

ESPECIALIZACIONES DE FAMILIAS DE CURVAS
DE GRADO 4 EN GEOMETRÍA ALGEBRAICA

SPECIALIZATIONS OF FAMILIES OF CURVES OF
DEGREE 4 IN ALGEBRAIC GEOMETRY

ANDRÉS PIEDRA¹

Received: 22/Aug/2025; Accepted: 28/Nov/2025

Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones is licensed under a Creative Commons
Reconocimiento-NoComercial-Compartigual 4.0 International License.
Creado a partir de la obra en <http://www.revistas.ucr.ac.cr/index.php/matematica>



¹ Universidad Autónoma de Guerrero, Escuela Superior de Matemáticas No. 2,
Guerrero, México. E-Mail: andrespiedra@uagro.mx

Resumen

El objetivo de este artículo de revisión es sintetizar y exponer, de forma detallada, la técnica de especialización de curvas. Específicamente, revisamos y analizamos ejemplos clave sobre cómo ciertas curvas de grado 4 y género aritmético 0 (parametrizadas por el esquema $\text{Hilb}^{4m+1}(\mathbb{P}^3)$) pueden transformarse o degenerar a otras curvas. Se detalla el procedimiento de cálculo computacional, ilustrado con el apoyo del software Macaulay2. Finalmente, se evalúa la utilidad de las especializaciones para describir explícitamente y clasificar las componentes irreducibles de los esquemas de Hilbert y sus correspondientes variedades de Chow. La técnica de especialización de familias de curvas se ha consolidado como un método poderoso y riguroso en geometría algebraica. Al proveer un diagrama de estratificación bien definido, esta herramienta permite, consecuentemente, alcanzar una clasificación precisa de las curvas y comprender la conectividad de las componentes del esquema de Hilbert.

Palabras clave: variedad de Chow; especialización; esquema de Hilbert.

Abstract

The objective of this review article is to synthesize and present, in a detailed manner, the technique of specialization of curves. Specifically, we review and analyze key examples on how certain curves of degree 4 and arithmetic genus 0 (parametrized by the Hilbert scheme $\text{Hilb}^{4m+1}(\mathbb{P}^3)$) can transform or degenerate into other curves. The computational calculation procedure is detailed and illustrated through the use of the Macaulay2 software. Finally, the utility of specializations for explicitly describing and classifying the irreducible components of Hilbert schemes and their corresponding Chow varieties is evaluated. The technique of specialization of families of curves has established itself as a powerful and rigorous method in algebraic geometry. By providing a well-defined stratification diagram, this tool allows for a precise classification of curves and an understanding of the connectivity of the components of the Hilbert scheme.

Keywords: Chow variety; specialization; Hilbert scheme.

Mathematics Subject Classification: Primary: 14H50, 14H10; secondary: 14D06, 52-08.

1. INTRODUCCIÓN

Las familias de curvas aparecen con frecuencia en distintas áreas de las matemáticas, y el estudio de ellas juega un papel especial que conlleva a la solución de problemas o a la descripción de nuevos objetos. Por ejemplo, en cálculo, las familias de curvas de nivel sirven para describir la gráfica de una función de varias variables; en teoría de números, las curvas elípticas sobre campos de números surgen en familias parametrizadas, y estudiar sus especializaciones permite analizar reducción de curvas módulo p ; en sistemas dinámicos algebraicos, las familias

de curvas aparecen al estudiar espacios de soluciones de ecuaciones diferenciales algebraicas. Ahora bien, estudiar el comportamiento de las familias de curvas en geometría algebraica es fundamental, pues permite entender cómo varían las curvas cuando cambian ciertos parámetros y qué propiedades se conservan o se modifican en ese proceso. En el caso de los espacios de moduli de curvas, nos ayudan a comprender su estructura, a clasificar las curvas parametrizadas y a construir compactificaciones de estos espacios.

Hay muchos trabajos de investigación que han usado la técnica de especialización para obtener resultados interesantes. En [22], Piene y Schlessinger usaron especializaciones para estudiar el cierre de la órbita de las cúbicas alabeadas, bajo la acción de PGL_4 sobre \mathbb{P}^3 . Demostraron que la especialización de una cúbica no singular conduce a curvas degeneradas (como la unión de una cónica y una recta secante) con puntos incrustados en los nodos para que el límite sea plano en el esquema de Hilbert, lo cual fue crucial para probar la conexidad e irreducibilidad de este esquema. Nollet [19] utilizó especializaciones para construir trayectorias de degeneraciones que conectan curvas muy diferentes (no singulares, singulares, reducidas y no reducidas) dentro de la misma componente del esquema de Hilbert. Con esto demuestra que el esquema de Hilbert de curvas localmente Cohen Macaulay de grado 3 y género g , es conexo y además, encuentra todas las componentes irreducibles del esquema.

Seis años más tarde, Nollet y Schlessinger [20] aplicaron la técnica de especialización para probar que el esquema de Hilbert de curvas localmente Cohen Macaulay de grado 4 y género g , también es conexo. El estudio de las degeneraciones planas les permitió distinguir las distintas componentes irreducibles del esquema, mostrando cómo las cuárticas no singulares se especializan en uniones de rectas y cónicas, donde la dimensión y la geometría de la curva límite dependen de las estructuras incrustadas que aparecen. Las posibilidades para el género g [16, Fig. 4], para curvas de grado 3 y grado 4 son $g = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1\}$ y $g = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 3\}$, respectivamente.

En [15], el autor hace una recopilación de esquemas de Hilbert de curvas de grado bajo en \mathbb{P}^3 , y siguiendo el espíritu de [19] y [22], usa especializaciones para identificar las curvas no reducidas con puntos incrustados que aparecen en el cierre de las componentes de curvas no singulares. En [2], los autores usan especializaciones de forma más especializada para estudiar el esquema de Hilbert de un par de subespacios lineales de codimensión 2 en \mathbb{P}^n , para $n \geq 3$. Demostraron cómo la especialización de dos subespacios disjuntos a subespacios que se intersectan resulta en una degeneración plana no reducida, cuyo soporte geométrico es singular pero cuya estructura algebraica mantiene la planitud requerida.

Este manuscrito de revisión se centra en la literatura que aborda la componente irreducible del esquema $\mathrm{Hilb}^{4m+1}(\mathbb{P}^3)$, que parametriza curvas de grado 4 y género aritmético 0 en \mathbb{P}^3 . La bibliografía existente ha revelado la rica y compleja estructura de este esquema, con especial atención a las múltiples componentes que

corresponden a diferentes tipos de curvas. Las referencias clave que proporcionan un análisis profundo de la geometría de estos esquemas son [20], [23], [17] y [1].

Por otro lado, una variedad de Chow $C_{r,d}(\mathbb{P}^n)$ parametriza los ciclos algebraicos efectivos de dimensión r y grado d contenidos en \mathbb{P}^n . Mientras que los esquemas de Hilbert utilizan el polinomio de Hilbert para distinguir estos objetos, las variedades de Chow usan un enfoque alternativo basado en la forma Chow (o función Chow). Estas variedades están estrechamente relacionadas con los esquemas de Hilbert, ya que, aunque parametrizan objetos distintos, son birracionalmente equivalentes; es decir, son esencialmente el mismo espacio desde una perspectiva de la geometría birracional. Esto las convierte en herramientas duales e indispensables en la geometría algebraica enumerativa y la teoría de intersección.

