Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones **32**(2): 117-136
CIMPA - UCR ISSN: 1409-2433(Print), 2215-3373(Online)
DOI: https://doi.org/10.15517/9na6rv61

EXTENSIÓN DE UNA ESTRUCTURA DE ÓPERAD DEFINIDA SOBRE UN SUB-S-MÓDULO

EXTENSION OF AN OPERAD STRUCTURE DEFINED ON A SUB-S-MODULE

JESÚS SÁNCHEZ-GUEVARA[1]

Received: 06/Set/2024; Accepted: 29/May/2025

---

[1] Universidad de Costa Rica, Escuela de Matemática, Montes de Oca, Costa Rica. E-Mail: jesus.sanchez_g@ucr.ac.cr

Resumen

En este artículo se presenta una construcción en la categoría de operads simétricos sobre módulos diferenciados graduados, la cual toma un operad definido en un sub-S-módulo y lo extiende a un operad cuyo S-módulo subyacente incluye al original. A este operad le llamamos operad polinomial. Esta construcción depende de la existencia de colímites en la categoría de operads, por lo que se incluye una revisión detallada de este resultado.

Palabras clave: operads, colímites, módulos diferenciales graduados, operads polinomiales

Abstract

This article presents a construction in the category of symmetric operads in differential graded modules, which takes an operad defined in a sub-S-module and extends it to an operad whose underlying S-module includes the original. We call this the polynomial operad. This construction depends on the existence of colimits on the category of operads so a detailed review of this result is included.

Keywords: operads, colimits, differential graded modules, polynomial operads

Mathematics Subject Classification: Primario: 18M70

1. Introducción

La teoría de operad es desarrollada a partir de los trabajos de Stasheff sobre A_∞-álgebras como versiones de álgebras con una noción de asociatividad débil ([10] y [11]), y presentada por primera vez por Peter May en [4] para caracterizar los espacios de lazos iterados.

En este artículo se trabaja con operads simétricos sobre la categoría de módulos diferenciales graduados, sobre los cuales, en un trabajo anterior del autor (ver [9]), la adjunción entre el funtor de operads libre y el funtor de olvido se usa para describir el mecanismo del funtor libre de operads. Así, en este trabajo, se extienden un poco más las propiedades del funtor libre de operads con la presentación de una construcción que extiende la estructura de operad cuando está presente en un sub-S-módulo, de tal manera que el S-módulo subyacente del operad resultante contenga como sub-S-módulo al original y como suboperad al operad inicial.

Luego de los preliminares con respecto a la terminología de la categoría de operads, la primera parte de este artículo revisa un tipo especial de colímite dado por los ecualizadores reflexivos, los cuales simplifican la construcción de colímites en la categoría de operads, como se detalla en la cuarta sección. Aunque dicha construcción es conocida, se presenta en todo su detalle para suplir la falta del mismo en la literatura de operads y así allanar el camino de las personas interesadas en profundizar en esta clase de temas. A lo largo de este artículo, los colímites y diagramas se asumen siempre pequeños; es decir, indexados por colecciones que son conjuntos. En la quinta sección, se usa la existencia de colímites en la categoría de operads para desarrollar el resultado principal de este artículo, expuesto en el teorema 5.4 (presentado por el autor en el teorema 5.3.4 de [7]).

Así, este trabajo se basa en el segundo y quinto capítulo de la tesis doctoral del autor (ver [7]), en la cual se utilizan E_∞-operads para describir estructuras algebraicas asociadas a complejos de cadenas a partir de propiedades de unicidad identificadas por Alain Prouté en [5] y [6].

2. Preliminares

La categoría DGA-Mod tiene por objetos espacios vectoriales $\mathbb{Z}$ graduados $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$ dotados de un morfismo graduado $\partial : M \to M$ de grado -1 que satisface $\partial \circ \partial = 0$, de una aumentación $\epsilon : M \to \mathbb{F}$ y de una coaumentación $\eta : \mathbb{F} \to M$, donde $\mathbb{F}$ es el cuerpo de base con una graduación concentrada en cero, y ϵ y η son morfismos de grado 0 que satisfacen $\epsilon \circ \eta = 1_{\mathbb{F}}$. Como estamos en un contexto graduado, usamos la convención de Koszul de signos (ver [2]).

Los operads simétricos u operads (ver [8]) son colecciones de objetos con acciones de los grupos simétricos Σ_n, relacionados entre ellos por una estructura que se comporta como la composición de funciones de diferentes aridades. Así, un operad $\mathcal{P}$ es una colección de DGA-módulos $\{\mathcal{P}(n)\}_{n\geq 0}$ junto con un morfismo $\eta : F \to \mathcal{P}(1)$, llamado la unidad de $\mathcal{P}$, una acción a la derecha por el grupo simétrico Σ_n sobre $\mathcal{P}(n)$ para cada n, $P(n) \otimes F[\Sigma_n] \longrightarrow P(n)$ y morfismo de DGA-módulos, $\gamma : \mathcal{P}(h) \otimes \mathcal{P}(i_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(i_h) \to \mathcal{P}(n)$ donde $n = i_1 + \cdots + i_h$. Estos morfismos deben cumplir con ser asociativos, conmutar con η y ser equivariantes.

Cada $M \in$ DGA-Mod se puede asociar a un operad $End(M)$, llamado el operad de endomorfismos de M. Sus objetos son $End(M)(n) = Hom(M^{\otimes n}, M)$, es decir es el DGA-módulo de aplicaciones homogéneas de $M^{\otimes n}$ a M, cuya unidad $\eta : F \to End(M)(1)$ es la identidad de M. La acción derecha de Σ_n sobre $End(M)$ es inducida por la acción izquierda de Σ_n sobre $M^{\otimes n}$; es decir, $f\sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \|\sigma\| f(x_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma^{-1}(n)})$. Donde $\|\sigma\|$ es el signo de la permutación σ. Finalmente, la composición γ está dada por $\gamma(f_h \otimes f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_h}) = f_h \circ (f_{i_1} \otimes \cdots \otimes f_{i_h})$.

Un morfismo f de un operad P a otro operad Q está dado por una colección de morfismos de DGA-módulos, $f_n : P(n) \to Q(n)$, que satisfacen condiciones de preservación de la unidad, equivarianza y preservación de la composición. La categoría de operads sobre DGA-Mod se denota $\mathcal{OP}$.

3. Coecualizadores reflexivos

El coecualizador $\mathbf{Ceq}(f, g)$ de dos morfismos $f, g : X \to Y$ en una categoría C es el colímite sobre el diagrama formado por ellos.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "q"] & \mathbf{Ceq}(f,g) \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

De forma equivalente, dicho coecualizador se puede ver como el objeto inicial $q : Y \to \mathbf{Ceq}(f,g)$ de la categoría de morfismos $l : Y \to Z$ que ecualizan a la izquierda f y g; es decir, $lf = lg$. Nos interesa un tipo especial de coecualizadores, llamados coecualizadores reflexivos. Ellos juegan un rol importante en la prueba de la existencia de pequeños colímites en la categoría de operads.

