en que podría mejorar la ganancia máxima, esto se lograría disponiendo de 815,9 horas adicionales en el mes de diciembre.

El precio dual que ofrece la mejor ganancia marginal es el que se ubica en la fila 7; sin embargo, el incremento permitido en el valor del lado derecho no la hace ser la mejor opción para mejorar el valor óptimo.

Cuadro 6
Rangos en que pueden variar los valores del lado derecho de las restricciones para que los precios duales se mantengan iguales.

Fila	Valor actual	Incremento permitido	Decremento permitido	Periodo
4	5 Hectáreas	1,249482	3,750518	Marzo - Abril
5	5 Hectáreas	0,000000	0,146667	Mayo - Junio
7	5 Hectáreas	0,164061	3,573345	Agosto
8	5 Hectáreas	2,477273	0,000000	Set. - Oct. - Nov.
9	5 Hectáreas	0,000000	3,331943	Diciembre
17	2000 Horas	172,920410	1219,494629	Julio
22	2000 Horas	815,954163	178,179718	Diciembre

Fuente: Elaboración propia

Cuadro 7
Mejoría o aumento del valor óptimo

Fila	Precio dual ($)	Incremento mayor permitido	Periodo	Mejoría del valor óptimo ($)
4	3.227,00	1,249482 Ha.	Marzo - Abril	4.032,070000
5	920,78	0,000000 Ha.	Mayo - Junio	0,000000
7	5.085,12	0,164061 Ha.	Agosto	834,260000
8	2.285,00	2,477273 Ha.	Set. - Oct. - Nov.	5.660,560000
9	4.941,62	0,000000 Ha.	Diciembre	0,000000
17	9,48	172,920000 Horas	Julio	1.639,280000
22	4,21	815,950000 Horas	Diciembre	3.435,160000

Fuente: Elaboración propia

Mediante el incremento de 2,47 hectáreas del valor del lado derecho (fila 8), se logra el mayor aumento del valor óptimo entre todas las cinco alternativas, si se decide entonces disponer de 7,47 hectáreas de área de siembra; o sea alquilar 2,47 hectáreas adicionales para los meses de setiembre, octubre y noviembre, se logre conocer de antemano que se obtendría una mejor **ganancia máxima (115.364,60 dólares)** en el proyecto.

Si se incrementa el área disponible con cualquier valor por encima de 7,47 hectáreas, sería un despilfarro, dado que el valor óptimo sigue siendo el mismo debido a que el precio dual pasa a tener un valor de cero.

La holgura de los recursos disponibles

En el Cuadro 8, se presenta la holgura de las restricciones del modelo. Se denominan restricciones activas aquellas con holgura cero, en estas los recursos disponibles (tierra y mano de obra) fueron requeridos en su totalidad.

La información sobre la holgura permite ver cuáles recursos disponibles no son necesarios utilizar alcanzándose siempre el valor óptimo. En cuanto al recurso tierra, se observa que en enero y febrero, no se utilizan en cada mes 1,24 hectáreas de terreno, pero lo más relevante es que en el último mes (fila 10) no se ocupa toda la finca. Esta información permite reconsiderar la decisión inicial de alquilar por trece meses el terreno se puede lograr el valor óptimo alquilando la tierra solamente por doce meses. Decidir alquilar el terreno por doce meses, aún cuando en los meses de enero y febrero existe una desocupación de 1,24 hectáreas, permite obtener un sobrante de 2,70% del monto total presupuestado en este rubro de costo.

Cuadro 8
Holgura de las restricciones

Fila	Holgura
2)	1,249482
3)	1,249482
4)	0,000000
5)	0,000000
6)	0,000000
7)	0,000000
8)	0,000000
9)	0,000000
10)	5,000000
11)	844,958557
12)	1.244,958618
13)	395,106079
14)	1.482,269653
15)	904,420959
16)	1.141,587524
17)	0,000000
18)	573,649353
19)	909,159241
20)	1229,266602
21)	1423,506226
22)	0,000000
23)	2.000,000000

Fuente: Elaboración propia

En cuanto a la holgura del recurso trabajo, se puede observar que solamente en dos restricciones (filas 17 y 22, meses julio y diciembre) se ocupa todas las horas de mano de obra disponible en cada mes, en el resto de meses se presenta holgura al no requerirse la totalidad de horas disponibles. Esta información indica el bajo riesgo que tiene el proyecto en cuanto a disponibilidad de mano de obra en la zona durante esos meses.