La motivación del presente artículo va en la dirección del trabajo que se hizo en [21]. En él se obtuvo la compactificación (mediante especializaciones) completa de dos componentes de la variedad de Chow $C_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ [21, Figura 2 y Figura 3], que parametriza 1-ciclos de grado 3 en \mathbb{P}^3 , así como algunas propiedades topológicas de esta variedad. El trabajo crucial para obtener tal compactificación fue la presentación de los diagramas de estratificación de las correspondientes componentes de la variedad $C_{1,3}(\mathbb{P}^3)$ en los respectivos esquemas de Hilbert, y el uso del morfismo birracional Hilbert-Chow [18, pág. 5.10]. El autor piensa que sería interesante estudiar el caso de la variedad $C_{1,4}(\mathbb{P}^3)$, que parametriza 1-ciclos de grado 4 en \mathbb{P}^3 . Para tal caso es necesario presentar las estratificaciones de las correspondientes componentes $C_1 - C_7$ en los esquemas $\text{Hilb}^{4m+1-g}(\mathbb{P}^3)$, donde $g = -3, -2, -1, 0, 1, 3$, y usar el morfismo Hilbert-Chow para poder obtener la compactificación de esta variedad. Esto justifica el interés por tratar con curvas de grado 4 en el presente artículo. En la literatura se sabe que la variedad de Chow $C_{1,4}(\mathbb{P}^3)$ contiene 7 componentes irreducibles, esto es,

$$C_{1,4}(\mathbb{P}^3) = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6 \cup C_7,$$

donde los puntos genéricos de estas componentes son una curva cuártica plana, una curva racional de grado 4, una curva elíptica de grado 4, una curva cúbica plana y una recta disjunta, dos curvas cuádricas disjuntas, una curva cuádrica y dos rectas disjuntas, y 4 rectas disjuntas, respectivamente.

A manera de ejemplo y motivación trabajaremos en la componente irreducible del esquema $\text{Hilb}^{4m+1}(\mathbb{P}^3)$ correspondiente a la componente C_4 ; es decir, en la componente que parametriza una cúbica plana no singular unión disjunta una recta. Denotaremos a esta componente por $H_C(C \sqcup L, 3)$. Esto justifica el interés por tratar con las especializaciones de curvas que aparecen en la Figura 1. En [24] se puede consultar más acerca de las variedades de Chow y familias de ciclos.

El desarrollo central de este artículo de revisión está dado en tres secciones, que a modo de resumen contienen lo siguiente: en la sección 2 se exponen las definiciones esenciales acerca del esquema de Hilbert, el concepto de especialización, así como una breve explicación sobre los límites de curvas. En la sección

3 se presentan paso a paso ejemplos de especializaciones de curvas de grado 4, usando coordenadas afines x, y y z de \mathbb{A}^3 . En la sección 4 se comenta acerca de los cálculos computacionales (usando Macaulay2) que se necesitan en el proceso de especialización de curvas, como el polinomio de Hilbert de las curvas, la descomposición primaria de los ideales límites, la verificación de la planitud de las familias de curvas, por mencionar algunos. A lo largo de este trabajo K será un campo algebraicamente cerrado de característica cero.

2. LAS DEFINICIONES

Las siguientes son las definiciones básicas que se requieren para lo que resta de este artículo.

Definición 1. Sea X un espacio topológico. Dados cualesquiera $x, y \in X$. Decimos que y es una *especialización* de x (o x especializa a y) en X si y está en la cerradura $\overline{\{x\}}$, y denotamos esto por $x \rightarrow y$.

Un objeto algebraico que resulta de manera natural cuando especializamos curvas es el de *componente incrustada*, y lo que sigue va en la dirección de explicar y definir este concepto.

De acuerdo con [7], la definición se entiende mejor en el contexto de un esquema afín $X = \text{Spec}K[x_1, \dots, x_n]/I$, donde $K[x_1, \dots, x_n]$ es el anillo de polinomios en las variables x_1, \dots, x_n , con coeficientes en K e I es un ideal de $K[x_1, \dots, x_n]$. El conjunto de puntos del esquema X se identifica con los ideales primos $\mathfrak{p} \subset K[x_1, \dots, x_n]$ que contienen a I . Así, las *componentes irreducibles* de X se corresponden con los ideales primos minimales de $K[x_1, \dots, x_n]$. Un punto p de X es un *punto asociado* de X si es un ideal primo asociado del ideal nulo $(0) \subset X$. Estos puntos asociados codifican toda la información sobre la estructura no reducida del esquema. De esto se sigue la siguiente definición.

Definición 2. Un punto asociado p de X es un punto incrustado (o punto asociado incrustado) si no es un punto genérico de una componente irreducible de X . En términos de ideales primos, un punto incrustado es un ideal primo asociado \mathfrak{p} del anillo de coordenadas $K[x_1, \dots, x_n]/I$ del esquema X , que no es minimal. Es decir, es un ideal primo que contiene estrictamente a otro ideal primo asociado \mathfrak{q} .

Se sigue la siguiente definición.

Definición 3. La componente incrustada asociada al punto incrustado \mathfrak{p} es la subvariedad cerrada definida por el ideal primo incrustado \mathfrak{p} :

$$Z(\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q} \in X : \mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{q}\}.$$

Geométricamente, una componente incrustada es un subesquema cerrado cuya estructura subyacente (su soporte) está estrictamente contenida en el soporte de otra componente de X de mayor dimensión. La componente incrustada lleva consigo la estructura extra de los elementos nilpotentes en el anillo local; esto marca la diferencia entre la componente irreducible que la contiene.

Ahora bien, la construcción del esquema de Hilbert requiere parametrizar familias planas de curvas. En ese sentido, un esquema de Hilbert es una *compactificación*, esto es, incluye todas las especializaciones (o límites planos) de configuraciones dadas de curvas. Es decir, si tenemos una familia $\mathcal{C} \rightarrow S$ (donde $S = \text{Spec}(K[t])$) de curvas en el espacio proyectivo \mathbb{P}^n , el límite de la familia de subesquemas cerrados $\{C_t\}_{t \neq 0 \in S}$ en el sentido del esquema de Hilbert está definido por el límite ideal

$$\lim_{t \rightarrow 0} I(C_t) = I(C_{\text{Hilb}}),$$

donde C_{Hilb} es la fibra especial del esquema cerrado $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^n \times S$. Por la completitud del esquema de Hilbert, el límite C_{Hilb} siempre existe.

A menudo, la curva límite C_{Hilb} en el sentido de Hilbert no siempre coincide con la curva límite geométrica esperada C_0 , aún cuando ambas tienen el mismo soporte. En efecto, consideremos una familia de curvas proyectivas $\{\bar{C}_t\}_{t \in S}$ obtenida a partir de incrustaciones $\varphi_t : C \rightarrow \mathbb{P}^n$, donde C es una curva abstracta no singular fija de género g . Cuando $t \neq 0$, la aplicación φ_t es un incrustamiento, entonces la curva imagen $\bar{C}_t = \varphi_t(C)$ es no singular, y su género aritmético $p_a(\bar{C}_t)$ coincide con su género geométrico g . Luego, si $t = 0$, la aplicación φ_0 es solo birracional y no un incrustamiento (pues no es un isomorfismo local en los puntos singulares de \bar{C}_0), lo que significa que $\bar{C}_0 = \varphi_0(C)$ es una curva singular (posiblemente con nodos o cúspides). Si la curva geométrica \bar{C}_0 es singular, su género aritmético $p_a(\bar{C}_0)$ puede ser estrictamente mayor que g . Por lo tanto, si $p_a(\bar{C}_0) > g$, la curva geométrica \bar{C}_0 no puede ser la fibra especial C_{Hilb} del límite de Hilbert, dado que este límite debe ser tal que $p_a(C_{\text{Hilb}}) = g$ (el valor constante de la familia \bar{C}_t).