Definición 3.1. Un par reflexivo es un par de morfismos $f, g : X \to Y$ tal que existe $s : Y \to X$ con $fs = gs = 1$, es decir, que tienen una sección en común.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[l, bend right=50, "s"'] \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Proposición 3.2. *En una categoría C sean $f, g : X \to Y$ un par reflexivo con sección $s : Y \to X$. Si existe el coecualizador de f y g, entonces es isomorfo al colímite sobre el diagrama formado por f, g y s.*

Demostración. Es claro que q en el diagrama 3 es un epimorfismo. Sea $(B, \alpha : X \to B, \beta : Y \to B)$ el colímite sobre el diagrama formado por f, g y s. Entonces α y β satisfacen $\beta f = \alpha = \beta g$ y $\alpha s = \beta$. También, tenemos que α es un epimorfismo. De hecho, si $r, s : B \to Z$ son dos morfismos tales que $r\alpha = s\alpha$, entonces $(Z, r\alpha f : X \to Z, r\alpha : Y \to Z)$ es un cocono sobre f, g y s (ya que $fs = 1$), lo cual implica, por la propiedad universal de colímites, que $r\alpha$ se factoriza de manera única por r a través de α. Lo mismo aplica para $s\alpha$, pero $r\alpha = s\alpha$, entonces $r = s$, y así, α es un epimorfismo. Para mostrar que B y $\mathbf{Ceq}(f,g)$ son isomorfos, primero note que α ecualiza a la izquierda a f y g. En efecto, $\alpha f = \beta = \alpha g$. Entonces existe un único morfismo $h : \mathbf{Ceq}(f,g) \to B$ tal que $hq = \alpha$. Ahora, $(\mathbf{Ceq}(f,g), qf : X \to \mathbf{Ceq}(f,g), q : Y \to \mathbf{Ceq}(f,g))$ es un cocono sobre f, g y s, ya que $qfs = q1 = q$. Entonces, existe un único morfismo $\overline{h} : B \to \mathbf{Ceq}(f,g)$ tal que $\overline{h}\alpha = q$ y $\overline{h}\beta = fq$. Pero q y α son epimorfismos, así que tenemos que $h\overline{h}\alpha = hq = \alpha$ implica $h\overline{h} = 1$, y que $\overline{h}hq = \overline{h}\alpha = q$ implica $\overline{h}h = 1$. Por lo tanto, B y $\mathbf{Ceq}(f,g)$ son isomorfos. □

Definición 3.3. Para todo par reflexivo $f, g : X \to Y$, la proposición 3.2 dice que la sección común s no modifica el coecualizador, por lo que se mantiene la notación $\mathbf{Ceq}(f,g)$ para el colímite de un par reflexivo y lo llamaremos coecualizador reflexivo de f y g.

Definición 3.4. Un funtor covariante $F : C \to D$ se dice final si satisface las siguientes condiciones para cada objeto $X \in \mathcal{D}$:

1. Existe un morfismo desde X hasta los objetos de la forma $F(Y)$.
2. Para cada par de tales morfismos desde X, $\alpha : X \to F(Y)$ y $\alpha' : X \to F(Y')$, existe una secuencia finita $g_1, \ldots, g_k$ de morfismos de $\mathcal{C}$, haciendo el diagrama 3.3 conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & & X \arrow[dll, "\alpha"'] \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drr, "\alpha'"] & & \\
F(Y) \arrow[r, "F(g_1)"'] & F(Y_1) & \cdots \arrow[l, "F(g_2)"'] \arrow[r, "F(g_{k-1})"'] & F(Y_{k-1}) & F(Y') \arrow[l, "F(g_k)"']
\end{tikzcd} \tag{3.3}$$

Observación 3.5. De forma equivalente, un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es final si, para cada $X \in \mathcal{D}$, la categoría coma X/F es no vacía y conexa (ver [3, §9]).

Proposición 3.6. *Sea $\mathcal{D}_0$ la categoría generada por un diagrama de la forma*

$$\begin{tikzcd}
x_0 \arrow[r, shift left, "i"] \arrow[r, shift right, "j"'] & x_1, \arrow[l, bend right=40, "s"']
\end{tikzcd} \tag{3.4}$$

donde $is = js = 1$. Entonces, el funtor diagonal $D : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_0^n$ es final para todo entero $n \geq 1$.

Demostración. Tome X un objeto de $\mathcal{D}_0^n$, entonces tiene la forma $X = (x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, con $i_j \in 0, 1$. Existe un morfismo f de X a $D(x_1)$ dado por $f = (f_{i_1}, \ldots, f_{i_n})$, donde $f_{i_j} = 1_{x_1}$ si $i_j = 1$ y $f_{i_j} = f$ si $i_j = 0$. Note que aún se puede tener un morfismo de X a $D(x_1)$ al tomar arbitrariamente f de g en las entradas f_{i_j} cuando $i_j = 0$. Pero el único morfismo de X a $D(x_0)$ está dado por $s = (s_{i_1}, \ldots, s_{i_n})$, donde $s_{i_j} = 1_{x_0}$ si $i_j = 0$, y $s_{i_j} = s$ si $i_j = 1$. Ahora se verifica la segunda condición en la definición 3.4. Tome α, α' dos morfismos de X a $D(x_1)$. Sea $\beta = (b_{i_1}, b_{i_k})$ el morfismo de X a $D(x_0)$ definido por $b_{i_j} = s$ si $i_j = 1$, y $b_{i_j} = 1_{x_0}$ si $i_j = 0$. Entonces, el diagrama 3.5 es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, "\alpha'"] & \\
D(x_1) \arrow[r, "D(s)"'] & D(x_0) & D(x_1) \arrow[l, "D(s)"']
\end{tikzcd} \tag{3.5}$$

Esto es suficiente para mostrar que D es un funtor final. □

Los funtores finales son útiles para calcular colímites, como lo muestra la proposición 3.7. Para una prueba, ver [3, §9].

Proposición 3.7. *Considere $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ un diagrama en una categoría $\mathcal{C}$ y $I : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}$ un funtor final tal que el colímite de $F \circ I$ existe. Entonces, el colímite de F existe y es canónicamente isomorfo al colímite de $F \circ I$.*

4. Colímites de operads

En esta sección vamos a detallar la construcción de colímites en la categoría de operads, a partir de la existencia del caso particular de colímites dado por los coecualizadores reflexivos y las propiedades de preservación de colímites del productor tensorial en la categoría de DGA-módulos.

Si $F \dashv G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ son funtores adjuntos con biyección natural $\theta : \mathcal{D}(F(X), Y) \to \mathcal{C}(X, G(Y))$, su unidad $\eta : 1_{\mathcal{C}} \to GF$ y counidad $\epsilon : FG \to 1_{\mathcal{D}}$ satisfacen las ecuaciones triangulares:

$$\epsilon_F \cdot F\eta = 1_F, \; G\epsilon \cdot \eta_G = 1_G. \tag{4.1}$$

Una manera de construir funtores adjuntos es mediante flechas universales. Recuerde que si $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ es un funtor covariante y X un objeto de $\mathcal{C}$, una flecha universal desde X a G es un morfismo de la forma $\eta_X : X \to GF(X)$, tal que para cada morfismo $f : X \to G(Y)$ hay en $\mathcal{D}$ un único morfismo $\theta^{-1}(f) : F(X) \to Y$ que satisface $G(\theta^{-1}(f))\eta_X = f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & GF(X) \arrow[d, "G(\theta^{-1}(f))"] \\ & G(Y) \end{tikzcd} \tag{4.2}$$

La aplicación F entre los objetos de $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ se extiende de manera única en un funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que $F \dashv G$, siempre que el funtor $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tenga para cada objeto $X \in \mathcal{C}$ una flecha universal $\eta_X : X \to G(F(X))$. Para más detalles, ver [3, §4 Teorema 2]. En la extensión de F para las flechas, si $f : X \to Y$ un morfismo en $\mathcal{C}$, $F(f)$, cuya existencia y unicidad de $F(f)$ es garantizada por la propiedad universal de η_X, debe hacer el diagrama 4.3 conmutativo.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\eta_X"] \arrow[d, "f"'] & G(F(X)) \arrow[d, dashed, "G(F(f))"] \\ Y \arrow[r, "\eta_Y"] & G(F(Y)) \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

Las adjunciones nos interesan por su comportamiento con respecto a la toma de colímites, ya que todo funtor adjunto a la izquierda preserva colímites (ver [3, §5]). En la categoría de DGA-módulos, el productor tensorial preserva colímites en cada componente, en particular, coecualizadores reflexivos. Esto por ser adjunto a la izquierda del funtor Hom Así, el producto tensorial satisface las condiciones del siguiente lema (ver [1]), y por lo tanto, preserva coecualizadores reflexivos en productos cartesianos de esta categoría.

