C(X) COMO ESPACIO DE BANACH UNIVERSAL

Bernardo Montero *

Introducción:

C(X), donde X es un espacio topológico compacto de Hausdorff es, con las operaciones ordinarias y la norma

$$\| f \|_\infty = \sup_{x \in X} | f(x) |$$

un álgebra de Banach. Nos proponemos mostrar en este artículo que todo espacio de Banach es isométrico isomorfo a una parte cerrada de C(X) para algún compacto de Hausdorff X. Para notaciones y resultados véase [1].

Lema 1:

Para todo $g \in \mathfrak{X}$ (espacio de Banach) existe $\psi \in \mathfrak{X}^*$ (dual topológico de $\mathfrak{X}$) tal que $\| \psi \| = 1$ y $\psi(g) = \| g \|$

Prueba:

Sea $A = \{ \lambda g \mid \lambda \in C \}$. Consideramos

$$\begin{aligned} \psi_1 : A &\longrightarrow C \\ g &\rightsquigarrow \lambda \| g \| \end{aligned}$$

Es claro que $\| \psi_1 \| = 1$ y por el teorema de Hanh–Banach podemos extender ψ_1 a un funcional lineal $\psi \in \mathfrak{X}^*$ con

$$\| \psi \| = \| \psi_1 \| \quad \text{y} \quad \psi(g) = \| g \|$$

---

* Profesor Departamento Física y Matemática. Universidad de Costa Rica.

Lema 2:

Cuando $\psi(g) = 0$ para todo $\psi \in \mathfrak{X}^*$ entonces $g = 0$

Teorema:

C(X) es un espacio de Banach universal.

Prueba:

Sea $\mathfrak{X}$ un espacio de Banach cualquiera. Sea $X = \mathfrak{X}_1^*$ con la topología débil * (que denotamos w^*). Es claro que $\mathfrak{X}_1^*$ es w^* – Hausdorff y, por el teorema de Alaoglu, compacto

Sea

$$\tau : \mathfrak{X} \longrightarrow C(X) \text{ tal que } \tau(g)(\psi) = \psi(g) \text{ o sea,}$$

$\tau(g)$, para todo g en $\mathfrak{X}$, son las funciones que definen la topología w^* en $\mathfrak{X}^*$. Se ve fácilmente que τ es lineal. La inyectividad es inmediata del lema 2. Además,

$$\| \tau(g) \|_\infty = \sup_{\psi \in \mathfrak{X}_1^*} | \tau(g)(\psi) | = \sup_{\psi \in \mathfrak{X}_1^*} | \psi(g) |$$

$$\leqslant \sup_{\psi \in \mathfrak{X}_1^*} \| \psi \| \, \| g \| \leqslant \| g \|$$

Y, por otra parte, si $g \in \mathfrak{X}$, existe $\psi \in \mathfrak{X}^*$ tal que

$$\psi(g) = \| g \| \text{ con } \psi \in \mathfrak{X}_1^* \text{ de donde } \| \tau(g) \|_\infty \geqslant | \psi(g) | = \| g \| .$$

Consecuentemente

$$\| \psi(g) \|_\infty = \| g \| \qquad \text{y } \psi \text{ es una isometría.}$$

[1] Introduction to Functional Analysis: Agus E. Taylor. John Wiley and Sons Inc. 1957.