En resumen, el límite de una familia de curvas en el sentido del esquema de Hilbert está forzado a preservar el polinomio de Hilbert de las curvas generales, y lo hace añadiendo estructuras incrustadas y nilpotentes en el límite, lo que lo obliga a diferir de la curva geométrica singular esperada.

Así, para exhibir una familia plana, la condición necesaria es la constancia del polinomio de Hilbert de las fibras [13, Teorema III.9.9]. Esto es suficiente si la fibra especial es Cohen-Macaulay [5, Teorema 23.1], un criterio utilizado comúnmente en la geometría algebraica computacional.

Por otro lado, dos curvas en \mathbb{P}^3 son proyectivamente equivalentes si una se obtiene como la imagen de la otra bajo la acción de PGL_4 . Una *órbita* es el conjunto de todas las curvas que son proyectivamente equivalentes; es decir, es una clase de equivalencia proyectiva. Definimos un *estrato* como el espacio de curvas en el esquema $\text{Hilb}^{dm+1-g}(\mathbb{P}^3)$ que consiste de puntos que parametrizan todas las curvas

en una órbita. En estos términos, decimos que una órbita B es una especialización de la órbita A si existe una familia de curvas en A cuyo límite es una curva en B . En este caso, también decimos que una curva C en la órbita B es una especialización de las curvas de la órbita A . Un *diagrama de estratificación* es un diagrama en el que se indica la dimensión de cada estrato así como también las relaciones de inclusión bajo cerradura.

En la siguiente sección se exponen ejemplos explícitos de especializaciones de curvas.

3. ALGUNOS EJEMPLOS DE ESPECIALIZACIONES DE CURVAS EN EL ESQUEMA $\text{HILB}^{4m+1}(\mathbb{P}^3)$

El esquema $\text{Hilb}^{4m+1}(\mathbb{P}^3)$ parametriza curvas cuyo polinomio de Hilbert es $p(m) = 4m + 1$, esto es, curvas de grado 4 y género aritmético 0, en el espacio proyectivo \mathbb{P}^3 . Recordemos que el género más alto para una curva no singular de grado 4 en \mathbb{P}^3 es 3, y no existen curvas no singulares de grado 4 y género 2, [13, Página 354], [16]. Por tanto, si la curva es de grado 4, entonces los géneros posibles para ella son: ... - 3, -2, -1, 0, 1, 3.

Dos componentes irreducibles del esquema $\text{Hilb}^{4m+1}(\mathbb{P}^3)$ son $H_C(C \sqcup L, 3)$ y $H(4, 0)$, cuyos miembros generales son *la unión disjunta de una cúbica plana C y una línea recta L ; y curvas cuárticas racionales*, respectivamente [20]. En nuestra notación, en $H_C(C \sqcup L, 3)$ y $H(4, 0)$ se permiten curvas con puntos incrustados.

Para los siguientes ejemplos, las especializaciones de curvas ocurren en la componente $H_C(C \sqcup L, 3)$, y x, y y z son coordenadas afines de \mathbb{A}^3 . El interés por presentar especializaciones de cúbricas nodales recae en que una cúbica nodal es el modelo simple singular de una degeneración de una curva elíptica, y su estudio es importante en varios contextos. Por ejemplo, es el modelo típico para entender la resolución de singularidades [27, Página. 100], [25]; es el ejemplo ideal para introducir conceptos como deformación, especialización, familias de curvas, fibra genérica y especial, [14], [10]. En conclusión, la curva cúbica nodal es un laboratorio perfecto para aplicar ideas fundamentales de la geometría algebraica moderna, con un ejemplo concreto y visualmente accesible.

El interés de exponer ejemplos de curvas con puntos incrustados es crucial, pues con ello es posible garantizar la propiedad más importante de los esquemas de Hilbert: la compacidad (o completitud). Es posible ver que estas componentes incrustadas surgen de manera natural en el proceso de especialización y actúan como un tipo de memoria algebraica de cómo se produjo la especialización, absorbiendo parte de la multiplicidad que se pierde en la estructura geométrica subyacente.

Aunque todos los resultados son válidos sobre cualquier campo K algebraicamente cerrado de característica cero, para fines de visualización e interpretación, los siguientes ejemplos se consideran sobre el campo de los números complejos \mathbb{C} . La notación \mathbb{C}^* significa $\mathbb{C} - \{0\}$.

Ejemplo 3.1. Sea la curva C' dada por la intersección en tres puntos de una cúbica nodal C' y una recta L' con puntos incrustados de multiplicidad 1 en las intersecciones. Entonces C' se puede degenerar a: (I) la intersección en 2 puntos de una cúbica nodal y una recta, con puntos incrustados en las intersecciones, uno de multiplicidad 1 y otro de multiplicidad 2; (II) la intersección en tres puntos de una curva cúspidal y una recta, con puntos incrustados de multiplicidad 1 en las intersecciones; y (III) la intersección en 3 puntos (con puntos incrustados en dos de ellos) de una cónica singular (con un punto incrustado en el punto singular) y una cónica no singular. Los puntos incrustados son de multiplicidad 1. En la Figura 1, los puntos remarcados indican puntos incrustados en las intersecciones y el número junto a ellos, su multiplicidad.

Solución: Para la especialización $[(C') \rightarrow (I)]$ consideramos a la curva C' dada por el ideal $I(C') = (z, y^2 - x^2(x+1)) \cap (z, 2y - 3x - 3) \cap (x+1, y, z^2) \cap (x-3, y-6, z^2) \cap (4x+3, 8y-3, z^2)$. La descripción geométrica de cada ideal (en el plano $z=0$) en $I(C')$ es la siguiente: una cónica nodal; una recta; puntos incrustados de multiplicidad 1 en las intersecciones $(-1, 0, 0)$, $(-\frac{3}{4}, \frac{3}{8}, 0)$ y $(3, 6, 0)$, respectivamente.