Lema 4.1. *Sea $F : \mathcal{C}^n \to \mathcal{C}$ un funtor covariante. Si para cada $1 \leq i \leq n$ y cada diagrama reflexivo $X_i \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} Y_i$ en $\mathcal{C}$, el morfismo dado por la propiedad universal de coecualizadores desde el coecualizador del diagrama en $\mathcal{C}$,*

$$F(A_1, \ldots, A_{i-1}, X_i, A_{i+1}, \ldots, A_n) \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} F(A_1, \ldots, A_{i-1}, Y_i, A_{i+1}, \ldots, A_n),$$

al objeto $F(A_1, \ldots, A_{i-1}, \boldsymbol{Ceq}(X_i \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} Y_i), A_{i+1}, \ldots, A_n)$, es un isomorfismo, entonces para cada colección de diagramas reflexivos $\{X_i \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} Y_i\}_{1\leq i\leq n}$ el morfismo desde el coecualizador del diagrama en $\mathcal{C}$,

$$F(X_1, \ldots, X_n) \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} F(Y_1, \ldots, Y_n),$$

al objeto $F(\boldsymbol{Ceq}(X_1 \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} Y_1), \ldots, \boldsymbol{Ceq}(X_n \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} Y_n))$ es un isomorfismo.

Demostración. La colección de diagramas reflexivos $\{X_i \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} Y_i\}_{1\leq i\leq n}$ define una colección de funtores $\{T_i : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{C}\}_{1\leq i\leq n}$. Se usa la notación $\operatorname*{colim}_{\alpha\in\mathcal{D}_0} T_i(\alpha)$ para $\mathbf{Ceq}(X_i \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} Y_i)$. Así, la hipótesis puede escribirse como

$$\operatorname*{colim}_{\alpha\in\mathcal{D}_0} F(A_1, \ldots, A_{i-1}, T_i(\alpha), A_{i+1}, \ldots, A_n) \xrightarrow{\cong} F(A_1, \ldots, A_{i-1}, \operatorname*{colim}_{\alpha\in\mathcal{D}_0} T_i(\alpha), A_{i+1}, \ldots, A_n).$$

Por proposición 3.6, la diagonal $D : \mathcal{D}_0 \to \mathcal{D}_0^n$ es un funtor final. Considere el funtor $T_1 \times \cdots \times T_n : \mathcal{D}_0^n \to \mathcal{C}^n$. Entonces, la proposición 3.7 dice que existe un isomorfismo desde el colímite de $F(T_1 \times \cdots \times T_n)D$ al colímite de $F(T_1 \times \cdots \times T_n)$, y tenemos que

$$\begin{aligned}
&\mathbf{Ceq}(F(X_1, \ldots, X_n) \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} F(Y_1, \ldots, Y_n)) \\
&= \operatorname*{colim}_{\alpha\in\mathcal{D}_0} F(T_1 \times \cdots \times T_n)D(\alpha) \\
&\xrightarrow{\cong} \operatorname*{colim}_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathcal{D}_0^n} F(T_1(\alpha_1), \ldots, T_n(\alpha_n)) && \text{(por 3.7)}, \\
&\cong \operatorname*{colim}_{\alpha_1\in\mathcal{D}_0} \ldots \operatorname*{colim}_{\alpha_n\in\mathcal{D}_0} F(T_1(\alpha_1), \ldots, T_n(\alpha_n)) \\
&\xrightarrow{\cong} F(\operatorname*{colim}_{\alpha_1\in\mathcal{D}_0} T_1(\alpha_1), \ldots, \operatorname*{colim}_{\alpha_n\in\mathcal{D}_0} T_n(\alpha_n)) && \text{(por hipótesis)}, \\
&= F(\mathbf{Ceq}(X_1 \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} Y_1), \ldots, \mathbf{Ceq}(X_n \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} Y_n)).
\end{aligned}$$

□

Proposición 4.2. *En la categoría $\mathcal{OP}$, el funtor de olvido $U : \mathcal{OP} \to S$-Mod crea coecualizadores reflexivos.*

Demostración. Sea $\mathcal{P} \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} \mathcal{Q}$ un par reflexivo en $\mathcal{OP}$. Se construirá el coecualizador reflexivo $\mathcal{O}$ del diagrama en $\mathcal{OP}$. Para eso, primero se definen los componentes del operad $\mathcal{O}$ como $\mathcal{O}(n) = \mathbf{Ceq}(P(n) \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} Q(n))$. Este coecualizador existe debido a que en S-Mod como DGA-Mod todos los colímites existen.

Para definir la composición γ de $\mathcal{O}$, considere el morfismo 4.4 de DGA-módulos

$$\begin{array}{c} \mathbf{Ceq}\Big[P(k) \otimes P(i_1) \otimes \cdots \otimes P(i_k) \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} Q(k) \otimes Q(i_1) \otimes \cdots \otimes Q(i_k)\Big] \\ \Big\downarrow \psi \\ \mathbf{Ceq}\Big[P(k) \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} Q(k)\Big] \otimes \mathbf{Ceq}\Big[P(i_k) \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} Q(i_k)\Big] \otimes \cdots \otimes \mathbf{Ceq}\Big[P(i_k) \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} Q(i_k)\Big] \end{array} . \tag{4.4}$$

Por lema 4.1, este morfismo es un isomorfismo, por lo que se puede tomar su inversa ψ^{-1} y definir γ como la composición 4.5, dada por

$$\begin{array}{c} \mathcal{O}(k) \otimes \mathcal{O}(i_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}(i_k) = \\ \mathbf{Ceq}\Big[P(k) \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} Q(k)\Big] \otimes \mathbf{Ceq}\Big[P(i_k) \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} Q(i_k)\Big] \otimes \cdots \otimes \mathbf{Ceq}\Big[P(i_k) \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} Q(i_k)\Big] \\ \Big\downarrow \psi^{-1} \\ \mathbf{Ceq}\Big[P(k) \otimes P(i_1) \otimes \cdots \otimes P(i_k) \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} Q(k) \otimes Q(i_1) \otimes \cdots \otimes Q(i_k)\Big] \\ \Big\downarrow \overline{\gamma} \\ \mathbf{Ceq}\Big[P(i_1 + \cdots i_k) \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} Q(i_1 + \cdots i_k)\Big] = \mathcal{O}(i_1 + \cdots + i_k), \end{array} \tag{4.5}$$

donde $\overline{\gamma}$ es el morfismo inducido por la composición de los operads $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$.