Los rangos de sensibilidad de lo coeficientes de la función objetivo

El programa LINDO después de resolver el modelo brinda información acerca del rango de aumento y disminución a que se puede someter los coeficientes de la función objetivo para que aumente o disminuya el valor óptimo sin que la solución óptima o plan de producción cambie. En el Cuadro 9 se observa los rangos permitidos de cada variable del modelo.

Cuadro 9
Rango permitido para modificación de los coeficientes de la función objetivo

Variable	Area (ha.)	Aumento maximo por hectarea ($)	Disminucion Maxima por hectarea ($)
ZA1	3,750518	9.261,00	140,55
ZA2	3,573345	4.711,72	5.085,12
ZA3	3,573345	4.711,72	3.464,01
RE1	0,177173	4.708,80	140,55
RE2	0,000000	4.941,62	2.285,00
CE1	1,249482	816,32	9.261,00
CE2	1,426655	68.206,62	4.711,72

Fuente: Elaboración propia

Los coeficientes objetivos en este caso representan la ganancia por hectárea; por lo tanto, un aumento del coeficiente estaría sujeto a mejorías internas y/o cambiando los canales de comercialización. A lo interno, se lograría mejorar la ganancia por medio de la disminución de los costos al hacer cambios o introducir otra tecnología en los procesos productivos, alcanzando economías de escala en el transporte de insumos y producto mediante la coordinación con otros productores aledaños, aumentando la productividad introduciendo variedades de cultivos mejoradas, capacitación de la mano de obra, aplicación de otra tecnología productiva, mejorando la calidad del producto final para bajar el porcentaje de rechazo. A lo externo, se pueden lograr mayores ganancias por hectárea obteniendo mejores precios al vender el producto directamente a minoristas como supermercados, almacenes, establecimientos especializados en la venta de hortalizas o a consumidores finales como hospitales, escuelas, colegios, universidades, albergues, restaurantes, hoteles, etc.

Por ejemplo, si se desea mejorar la ganancia máxima en un 5% ($5.485,20) del modelo analizado, o sea que el valor óptimo sea $115.189,20, se tendrá que hacer algunos cálculos adicionales para tomar una decisión inteligente en cuanto a cuál cultivo debo escoger para aumentarle su ganancia por hectárea y así lograr ese aumento en la ganancia. Se debe seleccionar el cultivo en el cual se deba hacer el menor esfuerzo para subir su coeficiente y lograr así elevar el óptimo económico en un 5%. Para determinarlo, se debe sumar $5.485,20 a la ganancia que aporta cada variable de la solución óptima y dividirlo por su respectivo valor o sea la cantidad de terreno a sembrar. El resultado de esto es la cuantía que debe tomar el coeficiente de cualquiera de las variables (una a la vez) para que se logre el aumento planeado. Además se debe tener cuidado de verificar que el aumento de cada coeficiente de cada variable sea menor o igual al incremento permitido respectivo, las variables que no lo cumplan se descartan. El paso siguiente es dividir el incremento de cada coeficiente entre la ganancia por hectárea y multiplicarlo por cien, la actividad o cultivo que muestre el porcentaje mas bajo es la ideal para someterla a una mejoría de costos y/o ingresos.

El costo reducido de cada variable

El costo reducido asociado a una variable de decisión indica en cuanto debe incrementarse el coeficiente correspondiente en la función objetivo para que el empleo de dicha variable en la solución óptima resulte rentable o se incluya.

En otras palabras, representa el valor a partir del cual sumado al coeficiente actual de una variable en la función objetivo hace que esta variable o cultivo pase a formar parte de la solución óptima. Esta información nos permite conocer cuánto debe ser el mínimo de ganancia por hectárea de un cultivo para que el mismo forme parte del plan de producción. Resulta importante conocer este dato cuando se desea incluir un cultivo en el plan de producción por situaciones como aumento de los precios de mercado, solicitud de un cliente (hotel, restaurante, supermercado, minorista, etc.).