Para lograr la especialización deseada vamos a dirigir en familia la recta $2y-3x-3=0$ a la recta $y=0$. Para esto consideramos la familia de rectas $\{2y = t(3x+3)\}_{t \in \mathbb{C}^*}$, para cuando $t=1 \rightarrow 0$. Enseguida, necesitamos conocer los puntos de intersección para cada t de la recta $2y = t(3x+3)$ con la cúbica nodal $y^2 - x^2(x+1) = 0$. Esto se consigue resolviendo la ecuación

$$4x^3 + (4 - 9t^2)x^2 - 18t^2x - 9t^2 = 0. \quad (3.1)$$

Es claro que cuando $x = -1$, la ecuación 3.1 siempre se cumple para todo t . Así, tenemos que

$$4x^3 + (4 - 9t^2)x^2 - 18t^2x - 9t^2 = (x+1)(4x^2 - 9t^2x - 9t^2) = 0.$$

Al resolver la ecuación cuadrática resultan las soluciones

$$x = \frac{3t\sqrt{9t^2+16} + 9t^2}{8} \quad y \quad x = \frac{-3t\sqrt{9t^2+16} + 9t^2}{8}.$$

Por tanto, para todo t , las intersecciones de la cúbica nodal y la recta $2y = t(3x+3)$ son las siguientes:

$$(-1, 0), \left(\frac{3t\sqrt{9t^2+16} + 9t^2}{8}, \frac{9t^2\sqrt{9t^2+16} + 27t^3 + 24t}{16} \right) y$$

$$\left(\frac{-3t\sqrt{9t^2+16} + 9t^2}{8}, \frac{-9t^2\sqrt{9t^2+16} + 27t^3 + 34t}{16} \right).$$

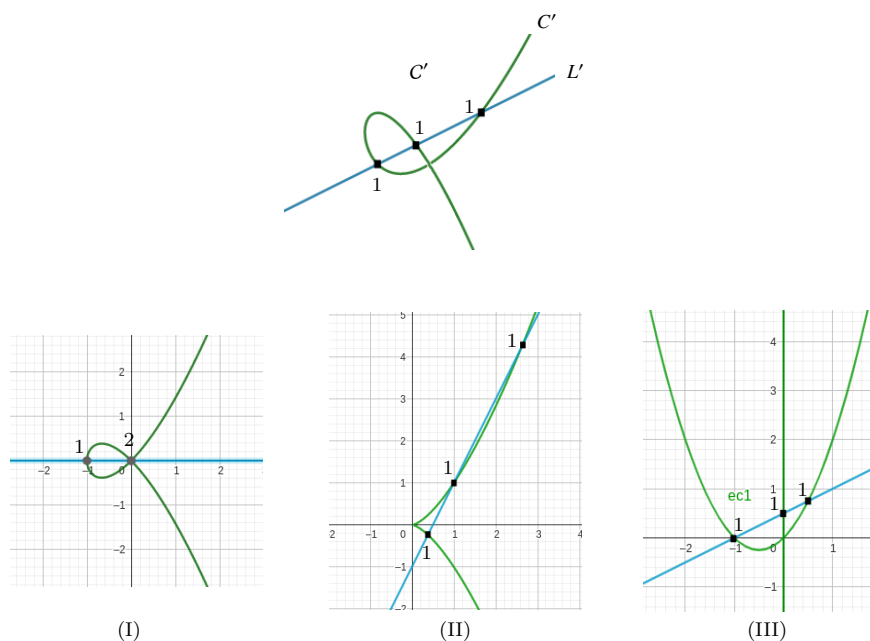


Figura 1: Especializaciones de la curva C' .

Entonces, consideramos la familia de curvas dada por la familia de ideales

$$\begin{aligned}
 I(C'_t) = & (z, y^2 - x^2(x + 1)) \cap (z, 2y - t(3x + t)) \cap (x + 1, y, z^2) \\
 & \cap (8x - 3t\sqrt{9t^2 + 16} - 9t^2, 16y - 9t^2\sqrt{9t^2 + 16} - 27t^3 - 24t, z^2) \\
 & \cap (8x + 3t\sqrt{9t^2 + 16} - 9t^2, 16y + 9t^2\sqrt{9t^2 + 16} - 27t^3 - 24t, z^2).
 \end{aligned}$$

Cuando $t \rightarrow 0$ en la familia $I(C'_t)$, resulta el ideal límite deseado $I(C'_0)$, con descomposición primaria

$$I(C'_0) = (z, x^3 + x^2 - y^2) \cap (z, y) \cap (y, z^2, x^2) \cap (y, x + 1, z^2).$$

La presencia de los ideales (y, z^2, x^2) y $(y, x + 1, z^2)$ en la descripción de $I(C'_0)$ indica que hay puntos incrustados en los puntos $(0, 0, 0)$ y $(-1, 0, 0)$, respectivamente. El primero de multiplicidad 2 y el segundo de multiplicidad 1.

En la Figura 2 aparece la curva C' junto con degeneraciones específicas para ciertos valores de t en la familia $I(C'_t)$. Los puntos remarcados indican los puntos incrustados en las intersecciones, y el número junto a ellos, su multiplicidad.

Para la especialización $[(C') \rightarrow (II)]$ iniciamos considerando la curva inicial C' dada por el ideal $I(C') = (z, x^3 + x^2 - xy - y^2) \cap (z, y - 2x + 1) \cap (x - (2 - \sqrt{3}), y - (3 - 2\sqrt{3}), z^2) \cap$

$(x - 1, y - 1, z^2) \cap (x - (2 + \sqrt{3}), y - (3 + 2\sqrt{3}), z^2)$. Los primeros dos ideales corresponden a una cúbica nodal y una recta en el plano $z = 0$, respectivamente; y los tres últimos ideales corresponden a puntos incrustados en los puntos $(2 - \sqrt{3}, 3 - 2\sqrt{3}, 0)$, $(2 + \sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}, 0)$ y $(1, 1, 0)$, respectivamente. Para la especialización vamos a intersectar la familia de cúbicas nodales $\{x^3 + tx^2 - txy - y^2 = 0\}_{t \in \mathbb{C}^*}$ con la recta $y = 2x - 1$; es decir, vamos a resolver para x la ecuación cúbica

$$x^3 - (t + 4)x^2 + (t + 4)x - 1 = 0. \quad (3.2)$$

Como la ecuación 3.2 siempre se cumple cuando $x = 1$, entonces podemos escribirla como

$$x^3 - (t + 4)x^2 + (t + 4)x - 1 = (x - 1)(x^2 - (t + 3)x + 1) = 0,$$

donde las soluciones de la ecuación cuadrática son

$$x = \frac{\sqrt{t^2 + 6t + 5} + t + 3}{2} \quad \text{y} \quad x = \frac{-\sqrt{t^2 + 6t + 5} + t + 3}{2}.$$

Por lo tanto, consideramos la siguiente familia de ideales

$$\begin{aligned} I(C'_t) = & (z, x^3 + t(x^2 - xy) - y^2) \cap (z, y - 2x + 1) \cap (x - 1, y - 1, z^2) \\ & \cap (2x - \sqrt{t^2 + 6t + 5} - t - 3, y - \sqrt{t^2 + 6t + 5} - t - 2, z^2) \\ & \cap (2x + \sqrt{t^2 + 6t + 5} - t - 3, y + \sqrt{t^2 + 6t + 5} - t - 2, z^2). \end{aligned}$$

Cuando $t \rightarrow 0$ resulta el ideal límite $I(C'_0)$ dado por la descomposición primaria

$$\begin{aligned} I(C'_0) = & (z, x^3 - y^2) \cap (z, 2x - y - 1) \cap (x - 1, y - 1, z^2) \cap (2x + \sqrt{5} - 3, y + \sqrt{5} - 2, z^2) \\ & \cap (2x - \sqrt{5} - 3, y - \sqrt{5} - 2, z^2). \end{aligned}$$

Según la definición 3, los ideales $(x - 1, y - 1, z^2)$, $(2x + \sqrt{5} - 3, y + \sqrt{5} - 2, z^2)$ y $(2x - \sqrt{5} - 3, y - \sqrt{5} - 2, z^2)$ corresponden a puntos incrustados en las intersecciones de la cúbica y la recta. Así, el ideal límite $I(C'_0)$ es justamente la descripción de la curva (II) de la Figura 1. En la Figura 3 aparece la degeneración de la curva C' para algunos valores de t en la familia $I(C'_t)$.