Para definir la unidad de $\mathcal{O}$, considere el diagrama 4.6 conmutativo obtenido de $\mathcal{P} \overset{\curvearrowleft}{\rightrightarrows} \mathcal{Q}$ y las propiedades del coecualizador.

$$\begin{tikzcd} & P(1) \arrow[d, shift right] \arrow[d, shift left] \arrow[dr, "i_{P(1)}"] & \\ F \arrow[ur, "\eta_{\mathcal{P}}"] \arrow[dr, "\eta_{\mathcal{Q}}"'] & & \mathcal{O}(1) \\ & Q(1) \arrow[u, bend right=60] \arrow[ur, "i_{Q(1)}"'] & \end{tikzcd} \tag{4.6}$$

Entonces la unidad para $\mathcal{O}$ es definida como la composición $i_{P(1)}\eta_{\mathcal{P}} : F \to \mathcal{O}(1)$. Note que la elección de $i_{Q(1)}\eta_{\mathcal{Q}}$ da el mismo resultado, como consecuencia de la existencia de las flechas reflexivas. No es complicado verificar que $\mathcal{O}$ con esta estructura satisface los axiomas de operads y la propiedad universal para coecualizadores. $\square$

Lema 4.3. *Considere* $\{P_i\}_{i\in I}$ *y* $\{Q_i\}_{i\in I}$ *dos colecciones de objetos en la categoría* C *tal que los colímites* $\underset{i\in I}{colim}\, P_i$ *y* $\underset{i\in I}{colim}\, Q_i$ *existan. Denote por* $i \in I$ *el cocono de aristas* $p_i : P_i \to \underset{i\in I}{colim}\, P_i$ *y* $q_i : Q_i \to \underset{i\in I}{colim}\, Q_i$.

1. *Toda colección de morfismos* $f_i : P_i \to \underset{i\in I}{colim}\, Q_i$*,* $i \in I$*, determina un morfismo* $\overline{f} : \underset{i\in I}{colim}\, P_i \to \underset{i\in I}{colim}\, Q_i$*, tal que* $f_i = \overline{f} p_i$ *para cada* $i \in I$*.*
2. *Cada colección de morfismos* $f_i : P_i \to Q_i$*,* $i \in I$*, determina un morfismo* $f : \underset{i\in I}{colim}\, P_i \to \underset{i\in I}{colim}\, Q_i$*, tal que* $q_i f = f_i p_i$ *para cada* $i \in I$*.*

Demostración. La colección $f_i : P_i \to \underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, Q_i$, $i \in I$ exhibe a $\underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, Q_i$ como un cocono sobre el diagrama $\{P_i\}_{i\in I}$, entonces, por la propiedad universal de coproductos, existe un único morfismo en C $\overline{f} : \underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, P_i \to \underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, Q_i$ tal que $f_i = \overline{f} \circ p_i$ para cada $i \in I$.

Para el segundo enunciado, componga cada $f_i : P_i \to Q_i$ con la respectiva arista del cocono $q_i : Q_i \to \underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, Q_i$, así se tiene la colección $g_i : P_i \to \underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, Q_i$, con $g_i = q_i \circ f_i$ para $i \in I$. Aplicando la primera parte, se obtiene que esto determina $f = \overline{g} : \underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, P_i \to \underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, Q_i$. □

Teorema 4.4. *En la categoría de operads existen todos los colímites.*

Demostración. Considere $\{P_i\}_{i\in I}$ una colección de operads. Con ella es posible construir un par reflexivo en $\mathcal{OP}$, y por proposición 4.2 su coecualizador reflexivo existe en $\mathcal{OP}$. La última parte de la prueba consiste en chequear que este coecualizador reflexivo coincida con el colímite de $\{P_i\}_{i\in I}$.

De $\{P_i\}_{i\in I}$ se obtiene en S-Mod a la colección $\{U(P_i)\}_{i\in I}$. Denote a su colímite por $\underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, U(P_i)$, y $\alpha_i : U(P_i) \to \underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, U(P_i)$ a su cocono de aristas.

Los morfismos $\alpha_i : U(P_i) \to \underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, U(P_i)$ inducen al morfismo $UF(\alpha_i) : UFU(P_i) \to UF(\underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, U(P_i))$, el cual determina al morfismo 4.7.

$$\underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, UFU(P_i) \xrightarrow{d_0} UF(\underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, U(P_i)) \tag{4.7}$$

Considere la unidad ϵ y counidad η de la adjunción $F \dashv U$, así como la composición 4.8 en S-Mod.

$$UFU(P_i) \xrightarrow{U(\epsilon_{P_i})} U(P_i) \xrightarrow{\alpha_i} \underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, U(P_i) \xrightarrow{\eta} UF(\underset{i\in I}{\mathrm{colim}}\, U(P_i)) \tag{4.8}$$

Estas composiciones determinan el morfismo en S-Mod,

$$\operatorname*{colim}_{i\in I} UFU(P_i) \xrightarrow{d_1} UF(\operatorname*{colim}_{i\in I} U(P_i))\ .$$

Debido a la propiedad universal de operads libres, $\underline{d_0}$ y $\underline{d_1}$ determinan los morfismos d_0 y d_1 en $\mathcal{OP}$ en el diagrama conmutativo 4.9.

$$\begin{tikzcd}
UF\left(\operatorname*{colim}_{i\in I} UFU(P_i)\right) \arrow[dr, shift left, "U(d_1)"] \arrow[dr, shift right, "U(d_0)"'] & & F\left(\operatorname*{colim}_{i\in I} UFU(P_i)\right) \arrow[dr, shift left, "d_1"] \arrow[dr, shift right, "d_0"'] & \\
\operatorname*{colim}_{i\in I} UFU(P_i) \arrow[u, "\eta"] \arrow[r, shift left, "\underline{d_1}"] \arrow[r, shift right, "\underline{d_0}"'] & UF(\operatorname*{colim}_{i\in I} U(P_i)) & & F(\operatorname*{colim}_{i\in I} U(P_i))
\end{tikzcd} \tag{4.9}$$

Ahora se da la contracción s para d_0 y d_1. Con la counidad η considere los morfismos $\eta_{U(P_i)} : U(P_i) \to UFU(P_i)$. Por las propiedades del colímite 4.3, ellos determinan un morfismo de S-módulos $\beta : \operatorname*{colim}_{i\in I} U(P_i) \to \operatorname*{colim}_{i\in I} UFU(P_i)$, y se toma $s = F(\beta)$. Así, se tiene el diagrama 4.10 en $\mathcal{OP}$.

$$\begin{tikzcd}
F\left(\operatorname*{colim}_{i\in I} UFU(P_i)\right) \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & F(\operatorname*{colim}_{i\in I} U(P_i)) \arrow[l, bend right, "s"']
\end{tikzcd} \tag{4.10}$$

Antes de tomar el coproducto reflexivo de este diagrama, se debe verificar que $d_1 s = d_0 s = 1$. Para mostrar esto únicamente hay que verificar que sus componentes definidas sobre $U(P_i)$, $d_1 s$ y $d_0 s$, sean ambas iguales a la identidad.

El morfismo s es determinado por $\eta_{U(P_i)} : U(P_i) \to UFU(P_i)$, d_0 por $UF(\alpha_i) : UFU(P_i) \to UF(\operatorname*{colim}_{i\in I} U(P_i))$.