Cuadro 10
Costo reducido

Cultivo	Costo reducido ($)
CH1	2.101,94
CH2	8.795,00
PA1	169,78
PA2	2.760,67

Fuente: Elaboración propia

Por ejemplo, si se logrará aumentar la ganancia por hectárea en 2.101,94 dólares en el cultivo CH1, esto permitiría que ese cultivo forme parte del plan de producción y así poder atender la demanda de este producto sin variar el valor óptimo. Incrementos superiores a 2.101,94 hace que siempre la variable o cultivo CH1 se incluya en la solución óptima y el valor óptimo aumente.

Conclusiones

En el sector agrícola donde los cambios climáticos, tecnológicos, macroeconómicos y de comercialización tienen un fuerte efecto directo sobre los rendimientos, costos e ingresos, cobra gran relevancia el análisis post-optimal para los modelos de programación lineal aplicados a la agricultura. Este análisis permite identificar el impacto en los resultados del problema original luego de determinadas variaciones en los parámetros, variables o restricciones del modelo, sin necesidad de resolver el problema nuevamente. Este análisis da al modelo una característica dinámica que permite al analista estudiar el comportamiento de la solución óptima y el valor óptimo, al efectuar cambios en los parámetros del modelo.

Se puede también mejorar el valor óptimo realizando otros cambios como: la incorporación de una restricción, la eliminación de una restricción, la incorporación de una variable, la eliminación de una variable y el cambio en los coeficientes de las restricciones.

Un modelo de programación lineal aplicado a un proyecto agrícola cuya resolución va orientada a apoyar las decisiones de un empresario agrícola, ha de ser paramétricamente muy ajustado y su validez es mayor cuanto más corto sea el plazo de aplicación para eludir las oscilaciones de algunos parámetros, que al variar sensiblemente, introduce modificaciones en lo programado, obligando que el modelo no sea estático sino dinámico.

Los programas lineales resultan fáciles de definir y formular, permiten trabajar de manera eficiente con un gran número de variables de decisión y se adaptan muy bien al tratamiento algorítmico con computadores. Hoy, los ordenadores nos brindan la gran ventaja de procesar el modelo en cuestiones de segundos lo que permite hacer el análisis post-optimal más práctico y real.

Los planificadores del gobierno relacionados con el sector agrícola deben de difundir y poner en práctica esta herramienta para ayudar a mejorar los costos y/o ingresos de nuestros agricultores, ayudando así a bajar los niveles de pobreza que se presentan con mayor magnitud en las zonas rurales.

La interpretación de resultados implica examinarlos a la luz de los objetivos propuestos. Se debe determinar las implicaciones de su aplicación. Además, como el modelo es una aproximación de la realidad, debe ser analizada la sensibilidad de la solución a cambios que ocurran en sus insumos. Para ello, se cuenta con el análisis de post- optimización.

Referencias bibliográficas

Alvarado Boirivant, J. (2009). La programación lineal aplicación en las pequeñas y medianas empresas. Rev. Reflexiones 88 (1): 89 – 105.

Bazaraa, Mokhtar S. y Jarvis, John J. (1991). Programación Lineal y Flujo en Redes. Editorial Limusa. México. 539 p.

Boussard, J. M. (1977). Estudios de programación lineal aplicada al sector agrario en países no socialistas: una revisión. Rev. Agricultura y Sociedad 5: 9 – 49.

Caro Merchante, A. (2000). Programación Lineal. Proyecto Descartes. Consultado el 22 de setiembre de 2010, http://descartes.cnice.mec.es/Descartes1/Bach_HCS_1/Programacion_lineal/Pl_historia.htm

Moya Navarro, Marcos Javier. (1998). Programación Lineal. EUNED. San José. 264 p.

Weber, Jean E. (1984). Matemática para Administración y Economía. Editorial Hala. México. 823 p.