Para la especialización $[(C') \rightarrow (\text{III})]$ consideramos a la curva C' dada por el ideal

$$\begin{aligned} I(C') = & (z, x^3 + x^2 - xy - y^2) \cap (z, x - 2y + 1) \\ & \cap (x + 1, y, z^2) \cap (4x + 1, 8y - 3, z^2) \cap (x - 1, y - 1, z^2). \end{aligned}$$

Los objetos geométricos correspondientes a los ideales en la descripción de $I(C')$ son precisamente una cúbica nodal; una recta; puntos incrustados de multiplicidad 1 en los puntos $(-1, 0, 0)$, $(-\frac{1}{4}, \frac{3}{8}, 0)$ y $(1, 1, 0)$, respectivamente.

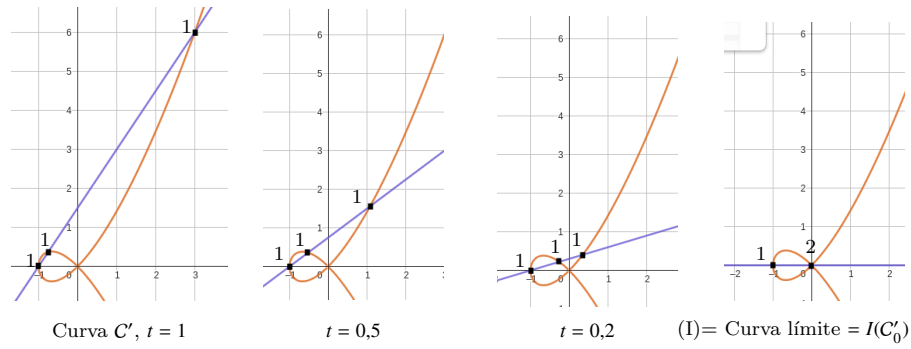


Figura 2: Algunas degeneraciones de la curva C' a (I).

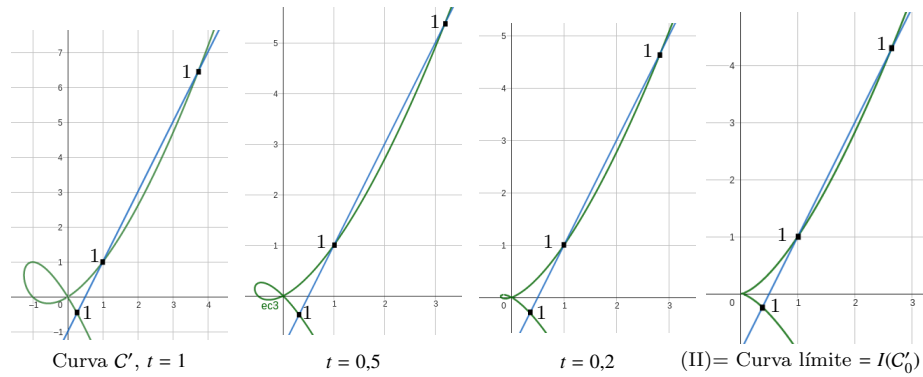


Figura 3: Algunas degeneraciones de la curva C' a (II).

Para exhibir la familia plana $I(C'_t)$ necesitamos calcular las intersecciones de la familia de cúbicas nodales $\{x^3 - x^2 - xy - ty^2 = 0\}_{t \in \mathbb{C}^*}$ con la recta $x - 2y + 1 = 0$. Para esto tenemos que resolver la ecuación cúbica

$$4x^3 + (2 - t)x^2 - (2t + 2)x - t = 0. \quad (3.3)$$

Como la ecuación 3.3 siempre se cumple para $x = -1$, entonces

$$4x^3 + (2 - t)x^2 - (2t + 2)x - t = (x + 1)(4x^2 - (2 + t)x - t) = 0,$$

y al resolver la ecuación cuadrática resultan las soluciones

$$x = \frac{\sqrt{t^2 + 20t + 4} + t + 2}{8} \quad \text{y} \quad x = \frac{-\sqrt{t^2 + 20t + 4} + t + 2}{8}.$$

Así, para cada t , las intersecciones son

$$(-1, 0), \left(\frac{\sqrt{t^2 + 20t + 4} + t + 2}{8}, \sqrt{t^2 + 20t + 4} + t + 10 \right) \quad \text{y}$$

$$\left(\frac{-\sqrt{t^2 + 20t + 4} + t + 2}{8}, -\sqrt{t^2 + 20t + 4} + t + 10 \right).$$

Entonces, consideramos la familia plana dada por la familia de ideales

$$\begin{aligned} I(C'_t) &= (z, x^3 + x^2 - xy - ty^2) \cap (z, x - 2y + 1) \cap (x + 1, y, z^2) \\ &\cap (8x - \sqrt{t^2 + 20t + 4} - t - 2, 16y - \sqrt{t^2 + 20t + 4} - 10 - t, z^2) \\ &\cap (8x + \sqrt{t^2 + 20t + 4} - t - 2, 16y + \sqrt{t^2 + 20t + 4} - 10 - t, z^2). \end{aligned}$$

Cuando $t \rightarrow 0$ en $I(C'_t)$ resulta el ideal límite $I(C'_0)$ dado por la descomposición primaria

$$I(C'_0) = (z, x^2 + x - y) \cap (z, x) \cap (z, x - 2y + 1) \cap (2y - 1, x, z^2) \cap (x + 1, y, z^2) \cap (2x - 1, 4y - 3, z^2).$$

Otra vez, por la definición 3, los ideales $(2y - 1, x, z^2)$, $(x + 1, y, z^2)$, y $(2x - 1, 4y - 3, z^2)$ corresponden a puntos incrustados en las intersecciones de las curvas. Así, la configuración geométrica de los objetos geométricos asociados con los ideales en la descomposición primaria de $I(C'_0)$ es justamente (III), a saber, la intersección en 3 puntos (con puntos incrustados en dos de ellos) de una cónica singular (con un punto incrustado en el punto singular) y una cónica no singular. Los puntos incrustados son de multiplicidad 1. En la Figura 4 aparece la degeneración de la curva C' para algunos valores de t en la familia $I(C'_t)$. Los puntos remarcados indican puntos incrustados en las intersecciones y el número junto a ellos, su multiplicidad.

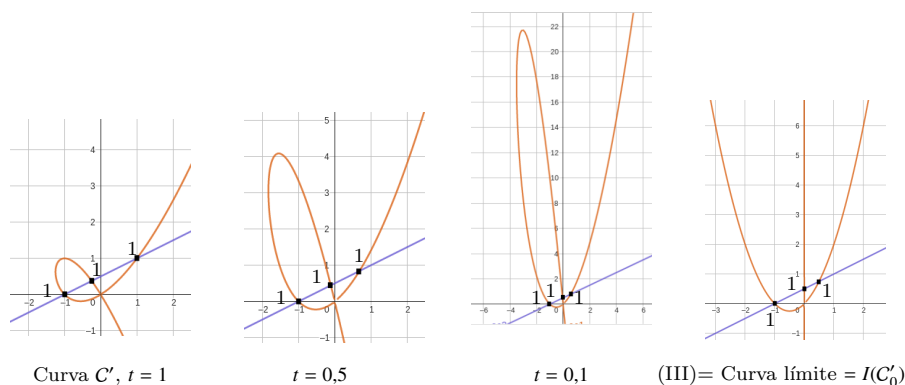


Figura 4: Algunas degeneraciones de la curva C' a (III).