La naturalidad de η hace el diagrama 4.11 conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
U(P_i) \arrow[r, "\eta_{U(P_i)}"] \arrow[d, "\alpha_i"'] & UFU(P_i) \arrow[d, "UF(\alpha_i)"] \\
\operatorname*{colim}_{i\in I} U(P_i) \arrow[r, "\eta"] & UF(\operatorname*{colim}_{i\in I} U(P_i))
\end{tikzcd} \tag{4.11}$$

Así, se tiene que $UF(\alpha_i)\eta_{U(P_i)} = \eta\alpha_i : U(P_i) \to UF(\operatorname*{colim}_{i\in I} U(P_i))$, lo cual induce la identidad sobre $UF(\operatorname*{colim}_{i\in I} U(P_i))$. Para $d_1 s$, d_1 es determinado por la composición

4.8, entonces se tiene que $d_1 s$ es determinado por la composición $\eta\alpha_i U(\epsilon_{P_i})\eta_{U(P_i)}$. Por las ecuaciones triangulares de la unidad y la counidad (ecuación 4.1), esto es igual a $\eta\alpha_i$, lo cual, como antes, induce la identidad sobre $UF(\operatorname*{colim}_{i\in I} U(P_i))$. Entonces, por proposición 4.2 existe el coecualizador del diagrama 4.10, de forma que

$$\begin{tikzcd} F\left(\operatorname*{colim}_{i\in I} UFU(P_i)\right) \arrow[r, shift left, "d_1"] \arrow[r, shift right, "d_0"'] & F(\operatorname*{colim}_{i\in I} U(P_i)) \arrow[l, bend right, "s"'] \arrow[r, "q"] & Q. \end{tikzcd}$$

El operad Q será el colímite de la colección $\{P_i\}_{i\in I}$. Solo se debe verificar la existencia de los morfismos de operads desde cada P_i a Q y la propiedad universal para los colímites. Para hacer eso, primero vamos a ver la información que da el ser un coecualizador de d_0 y d_1.

Considere R un operad y un morfismo de operads $f : F(\operatorname*{colim}_{i\in I} U(P_i)) \to R$ tal que $fd_0 = fd_1$. Este morfismo está determinado por sus componentes $h_i : U(P_i) \to U(R)$ dadas por las siguientes composiciones:

$$\begin{tikzcd} U(P_i) \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[rr, bend right, "h_i"'] & \operatorname*{colim}_{i\in I} U(P_i) \arrow[r, "\theta(f)"] & U(R) \end{tikzcd} .$$

Los morfismos fd_0 y fd_1 son determinados por los morfismos de $UFU(P_i)$ a $U(R)$ en S-Mod, entonces la relación $fd_1 = fd_0$ se describirá en términos de sus componentes. En el caso de fd_0, recuerde que d_0 está determinado por los morfismos $UF(\alpha_i) : UFU(P_i) \to UF(\operatorname*{colim}_{i\in I} U(P_i))$, y considere el diagrama conmutativo 4.12.

$$\begin{tikzcd} UFU(P_i) \arrow[dr, "UF(\alpha_i)"] \arrow[dddrr, dashed, bend left, "U(\theta^{-1}(h_i))"] & & \\ & UF(\operatorname*{colim}_{i\in I} U(P_i)) \arrow[ddr, "U(f)"] & \\ & \operatorname*{colim}_{i\in I} U(P_i) \arrow[u, "\eta"] \arrow[dr, "\theta(f)"] & \\ U(P_i) \arrow[uuu, "\eta_{U(P_i)}"] \arrow[ur, "\alpha_i"] \arrow[rr, "h_i"'] & & U(R) \end{tikzcd} \tag{4.12}$$

El cuadrilátero es conmutativo por la naturalidad de la counidad. Por lo tanto, la composición en la diagonal $U(f)UF(\alpha_i)$ está determinada por la última parte, es decir h_i, y la biyección de la adjunción $F \dashv U$ dice que $U(f)UF(\alpha_i)$ es igual a $U(\theta^{-1}(h_i))$, lo cual significa que fd_0 está determinado por $U(\theta^{-1}(h_i)) : UFU(P_i) \to U(R)$.

Para fd_1, recuerde que d_1 es determinado por la composición 4.8, entonces fd_1 es determinado por la composición

$$UFU(P_i) \xrightarrow{U(\epsilon_{P_i})} U(P_i) \xrightarrow{\alpha_i} \operatorname*{colim}_{i\in I} U(P_i) \xrightarrow{\eta} UF(\operatorname*{colim}_{i\in I} U(P_i)) \xrightarrow{U(f)} U(R)\ .$$

Por 4.12, se tiene que $U(f)\eta\alpha_i = \theta(f)\alpha_i = h_i$, entonces fd_1 está determinado por la composición $U(\epsilon_{P_i})h_i : UFU(P_i) \to U(R)$. Junto con el resultado para fd_0, esto establece que $fd_1 = fd_0$ si y solo si el diagrama 4.13 es conmutativo:

$$\begin{tikzcd} UFU(P_i) \arrow[d, "U(\epsilon_{P_i})"'] \arrow[dr, "U(\theta^{-1}(h_i))"] & \\ U(P_i) \arrow[r, "h_i"'] & U(R) \end{tikzcd} \tag{4.13}$$

Este diagrama es conmutativo si y solo si h_i es un morfismo de operads; en otras palabras, únicamente si existe un morfismo de operads $f_i : P_i \to R$ tal que $U(f_i) = h_i$.

Suponga que 4.13 es conmutativo. Se necesita probar que h_i preserva la estructura operádica en P_i. Para evitar confusiones, se denota como λ a la unidad del operad en esta parte.

1. La unidad:

$$\begin{aligned} h_iU(\lambda_{P_i}) &= h_iU(\epsilon_{P_i}\lambda_{FU(P_i)}) \\ &= h_iU(\epsilon_{P_i})U(\lambda_{FU(P_i)}) \\ &= U(\theta^{-1}(h_i))U(\lambda_{FU(P_i)}) \\ &= U(\theta^{-1}(h_i)\lambda_{FU(P_i)}) = U(\lambda_R). \end{aligned}$$

2. Equivarianza es consecuencia del hecho de que todos son morfismos de S-módulos.

3. La composición:

$$\begin{aligned}
h_i U(\gamma_{P_i}) &= h_i U(\gamma_{P_i} 1_{P_i}) \\
&= h_i U(\gamma_{P_i}) 1_{U(P_i)} \\
&= h_i U(\gamma_{P_i}) U(\epsilon_{P_i}) \eta_{U(P_i)} \\
&= h_i U(\gamma_{P_i} \epsilon_{P_i}) \eta_{U(P_i)} \\
&= h_i U(\epsilon_{P_i} \gamma_{FU(P_i)}) \eta_{U(P_i)} \\
&= h_i U(\epsilon_{P_i}) U(\gamma_{FU(P_i)}) \eta_{U(P_i)} \\
&= U(\theta^{-1}(h_i)) U(\gamma_{FU(P_i)}) \eta_{U(P_i)} \\
&= U(\theta^{-1}(h_i) \gamma_{FU(P_i)}) \eta_{U(P_i)} \\
&= U(\gamma_R \theta^{-1}(h_i)) \eta_{U(P_i)} \\
&= U(\gamma_R) U(\theta^{-1}(h_i)) \eta_{U(P_i)} \\
&= U(\gamma_R) h_i.
\end{aligned}$$

Recíprocamente, suponga que existe una colección de morfismos de operads $\{f_i : P_i \to R\}_{i \in I}$, tal que $U(f_i) = h_i$ para cada $i \in I$. Entonces, el triángulo 4.14 es conmutativo por la naturalidad de θ^{-1}.

$$\begin{tikzcd}
FU(P_i) \arrow[d, "\epsilon_{P_i}"'] \arrow[dr, "\theta^{-1}(U(f_i))"] & \\
P_i \arrow[r, "f_i"'] & R
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{OP}(FU(P_i), R) & S\text{-Mod}(U(P_i), U(R)) \arrow[l, "\theta^{-1}"'] \\
\mathcal{OP}(FU(P_i), P_i) \arrow[u, "f_{i*}"] & S\text{-Mod}(U(P_i), U(P_i)) \arrow[l, "\theta^{-1}"'] \arrow[u, "U(f_i)_*"']
\end{tikzcd}
\tag{4.14}$$

Así, el diagrama 4.13 es conmutativo. Ahora se procede a verificar que Q es el colímite de la colección de operads $\{P_i\}_{i \in I}$. Se vio que esta colección induce morfismos $h_i : U(P_i) \to U(Q)$ de S-módulos que satisfacen 4.13, por lo que definen morfismos de operads $f_i : P_i \to Q$, tal que $U(f_i) = h_i$. Estos morfismos son las aristas del cocono.

Cualquier colección de morfismos de operads $f_i : P_i \to R$ define un morfismo de operads f de $F(\operatorname{colim}_{i \in I} U(P_i))$ a R de mode que $fd_0 = fd_1$. Entonces, existe un único morfismo de operads $g : Q \to R$ tal que $gq = f$. El morfismo g conmuta con las aristas del cocono, lo que exhibe a Q como el colímite de $\{P_i\}_{i \in I}$. □

5. Operads polinomiales

La técnica descrita en esta sección busca crear un nuevo operad $\mathcal{E}[M]$ a partir de un S-módulo M y un operad $\mathcal{E}$ cuyo S-módulo está incluido en M, de tal manera que $\mathcal{E}[M]$ tenga como suboperad a $\mathcal{E}$ y su S-módulo subyacente contenga a M. Al operad $\mathcal{E}[M]$ le llamamos operad polinomial en M con coeficientes en $\mathcal{E}$, en claro paralelismo con estructuras como $\mathbb{R}[x]$.

En el contexto de los operads simétricos, se tiene la adjunción $F \dashv U : S\text{-Mod} \to \mathcal{OP}$ (ver [9]), donde U es el funtor de olvido y F el funtor de operads simétricos libre.

Definición 5.1. Sea $\mathfrak{C}$ la categoría que satisface las siguientes condiciones.

1. Sus objetos son pares de la forma $(\mathcal{E}, M)$, donde M es un S-módulo y $\mathcal{E}$ es un operad tal que $U(\mathcal{E})$ es un S-submódulo de M. La inclusión canónica se denota $i_{\mathcal{E}} : U(\mathcal{E}) \to M$.
2. Un morfismo de $(\mathcal{E}, M)$ a $(\mathcal{F}, N)$, es un par $(f, \overline{f})$ con $f : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ morfismo de operads, y $\overline{f} : M \to N$ morfismo de S-módulos, tal que el diagrama 5.1 conmute.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\overline{f}"] & N \\ U(\mathcal{E}) \arrow[u, "i_{\mathcal{E}}"] \arrow[r, "U(f)"'] & U(\mathcal{F}) \arrow[u, "i_{\mathcal{F}}"'] \end{tikzcd} \tag{5.1}$$

Observación 5.2. Esencialmente, un morfismo de $(\mathcal{E}, M)$ a $(\mathcal{F}, N)$ en $\mathfrak{C}$ es un morfismo de S-módulos de M a N cuya restricción a $U(\mathcal{E})$ respeta la estructura de operad.

Definición 5.3. Se define $\mathfrak{U} : \mathcal{OP} \to \mathfrak{C}$ como el funtor que envía cada operad $\mathcal{E}$ al par $(\mathcal{E}, U(\mathcal{E}))$. En otras palabras, todo operad es enviado al par formado por él mismo y su S-módulo implícito.

Teorema 5.4. *El funtor $\mathfrak{U}$ tiene una adjunta izquierda $\mathfrak{I} \dashv \mathfrak{U} : \mathfrak{C} \to \mathcal{OP}$. La imagen de $(\mathcal{E}, M)$ bajo $\mathfrak{I}$ se escribe $\mathcal{E}[M]$. A este operad le llamamos el operad polinomial en M con coeficientes en $\mathcal{E}$.*

Demostración. Sea $\epsilon : FU \to 1_{\mathcal{OP}}$ la counidad de la adjunción $F \dashv U : S\text{-Mod} \to \mathcal{OP}$. A cada $(\mathcal{E}, M) \in \mathfrak{C}$ se le asocia el diagrama 5.2 en $\mathcal{OP}$.

$$\begin{tikzcd} FU(\mathcal{E}) \arrow[r, "\epsilon_{\mathcal{E}}"] \arrow[d, "F(i_{\mathcal{E}})"'] & \mathcal{E} \\ F(M) & \end{tikzcd} \tag{5.2}$$

Esta asociación es funtorial por la naturalidad de la counidad ϵ y la definición de morfismos en $\mathfrak{C}$. En efecto, para todo morfismo $(f, \overline{f}) : (\mathcal{E}, M) \to (\mathcal{D}, N)$ en $\mathfrak{C}$, el diagrama 5.3 es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} FU(\mathcal{E}) \arrow[r, "\epsilon_{\mathcal{E}}"] \arrow[d, "F(i_{\mathcal{E}})"'] \arrow[dr, "FU(f)"] & \mathcal{E} \arrow[dr, "f"] & \\ F(M) \arrow[dr, "F(\bar{f})"'] & FU(\mathcal{D}) \arrow[r, "\epsilon_{\mathcal{D}}"'] \arrow[d, "F(i_{\mathcal{D}})"] & \mathcal{D} \\ & F(N) & \end{tikzcd} \tag{5.3}$$

Así, se tiene un funtor H desde $\mathfrak{C}$ a la categoría de diagramas en $\mathcal{OP}$ de la forma $\bullet \longleftarrow \bullet \longrightarrow \bullet$. Entonces, se define el funtor $\mathfrak{J} : \mathfrak{C} \to \mathcal{OP}$ como la composición de H con el funtor en colímites de $\mathcal{OP}$, consecuencia del teorema 4.4.

Para demostrar que se tiene la adjunción $\mathfrak{J} \dashv \mathfrak{U} : \mathfrak{C} \to \mathcal{OP}$, basta con construir para cada objeto $(\mathcal{E}, M) \in \mathfrak{C}$ una flecha universal Ψ de $(\mathcal{E}, M)$ a $\mathfrak{U}\mathfrak{J}(\mathcal{E}, M) = (\mathcal{E}[M], U(\mathcal{E}[M]))$, según se explicó al inicio de la sección 4.