No es difícil ver que la dimensión del espacio de curvas del ejemplo 3.1 de tipo C' es 13. En efecto, dado que el soporte de la curva C' está en un plano $\Pi \subset \mathbb{P}^3$, la dimensión total se calcula de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dim(C') = & \dim(\text{plano } \Pi) + \dim(\text{cúbica nodal en } \Pi) \\ & + \dim(\text{elección del punto nodal}) \\ & + \dim(\text{direcciones tangenciales en el nodo}) \\ & + \dim(L \text{ en } \Pi) + \dim(\text{puntos incrustados}). \end{aligned}$$

Primero, la dimensión del soporte geométrico de la curva C' se calcula como sigue.

- (1) *Elección del plano Π :* El espacio de todos los planos en \mathbb{P}^3 se parametriza por la grassmanniana $\mathbb{G}(2, 3)$ o equivalentemente \mathbb{P}^3 . Así, la dimensión del espacio es $4 - 1 = 3$.
- (2) *Elección del punto nodal:* Una vez elegido el plano, el nodo es un punto singular en el plano $\Pi \cong \mathbb{P}^2$. Esto genera una dimensión 2.
- (3) *Elección de las direcciones tangenciales del nodo:* Dado que hay 2 direcciones tangenciales distintas, estas ya están determinadas por la forma de la cúbica nodal, es decir, no hay libertad de elección. Por tanto, la libertad de elección es 0.
- (4) *Elección de la cúbica plana:* Dado que la cúbica nodal tiene un punto singular fijo y dos direcciones tangentes fijas, la deformación de la cúbica es un espacio de dimensión 4.
- (5) *Elección de la recta L :* Si suponemos que la recta L solo depende de un grado de libertad, entonces la dimensión es 1.

Por lo tanto, la dimensión total del soporte es 10.

Ahora, por el teorema de Bézout [13, Página. 54], la intersección de la cúbica nodal y la recta L en el plano \mathbb{P}^2 debe consistir de 3 puntos. Luego, los 3 puntos sobre la cúbica definen la posición de la recta L , resultando un espacio de dimensión 3. Se asume que la contribución a la dimensión por la estructura incrustada es la libertad para deformar la recta L de manera que capture la estructura nilpotente en cada punto. Así pues, la dimensión total del espacio de curvas del tipo C' es 13.

La dimensión de la familia de curvas límites $I(C'_0)$ en las especializaciones $[(C') \rightarrow (I)]$, $[(C') \rightarrow (II)]$, y $[(C') \rightarrow (III)]$ es 12. En efecto, para (I):

$$\begin{aligned} \dim((I)) &= \dim(\text{plano } \Pi) + \dim(\text{cúbica nodal en } \Pi) \\ &\quad + \dim(\text{elección del punto nodal}) \\ &\quad + \dim(\text{direcciones tangenciales en el nodo}) \\ &\quad + \dim(L \text{ en } \Pi) + \dim(\text{puntos incrustados}) \\ &= 3 + 4 + 2 + 0 + 1 + 2 = 12. \end{aligned}$$

Para (II), tenemos:

$$\begin{aligned} \dim((II)) &= \dim(\text{plano } \Pi) + \dim(\text{cúbica cúspidal en } \Pi) \\ &\quad + \dim(\text{elección del punto cúspide}) \\ &\quad + \dim(\text{direcciones tangenciales en el singular}) \\ &\quad + \dim(\text{elección de dos puntos sobre la cúbica para la recta } L) \\ &= 3 + 4 + 2 + 1 + 2 = 12. \end{aligned}$$

La estructura incrustada (puntos de multiplicidad 1 y 2) no añaden dimensión adicional; sino que es la manera en que el límite plano se forma sobre el soporte geométrico de dimensión 12.

La curva dada por (III) está definida por la intersección de un cono cuadrático singular Q_1 y una cuádrica no singular Q_0 , y el resultado es una curva de grado $2 \times 2 = 4$. Una cuádrica (superficie de grado 2) está definida por un polinomio homogéneo de grado 2, por lo que resultan 10 coeficientes para el polinomio homogéneo. Esto quiere decir que la dimensión del espacio de todas las cuádricas es 9. Tomando en cuenta esto, se tiene que:

$$\begin{aligned} \dim((III)) &= \dim(\text{cuádrica no singular } Q_0) + \dim(\text{cuádrica singular } Q_1) \\ &\quad + \dim(\text{estructuras incrustadas}) \\ &= 9 + 0 + 3 = 12. \end{aligned}$$

El grado de libertad de mover una cuádrica no singular es 9. La cónica singular también es definida por 9 parámetros, pero tiene libertad de un punto singular fijo (el vértice). Resulta que en el espacio ambiente \mathbb{P}^3 la libertad de mover un

como está contenida en el espacio de cuádricas. Por lo tanto, la curva resultante de la intersección $Q_0 \cap Q_1$ se mueve con grado de libertad 9 (el de las cuádricas no singulares) y de la elección de alguna otra cuádrica que force la singularidad deseada en la curva dada por (III). Además, el punto incrustado en el punto singular (el vértice del cono Q_1) añade un grado de libertad y los otros dos puntos incrustados añaden una dimensión 2.

Para calcular las dimensiones de los espacios de curvas dentro del contexto del espacio de Hilbert hay varias referencias importantes; por ejemplo en [8], [7], [13, Capítulo 4] y [12, Capítulo 18] se da una buena introducción a familias de curvas, técnicas de conteo de parámetros y cálculo de las dimensiones locales de las componentes de los esquemas de Hilbert.

El polinomio de Hilbert de las curvas de tipo C' , (I), (II), y (III) es $p(m) = 4m + 1$. Un cálculo manual y un estudio profundo sobre los polinomios de Hilbert de curvas se puede ver en [13, Capítulo 17], [5, Capítulo 13], [12, Capítulo 9] y [26].

Ejemplo 3.2. Una especialización de una curva de tipo (II), a saber, la intersección en tres puntos de una curva cuspidal, con puntos incrustados de multiplicidad 1 en las intersecciones, es la curva (II)'. Esta está dada por una cónica y una línea L tangente a ella, y otra recta L_1 (con $L \cap L_1 \neq \emptyset$) que intersecta a la cónica en dos puntos. Los puntos incrustados son de multiplicidad 1. La situación aparece en la Figura 5.

Solución: Sea M la curva dada por (II). Consideramos a M de la forma

$$I(M) = (z, x^3 - y^2) \cap (z, 3y - 7x + 4) \cap (x - 4, y - 8, z^2) \cap (x - 1, y - 1, z^2) \cap (9x - 4, 27y + 8, z^2).$$

Vamos a considerar la familia de cúbicas cuspidales $\{x^2y - y^2 + t(x^3 - x^2y)\}_{t \in \mathbb{C}^*}$ y la vamos a intersectar con la recta $3y - 7x + 4 = 0$. Las intersecciones resultantes son

$$x = 1, \quad x = \frac{8\sqrt{3t+1} + 20}{21 - 12t} \quad y \quad x = \frac{-8\sqrt{3t+1} + 20}{21 - 12t}.$$

Por lo tanto, los puntos de intersecciones son

$$\left(\frac{8\sqrt{3t+1} + 20}{21 - 12t}, \frac{56\sqrt{3t+1} + 48t + 56}{63 - 36t} \right), \left(\frac{-8\sqrt{3t+1} + 20}{21 - 12t}, \frac{-56\sqrt{3t+1} + 48t + 56}{63 - 36t} \right),$$

y $(1, 1)$.

Con esto en mano, consideramos la familia de ideales

$$I(M_t) = (z, x^2y - y^2 + t(x^3 - x^2y)) \cap (z, 3y - 7x + 4) \cap (x - 1, y - 1, z^2) \\ \cap ((21 - 12t)x - 8\sqrt{3t+1} - 20, (63 - 36t)y - 56\sqrt{3t+1} - 48t - 56, z^2) \\ \cap ((21 - 12t)x + 8\sqrt{3t+1} - 20, (63 - 36t)y + 56\sqrt{3t+1} - 48t - 56, z^2).$$

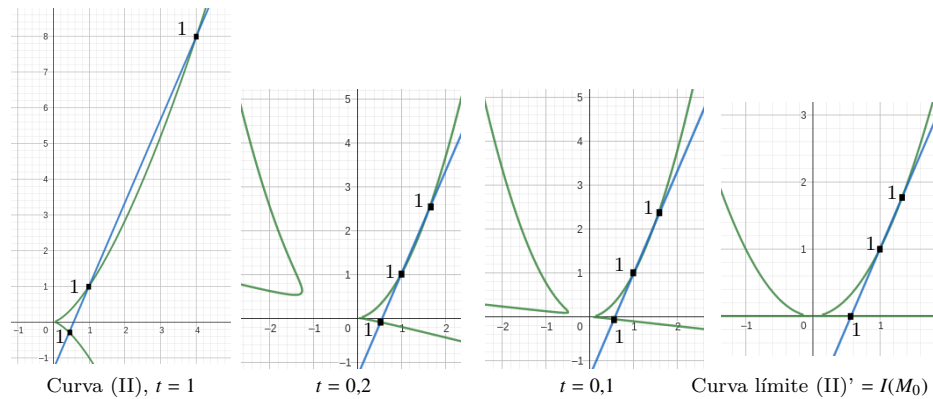


Figura 5: Algunas degeneraciones de la curva (II) a la curva (II)'.

Cuando $t \rightarrow 0$, se obtiene el ideal $I(M_0)$ dado por la descomposición primaria

$$I(M_0) = (z, 7x - 3y - 4) \cap (z, y) \cap (z, x^2 - y) \cap (7x - 4, y, z^2) \\ \cap (x - 1, y - 1, z^2) \cap (3x - 4, 9y - 16, z^2).$$

Este último ideal describe justamente a la curva (II)'. La degeneración de la curva (II) a la curva (II)' para algunos valores de t se puede ver en la Figura 5.

La dimensión del espacio de curvas de tipo (II)' es 11. En este caso, la curva total dada por (II)' es la unión de las siguientes tres componentes: la cónica C , la recta tangente L y la recta L_1 . Luego esta curva total es de grado $2 + 1 + 1 = 4$. La dimensión total del espacio de estas curvas es

$$\begin{aligned} \dim((II)') &= \dim(\text{plano } \Pi) + \dim(\text{componentes en } \Pi) \\ &\quad + \dim(\text{estructuras incrustadas}) \\ &= 3 + 8 + 0 \\ &= 11. \end{aligned}$$

Sólo falta ver la dimensión de las 3 componentes en el plano Π y la dimensión de las estructuras incrustadas. Una cónica en \mathbb{P}^2 está definida por 6 coeficientes, por lo que el espacio es de dimensión 5. Una vez fijada la cónica C , L se determina eligiendo el único punto de tangencia en C ; es decir, hay un grado de libertad (dimensión 1) para elegir a la recta L . Las condiciones $L \cap L_1 \neq \emptyset$ y $L_1 \cap C = \{p_1, p_2\}$ resultan equivalentes a elegir dos puntos en el plano (2 grados de libertad). De este modo, los puntos incrustados de multiplicidad 1 no añaden dimensión adicional al espacio de curvas del tipo (II)'.

Se puede observar que en las especializaciones de los ejemplos anteriores, la dimensión del espacio de curvas límite siempre es menor o igual que la dimensión del espacio de curvas inicial. Esto siempre sucede en el proceso de especialización, dado que ciertas propiedades de las curvas se pueden perder durante el proceso. En [11] se puede leer más acerca de este tema.

4. ACERCA DE LOS CÁLCULOS COMPUTACIONALES

Macaulay2 es una herramienta poderosa y especializada para el estudio computacional de álgebra conmutativa y geometría algebraica, y es ampliamente utilizado para la investigación de problemas teóricos y realizar cálculos explícitos en geometría algebraica, teoría de curvas, singularidades, módulos, polinomios de Hilbert, y mucho más. Así pues, la verificación de la planitud de las familias, el proceso de saturación de los ideales, el polinomio de Hilbert de las curvas, y la descomposición primaria de los ideales límites de las familias planas de los ejemplos 3.1 y 3.2 se han obtenido mediante el programa Macaulay2 [9]. En [21] aparece el algoritmo usado en Macaulay2 para obtener especializaciones de familias curvas de grado 2 y 3, así como sus polinomios de Hilbert. Además en [15, Apéndice] se pueden ver algoritmos sobre especializaciones de familias de curvas y algoritmos para verificar que una familia de curvas es plana, usando Macaulay2. Los algoritmos para verificar y calcular lo mencionado en las líneas 5 y 6 de esta sección también se pueden consultar en los manuales [6] y [9]. Por ejemplo, el algoritmo para determinar la multiplicidad de un punto incrustado se puede ver en [6, Página. 61]. Otros cálculos prácticos en geometría algebraica y álgebra conmutativa donde se hace uso de esta herramienta computacional se pueden ver en [28], [3] y [4]. En el sitio web oficial de Macaulay2 se mantiene una lista actualizada de publicaciones que citan el sistema.

Como se ha podido ver en la sección precedente, calcular especializaciones de curvas en los esquemas de Hilbert, $\text{Hilb}^{md+1-g}(\mathbb{P}^3)$, es un trabajo muy técnico y exigente a la vez, y dicha exigencia se debe a varias razones. Por ejemplo, se requiere control sobre la familia de curvas, y construir explícitamente familias planas y bien comportadas puede ser un trabajo difícil, especialmente en espacios de dimensión mayor o con condiciones adicionales (intersecciones, multiplicidades, etc.). También, pueden aparecer varios fenómenos como fusión de componentes, aparición de puntos no reducidos o incrustados, cambios en la multiplicidad o en el género, descomposición esquemática más complicada que las curvas de la familia, etc. Aún cuando Macaulay2 puede ayudar a resolver estos detalles, se necesita saber cómo codificar adecuadamente la familia de curvas y cómo interpretar los resultados geoméricamente. El estudio de especializaciones está íntimamente ligado a la teoría de deformaciones y a los espacios de moduli, que son áreas altamente técnicas por sí mismas.