Sea $(\mathcal{E}, M)$ un objeto de $\mathfrak{C}$ y considere el diagrama 5.4 dado por el colímite $\mathfrak{J}(\mathcal{E}, M) = \mathcal{E}[M]$.

$$\begin{tikzcd} FU(\mathcal{E}) \arrow[r, "\epsilon_{\mathcal{E}}"] \arrow[d, "F(i_{\mathcal{E}})"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "\alpha"] \\ F(M) \arrow[r, "\beta"'] & \mathcal{E}[M] \end{tikzcd} \tag{5.4}$$

Ahora, considere el par de flechas $(\alpha, \theta(\beta))$, donde θ es el isomorfismo

$$\mathcal{OP}(F(M), \mathcal{E}[M]) \xrightarrow{\theta} S(M, U(\mathcal{E}[M])) \tag{5.5}$$

dado por la adjunción $F \dashv U$. Esta pareja será nuestra flecha universal $\Psi = (\alpha, \theta(\beta)) : (\mathcal{E}, M) \to \mathfrak{U}\mathfrak{J}(\mathcal{E}, M) = (\mathcal{E}[M], U(\mathcal{E}[M]))$. Resta verificar que Ψ es un morfismo de $\mathfrak{C}$ y que satisface la propiedad universal. Para lo primero, se debe verificar que el diagrama 5.6 es conmutativo.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\theta(\beta)"] & U(\mathcal{E}[M]) \\ U(\mathcal{E}) \arrow[u, "i_{\mathcal{E}}"] \arrow[r, "U(\alpha)"'] & U(\mathcal{E}[M]) \arrow[u, "1"'] \end{tikzcd} \tag{5.6}$$

Para esta verificación se necesitarán los siguientes diagramas conmutativos.

1. Naturalidad de θ:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}[M] & \mathcal{OP}(F(M),\mathcal{E}[M]) \arrow[r, "\theta"] & S(M,U(\mathcal{E}[M])) & \beta \arrow[r, mapsto] & \theta(\beta)=U(\beta)\eta_M \\
F(M) \arrow[u, "\beta"] & \mathcal{OP}(F(M),F(M)) \arrow[r, "\theta"] \arrow[u, "\beta_*"] & S(M,UF(M)) \arrow[u, "U(\beta)_*"'] & 1_{F(M)} \arrow[r, mapsto] \arrow[u, mapsto] & \theta(1_{F(M)})=\eta_M \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd} . \tag{5.7}$$

2. Naturalidad de η:

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\eta_M"] & UF(M) \\
U(\mathcal{E}) \arrow[r, "\eta_{U(\mathcal{E})}"'] \arrow[u, "i_{\mathcal{E}}"] & UFU(\mathcal{E}) \arrow[u, "UF(i_{\mathcal{E}})"']
\end{tikzcd} . \tag{5.8}$$

3. Ecuaciones triangulares para η y ϵ:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\eta_U"] \arrow[dr, "1"'] & UFU \arrow[d, "U\epsilon"] \\
& U
\end{tikzcd} \Longrightarrow \text{para todo } \mathcal{P}\in\mathcal{OP} \quad
\begin{tikzcd}
U(\mathcal{P}) \arrow[r, "\eta_{U(\mathcal{P})}"] \arrow[dr, "1"'] & UFU(\mathcal{P}) \arrow[d, "U(\epsilon_{\mathcal{P}})"] \\
& U(\mathcal{P})
\end{tikzcd} . \tag{5.9}$$

Ahora, se verifica que el diagrama 5.6 sea conmutativo.

$$\begin{aligned}
\theta(\beta)i_{\mathcal{E}} &= U(\beta)\eta_M i_{\mathcal{E}} && \text{(por diagrama 5.7)},\\
&= U(\beta)UF(i_{\mathcal{E}})\eta_{U(\mathcal{E})} && \text{(por diagrama 5.8)},\\
&= U(\alpha)U(\epsilon_{\mathcal{E}})\eta_{U(\mathcal{E})} && \text{(por diagrama 5.4)},\\
&= U(\alpha) && \text{(por diagrama 5.9)}.
\end{aligned}$$

Por definición, $(\alpha,\theta(\beta))$ satisface la propiedad universal si para todo operad $\mathcal{Q}$ y todo morfismo $(g,\overline{g}) : (\mathcal{E},M) \to (\mathcal{Q},U(\mathcal{Q}))$ existe un único morfismo $(h,\overline{h})$ en $\mathfrak{C}$ que hace al diagrama 5.10 conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{E},M) \arrow[r, "(\alpha,\theta(\beta))"] \arrow[d, "(g,\overline{g})"'] & (\mathcal{E}[M],U(\mathcal{E}[M])) \arrow[dl, "(h,\overline{h})"] \\
(\mathcal{Q},U(\mathcal{Q}))
\end{tikzcd} \tag{5.10}$$

Considere el diagrama 5.11 conmutativo asociado al par $(g, \overline{g})$.

$$\begin{tikzcd}
FU(\mathcal{E}) \arrow[r, "\epsilon_{\mathcal{E}}"] \arrow[d, "F(i_{\mathcal{E}})"'] & \mathcal{E} \arrow[d, "\alpha"] \arrow[ddr, bend left, "g"] & \\
F(M) \arrow[r, "\beta"'] \arrow[drr, bend right, "\theta^{-1}(\overline{g})"'] & \mathcal{E}[M] \arrow[dr, dashed, "h"] & \\
 & & Q
\end{tikzcd} \tag{5.11}$$

En este diagrama, h es el morfismo que se quiere construir, y el morfismo $\theta^{-1}(\overline{g})$ está dado por la biyección θ asociada a $F \vdash U$.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{OP}(F(M), Q) \arrow[r, "\theta"] & S(M, U(Q)) \\
\theta^{-1}(\overline{g}) & \overline{g} \arrow[l, mapsto]
\end{tikzcd}$$

Para construir h se usa la propiedad universal del colímite $\mathcal{E}[\mathcal{M}]$; es decir, si se cumple que $g\epsilon_{\mathcal{E}} = \theta^{-1}(\overline{g})F(i_{\mathcal{E}})$ en el diagrama 5.11, entonces existe un único morfismo de operads $h : \mathcal{E}[M] \to Q$, tal que $h\alpha = g$ y $h\beta = \theta^{-1}(\overline{g})$. Ambos morfismos, $g\epsilon_{\mathcal{E}}$ y $\theta^{-1}(\overline{g})F(i_{\mathcal{E}})$, van desde $FU(\mathcal{E})$ hasta Q. Así que se usará la propiedad universal de la unidad η de $F \vdash U$ para mostrar que son el mismo morfismo. Esto dice en particular que existe un único morfismo de operads $\rho : FU(\mathcal{E}) \to Q$ tal que el diagrama 5.12 es conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
U(\mathcal{E}) \arrow[r, "\eta_{U(\mathcal{E})}"] \arrow[dr, "U(g)"'] & UFU(\mathcal{E}) \arrow[d, dashed, "U(\rho)"] \\
 & U(Q)
\end{tikzcd} \tag{5.12}$$

De esta manera, basta con verificar que $U(g\epsilon_{\mathcal{E}})\eta_{U(\mathcal{E})}$ y $U(\theta^{-1}(\overline{g})F(i_{\mathcal{E}}))\eta_{U(\mathcal{E})}$ son iguales a $U(g)$. Para lo cual se detallan algunos diagramas conmutativos necesarios para su justificación.

1. Naturalidad de θ^{-1}:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{OP}(F(M), Q) & S(M, U(Q)) \arrow[l, "\theta^{-1}"'] & \epsilon_Q F(\overline{g}) = \theta^{-1}(\overline{g}) & \overline{g} \arrow[l, mapsto] \\
\mathcal{OP}(FU(Q), Q) \arrow[u, "F(\overline{g})^*"] & S(U(Q), U(Q)) \arrow[l, "\theta^{-1}"] \arrow[u, "\overline{g}^*"'] & \epsilon_Q = \theta^{-1}(1_{U(Q)}) \arrow[u, mapsto] & 1_{U(Q)} \arrow[l, mapsto] \arrow[u, mapsto]
\end{tikzcd} . \tag{5.13}$$

2. Definición de $(g, \overline{g})$ como morfismo de $\mathfrak{C}$:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\overline{g}"] & U(Q) \\ U(\mathcal{E}) \arrow[u, "i_{\mathcal{E}}"] \arrow[r, "U(g)"'] & U(Q) \arrow[u, "1"'] \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} F(M) \arrow[r, "F(\overline{g})"] & FU(Q) \\ FU(\mathcal{E}) \arrow[u, "F(i_{\mathcal{E}})"] \arrow[ur, "FU(g)"'] & \end{tikzcd} . \tag{5.14}$$

3. Naturalidad de ϵ:

$$\begin{tikzcd} FU(Q) \arrow[r, "\epsilon_Q"] & Q \\ FU(\mathcal{E}) \arrow[u, "FU(g)"] \arrow[r, "\epsilon_{\mathcal{E}}"] & \mathcal{E} \arrow[u, "g"'] \end{tikzcd} . \tag{5.15}$$

4. Naturalidad de η:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\eta_M"] \arrow[d, "\overline{g}"'] & UF(M) \arrow[d, "UF(\overline{g})"] \\ U(Q) \arrow[r, "\eta_{U(Q)}"'] & UFU(Q) \end{tikzcd} . \tag{5.16}$$

Primero, se verifica que $U(g\epsilon_{\mathcal{E}})\eta_{U(\mathcal{E})} = U(g)$.

$$\begin{aligned} U(g\epsilon_{\mathcal{E}})\eta_{U(\mathcal{E})} &= U(g)U(\epsilon_{\mathcal{E}})\eta_{U(\mathcal{E})} \\ &= U(g) && \text{(por diagrama 5.9).} \end{aligned}$$

Luego, se verifica que $U(\theta^{-1}(\overline{g})F(i_{\mathcal{E}}))\eta_{U(\mathcal{E})} = U(g)$.

$$\begin{aligned} U(\theta^{-1}(\overline{g})F(i_{\mathcal{E}}))\eta_{U(\mathcal{E})} &= U(\epsilon_Q F(\overline{g})F(i_{\mathcal{E}}))\eta_{U(\mathcal{E})} && \text{(por diagrama 5.13),} \\ &= U(\epsilon_Q FU(g))\eta_{U(\mathcal{E})} && \text{(por diagrama 5.14),} \\ &= U(g\epsilon_{\mathcal{E}})\eta_{U(\mathcal{E})} && \text{(por diagrama 5.15),} \\ &= U(g)U(\epsilon_{\mathcal{E}})\eta_{U(\mathcal{E})} \\ &= U(g) && \text{(por diagrama 5.9).} \end{aligned}$$

Debido a la propiedad universal de colímites, existe un único morfismo de operads $h : \mathcal{E}[M] \to Q$ tal que $h\alpha = g$ y $h\beta = \theta^{-1}(\overline{g})$. Al tomar $\overline{h}$ como $U(h)$, el par $(h, \overline{h})$ es un morfismo en $\mathfrak{C}$. Como se tiene que $h\alpha = g$, resta mostrar que $\overline{h}\theta(\beta) = \overline{g}$

para tener que $(h, \overline{h})$ hace conmutativo al diagrama 5.10.

$$\begin{aligned}
\overline{h}\theta(\beta) &= U(h)\theta(\beta) \\
&= U(h)U(\beta)\eta_M && \text{(por diagrama 5.7)}, \\
&= U(\theta^{-1}(\overline{g}))\eta_M && \text{(propiedad de } h\text{)}, \\
&= U(\epsilon_Q F(\overline{g}))\eta_M && \text{(por diagrama 5.13)}, \\
&= U(\epsilon_Q)UF(\overline{g})\eta_M \\
&= U(\epsilon_Q)\eta_{U(Q)}\overline{g} && \text{(por diagrama 5.16)}, \\
&= \overline{g} && \text{(por diagrama 5.9)}.
\end{aligned}$$

La unicidad de $(h, \overline{h})$ es consecuencia de la unicidad de h, y el hecho de que cada morfismo $(f, \overline{f})$ satisface $\overline{f} = U(f)$. □

La flecha universal en la prueba del teorema 5.4 se extiende a la unidad de la adjunción $\mathfrak{I} \dashv \mathfrak{U} : \mathcal{C} \to \mathcal{OP}$. Se mantiene la notación Ψ para esta unidad.

Corolario 5.5. *Sean $(\mathcal{E}, M) \in \mathfrak{C}$ y $\mathcal{A} \in \mathcal{OP}$. Para cada morfismo $(f, \overline{f}) : (\mathcal{E}, M) \to \mathfrak{U}(\mathcal{A}) = (\mathcal{A}, U(\mathcal{A}))$, existe un único morfismo de operads $\varphi : \mathcal{E}[M] \to \mathcal{A}$ tal que $U(\varphi)\Psi = \overline{f}$. Así, se tiene el diagrama conmutativo*

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{E}, M) \arrow[r, "\Psi"] \arrow[dr, "(f,\overline{f})"'] & (\mathcal{E}[M], U(\mathcal{E}[M])) \arrow[d, "(\varphi, U(\varphi))"] \\
& (\mathcal{A}, U(\mathcal{A}))
\end{tikzcd} .$$

Demostración. Se obtiene de la propiedad universal de la unidad $\Psi : 1_{\mathfrak{C}} \to \mathfrak{U}\mathfrak{I}$. □

6. Agradecimientos

El autor agradece el financiamiento de la Vicerrectoría de Investigación de la Universidad de Costa Rica a través del proyecto **821-B6-A19**.

Referencias

[1] B. Fresse, *Homotopy of operads and Grothendieck-Teichmüller groups. Part 1*. Vol. 217. Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Society, Providence, RI, 2017, xlvi+532. DOI: 10.1090/surv/217.1

[2] J. L. Loday y B. Vallette, *Algebraic operads*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, 2012. DOI: 10.1007/978-3-642-30362-3

[3] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician.* 2.ª ed. Springer, 1998. DOI: 10.1007/978-1-4757-4721-8

[4] J. P. May, *The geometry of iterated loop spaces.* Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1972. DOI: 10.1007/BFb0067491

[5] A. Prouté, *Sur la transformation d'Eilenberg-Maclane.* C. R. Acad. Sc. Paris **297**(1983), 193-194.

[6] A. Prouté, *Sur la diagonal d'Alexander-Whitney.* C. R. Acad. Sc. Paris **299**(1984), 391-392.

[7] J. Sánchez-Guevara, *About E-infinity structures in L-Algebras.* Tesis doct. Paris: Université Paris VII, (2016).

[8] J. Sánchez-Guevara, *E-infinity coalgebra structure on chain complexes with integer coefficients.* Revista Colombiana de Matemáticas **55**(2021), 197-203. DOI: 10.15446/recolma.v55n2.102690

[9] J. Sánchez-Guevara, *Operads libres sobre módulos diferenciales graduados.* Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones **29**(2021), no. 1, 19-37. DOI: 10.15517/rmta.v29i1.41404

[10] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-Spaces. I.* Transactions of the American Mathematical Society **108**(1963), no. 2, 275-292. DOI: 10.2307/1993608

[11] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-Spaces. II.* Transactions of the American Mathematical Society **108**(1963), no. 2, 293-312. DOI: 10.2307/1993609