A pesar del tecnicismo que resulta determinar el diagrama de estratificación de las componentes de un esquema $\text{Hilb}^{md+1-g}(\mathbb{P}^3)$, el resultado obtenido sirve de mucho; por ejemplo, ofrece una clasificación de las curvas que parametriza esa

componente y ayuda a resolver problemas de conexidad de las componentes. Por si fuera poco, mediante el morfismo birracional Hilbert-Chow se pueden describir las componentes correspondientes de las variedades de Chow, y dar información acerca de la normalidad de la compactificación de la correspondiente componente (a nivel Chow) y de la ocurrencia de su lugar singular.

5. FINANCIAMIENTO Y AGRADECIMIENTOS

El autor expresa su profundo agradecimiento a los revisores anónimos de la Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones por su lectura crítica y sus valiosas sugerencias; sus observaciones técnicas y comentarios editoriales fueron fundamentales para mejorar la claridad y el rigor de la versión final de este manuscrito. Asimismo, se hace constar que el presente trabajo no recibió ningún tipo de financiamiento, beca o apoyo económico de instituciones públicas o privadas para su desarrollo o publicación, habiéndose realizado íntegramente con recursos propios.

REFERENCIAS

- [1] D. Chen, *On the dimension of the Hilbert scheme of curves*. Mathematical Research Letters **16**(2009), no. 6, 941-954. DOI: [10.4310/mrl.2009.v16.n6.a3](https://doi.org/10.4310/mrl.2009.v16.n6.a3)
- [2] D. Chen, I. Cozcun y S. Nollet, *Hilbert scheme of a pair of codimension two linear subspaces*. Communications in Algebra **39**(2011), no. 8, 3021-3043. DOI: [10.1080/00927872.2010.498396](https://doi.org/10.1080/00927872.2010.498396)
- [3] D. Cox, J. Little y D. O'Shea, *Using algebraic geometry*. Springer New York, New York, 1998. DOI: [10.1007/978-1-4757-6911-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6911-1)
- [4] D. Cox, J. Little y D. O'Shea, *Ideals, varieties, and algorithms*. 3rd. Springer Nature Switzerland, Cham, 2025. DOI: [10.1007/978-3-031-91841-4](https://doi.org/10.1007/978-3-031-91841-4)
- [5] D. Eisenbud, *Commutative algebra with a view toward algebraic geometry*. Springer New York, New York, 1995. DOI: [10.1007/978-1-4612-5350-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5350-1)
- [6] D. Eisenbud, D. Grayson, M. Stillman y B. Sturmfels, eds., *Computations in algebraic geometry with Macaulay 2*. Springer New York, New York, 2002. DOI: [10.1007/978-3-662-04851-1](https://doi.org/10.1007/978-3-662-04851-1)
- [7] D. Eisenbud y J. Harris, *The geometry of schemes*. Springer New York, New York, 2000. DOI: [10.1007/b97680](https://doi.org/10.1007/b97680)
- [8] D. Eisenbud y J. Harris, *3264 and all that: a second course in algebraic geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 2013. DOI: [10.1017/CBO9781139062046](https://doi.org/10.1017/CBO9781139062046)
- [9] D. R. Grayson y M. E. Stillman, *Macaulay2, a software system for research in algebraic geometry*. Sistema de Software. 2002.
- [10] G.-M. Greuel, C. Lossen y E. Shustin, *Geometry of families of nodal curves on the blown-up projective plane*. Transactions of the American Mathematical Society **350**(1998), no. 1, 251-274. DOI: [10.1090/S0002-9947-98-02055-8](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-98-02055-8)

- [11] G.-M. Greuel, C. Lossen y E. Shustin, *Introduction to singularities and deformations*. Springer Berlin, Berlin, 2007. DOI: [10.1007/3-540-28419-2](https://doi.org/10.1007/3-540-28419-2)
- [12] J. Harris, *Algebraic geometry: a first course*. Springer New York, New York, 1992. DOI: [10.1007/978-1-4757-2189-8](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-2189-8)
- [13] R. Hartshorne, *Algebraic geometry*. Springer New York, New York, 1977. DOI: [10.1007/978-1-4757-3849-0](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-3849-0)
- [14] R. Hartshorne, *Deformation theory*. Springer New York, New York, 2010. DOI: [10.1007/978-1-4419-1596-2](https://doi.org/10.1007/978-1-4419-1596-2)
- [15] Y.-H. A. Lee, *The Hilbert schemes of curves in \mathbb{P}^3* . Tesis doct. Harvard University, (2000).
- [16] C. Lozano, *Curvas algebraicas y la pregunta de Halphen*. Miscelánea Matemática **16**(2016), 1-15.
- [17] M. Maican, *Moduli of space sheaves with Hilbert polynomial $4m + 1$* . Canadian Mathematical Bulletin **61**(2017), no. 2, 328-345. DOI: [10.4153/cmb-2017-030-4](https://doi.org/10.4153/cmb-2017-030-4)
- [18] D. Mumford, J. Fogarty y F. Kirwan, *Geometric invariant theory*. 3rd. Springer Berlin, Berlin, 1994.
- [19] S. Nollet, *The Hilbert schemes of degree three curves*. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure **139**(1997), no. 3, 367-384. DOI: [10.1016/S0012-9593\(97\)89925-9](https://doi.org/10.1016/S0012-9593(97)89925-9)
- [20] S. Nollet y E. Schlesinger, *Hilbert schemes of degree four curves*. Compositio Mathematica **139**(2003), no. 2, 169-196. DOI: [10.1023/b:comp.0000005083.20724.cb](https://doi.org/10.1023/b:comp.0000005083.20724.cb)
- [21] A. Piedra, *A partial description of the Chow variety of 1-cycles of degree 3 in \mathbb{P}^3* . Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana **25**(2019), 21-51. DOI: [10.1007/s40590-017-0182-6](https://doi.org/10.1007/s40590-017-0182-6)
- [22] R. Piene y M. Schlessinger, *On the Hilbert scheme compactification of the space of twisted cubics*. American Journal of Mathematics **107**(1985), no. 4, 761-774. DOI: [10.2307/2374355](https://doi.org/10.2307/2374355)
- [23] P. J. H. Rizzo, *Morfismos de Abel, series lineales y sus límites sobre curvas*. Revista Colombiana de Matemáticas **51**(2017), no. 2, 119-152. DOI: [10.15446/recolma.v51n2.70895](https://doi.org/10.15446/recolma.v51n2.70895)
- [24] D. Rydh, *Families of cycles and the Chow scheme*. Tesis doct. KTH Royal Institute of Technology, (2008).
- [25] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry*. 2nd. Springer Berlin, Berlin, 1994. DOI: [10.1007/978-3-642-57908-0](https://doi.org/10.1007/978-3-642-57908-0)
- [26] I. R. Shafarevich, *Basic algebraic geometry I: varieties in projective space*. 3rd. Springer Berlin, Berlin, 1994. DOI: [10.1007/978-3-642-37956-7](https://doi.org/10.1007/978-3-642-37956-7)
- [27] K. E. Smith, L. Kahanpää, P. Kekäläinen y W. Traves, *An invitation to algebraic geometry*. 1st. Springer New York, New York, 1998. DOI: [10.1007/978-1-4757-4497-2](https://doi.org/10.1007/978-1-4757-4497-2)

- [28] W. V. Vasconcelos, *Computational methods in commutative algebra and algebraic geometry*. 1st. Springer Berlin, Berlin, 1998.